

## Зміст

Вступ .....	13
<b>1. Розділ I</b>	
1.1. Нелінійне рівняння Шредінгера .....	15
1.1.1 Стійкість солітонних розв'язків НРШ по Ляпунову .....	15
1.1.2 Лінійна стійкість одновимірних солітонів НРШ .....	20
1.2. Дельта функція Дірака та її властивості .....	23
1.2.1. Визначення дельта функції .....	23
1.2.2. Диференціювання дельта функції .....	24
1.2.3. Основні властивості дельта функції .....	25
1.2.4. Лінійна заміна змінних в узагальнених функціях .....	32
1.2.5. Множення узагальнених функцій .....	33
1.3. Висновки до розділу I .....	36
<b>2. Розділ II</b>	
2.1. Однорідне нелінійне рівняння Шредінгера .....	37
2.2. Стаціонарні розв'язки з циліндричною симетрією .....	37
2.3. Стійкість розв'язків однорідного нелінійного рівняння Шредінгера за схемою Вахітова-Колоколова .....	40
2.4. Висновки до розділу II .....	49
<b>3. Розділ III</b>	
3.1. Солітонні розв'язки рівняння Шредінгера як коливання, локалізовані на дефекті .....	51
3.2. Інтеграли руху .....	58
3.3. Стійкість локалізованих станів у нелінійному середовищі з точковим дефектом, який має лінійні властивості .....	59
3.3.1. Випадок $\sigma = +1, \lambda < 0$ .....	65
3.3.2. Випадок $\sigma = +1, \lambda > 0$ .....	67
3.3.3. Випадок $\sigma = -1, \lambda > 0$ .....	69
3.4. Висновки до розділу III .....	70

<b>4. Розділ IV</b>	
4.1. Основні поняття про еліптичні інтеграли та еліптичні функції Якобі .....	72
4.2. Антисиметричний розв'язок НРШ з двома лінійними точковими дефектами .....	75
4.3. Розрахунок повного числа елементарних збуджень .....	78
4.4. Розрахунок повної енергії системи .....	80
4.5. Висновки до розділу IV .....	83
<b>Висновки</b> .....	<b>85</b>
<b>Список використаних джерел</b> .....	<b>87</b>

## Вступ

В сучасній математичній фізиці, для опису багатьох нелінійних явищ використовують нелінійне рівняння Шредінгера, яке є нелінійним рівнянням з частинними похідними другого порядку.

Будучи нелінійним узагальненням параболічного рівняння, нелінійне рівняння Шредінгера (НРШ) описує динаміку хвильових пакетів з дисперсією і кубічною нелінійністю [1]. Подібна ситуація зустрічається, наприклад, у нелінійній оптиці при поширенні світла в нелінійних кристалах з дисперсією: у багатьох випадках квадратична нелінійність мала, або тотожно дорівнює нулю, через центральну симетрію кристалічної ґратки, тому враховується саме кубічний член. Іншим прикладом є поширенні електромагнітних хвиль у плазмі: з одного боку плазма є диспергуючим середовищем, з іншого боку, при досить великих амплітудах хвилі, проявляється пондеромоторна нелінійність, яка в ряді випадках може бути апроксимована кубічним членом.

Солітони, як стаціонарні локалізовані утворення, відіграють істотну роль в динаміці нелінійних хвиль, що описуються нелінійним рівнянням Шредінгера. В одновимірному випадку, солітони структурно стійкі відносно не тільки малих, але і скінченних збурень, наприклад, таких, які вони зазнають при розсіянні на дефектах або інших солітонах.

Найбільш продуктивний метод, що дозволяє встановити факт стійкості солітонів як відносно малих, так і відносно скінченних збурень це – дослідження стійкості солітонів на основі методу Ляпунова [2]. Солітон є стійким за Ляпуновим, якщо він реалізує мінімум (або максимум) гамільтоніана.

Однак, застосування методу, заснованого на теоремі Ляпунова, виявляється скрутним при дослідженні стійкості локальних стаціонарних точок. Більш ефективним критерієм стійкості для солітонів НРШ є аналіз лінійної стійкості Вахітова-Колоколова [3], заснований на осциляційній теоремі для оператора Шредінгера.

Отже, актуальною є проблема дослідження нелінійних локалізованих станів (солітонів), а саме строгого математичного обґрунтування існування та стійкості солітонів в періодичних структурах і неоднорідних середовищах з дефектами.

У магістерській дисертації на основі нелінійного рівняння Шредінгера досліджуються локалізовані стани в нелінійному середовищі за наявності дефектів з різними варіаціями взаємодії (тяжіння або відштовхування) між дефектами та середовищем.

У рамках неоднорідного НРШ

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\sigma |u|^2 u = -\lambda \delta(z) \cdot u$$

з довільним знаком ангармонізмів  $\sigma$  досліджено солітонні стани, локалізовані поблизу точкового дефекту  $\lambda$ , при різному характері цього дефекту. Проведено повне дослідження стійкості солітона, локалізованого на дефекті за схемою Вахітова-Колоколова.

За наявності двох точкових дефектів, які розташовані на відстані  $2a$  один від одного, досліджено антисиметричний розв'язок НРШ

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\sigma |u|^2 u = -\lambda [\delta(z+a) + \delta(z-a)] u.$$

Наявність дефектів в цих моделях моделюється лінійними потенціалами, зосередженими відповідно в одній точці або в симетричній системі двох точок, які подані, відповідно, однією або комбінацією двох дельта-функцій. Використання дельта-подібного потенціалу є поширеним і ефективним варіантом моделювання точкових дефектів, наприклад, в фотонних кристалах, фізиці плазми, або конденсаті Бозе-Ейнштейна, що реалізується в оптичних ґратках.

З урахуванням крайових умов, знайдено повне число елементарних збуджень та повну енергію для обох досліджуваних систем.

## Розділ I

### 1.1. Нелінійне рівняння Шредінгера

#### 1.1.1 Стійкість солітонів НРШ по Ляпунову

Нелінійне рівняння Шредінгера

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0$$

належить до рівнянь гамільтонового типу [1] і тому може бути записане як

$$i\psi_t = \frac{\delta H}{\delta\psi^*},$$

де гамільтоніан  $H$  задається співвідношенням

$$H = \frac{1}{2}\left(\int |\nabla\psi|^2 dr - \int |\psi|^4 dr\right) \equiv \frac{1}{2}(I_1 - I_2)$$

Досліджуватимемо стійкість солітонів одновимірного НРШ

$$i\psi_t = \frac{\delta H}{\delta\psi^*} = -\frac{1}{2}\psi_{xx} - |\psi|^2\psi, \quad (1.1.1)$$

де інтегрування здійснюється по координаті  $x$ . З квантово-механічної точки зору рівняння (1.1.1) описує рух частинки в самоузгодженому потенціалі з тяжінням  $U = -|\psi|^2$ . Однак в одновимірному випадку нелінійне тяжіння не може перевершити дисперсію ( $\sim \psi_{xx}$ ), яка приводить до розпливання. Баланс цих двох протилежних ефектів приводить до існування солітона – стаціонарного розв'язку рівняння (1.1.1) вигляду  $\psi(x,t) = \psi_0(x)e^{\frac{i\lambda^2}{2}t}$ , де

$$\psi_0(x) = \lambda \operatorname{csch}(\lambda x) \quad (1.1.2)$$

задовольняє стаціонарне НРШ

$$-\lambda^2\psi_0 + \psi_{0xx} + 2|\psi_0|^2\psi_0 = 0. \quad (1.1.3)$$

Найпростіший розв'язок (1.1.2) описує солітон, який знаходиться в стані спокою. Солітони, які рухаються можна отримати за допомогою перетворення Галілея.

Легко встановити, що розв'язок (1.1.2) являє собою стаціонарну точку гамільтоніана при фіксованому числі частинок  $N = \int |\psi|^2 dx$ , оскільки стаціонарне НРШ (1.1.3) безпосередньо впливає із варіаційної задачі

$$\delta \left( H + \frac{\lambda^2 N}{2} \right) = 0. \quad (1.1.4)$$

Легко встановити також, що для цих розв'язків число частинок зростає лінійно зі збільшенням  $\lambda$ :  $N_s = 2\lambda$ . Тут та всюди нижче індекс  $s$  означає, що функціонал (у даному випадку  $N$ ) обчислений на солітонному розв'язку.

Для доведення стійкості солітона (1.1.2), у відповідності з теоремою Ляпунова [2], достатньо показати, що солітон реалізує мінімум гамільтоніана. (Необмеженість  $H$  зверху очевидна: при фіксованому  $N$ , по суті – нормуванню хвильової функції, гамільтоніан може стати як завгодно великим за рахунок кінетичної енергії  $I_1$  на класі сильно порізаних функцій  $\psi$ ).

Спочатку наведемо прості оцінки, які вказують на те, що  $H$  обмежений знизу. Нехай  $A$  – характерне значення амплітуди солітона, а  $l$  – його характерний розмір. Тоді для числа частинок можна приблизно записати  $N \approx A^2 l$ , звідси  $A^2 \approx N l^{-1}$ . Відповідно для інтегралів  $I_1$  та  $I_2$  маємо оцінки

$$I_1 \approx \frac{A^2}{l} \approx \frac{N}{l^2}, \quad I_2 \approx A^4 l \approx \frac{N^2}{l},$$

звідки гамільтоніан оцінюється як

$$H \approx \frac{1}{2} \left( \frac{N}{l^2} - \frac{N^2}{l} \right).$$

Із останнього виразу впливає, що  $H$  як функція розміру солітона  $l$  є додатною при малих  $l$  (зростає як  $l^{-2}$ ), а при великих  $l$  є від'ємною і прямує

до нуля знизу. Очевидно, що ця функція обмежена знизу. Її мінімуму буде відповідати солітон розміром  $l_s \approx 2/N$ .

До такого висновку можна прийти, якщо розглядати масштабні перетворення, які зберігають число частинок,

$$\psi(z) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x}{a}\right). \quad (1.1.5)$$

У результаті перетворення (1.1.5) гамільтоніан стає функцією масштабного параметра  $a$ :

$$H(a) = \frac{1}{2} \left( \frac{I_1}{a^2} - \frac{I_2}{a} \right). \quad (1.1.6)$$

Функція  $H(a)$  має мінімум у точці  $a = 1$ , який відповідає солітону (рис. 1):

$$\left. \frac{\partial H}{\partial a} \right|_{a=1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2I_{1s} = I_{2s} = \frac{4\lambda^3}{3}, \quad (1.1.7)$$

$$H_s = -\frac{1}{2} I_{1s} = -\frac{\lambda^3}{3}. \quad (1.1.8)$$

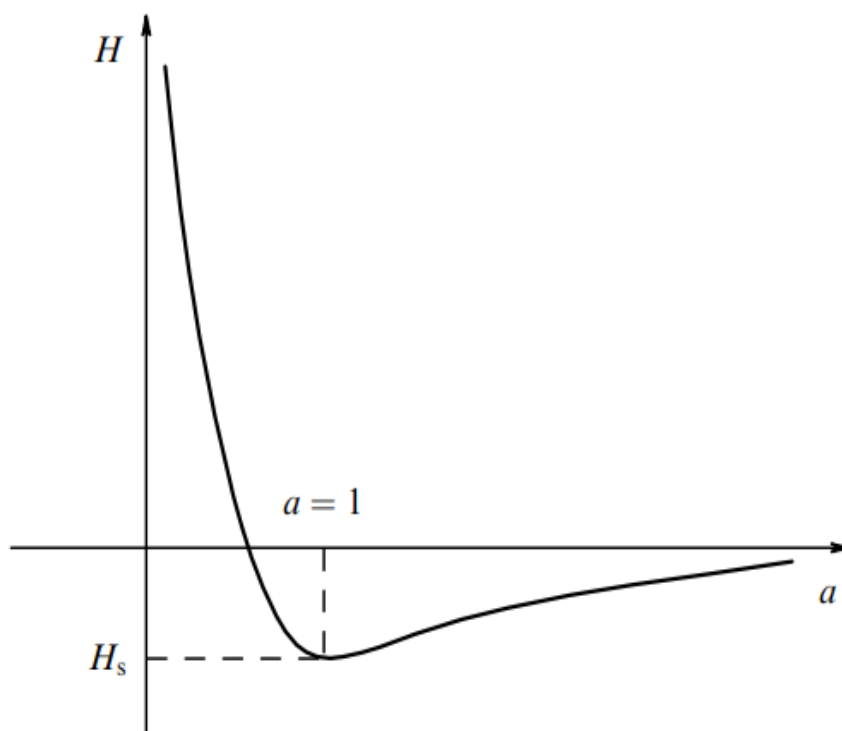


Рис. 1

Не складно впевнитись, що солітон реалізує мінімум  $H$  відносно фазових перетворень  $\psi_0(x) \rightarrow \psi_0(x)e^{i\chi(x)}$ , які також зберігають  $N$ ,

$$H = H_s + \frac{1}{2} \int \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 \psi_0^2 dx.$$

Таким чином, два прості перетворення, (1.1.5) і (1.1.6), забезпечують мінімум  $H$ , що вказує на стійкість солітона, але, строго кажучи, не доводить його стійкість.

Стійкість солітона НРШ по Ляпунову – стійкість не тільки до малого, але і до скінченного збурення доводить нерівність

$$H \geq H_s + \frac{1}{2} \left( \sqrt{I_1} - \sqrt{I_{1s}} \right)^2. \quad (1.1.9)$$

яка стає точною рівністю на солітонному розв'язку.

Аналогічним чином можна встановити стійкість «основного» солітона – радіально-симетричного розв'язку, який не має нулів, – для багатовимірного НРШ зі степеневою нелінійністю

$$i\psi_t + \frac{1}{2} \Delta \psi + \frac{\sigma}{2} |\psi|^{2\sigma-2} \psi = 0 \quad (\sigma > 1). \quad (1.1.10)$$

Гамільтоніан для рівняння (1.1.10) записується у вигляді

$$H = \frac{1}{2} \int \left( |\nabla \psi|^2 - |\psi|^{2\sigma} \right) d^D x \equiv I_1 - I_\sigma, \quad (1.1.11)$$

при цьому «основний» солітонний розв'язок вигляду  $\psi_s = e^{\left(\frac{i\lambda^2 t}{2}\right)} \lambda^{\frac{1}{\sigma-2}} g(\lambda r)$  з функцією  $g(\xi)$ , яка задовольняє рівняння

$$-g + \nabla_\xi^2 g + \sigma |g|^{2\sigma-2} g = 0,$$

являє собою стаціонарну точку гамільтоніана  $H$  при фіксованому числі частинок  $N$  (формула (1.1.4)).

Проводячи, як і вище, масштабні перетворення



$$\psi_s(r) \rightarrow a^{-\frac{D}{2}} \psi_s\left(\frac{r}{a}\right),$$

які зберігають повне число частинок, знаходимо, що відповідна гамільтонова функція

$$H(a) = \frac{1}{2} \left( \frac{I_1}{a^2} - \frac{I_\sigma}{a^{\frac{\sigma-1}{D}}} \right)$$

виявляється обмеженою знизу і має мінімум тільки при  $\frac{\sigma-1}{D} < 2$ .

Цей мінімум (при  $a=1$ ) відповідає «основному» солітонному розв'язку, що слугує вказівкою його стійкості. Для строгого доведення стійкості потрібно скористатися відповідною мультиплікативною нерівністю для  $I_\sigma$

$$I_\sigma = \int |\psi|^{2\sigma} d^D x \leq M_\sigma \left[ \int |\psi|^2 d^D x \right]^\alpha \left[ \int |\nabla \psi|^2 d^D x \right]^\beta \quad (1.1.12)$$

з  $\alpha = \frac{D}{2} + \sigma \left(1 - \frac{D}{2}\right)$  і  $\beta = (\sigma-1) \frac{D}{2}$ . Потім, як і у випадку одновимірного кубічного НРШ (1.1.1), необхідно знайти найкращу константу  $M_\sigma$  як мінімум функціоналу  $\frac{N^\alpha I_1^\beta}{I_\sigma}$ . Легко перевіряється, що цей мінімум досягається на основному солітонному розв'язку (1.1.10).

Підставляючи тепер нерівність (1.1.12) з найкращою константою  $M_{best}$  у вираз для гамільтоніана (1.1.11)

$$H \geq \frac{1}{2} \left( I_1 - M_{best} N^\alpha I_1^\beta \right),$$

знайдемо, що права частина останньої нерівності як функція  $I_1$  є обмеженою знизу і досягає мінімуму на основному солітонному розв'язку, що як раз і доводить стійкість цього розв'язку за Ляпуновим.

### 1.1.2. Лінійна стійкість одновимірних солітонів НРШ

Однак, застосування методу, заснованого на теоремі Ляпунова, виявляється скрутним при дослідженні стійкості локальних стаціонарних точок [1].

Розглянемо одновимірне рівняння НРШ, вважаючи

$$\psi(z, t) = (\psi_0(z) + u + iv) e^{\frac{i\lambda^2 t}{2}}, \quad \psi_0 \gg u, v.$$

Лінеаризовані рівняння для збурень являють собою гамільтонові рівняння

$$u_t = \frac{1}{2} \frac{\delta \tilde{H}}{\delta v}, \quad v_t = -\frac{1}{2} \frac{\delta \tilde{H}}{\delta u}, \quad (1.1.13)$$

де  $u$  та  $v$  – канонічно спряжені величини,  $\tilde{H}$  – друга варіація  $F = H + \frac{\lambda^2 N}{2}$ ,

$$\tilde{H} = \langle v | L_0 | v \rangle + \langle u | L_1 | u \rangle \quad (1.1.14)$$

з  $L_0 = \lambda^2 - \partial_x^2 - 2\psi_0^2$ ,  $L_1 = \lambda^2 - \partial_x^2 - 6\psi_0^2$ .

Перший член в  $\tilde{H}$  – середнє значення оператора  $L_0$  – відіграє роль кінетичної енергії, а другий доданок,  $\langle u | L_1 | u \rangle$  – потенціальної енергії.

Отже, стійкість або нестійкість солітона визначається властивостями операторів  $L_0$  та  $L_1$ . Перша властивість  $L_0$  впливає безпосередньо зі стаціонарного НРШ:

$$L_0 \psi_0 = \lambda^2 \psi_0 - \partial_x^2 \psi_0 - 2\psi_0^3 \equiv 0, \quad (1.1.15)$$

тобто  $\psi_0$  – основний стан  $L_0$  (без нулів). Тому  $\langle v | L_0 | v \rangle \geq 0$ .

Таким чином, стійкість (або нестійкість) солітона визначається знаком потенціальної енергії.

Оператор  $L_1$  має власну функцію з нульовим власним значенням:

$$L_1 \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = 0.$$

Це байдуже-стійка мода, яка відповідає зсуву солітона і має вузол ( $x = 0$ ). Тому в оператора Шредінгера  $L_1$  нижче по енергії маємо тільки одне власне значення з  $E < 0$ , яке відповідає основному стану  $\phi_0$ . Звідси, здавалося б, можна зробити висновок, що  $\langle u | L_1 | u \rangle < 0$  і, отже, з'являється стійкість. Але це не так, оскільки на  $u$  маємо обмеження  $\langle u | \psi_0 \rangle \equiv \int u \psi_0 dx = 0$ , яке є наслідком закону збереження числа частинок. Тому стійкість або нестійкість солітону визначається з розв'язку спектральної задачі

$$L_1 |\phi\rangle = E |\phi\rangle + C |\psi_0\rangle, \quad (1.1.16)$$

де  $C$  – множник Лагранжа, при додатковій умові  $\langle u | \psi_0 \rangle = 0$ .

Розкладаючи  $|\phi\rangle$  за повним набором власних функцій  $\{\psi_n\}$  оператора  $L_1$  ( $L_1 \phi_n = E_n \phi_n$ ),

$$\phi = \sum_n C_n \phi_n,$$

для  $C_n$  знаходимо

$$C_n = C \frac{\langle \phi_n | \psi_0 \rangle}{E_n - E}, \quad C_1 \equiv 0.$$

Підставляючи ці вирази в умову розв'язку  $\langle \phi, \psi_0 \rangle = 0$ , отримаємо дисперсійне співвідношення

$$f(E) = \sum_n^* \frac{\langle \psi_0 | \psi_n \rangle}{E_n - E} = 0. \quad (1.1.17)$$

Зірочка над знаком суми означає, що в сумі відсутній доданок з енергією  $E_1 = 0$  (енергії  $E_1$  відповідає зсунута мода  $\phi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial \psi_0}$ ).

Розглянемо далі енергетичний інтеграл між енергією основного стану  $E_0 < 0$  та енергією першого додатного рівня  $E_2$ . У цьому інтервалі  $f(E)$  монотонно  $\frac{\partial f}{\partial E} > 0$  зростає від  $-\infty$  при  $E = E_0$  до  $+\infty$  при  $E = E_2$ . Якщо  $f(E)$  при  $E = 0$  від'ємна, то дисперсійне рівняння не має від'ємних власних значень і солітон стійкий. Якщо  $f(0) > 0$ , то ми маємо одне власне значення  $E < 0$  і відповідно солітон нестійкий.

Для того, щоб знайти  $f(0)$  відмітимо, що

$$f(0) = \sum_n^* \frac{\langle \psi_0 | \phi_n \rangle}{E_n} \equiv \langle \psi_0 | L_1^{-1} | \psi_0 \rangle.$$

Далі, диференціюючи стаціонарне НРШ

$$-\lambda^2 \psi_0 + \partial_x^2 \psi_0 + 2|\psi_0|^2 \psi_0 \equiv 0$$

по  $\lambda^2$ , отримаємо

$$L_1 \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^2} \right) = -\psi_0$$

або

$$\langle \psi_0 | L_1^{-1} | \psi_0 \rangle = - \left\langle \psi_0 \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda^2} \right. \right\rangle = - \frac{1}{2} \frac{\partial N_s}{\partial \lambda^2}.$$

У результаті приходимо до критерію Вахітова-Колоколова [3]: якщо

$$\frac{\partial N_s}{\partial \lambda^2} > 0, \quad (1.1.18)$$

то солітон стійкий, і відповідно солітон нестійкий при іншому знаці похідної.

Цей критерій справедливий при довільній розмірності  $D$  і залежності нелінійного зсуву від  $|\psi|^2$  (тобто при заміні  $|\psi|^2$  в НРШ довільної функції  $f(|\psi|^2)$ ).

Критерій Вахітова-Колоколова має простий фізичний зміст. Величина  $\varepsilon = -\frac{\lambda^2}{2}$  для стаціонарного НРШ являє собою енергію зв'язаного стану – солітона. Якщо при додаванні «однієї» частинки енергія зв'язаного стану зменшується, то така ситуація буде стійкою. Якщо при додаванні «однієї» частинки рівень  $-\lambda^2$  зміщується в область енергій неперервного спектру, то солітон буде нестійким.

Залежність  $N_s$  від  $\lambda$  легко знаходиться для кубічного НРШ:  $N_s \propto \lambda^{2-D}$ . Звідси випливає стійкість одновимірних солітонів кубічного НРШ і стійкість тривимірних солітонів. Двовірний випадок є виродженим.

## 1.2. Дельта функція Дірака та її властивості

### 1.2.1 Визначення $\delta$ -функції

Дельта функція Дірака – це узагальнена функція, яка не породжується ніякою локально інтегрованою функцією [4]. Розглянемо функціонал, який позначимо  $\delta = \delta(x)$  і який визначається формулою

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in D. \quad (1.2.1)$$

Цей функціонал називається *дельта функцією Дірака*. Він лінійний і неперервний.

Припустимо, що існує локально інтегровна функція  $f$ , така що

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in D.$$

В якості функції  $\varphi(x)$  можна обрати функцію

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Тоді для функції  $f$  і для функції  $\varphi_a(x)$  ми мали б

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_a(x)dx = \varphi_a(0) = \frac{1}{e}. \quad (1.2.3)$$

Але при  $a \rightarrow 0$  інтеграл зліва прямує до нуля і при достатньо малому  $a$  ліва частина (1.2.3) можна зробити як завгодно малою, що суперечить рівності (1.2.3). Отримана суперечність і доводить наше твердження.

$$\text{Таким чином, } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Функціонал, який ставить у відповідність кожній функції  $\varphi \in D$  число  $\varphi(x_0)$ , де  $x_0$  – фіксоване, називається  $\delta$ -функцією і визначається як  $\delta(x - x_0)$ . Застосовуючи інтегральну форму запису функціоналу, можна записати

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \quad \varphi \in D. \quad (1.2.4)$$

Отже,  $\delta$ -функція є прикладом сингулярної узагальненої функції.

### 1.2.2. Диференціювання $\delta$ -функції

Нехай

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Функція  $H(x)$  називається *функцією Хевісайда*. Вона є локально інтегрованою і тому її можна розглядати як узагальнена функція. Знайдемо її похідні. Використовуючи формулу для знаходження похідної узагальненої функції, маємо

$$(H', \varphi) = -(H, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi), \quad \varphi \in D,$$

тобто

$$H' = \delta. \quad (1.2.5)$$

Аналогічно перевіряється, що  $H'(x - h) = \delta(x - h)$ .

Обчислимо похідну  $\delta$ -функції

$$(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0);$$

$$(\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^{(k)}(\delta, \varphi^{(k)}) = (-1)^{(k)}\varphi^{(k)}(0). \quad (1.2.6)$$

### 1.2.3. Основні властивості $\delta$ -функції

Зажадаємо зобразити сингулярну  $\delta$ -функцію графічно. Оскільки значення узагальнених функцій в точці не визначено, будувати їх графіки некоректно. Однак, для будь-якої узагальненої функції можна побудувати послідовність класичних функцій, які в сенсі збіжності в просторі  $D'$ , збігаються до узагальненої функції [4]. Тому «графік» узагальненої функції можна уявити на основі графіків таких послідовностей.

Послідовність локально інтегровних функцій

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} = \frac{1}{\varepsilon} \left( H \left[ x + \frac{\varepsilon}{2} \right] - H \left[ x - \frac{\varepsilon}{2} \right] \right) \quad (1.2.7)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$  має границю

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad (1.2.8)$$

в сенсі звичайного визначення границі функції, яка залежить від параметра. З іншого боку показано, що для будь-якої неперервної на всій осі функції  $\varphi(x)$  має місце рівність

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad (1.2.9)$$

Але це і означає збіжність послідовності функцій  $\delta_\varepsilon(x)$  до  $\delta$ -функції в просторі  $D'$  (точніше, функціоналів, породжених функціями  $\delta_\varepsilon(x)$  до

функціоналу  $\delta$ ). На рис. 2 показані графіки декількох функцій  $\delta_\varepsilon(x)$  при

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \dots$ . При цьому  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = 1$ .

Покажемо, що «шапочка»  $\omega_\varepsilon(x)$ , яка задається формулою

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases} \quad (1.2.10)$$

де стала  $C_\varepsilon$  вибирається з умови нормування  $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \omega_\varepsilon(x) dx = 1$ , має

аналогічні властивості

$$\omega_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x), \varepsilon \rightarrow +0 \quad \text{в} \quad D' \quad (1.2.11)$$

Графік «шапочки» при деяких значеннях  $\varepsilon$  показано на рис. 3.

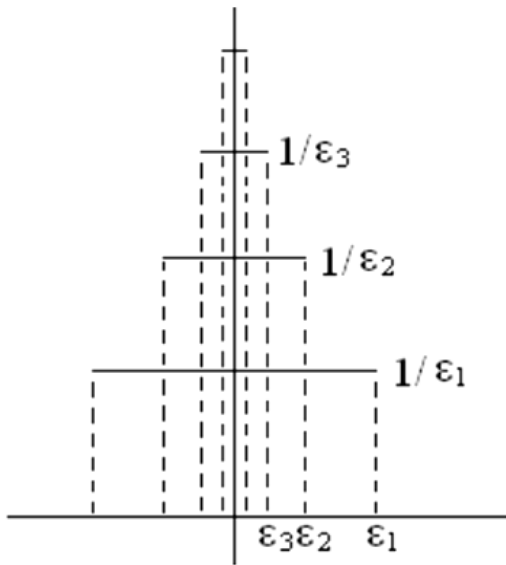


Рис. 2

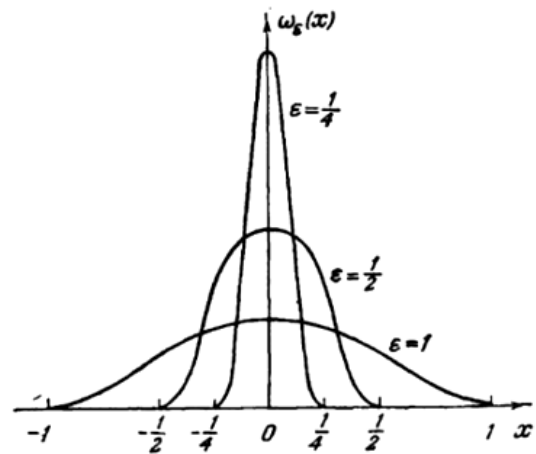


Рис. 3

Дійсно, за визначенням збіжності в  $D'$  співвідношення (1.2.11) еквівалентне рівності

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \quad \varphi \in D \quad (1.2.12)$$



З неперервністю функції  $\varphi(x)$  для будь-якого  $\eta > 0$  існує таке  $\varepsilon_0 > 0$ , що  $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$ , оскільки  $|x| < \varepsilon_0$ . Звідси, користуючись властивістю «шапочки»  $\omega_\varepsilon(x)$ , при всіх  $\varepsilon < \varepsilon_0$  отримуємо

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx < \eta \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(x) dx = \eta$$

що й потрібно було довести.

Виходячи з вигляду наближеної послідовності  $\delta_\varepsilon(x)$  (або  $\omega_\varepsilon(x)$ ), узагальнену функцію  $\delta(x)$  можна зобразити графічно (рис. 4):

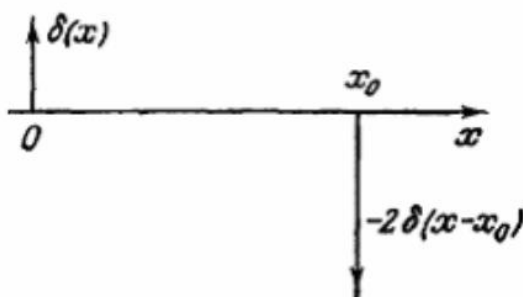


Рис. 4

Взагалі можна багатьма способами будувати послідовності регулярних функціоналів  $f_\nu(x)$ , які збігається до  $\delta$ -функції. Для цього потрібно тільки, щоб відповідні функції  $f_\nu(x)$  мали «дельтаподібний вигляд» і, зокрема, володіли властивістю

$$\lim_{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in D \quad (1.2.13)$$

Для такої побудови спочатку потрібно взяти функцію  $y = \Omega(x)$ , яка має максимум при  $x = 0$ , й яка швидко прямує до нуля в обидві сторони від  $x = 0$ , і при цьому таку, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(x) dx = 1 \quad (1.2.14)$$

Ці умови все одно не визначають вигляд  $\Omega(x)$ ; можна придумати багато функцій, які задовольняють всім поставленим вище вимогам.

Тепер із функції  $\Omega(x)$  побудуємо послідовність функцій, які задовольняють співвідношення (1.2.14). Для цього виконаємо наступні перетворення: збільшимо висоту в  $m$  разів і одночасно зменшимо ширину в стільки ж разів. Нагадаємо, що якщо збільшити висоту кривої  $\Omega(x)$  в  $m$  разів, то її рівняння набуває вигляд  $y = m\Omega(x)$ , а якщо зменшити ширину в  $m$  разів, то рівняння стане таким  $y = m\Omega(mx)$ . Ясно, що площа, яка знаходиться між графіком та віссю  $x$ , при розтягуванні доверху збільшиться в  $m$  разів, а при стисканні з боків зменшиться в стільки ж разів, тобто все залишиться без змін. Втім, це можна довести і за допомогою інтегрування після заміни змінної  $m x = t$ .

Візьмемо, наприклад, дві функції

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + 1}, \quad \Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

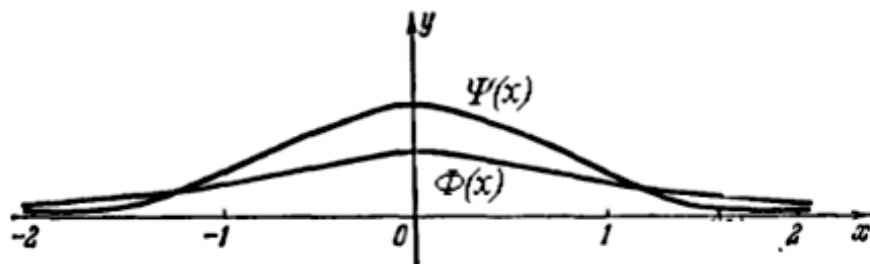


Рис. 5

Числові множники забезпечують рівність інтегралів одиниці, наприклад,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

У відповідності з вищезазначеним, функції

$$\Phi_m(x) = m\Phi(mx) = \frac{m}{\pi} \frac{1}{1 + (mx)^2}, \quad \Psi_m(x) = m\Psi(mx) = \frac{m}{\sqrt{\pi}} e^{-(mx)^2} \quad (1.2.15)$$

будуть утворювати потрібні послідовності. Легко бачити, що

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_m(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \Psi_m(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$$

Якщо замінити  $m$  на  $\frac{1}{\varepsilon}$ , то отримаємо послідовності функцій

$$\Phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} \quad \text{і} \quad \Psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}, \quad (1.2.16)$$

які володіють аналогічними властивостями при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Для таких послідовностей функцій необмежено збільшуючи  $m$  (або зменшуючи  $\varepsilon$ ), тобто в граничному випадку, ми отримаємо «функцію» з наступними властивостями:

- функція дорівнює нулю при всіх  $x \neq 0$  і дорівнює нескінченності при  $x = 0$ ;
- інтеграл від цієї функції, взятий в межах від  $-\infty$  до  $+\infty$ , дорівнює 1.

Замість двох сформульованих вище умов, які мають вигляд

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases} \quad (1.2.17)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (1.2.18)$$

можна записати одну у вигляді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(x) dx = \varphi(0) \quad (1.2.19)$$

Дійсно,  $\delta(x) = 0$  при всіх  $x \neq 0$ , тому

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) \varphi(x) dx$$

де  $\varepsilon$  – мала величина. В останньому інтегралі проміжок інтегрування малий (його довжина дорівнює  $2\varepsilon$ ), тому на ньому  $\varphi(x) \approx \varphi(0)$ , відповідно,

$$I = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) \varphi(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(0) \delta(x) dx = \varphi(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = \varphi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \varphi(0)$$

Ясно, що з (1.2.18) при  $\varphi = 1$  отримаємо (1.2.19). Також із (1.2.19) ясно, що величина інтегралу не залежить від поведінки функції  $\varphi(x)$  при  $x \neq 0$ , а залежить від  $\varphi(0)$ . Це означає, що  $\varphi(x)$  входить під знак інтегралу з множителем, який дорівнює нулю при  $x \neq 0$ , тобто  $\delta(x) = 0$  при  $x \neq 0$ .

Отже, узагальнену функцію  $\delta(x)$  можна розглядати як граничну форму функції, яка приймає відмінні від нуля значення тільки в деякому околі нуля, де вона має різкий додатній максимум, причому інтеграл від функції по всьому простору залишається рівним 1.

Наведемо основні властивості  $\delta$ -функції:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0) \quad (1.2.20)$$

$$\int_a^b \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \begin{cases} \varphi(x_0), & a < x_0 < b \\ 0, & x < a \vee x > b \end{cases} \quad (1.2.21)$$

$$x\delta(x) = 0 \quad (1.2.22)$$

$$\delta(a(x - x_0)) = \frac{1}{|a|} \delta(x - x_0) \quad (a = \text{Const} \neq 0) \quad (1.2.23)$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (1.2.24)$$

$$a(x)\delta(x - x_0) = a(x_0)\delta(x - x_0) \quad (1.2.25)$$

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x)|} = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|} \quad (g(x_n) = 0, g'(x_n) \neq 0) \quad (1.2.26)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x - a) + \delta(x + a)}{2|x|} = \frac{\delta(x - a) + \delta(x + a)}{2|a|} \quad (1.2.27)$$

$$|x|\delta(x^2) = \delta(x) \quad (1.2.28)$$

$$\delta(x) = H'(x) \quad (1.2.29)$$

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt \quad (1.2.30)$$

Для функцій, які мають скінченний розрив  $h$  в точці  $x_0$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < x_0 \\ f_2(x), & x > x_0 \end{cases},$$

$$f_1(x) \in C^1(-\infty, x_0], f_2(x) \in C^1(x_0, +\infty], f_1(x) - f_2(x) = h$$

має місце співвідношення

$$f'(x) = h \cdot \delta(x - x_0) + \begin{cases} f_1'(x), & x < x_0 \\ f_2'(x), & x > x_0 \end{cases} \quad (1.2.31)$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \quad (1.2.32)$$

Сенс цих рівностей полягає в тому, що один із членів рівності можна замінити іншим, коли вони фігурують в якості множників в підінтегральному виразі деякого інтегралу (тобто функціоналу). Всі рівності можна довести, використовуючи функціональний підхід.

З іншого боку всі ці рівності можна розуміти як граничні. Наприклад, рівність (1.2.22) означає, що для будь-якої «хорошої» функції  $\psi(x)$ , де  $\psi \in D$ , виконується співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\varepsilon(x) \psi(x) dx = 0 \quad (1.2.33)$$

де  $f_\varepsilon(x)$  – будь-яка дельтоподібна послідовність.

Звідси витікає що, теорію узагальнених функцій можна будувати, розглядаючи їх як границі звичайних функцій, а не як функціонали. Такий підхід в математичній літературі отримав широке розповсюдження. Теорію  $\delta$ -функцій можна будувати також, застосовуючи граничний перехід від відомих кусково-неперервних функцій шляхом прямування деякого параметру до визначеної границі. При такому підході, доведення формул (1.2.20)-(1.2.30)

зводиться до множення обох частин рівностей на регулярну функцію  $\varphi(x)$ , заміні  $\delta$ -функції відповідній їй якій-небудь дельтаподібній функції, інтегруванні по  $x$  і виконанні граничного переходу. В результаті в лівій і правій частинах отримуємо однакові значення. Зазначимо, що обидва підходи приводять до одних і тих самих результатів.

#### 1.2.4. Лінійна заміна змінних в узагальнених функціях

Нехай  $f(x)$  – локально інтегровна в  $\mathbb{R}^1$  функція і  $x = ay + b$  ( $a \neq 0$ ) – лінійне перетворення простору  $\mathbb{R}^1$  на себе. Тоді для будь-якої  $\varphi \in D$  маємо

$$\begin{aligned} (f(ay + b), \varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(ay + b)\varphi(y)dy = \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(a^{-1}(x - b))dx = \frac{1}{|a|} \left( f, \varphi(a^{-1}(x - b)) \right). \end{aligned}$$

Цю рівність ми і приймаємо за означення узагальненої функції  $f(ay + b)$  для будь-якої  $f(x) \in D'$ :

$$(f(ay + b), \varphi) = \left( f, \frac{\varphi(a^{-1}(x - b))}{|a|} \right), \quad \varphi \in D. \quad (1.2.34)$$

Оскільки операція  $\varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(x) = \varphi(a^{-1}(x - b))$  лінійна й неперервна з  $D$  в  $D$ , то функціонал  $f(ay + b)$ , який визначається правою частиною рівності (1.2.34), належить  $D'$ . Дійсно, із означення (1.2.34) випливає, що операція лінійної заміни змінних лінійна й неперервна з  $D'$  в  $D'$ :

$$(\lambda f + \mu g)(ay + b) = \lambda f(ay + b) + \mu g(ay + b), \quad f, g \in D';$$

$$f_k(ay + b) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } D', \text{ якщо } f_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } D'.$$

Зокрема,

$$(f(cy), \varphi) = \frac{1}{c} \left( f, \varphi\left(\frac{x}{c}\right) \right) \quad (1.2.35)$$

$$(f(y+b), \varphi) = (f, \varphi(x-b)) \quad (1.2.36)$$

При цьому немає потреби писати різні позначення незалежної змінної зліва і справа. Наприклад, останню формулу можна записати у вигляді  $(f(y+b), \varphi) = (f, \varphi(x-b))$ .

Узагальнена функція  $f(x+b)$  називається зсувом узагальненої функції  $f(x)$  на величину  $b$ . Наприклад,  $\delta(x-x_0)$  – зсув  $\delta(x)$  на величину  $x_0$ , який діє за формулою

$$(\delta(x-x_0), \varphi) = (\delta, \varphi(x+x_0)) = \varphi(x_0).$$

### 1.2.5 Множення узагальнених функцій

Нехай  $f(x)$  – локально інтегровна в  $D'$  функція і  $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ . Тоді для будь-якої функції  $\varphi \in D$  справедлива рівність

$$(a(x)f(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x)f(x)\varphi(x)dx = (f(x), a(x)\varphi(x)).$$

Цю рівність ми приймаємо за означення добутку  $(a \cdot f)$  узагальненої функції  $f \in D'$  на нескінченно диференційовну функцію  $a(x)$ :

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad \varphi \in D. \quad (1.2.37)$$

Оскільки операція множення на функцію  $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$  лінійна й неперервна з  $D$  в  $D'$ , то функціонал  $(a \cdot f)$ , який визначається рівністю (1.2.37), належить  $D'$ . Із означення (1.2.37) випливає, що операція множення на функцію  $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$  лінійна й неперервна з  $D'$  в  $D'$ .

$$a(\lambda f + \mu g) = \lambda(af) + \mu(ag), \quad f, g \in D'$$

$$af_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } D', \text{ якщо } f_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \text{ в } D'.$$

Якщо  $f \in D'$ , то виконується рівність

$$f = \eta f, \quad (1.2.38)$$

де  $\eta$  – будь-яка функція класу  $C^\infty(\mathbb{R}^1)$  дорівнює 1 в околі носія  $f$ . Дійсно, оскільки для будь-якої  $\varphi \in D$  носія  $f$  та  $(1-\eta)\varphi$  нема спільних точок, то

$$(f - \eta f, \varphi) = ((1-\eta)f, \varphi) = (f, (1-\eta)\varphi) = 0.$$

Оскільки узагальнена функція обертається в нуль в будь-якій області, яка не належить носію.

Має місце формула

$$a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x), \quad (1.2.39)$$

оскільки при всіх  $\varphi \in D$

$$(a\delta, \varphi) = (\delta, a\varphi) = a(0)\varphi(0) = (a(0)\delta, \varphi).$$

Таким чином, будь-який добуток, в який входить  $\delta$ -функція, пропорційний  $\delta$ . Зокрема

$$x \cdot \delta = 0. \quad (1.2.40)$$

Крім того, оскільки

$$\begin{aligned} (a(x)\delta', \varphi) &= (\delta', a(x)\varphi) = -\left(\delta, (a(x)\varphi(x))'\right) = -(a(x)\varphi(x))'_{x=0} = \\ &= -a(0)\varphi'(0) - a'(0)\varphi(0) = (a(0)\delta' - a'(0)\delta, \varphi), \end{aligned}$$

то

$$a(x)\delta' = a(0)\delta' - a'(0)\delta. \quad (1.2.41)$$

Зокрема,

$$x \cdot \delta' = -\delta, \quad x^2\delta' = 0. \quad (1.2.42)$$

Отже, маємо

$$(x\delta^{(m)}, \varphi) = (\delta^{(m)}, x\varphi) = (-1)^m (\delta, (x\varphi)^m) = (-1)^m \left( \delta, \sum_{k=0}^m C_m^k \varphi^{(k)} x^{(m-k)} \right) =$$



$$\begin{aligned}
&= (-1)^m (\delta, m \cdot \varphi^{(m-1)} + \varphi^{(m)} x) = (-1)^m \{ m \cdot (\delta, \varphi^{(m-1)}) + (x\delta, \varphi^{(m)}) \} = \\
&= (-1)^m m \cdot (\delta, \varphi^{(m-1)}) = -m (-1)^{m-1} (\delta, \varphi^{(m-1)}) = -m (\delta^{(m-1)}, \varphi)
\end{aligned}$$

Тут ми враховуємо, що  $x \cdot \delta = 0$ . У результаті

$$x \cdot \delta^{(m)} = -m \delta^{(m-1)}. \quad (1.2.43)$$

Звідси витікає:

1. Для того щоб узагальнена функція  $f$  задовольняла співвідношення  $xf = 0$  необхідно й достатньо, щоб функція  $f$  була пропорційна  $\delta$ , тобто  $f = C\delta$ .

Зауважимо, що те саме буде справедливо, якщо замінити  $x$  довільною нескінченно диференційовною функцією  $a(x)$ , яка має в початку координат єдиний нуль порядку 1. Оскільки в цьому випадку функція  $\frac{x}{a(x)}$  буде нескінченно диференційовною, з рівності  $a(x)f = 0$  випливає, що

$$xf = \frac{x}{a(x)} a(x) f = 0.$$

2. Загальний розв'язок рівняння

$$x^m u = 0 \quad (1.2.44)$$

в  $D'$  дається формулою

$$u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x), \quad (1.2.45)$$

де  $c_k$  – довільна стала.

Оскільки при всіх  $\varphi \in D$  і  $k = 0, 1, \dots, m-1$  має місце рівність

$$(x^m \delta^{(k)}, \varphi) = (\delta^{(k)}, x^m \varphi) = (-1)^k (\delta, (x^m \varphi)^{(k)}) = (-1)^k (\delta, (x^m \varphi^{(k)}))_{x=0} = 0,$$

то  $x^m \delta^{(k)}(x) = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$  і відповідно узагальнена функція (1.2.45) задовольняє рівняння (1.2.44).

### 3. Має місце рівність

$$xP\frac{1}{x} = 1 \quad (1.2.47)$$

оскільки при всіх  $\varphi \in D$

$$\left(xP\frac{1}{x}, \varphi\right) = \left(P\frac{1}{x}, x\varphi\right) = VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = (1, \varphi),$$

де  $P\frac{1}{x}$  – головне значення інтеграла від  $1/x$ .

Це демонструє схожість узагальненої функції  $P\frac{1}{x}$  з функцією  $\frac{1}{x}$ .

Фактично узагальнена функція  $P\frac{1}{x}$  збігається з функцією  $\frac{1}{x}$  при  $x \neq 0$  (в сенсі рівності узагальнених функцій).

Звідси на природне питання: чи не можна визначити добуток будь-яких узагальнених функцій так, щоб цей добуток знову був узагальненою функцією, є така відповідь. Щоб однозначно визначити добуток узагальнених функцій  $f$  і  $g$ , достатньо, щоб вони володіли, грубо кажучи, властивостями: наскільки  $f$  «нерегулярна» в околі (довільної) точки, наскільки  $g$  повинна бути «регулярною» в цьому околі, і навпаки. Наприклад, природно рахується  $\delta(x-a)\delta(x-b) = 0$ , якщо  $a \neq b$ .

### 1.3. Висновки до розділу I

Подано основні поняття теорії стійкості Ляпунова та її застосування до солітонних розв'язків нелінійного рівняння Шредінгера. Наведено основні поняття та властивості узагальнених функцій на прикладі дельта-функції Дірака. Зазначені поняття теорії стійкості Ляпунова та дельта-функції Дірака будуть використовуватися у наступних розділах.

## РОЗДІЛ II

### 2.1. Однорідне нелінійне рівняння Шредінгера

У роботі [3] у скалярному наближенні досліджені структура та стійкість стаціонарних розв'язків для середовища з насиченою нелінійністю. Викладемо основні результати цієї роботи.

У параболічному наближенні огинаюча електричного поля світлового пучка описується рівнянням [5]

$$i \frac{\partial E}{\partial z} + \Delta_{\perp} E + f(|E|^2)E = 0, \quad (2.1)$$

де  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ;  $f(|E|^2)$  описує нелінійну частину діелектричної проникності (дійсна функція),  $E$  – комплекснозначна функція (заряджене скалярне поле).

### 2.2. Стаціонарні розв'язки з циліндричною симетрією

Розв'язок рівняння (2.1) вигляду  $E = \varphi(r)e^{i\gamma z}$ , де  $\varphi$  задовольняє рівняння

$$\Delta_{\perp} \varphi - \gamma \varphi + f(\varphi^2) \varphi = 0 \quad (2.2)$$

та граничні умові  $\left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r=0} = 0$ ,  $\varphi(\infty) = 0$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , будемо називати стаціонарним. Для середовища з насиченням  $f(\varphi^2)$  – обмежена при всіх  $\varphi$  функція. Покажемо, що при  $\gamma > M = \max |f(\varphi^2)|$  задача (2.2) не має розв'язків в класі функцій з інтегровним квадратом. Для цього помножимо (2.2) на  $\varphi$ :

$$\Delta_{\perp} \varphi \cdot \varphi - \gamma \varphi^2 + f(\varphi^2) \varphi^2 = 0.$$

Оскільки

$$\Delta_{\perp} \varphi \cdot \varphi = \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp} \varphi \cdot \varphi) - (\nabla_{\perp} \varphi)^2,$$

то зінтегруємо цю рівність по всьому простору:

$$\int \Delta_{\perp} \varphi \cdot \varphi dx dy = \int \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp} \varphi \cdot \varphi) dx dy - \int (\nabla_{\perp} \varphi)^2 dx dy.$$

З урахуванням граничних умов

$$\int \nabla_{\perp} (\nabla_{\perp} \varphi \cdot \varphi) dx dy = 0.$$

Маємо

$$-\int (\nabla_{\perp} \varphi)^2 dx dy - \gamma \int \varphi^2 dx dy + \int f(\varphi^2) \varphi^2 dx dy = 0,$$

звідки

$$0 < \int (\nabla_{\perp} \varphi)^2 dx dy = \int f(\varphi^2) \varphi^2 dx dy - \gamma \int \varphi^2 dx dy \leq (M - \gamma) \int \varphi^2 dx dy. \quad (2.3)$$

Із (2.3) випливає, що  $\gamma < M$ . Крім того, з умови експоненціального спадання  $\varphi$  при  $r \rightarrow \infty$  випливає, що  $\gamma > 0$ . Середовище з насиченням у нашому випадку апроксимується функцією  $f(\varphi^2) = \frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2}$ , тому остаточне рівняння для розв'язків з циліндричною симетрією набуває вигляду

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \gamma \varphi + \frac{\varphi^3}{1 + \varphi^2} = 0. \quad (2.4)$$

Аналіз (2.4) на фазовій площині  $(\varphi, \varphi')$  свідчить, що при  $0 < \gamma < 1$  картина фазових траєкторій якісно така ж, як і у випадку кубічного середовища [6]. Будь-яка траєкторія, яка починається на осі  $\varphi'_r = 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , закінчується в одній з трьох точок  $\varphi'_r = 0$ ;  $\varphi = 0$ ,  $\pm \sqrt{\frac{\gamma}{1 - \gamma}}$ . Шляхом поступового збільшення початкової амплітуди  $\varphi(0)$  можна отримати парну множину траєкторій, яка починається на осі  $\varphi'_r = 0$  і закінчується при  $r \rightarrow \infty$  в нулі. Кожній такій траєкторії відповідає строго визначене початкове значення амплітуди  $\varphi_n(0)$ . Яке завгодно мале відхилення початкової амплітуди  $\varphi(0)$  від відповідного

значення  $\varphi_n(0)$  призводить до того, що при  $r \rightarrow \infty$  траєкторія закінчується не в нулі, а в одній з двох точок  $\varphi'_r = 0$ ,  $\varphi = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ . Це означає, що при як завгодно малому  $\varepsilon$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |\tilde{\varphi}_n(r) - \varphi_n(r)| = \sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}},$$

де  $\varphi_n$  – стаціонарний розв'язок, а  $\tilde{\varphi}_n$  – розв'язок рівняння (2.4), яке задовольняє граничні умови  $\tilde{\varphi}_n(0) = \varphi_n(0) + \varepsilon$ ,  $\left. \frac{d\tilde{\varphi}_n}{dr} \right|_{r=0} = 0$ . Звідси випливає, що похідна стаціонарного розв'язку за його початковим значенням при  $r \rightarrow \infty$  є необмеженою функцією. Відмітимо, що  $\psi_n(r) = \frac{\partial \varphi_n(r)}{\partial \varphi_n(0)}$ , як видно з диференціювання (2.2) по  $\varphi_n(0)$ , задовольняє рівняння

$$\Delta_{\perp} \psi_n - \gamma \psi_n + \left( f(\varphi_n^2) + 2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_n^2} \right) \psi_n \equiv -L_{1n} \psi_n = 0$$

та граничну умову  $\left. \frac{d\psi_n}{dr} \right|_{r=0} = 0$ .

Оскільки  $\psi_n$  є необмеженою функцією, то оператор  $L_{1n}$  не має симетричної (залежної тільки від  $r$ ) власної функції з нульовим власним значенням. Ця обставина буде використана при дослідженні нестійкості  $\varphi_n$ .

На рис. 5 показано розподіли перших трьох мод при  $\gamma = 0,5$ , отримані чисельно. При  $\gamma \rightarrow 1$  величина амплітуди та ширина стаціонарних розподілів необмежено зростає. При  $\gamma \rightarrow 0$  розв'язки рівняння (2.4) переходять у відповідні розв'язки кубічного рівняння. Це можна помітити, якщо (2.4) переписати у нових змінних  $\varphi_n = \sqrt{\gamma} \varphi_{0n}$ ,  $\rho = r \sqrt{\gamma}$ :

$$\frac{d^2 \varphi_{0n}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi_{0n}}{d\rho} - \varphi_{0n} + \frac{\varphi_{0n}^3}{1 + \varphi_{0n}^2} = 0. \quad (2.5)$$

Оскільки  $\varphi_{on}$  є обмеженими функціями, то при  $\gamma\varphi_{on}^2 \ll 1$  останній член в (2.5) можна розкласти за степенями  $\gamma$  і обмежитись урахуванням тільки першого члена розвинення. На рис. 6 показана залежність енергії основної моди  $I_1 = \int_0^\infty \varphi_1^2 r dr$  від параметра  $\gamma$ . При  $\gamma \rightarrow 1$   $I_1 \rightarrow \infty$ , при  $\gamma \rightarrow 0$   $I_1 \rightarrow I_{01} = 1,86$ , де  $I_{01}$  – енергія основної моди в кубічному середовищі.

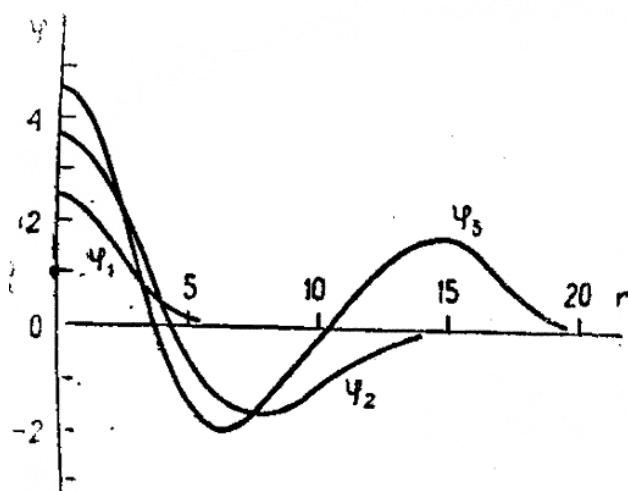


Рис. 6. Розподіл амплітуди  $\varphi_n(r)$  для перших трьох стаціонарних розв'язків з циліндричною симетрією при  $\gamma = 0,5$ ;  $\varphi_1(0) = 2,55$ ;  $\varphi_2(0) = 3,76$ ;  $\varphi_3(0) = 4,64$

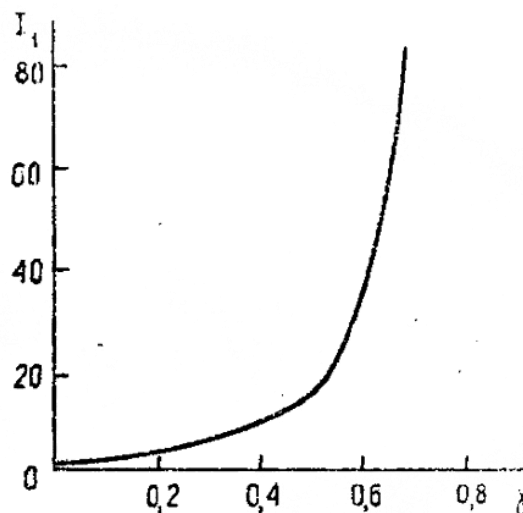


Рис. 7. Залежність енергії  $I_1$  першого стаціонарного розв'язку  $\varphi_1(r)$  від параметра  $\gamma$ .

### 2.3. Стійкість розв'язків однорідного нелінійного рівняння Шредінгера за схемою Вахітова-Колоколова

Досліджуватимемо стійкість стаціонарних розв'язків відносно малих збурень амплітуди та фази. Приймаючи  $E = (\varphi_n(r) + \delta\varphi)e^{i\gamma z}$  і  $\delta\varphi = (u + iv)e^{\Omega z}$ , знаходимо

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

$$E = \left[ \varphi_n(r) + (u + iv)e^{\Omega z} \right] e^{i\gamma z} = \varphi_n(r)e^{i\gamma z} + (u + iv)e^{(\Omega + i\gamma)z},$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = i\gamma\varphi_n(r)e^{i\gamma z} + (\Omega v + i\gamma)(u + iv)e^{(\Omega + i\gamma)z} =$$

$$= i \left[ \gamma\varphi_n(r) + (\Omega v + \gamma u)e^{\Omega z} \right] e^{i\gamma z} + (\Omega u - \gamma v)e^{(\Omega + i\gamma)z},$$

$$\Delta_{\perp} E = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) E = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \varphi_n(r)e^{i\gamma z} + (u + iv)e^{(\Omega + i\gamma)z} \right) =$$

$$= \left[ \varphi_n''(r) + (u'' + iv'')e^{\Omega z} \right] e^{i\gamma z} + \frac{1}{r} \left[ \varphi_n'(r) + (u' + iv')e^{\Omega z} \right] e^{i\gamma z} =$$

$$= \left[ \varphi_n''(r) + \frac{1}{r} \varphi_n'(r) + \left( u'' + \frac{1}{r} u' \right) e^{\Omega z} + i \left( v'' + \frac{1}{r} v' \right) e^{\Omega z} \right] e^{i\gamma z} =$$

$$= \left[ \Delta_{\perp} \varphi(r) + \Delta_{\perp} u e^{\Omega z} + i \Delta_{\perp} v e^{\Omega z} \right] e^{i\gamma z},$$

$$|E|^2 = E \cdot E^*,$$

$$E^* = \left[ \varphi_n(r) + u e^{\Omega z} - i v e^{\Omega z} \right] e^{-i\gamma z},$$

$$|E|^2 = E \cdot E^* = \left( \varphi_n(r) + u e^{\Omega z} \right)^2 + v^2 e^{2\Omega z} \approx \varphi_n^2(r) + 2\varphi_n(r) u e^{\Omega z},$$

де враховані лише члени першого порядку по  $u$  і  $v$ , оскільки за умов  $\left| \frac{u}{\varphi_n} \right| \ll 1$ ,

$\left| \frac{v}{\varphi_n} \right| \ll 1$ ,  $u^2 e^{2\Omega z} \rightarrow 0$  і  $v^2 e^{2\Omega z} \rightarrow 0$ . Розкладаємо в ряд також функцію  $f(|E|^2)$ :

$$f\left(\varphi_n^2(r) + 2\varphi_n(r) e^{\Omega z} u\right) \approx f\left(\varphi_n^2(r)\right) + 2u \frac{\partial f}{\partial \varphi_n^2} \varphi_n(r) e^{\Omega z}.$$

Підставляємо отримані вирази в рівняння (2.1):

$$\begin{aligned}
& -\left[\gamma\varphi_n(r) + (\Omega v + \gamma u)e^{\Omega z}\right]e^{i\gamma z} + i\left[(\Omega u - \gamma v)e^{(\Omega+i\gamma)z}\right] + \\
& + \left[\Delta_{\perp}\varphi_n(r) + \Delta_{\perp}ue^{\Omega z} + i\Delta_{\perp}ve^{\Omega z}\right]e^{i\gamma z} + \\
& + \left(f(\varphi_n^2(r)) + 2u\frac{\partial f}{\partial\varphi_n^2}\varphi_n(r)e^{\Omega z}\right)\cdot(\varphi_n(r) + (u+iv)e^{\Omega z})e^{i\gamma z} = 0
\end{aligned}$$

і виносимо множник  $e^{i\gamma z}$

$$\begin{aligned}
& -\left[\gamma\varphi_n(r) + (\Omega v + \gamma u)e^{\Omega z}\right] + i\left[(\Omega u - \gamma v)e^{\Omega z}\right] + \left[\Delta_{\perp}\varphi_n(r) + \Delta_{\perp}ue^{\Omega z} + i\Delta_{\perp}ve^{\Omega z}\right] + \\
& + \left(f(\varphi_n^2) + 2u\frac{\partial f}{\partial\varphi_n^2}\varphi_n e^{\Omega z}\right)\cdot(\varphi_n + (u+iv)e^{\Omega z}) = 0. \quad (*)
\end{aligned}$$

Перетворимо отримане рівняння на систему двох рівнянь. Знайдемо спочатку перше рівняння. З урахуванням рівняння (\*) та розвинення

$$f(\varphi_n^2 + 2\varphi_n e^{\Omega z} u) \approx f(\varphi_n^2) + 2u\frac{\partial f}{\partial\varphi_n^2}\varphi_n e^{\Omega z}, \text{ маємо:}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma\varphi_n(r) - (\Omega v + \gamma u)e^{\Omega z} + \Delta_{\perp}\varphi_n(r) + \Delta_{\perp}ue^{\Omega z} + \\
& + \left(f(\varphi_n^2(r)) + 2u\frac{\partial f}{\partial\varphi_n^2}\varphi_n(r)e^{\Omega z}\right)\varphi_n(r) + \left(f(\varphi_n^2(r)) + 2u\frac{\partial f}{\partial\varphi_n^2}\varphi_n(r)e^{\Omega z}\right)ue^{\Omega z} = 0, \\
& -\gamma\varphi_n(r) - (\Omega v + \gamma u)e^{\Omega z} + \Delta_{\perp}\varphi_n(r) + \Delta_{\perp}ue^{\Omega z} + \\
& + f(\varphi_n^2(r))\varphi_n(r) + 2u\frac{\partial f}{\partial\varphi_n^2}\varphi_n^2(r)e^{\Omega z} + f(\varphi_n^2(r))ue^{\Omega z} + 2u^2\frac{\partial f}{\partial\varphi_n^2}\varphi_n(r)e^{2\Omega z} = 0.
\end{aligned}$$

Отриману рівність ділимо на  $-e^{\Omega z}$  і розв'язуємо відносно  $v$ :

$$\Omega v = -\frac{\gamma\varphi_n(r)}{e^{\Omega z}} - \gamma u + \frac{\Delta_{\perp}\varphi_n(r)}{e^{\Omega z}} + \Delta_{\perp}u + \frac{f(\varphi_n^2(r))\varphi_n(r)}{e^{\Omega z}} +$$



$$+2u \frac{\partial f}{\partial \varphi_n^2} \varphi_n^2(r) + f(\varphi_n^2(r))u + 2u^2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_n^2} \varphi_n(r) e^{2\Omega z}.$$

Залишаємо тут величини одного порядку малості, враховуючи лише члени першого порядку по  $u$  і  $v$ . За умов  $\left| \frac{u}{\varphi_n} \right| \ll 1$ ,  $\left| \frac{v}{\varphi_n} \right| \ll 1$  знаходимо перше рівняння системи

$$\Omega v = \Delta_{\perp} u - \gamma u + f(\varphi_n^2(r))u + 2u \frac{\partial f}{\partial \varphi_n^2} \varphi_n^2(r).$$

З рівняння (\*), знову враховуючи  $f(\varphi_n^2 + 2\varphi_n e^{\Omega z} u) \approx f(\varphi_n^2) + 2u \frac{\partial f}{\partial \varphi_n^2} \varphi_n e^{\Omega z}$ ,

отримаємо друге рівняння

$$(\Omega u - \gamma v) e^{\Omega z} + \Delta_{\perp} v e^{\Omega z} + \left( f(\varphi_n^2(r)) + 2u \frac{\partial f}{\partial \varphi_n^2} \varphi_n(r) e^{\Omega z} \right) v e^{\Omega z} = 0.$$

Поділимо на  $e^{\Omega z}$  і розв'яжемо відносно  $u$ :

$$\Omega u = -\Delta_{\perp} v + \gamma v - f(\varphi_n^2(r))v + 2uv \frac{\partial f}{\partial \varphi_n^2} \varphi_n(r) e^{\Omega z}.$$

Залишаючи лише члени першого порядку по  $u$  і  $v$ , за умов  $\left| \frac{u}{\varphi_n} \right| \ll 1$ ,  $\left| \frac{v}{\varphi_n} \right| \ll 1$

отримуємо друге рівняння

$$\Omega u = -\Delta_{\perp} v + \gamma v - f(\varphi_n^2(r))v.$$

Отже, маємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \Omega u &= L_{on} v, \\ \Omega v &= -L_{1n} u, \end{aligned} \tag{2.6}$$

де  $L_{on} = -\Delta_{\perp} + \gamma - f(\varphi_n^2)$ ,  $L_{1n} = L_{on} - 2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_n^2} \varphi_n^2$ .

Виключаємо з рівнянь системи (2.6) змінну  $v$ . З першого рівняння знаходимо  $v = -\frac{L_{1n}u}{\Omega}$  і підставляємо в друге рівняння; множимо на  $\Omega$  і приходимо до задачі на власні значення [7]

$$-\Omega^2 u = L_{0n} L_{1n} u. \quad (2.7)$$

Для застосування до (2.7) варіаційного принципу необхідно виконання двох умов: існування та додатність оберненого оператора  $L_{0n}^{-1}$  [8]. Функція  $\varphi_n$  задовольняє (2.4) і є власною функцією  $L_{0n}$  з нульовим власним значенням. Це означає, що обернений оператор  $L_{0n}^{-1}$  у повному гільбертовому просторі не існує. Однак з (2.6) випливає, що

$$\Omega \langle u | \varphi_n \rangle = \langle \varphi_n | L_{0n} | v \rangle = \langle L_{0n} \varphi_n | v \rangle = 0,$$

тому при  $\Omega \neq 0$  всі розв'язки рівняння (2.7) ортогональні до  $\varphi_n$ . Оскільки нас цікавлять розв'язки системи (2.6) при  $\Omega \neq 0$ , то рівняння (2.7) достатньо розглянути на підпросторі функцій, ортогональних до  $\varphi_n$ . У цьому підпросторі  $L_{0n}^{-1}$  є обмеженим і (2.7) можна переписати у вигляді

$$-\Omega^2 L_{0n}^{-1} u = L_{1n} u, \quad \langle u | \varphi_n \rangle = 0. \quad (2.8)$$

Оператор  $L_{01}$ , який відповідає основній моді  $\varphi_1$ , є невід'ємним, оскільки  $\varphi_1$  ніде в нуль не перетворюється і є основною функцією  $L_{01}$ , а нульове власне значення є найменшим. Таким чином, на підпросторі функцій, ортогональних до  $\varphi_1$ , оператор  $L_{01}$ , а отже і  $L_{01}^{-1}$  є додатно визначеними. Для вищих мод  $\varphi_n$  ( $n > 1$ ) оператори  $L_{0n}$  не є невід'ємними, оскільки  $\varphi_n$  мають нулі і не можуть бути основними функціями відповідних операторів. Тому  $L_{0n}$  при  $n > 1$  мають від'ємні власні значення, а  $L_{0n}^{-1}$  не є додатно визначеними. Таким чином, варіаційний принцип застосовний до (2.8) тільки у випадку основної моди при  $n = 1$ . Необхідно відмітити, що для вищих мод лінеаризована система (2.6)

описує обмежений клас збурень, оскільки через умови  $\left| \frac{u}{\varphi_n} \right| \ll 1$ ,  $\left| \frac{v}{\varphi_n} \right| \ll 1$  збурення  $u$  і  $v$  повинні перетворюватися в нуль в тих самих точках, що й  $\varphi_n$ . Тому для коректного аналізу стійкості вищих мод необхідно використовувати вихідне рівняння (2.1).

Згідно варіаційного принципу найменше власне значення  $-\Omega_0^2$  при  $n = 1$  дорівнює [8]

$$-\Omega_0^2 = \min \frac{\langle u | L_{11} | u \rangle}{\langle u | L_{01}^{-1} | u \rangle}, \quad \langle u | \varphi_1 \rangle = 0. \quad (2.9)$$

Враховуючи додатність  $L_{01}^{-1}$  достатньо дослідити умовний мінімум функціонала  $G = \langle u | L_{11} | u \rangle$ . У роботі [7] доведена від'ємність абсолютного мінімуму  $G$  і на цій підставі зроблено висновок про існування експоненціально зростаючих збурень у випадку кубічного середовища. Однак від'ємність абсолютного мінімуму є необхідною, а не достатньою умовою нестійкості. Нижче буде показано, що умовний мінімум визначається знаком похідної енергії основної моди  $I_1$  по параметру  $\gamma$ . При  $\frac{dI_1}{d\gamma} \geq 0$  умовний мінімум дорівнює нулю й усі  $\Omega$  чисто уявні або дорівнюють нулю; при  $\frac{dI_1}{d\gamma} < 0$  умовний мінімум від'ємний й існують експоненціально зростаючі збурення.

Застосовуючи метод невизначених множників Лагранжа, можна отримати рівняння для функції  $\psi$ , яка мінімізує  $G$  за умови  $\langle \psi | \varphi_1 \rangle = 0$ :

$$L_{11}\psi = \lambda\psi + \alpha\varphi_1, \quad (2.10)$$

де  $\lambda$  і  $\alpha$  – константи, які визначаються з умови ортогональності  $\langle \psi | \varphi_1 \rangle = 0$  та нормування  $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ . Мінімум  $G$  визначається найменшим значенням  $\lambda$ , при якому (2.10) має розв'язок.

Розкладемо функції  $\psi$  і  $\varphi_1$  за повною ортонормованою системою власних функцій оператора  $L_{11}$ , тобто  $L_{11}\psi_n = \lambda_n\psi_n$ . Маємо  $\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m$  і  $\varphi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m\psi_m$ .

Спочатку помножимо скалярно останню рівність на  $\psi_m$ :

$$\langle \varphi_1 | \psi_n \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \langle \psi_m | \psi_n \rangle = c_n \langle \psi_n | \psi_n \rangle,$$

звідки

$$c_n = \frac{\langle \varphi_1 | \psi_n \rangle}{\langle \psi_n | \psi_n \rangle} = \langle \varphi_1 | \psi_n \rangle, \quad \text{де } \langle \psi_n | \psi_n \rangle = 1.$$

Тепер урахування  $\varphi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m\psi_m$  у співвідношенні  $L_{11}\psi_n = \lambda_n\psi_n$ , приводить до

$$(L_{11} - \lambda)\psi = \alpha\varphi_1 \quad \Rightarrow \quad (L_{11} - \lambda)\psi = \alpha \sum_{m=1}^{\infty} c_m\psi_m.$$

Звідси знаходимо  $\psi$ , помноживши останню рівність на  $(L_{11} - \lambda)^{-1}$ :

$$\psi = \alpha(L_{11} - \lambda)^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} c_m\psi_m = \alpha \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\lambda_m - \lambda} \psi_m.$$

Отже,

$$\psi = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda} \psi_n, \quad c_n = \langle \varphi_1 | \psi_n \rangle. \quad (2.11)$$

Умова  $\langle \psi, \varphi_1 \rangle = 0$  приводить до рівняння для  $\lambda$ . Дійсно, з (2.11) витікає

$$\langle \psi | \varphi_1 \rangle = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda} \langle \psi_n | \varphi_1 \rangle = 0.$$

Оскільки  $\varphi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m\psi_m$ , то

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda} \left\langle \psi_n \left| \sum_{m=1}^{\infty} c_m\psi_m \right. \right\rangle = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \lambda} \sum_{m=1}^{\infty} c_m \langle \psi_n | \psi_m \rangle = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_n - \lambda},$$

де  $c_n \langle \psi_n | \psi_n \rangle = c_n$ . Позначимо  $f_1(\lambda) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_n - \lambda}$  і запишемо рівняння для  $\lambda$ :

$$\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_n - \lambda} = \alpha f_1(\lambda) = 0. \quad (2.12)$$

При  $\alpha = 0$  функція  $\psi$ , як витікає з (2.10), є однією з власних функцій оператора  $L_{11}$ , і ортогональна до  $\varphi_1$ , а  $\lambda$  збігається, з одним із власних значень  $L_{11}$ . Нижче буде показано, що  $L_{11}$  має одне від'ємне власне значення. Відповідна власна функція як функція основного стану не має нулів і не може бути ортогональною до  $\varphi_1$ , яка також ніде в нуль не перетворюється. Друге власне значення  $L_{11}$  дорівнює нулю, причому відповідні власні функції ортогональні до  $\varphi_1$ . Тому при  $\alpha = 0$   $\min \lambda = 0$  й умовний мінімум  $G$  також дорівнює нулю. При  $\alpha \neq 0$   $\min G$  визначається найменшим коренем рівняння

$$f_1(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_n - \lambda} = 0. \quad (2.13)$$

Оскільки  $c_1 \neq 0$ , а  $c_2 = 0$ , то  $\lambda_{\min}$  знаходиться між  $\lambda_1 < 0$  і  $\lambda_3 > 0$ . При  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_3$   $f_1(\lambda)$  монотонно зростає від  $-\infty$  до  $+\infty$ , тому для визначення знаку  $\lambda_{\min}$  достатньо визначити  $f_1(0)$ : при  $f_1(0) \leq 0$   $\lambda_{\min} \geq 0$ , при  $f_1(0) > 0$   $\lambda_{\min} < 0$ . З (2.13) випливає, що

$$f_1(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_n} = \langle \varphi_1 | L_{11}^{-1} | \varphi_1 \rangle. \quad (2.14)$$

Диференціюючи (2.2) по  $\gamma$ :

$$\Delta_{\perp} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma} - \varphi_1 - \gamma \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma} + \frac{\partial f(\varphi_1^2)}{\partial \gamma} \varphi_1 + f(\varphi_1^2) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma} = 0,$$

$$-\Delta_{\perp} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma} + \varphi_1 + \gamma \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma} - 2\varphi_1^2 \frac{\partial f(\varphi_1^2)}{\partial \varphi_1^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma} - f(\varphi_1^2) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma} = 0,$$

$$\left[ -\Delta_{\perp} + \gamma - f(\varphi_1^2) - 2\varphi_1^2 \frac{\partial f(\varphi_1^2)}{\partial \varphi_1^2} \right] \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma} + \varphi_1 = 0,$$

отримаємо

$$L_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma} + \varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{11}^{-1} \varphi_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma}.$$

Тому

$$f_1(0) = -\left\langle \varphi_1 \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma} \right. \right\rangle = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\gamma} \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle = -\frac{1}{2} \frac{dI_1}{d\gamma}. \quad (2.15)$$

Отже, умовний мінімум  $G$  при  $\alpha \neq 0$  визначається знаком  $\frac{dI_1}{d\gamma}$ : якщо

$\frac{dI_1}{d\gamma} \geq 0$ , то  $\lambda_{\min} \geq 0$ , якщо  $\frac{dI_1}{d\gamma} < 0$ , то  $\lambda_{\min} < 0$ . На основі отриманих результатів

можна стверджувати, що якщо  $L_{11}$  має лише одне від'ємне власне значення, то

$\min G = 0$  при  $\frac{dI_1}{d\gamma} \geq 0$  і  $\min G < 0$  при  $\frac{dI_1}{d\gamma} < 0$ . В останньому випадку існують

експоненціально зростаючі збурення і  $\varphi_1$  нестійка. З рис. 6 видно, що в

середовищі з насиченням  $I_1(\gamma)$  при  $0 < \gamma < 1$  монотонно зростає і  $\frac{dI_1}{d\gamma} > 0$ . Це

означає відсутність експоненціально зростаючих збурень і стійкість  $\varphi_1$  в

лінійному по збуренні наближенні.

Доведемо тепер, що оператор  $L_{11}$  при  $f = \frac{\varphi^2}{1 + \varphi^2}$  має лише одне від'ємне

власне значення. Зазначимо, що нижчий несиметричний стан  $L_{11}$  дворазово

вироджений і відповідає нульовому власному значенню [7]. Тому всі власні

функції, які відповідають від'ємним власним значенням, повинні бути

симетричними і залежати лише від  $r$ . При  $\gamma \rightarrow 0$  розв'язок рівняння (2.4)

переходить у відповідний розв'язок кубічного рівняння, а задача на власні

значення оператора  $L_{11}$  набуває вигляду

$$-\Delta_{\perp} \psi_n + \gamma \psi_n - 3\gamma \varphi_{01}^2 \psi_n = \lambda_n \psi_n, \quad (2.16)$$

де  $\varphi_{01}$  – основна мода кубічного рівняння.

Аналіз симетричних розв'язків задачі (2.16), проведений чисельно, показав існування тільки одного від'ємного власного значення  $\lambda_1 = -5,44\gamma$ . Усі інші власні значення симетричних розв'язків строго більше нуля. При зростанні  $\gamma$  рівні оператора  $L_{11}$  буде зміщуватись, і необхідно довести, що жодне  $\lambda_n(\gamma)$  ( $n > 1$ ), яке відповідає симетричній власній функції, при  $0 < \gamma < 1$  не перейде у від'ємну область. Для цього достатньо показати, що рівняння  $L_{11}\psi = 0$  при  $0 < \gamma < 1$  не має обмежених симетричних розв'язків. Це означає, що при зростанні  $\gamma$  жодне власне значення  $\lambda_n(\gamma)$  ( $n > 1$ ), яке відповідає симетричній функції, ні при яких  $\gamma$  не може перетворюватись в нуль і тим більше перейти у від'ємну область. Зазначимо, що з умови обмеженості  $\psi$  при  $r = 0$  випливає, що  $\left. \frac{d\psi}{dr} \right|_{r=0} = 0$ . Вище було показано, що симетричний розв'язок рівняння

$L_{11}\psi = 0$ , який задовольняє умову  $\left. \frac{d\psi}{dr} \right|_{r=0} = 0$ , не є обмеженим. Отже, при  $0 < \gamma < 1$  оператор  $L_{11}$  не має симетричних власних функцій з нульовим власним значенням і при усіх  $\gamma$  має лише одне від'ємне власне значення.

Насамкінець зауважимо, що абсолютно аналогічно можна довести відсутність другого від'ємного власного значення оператора  $L_{11}$ , коли  $f(\varphi^2)$  задовольняє двом умовам: при  $\varphi^2 \rightarrow 0$   $f(\varphi^2) \rightarrow \varphi^2$ ; функція  $f$  має неперервну першу та другу похідні по  $\varphi^2$ . Тому у цьому випадку стійкість основної моди визначається похідною її енергії по параметру  $\gamma$ .

## 2.4. Висновки до розділу II

У даному розділі викладена схема Вахітова-Колоколова дослідження стійкості структури та стійкості стаціонарних розв'язків для середовища з насиченою нелінійністю.

Умовний мінімум  $G$  при  $\alpha \neq 0$  визначається знаком  $\frac{dI_1}{d\gamma}$ : якщо  $\frac{dI_1}{d\gamma} \geq 0$ , то  $\lambda_{\min} \geq 0$ , якщо  $\frac{dI_1}{d\gamma} < 0$ , то  $\lambda_{\min} < 0$ . Встановлено, що якщо  $L_{11}$  має лише одне від'ємне власне значення, то  $\min G = 0$  при  $\frac{dI_1}{d\gamma} \geq 0$  і  $\min G < 0$  при  $\frac{dI_1}{d\gamma} < 0$ .

В останньому випадку існують експоненціально зростаючі збурення і функція  $\varphi_1$  нестійка. У середовищі з насиченням  $I_1(\gamma)$  при  $0 < \gamma < 1$  монотонно зростає і  $\frac{dI_1}{d\gamma} > 0$ . Це означає відсутність експоненціально зростаючих збурень і стійкість  $\varphi_1$  в лінійному по збуренні наближенні.



## РОЗДІЛ III

У цьому розділі в рамках нелінійного рівняння Шредінгера з довільним знаком ангармонізмів досліджено солітонні стани, локалізовані поблизу точкового дефекту, при різному характері цього дефекту. Описані всі можливі в такій системі стани і, використовуючи методику викладену в роботі Вахітова-Колоколова [3], наведено аналіз стійкості знайдених солітонних розв'язків при різному характері взаємодії елементарних збуджень між собою та з дефектом. Знайдена частота малих коливань солітона поблизу домішка.

У теорії кристалічної ґратки локальним дефектом вважається дефект з розмірами порядку міжатомних. При дослідженні солітонних збуджень, ефективний розмір яких в залежності від частоти солітона може змінюватися в широких межах, точковим (або локальним) дефектом будемо вважати збудження характеристик нелінійного середовища, зосереджене на відстанях, набагато менших ширини солітона.

За наявності точкового дефекту НРШ для польової змінної  $u$  має вигляд

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\sigma |u|^2 u = -\lambda \delta(z) \cdot u, \quad (3.1)$$

де  $\sigma = \pm 1$  характеризує взаємодію елементарних збуджень ( $\sigma = +1$  відповідає їх взаємному тяжінню,  $\sigma = -1$  – відштовхуванню) і  $\lambda$  – характеристика величини дефекту (його «потужність»). При  $\lambda < 0$  елементарні збурення «відштовхуються» від дефекту, а при  $\lambda > 0$  – ефективно «притягуються» до нього.

### 3.1. Солітонні розв'язки рівняння Шредінгера як коливання, локалізовані на дефекті

а) У середовищі без дефектів ( $\lambda = 0$ ) у лінійній границі ( $\sigma = 0$ ) рівняння (3.1) суттєво спрощується

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

і закон дисперсії лінійних хвиль  $u(z, t) \sim \exp(ikz - i\omega t)$  має вигляд

$$\omega = k^2. \quad (3.2)$$

Звідси витікає, що спектр лінійних збуджень займає піввісь  $\omega \geq 0$ .

b) При  $\lambda > 0$  у лінійній границі ( $\sigma = 0$ ) розв'язок рівняння

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\lambda \delta(z) \cdot u$$

шукаємо у вигляді  $u(z, t) = u(z) \exp(-i\omega t)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -i\omega u(z) \exp(-i\omega t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u''(z) \exp(-i\omega t),$$

$$\omega u(z) \exp(-i\omega t) + u''(z) \exp(-i\omega t) = -\lambda \delta(z) u(z) \exp(-i\omega t),$$

$$\omega u(z) + u''(z) = -\lambda \delta(z) u(z).$$

Розв'язку цього неоднорідного рівняння відповідає розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\omega u(z) + u''(z) = 0,$$

яке задовольняє крайові умови:

$$u(z)|_{+0} - u(z)|_{-0} = 0,$$

$$u'(z)|_{+0} - u'(z)|_{-0} = -\lambda u(z)|_0.$$

Перша крайова умова випливає з неперервності шуканої функції, а друга з означення  $\delta$ -функції та інтегрування неоднорідного рівняння в околі нуля.

А саме

$$\int_{-0}^{+0} (\omega u(z) + u''(z)) dz = -\lambda \int_{-0}^{+0} \delta(z) u(z) dz,$$

$$\int_{-0}^{+0} u'(z) dz = -\lambda u(z)|_0 \quad \Rightarrow \quad u'(z)|_{+0} - u'(z)|_{-0} = -\lambda u(z)|_0.$$

Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння:

$$\omega + k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm\sqrt{-\omega},$$

$$u(z) = C_1 \exp(\sqrt{-\omega}z) + C_2 \exp(-\sqrt{-\omega}z).$$

Оскільки нас цікавлять солітонні розв'язки ( $u(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \pm\infty$ ), то загальний розв'язок рівняння шукатимемо у вигляді

$$u(z) = C_2 \exp(-\sqrt{-\omega}z) \quad \text{при } z > 0,$$

$$u(z) = C_1 \exp(\sqrt{-\omega}z) \quad \text{при } z < 0.$$

Задовольняючи крайові умови знайдемо сталі:

$$C_2 \exp(-\sqrt{-\omega}z)|_{+0} = C_1 \exp(\sqrt{-\omega}z)|_{-0} \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = C$$

і локалізовані на дефекті коливання

$$-\sqrt{-\omega} C \exp(-\sqrt{-\omega}z)|_{+0} - \sqrt{-\omega} C \exp(\sqrt{-\omega}z)|_{-0} = -\lambda C \exp(\pm\sqrt{-\omega}z)|_0,$$

$$2\sqrt{-\omega} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \omega = -\frac{\lambda^2}{4}.$$

Їх частота дорівнює  $\omega_l = -\lambda^2/4$  і лежить під нижньою межею суцільного спектру. При  $\lambda < 0$  такі локалізовані коливання відсутні.

с) По аналогії з попереднім, розв'язок рівняння (3.1) шукатимемо для однорідного рівняння

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\sigma |u|^2 u = 0 \quad (3.3)$$

в областях  $z > 0$  і  $z < 0$  з крайовими умовами при  $z = 0$ :

$$u|_{+0} = u|_{-0}, \quad (3.4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{+0} - \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{-0} = -\lambda u|_0. \quad (3.5)$$

Шукаємо стаціонарні розв'язки рівняння (3.3) у вигляді

$$u(z, t) = u(z) \cdot \exp(-i\omega t), \quad (3.6)$$

де  $u(z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \pm\infty$ . Маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} &= -i\omega u(z) \exp(-i\omega t), & \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} &= u''(z) \exp(-i\omega t); \\ -i^2 \omega u(z) \exp(-i\omega t) + u''(z) \exp(-i\omega t) + 2\sigma |u(z)|^2 u(z) \exp(-i\omega t) &= 0, \end{aligned}$$

$$\omega u(z) + u''(z) + 2\sigma |u(z)|^2 u(z) = 0,$$

$$\omega u(z) + u''(z) + 2\sigma u^3(z) = 0.$$

Приймаємо  $\sigma = +1$  і розв'язуємо диференціальне рівняння:

$$\omega u + u'' + 2u^3 = 0.$$

Помножимо його на  $2u'$  і зінтегруємо:

$$2u'u'' = 2u'(-\omega u - 2u^3),$$

$$(u')^2 = 2(-\omega u - 2u^3) \frac{du}{dz} dz = 2(-\omega u - 2u^3) du = -2\omega \frac{u^2}{2} - 4 \frac{u^4}{4} = -\omega u^2 - u^4,$$

$$u' = \sqrt{-\omega u^2 - u^4} = \pm iu \sqrt{u^2 + \omega},$$

$$\frac{du}{\pm iu \sqrt{u^2 + \omega}} = dz.$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{du}{u \sqrt{u^2 + \omega}} \right| &= \left| \varepsilon = \sqrt{-\omega} \right| = \left| \frac{du}{u \sqrt{u^2 - \varepsilon^2}} \right| = \left| u = \frac{\varepsilon}{\cos t}, t = \arccos \frac{\varepsilon}{u}, du = \frac{\varepsilon \sin t}{\cos^2 t} dt \right| = \\ &= \left| \frac{\varepsilon \sin t \cos t dt}{\varepsilon \cos^2 t \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\cos^2 t} - \varepsilon^2}} \right| = \left| \frac{\sin t dt}{\varepsilon \cos t \frac{\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\cos t}} \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sin t dt}{\sin t} \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} dt \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} t \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \arccos \frac{\varepsilon}{u} \right|. \end{aligned}$$

Звідки

$$\frac{1}{\varepsilon i} \arccos \frac{\varepsilon}{u} = \pm z - z_0 \quad \Rightarrow \quad \arccos \frac{\varepsilon}{u} = \varepsilon i (|z| - z_0),$$

$$\frac{\varepsilon}{u} = \cos[\varepsilon i (|z| - z_0)] = ch[\varepsilon (|z| - z_0)],$$

$$u = \frac{\varepsilon}{ch[\varepsilon (|z| - z_0)]}.$$

У результаті у випадку  $\sigma = +1$  маємо наступний розв'язок, який задовольняє крайовим умовам:

$$u(z, t) = \frac{\varepsilon}{ch[\varepsilon (|z| - z_0)]} \exp(-i\omega t), \quad (3.7)$$

де параметр  $\varepsilon \equiv \sqrt{-\omega}$  характеризує амплітуду розв'язку, область його локалізації та частоту збуджень, а параметри  $\varepsilon$  і  $z_0$  зв'язані співвідношенням, яке витікає з другої крайової умови (3.5):

$$z > 0: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-\varepsilon^2 sh[\varepsilon(z - z_0)]}{ch^2[\varepsilon(z - z_0)]} \exp(-i\omega t),$$

$$z < 0: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{+\varepsilon^2 sh[\varepsilon(-z - z_0)]}{ch^2[\varepsilon(-z - z_0)]} \exp(-i\omega t),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{+0} = \frac{-\varepsilon^2 sh[-\varepsilon z_0]}{ch^2[-\varepsilon z_0]} \exp(-i\omega t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{-0} = \frac{\varepsilon^2 sh[-\varepsilon z_0]}{ch^2[-\varepsilon z_0]} \exp(-i\omega t),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{+0} - \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{-0} = \frac{-2\varepsilon^2 sh[-\varepsilon z_0]}{ch^2[-\varepsilon z_0]} \exp(-i\omega t) = -\lambda \frac{\varepsilon}{ch[-\varepsilon z_0]} \exp(-i\omega t),$$

$$2\varepsilon th(\varepsilon z_0) = -\lambda. \quad (3.8)$$

Зі співвідношення (3.8) випливає, що  $\text{sgn}(z_0) = -\text{sgn}(\lambda)$  і максимально можлива частота розв'язку при будь-якому знаці  $\lambda$  збігається з частотою локальних коливань у відповідній лінійній системі:

$$\omega_l = -\frac{\lambda^2}{4}, \quad (3.9)$$

а інтервал допустимих частот необмежений знизу.

d) У випадку  $\sigma = -1$  шукаємо розв'язок диференційного рівняння:

$$\omega u + u'' - 2u^3 = 0.$$

Також множимо його на  $2u'$  й інтегруємо:

$$2u'u'' = 2u'(-\omega u + 2u^3),$$

$$(u')^2 = 2(-\omega u + 2u^3) \frac{du}{dz} dz = 2(-\omega u + 2u^3) du = -2\omega \frac{u^2}{2} + 4 \frac{u^4}{4} = -\omega u^2 + u^4,$$

$$u' = \sqrt{-\omega u^2 + u^4} = \pm u \sqrt{u^2 - \omega},$$

$$\frac{du}{\pm u \sqrt{u^2 - \omega}} = dz.$$

Обчислення останнього інтеграла дає

$$\begin{aligned} \left| \frac{du}{u \sqrt{u^2 - \omega}} \right| &= \left| \varepsilon = \sqrt{-\omega} \right| = \left| \frac{du}{u \sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \right| = \left| u = \frac{\varepsilon}{\text{sh}t}, t = \text{arcsch} \frac{\varepsilon}{u}, du = \frac{\varepsilon \text{cht}}{\text{sh}^2 t} dt \right| = \\ &= \left| \frac{\varepsilon \text{sh}t \text{cht} dt}{\varepsilon \text{sh}^2 t \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\text{ch}^2 t} + \varepsilon^2}} \right| = \left| \frac{\text{cht} dt}{\varepsilon \text{sh}t \frac{\sqrt{1 + \text{sh}^2 t}}{\text{sh}t}} \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \frac{\text{cht} dt}{\text{cht}} = \frac{1}{\varepsilon} dt = \frac{1}{\varepsilon} t = \frac{1}{\varepsilon} \text{arcsch} \frac{\varepsilon}{u} \right|. \end{aligned}$$

Звідки

$$\frac{1}{\varepsilon} \text{arcsch} \frac{\varepsilon}{u} = \pm z - z_0 \quad \Rightarrow \quad \text{arcsch} \frac{\varepsilon}{u} = \varepsilon (|z| - z_0),$$

$$\frac{\varepsilon}{u} = \text{sh} \left[ \varepsilon (|z| - z_0) \right] \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\varepsilon}{\text{sh} \left[ \varepsilon (|z| - z_0) \right]}.$$

Отже,

$$u(z,t) = \frac{\varepsilon}{sh[\varepsilon(|z| - z_0)]} \exp(-i\omega t). \quad (3.10)$$

При цьому величина  $z_0$  може приймати лише від'ємні значення, а зв'язок між параметрами  $\varepsilon$  і  $z_0$  тепер має вигляд:

$$z > 0: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-\varepsilon^2 ch[\varepsilon(z - z_0)]}{sh^2[\varepsilon(z - z_0)]} \exp(-i\omega t),$$

$$z < 0: \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{+\varepsilon^2 ch[\varepsilon(-z - z_0)]}{sh^2[\varepsilon(-z - z_0)]} \exp(-i\omega t),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{+0} = \frac{-\varepsilon^2 ch(-\varepsilon z_0)}{sh^2(-\varepsilon z_0)} \exp(-i\omega t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{-0} = \frac{\varepsilon^2 ch(-\varepsilon z_0)}{sh^2(-\varepsilon z_0)} \exp(-i\omega t),$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{+0} - \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{-0} = \frac{-2\varepsilon^2 ch(-\varepsilon z_0)}{sh^2(-\varepsilon z_0)} \exp(-i\omega t) = -\lambda \frac{\varepsilon}{sh(-\varepsilon z_0)} \exp(-i\omega t),$$

$$2\varepsilon ch(-\varepsilon z_0) = \lambda,$$

звідки

$$2\varepsilon ch(\varepsilon z_0) = -\lambda. \quad (3.11)$$

Таким чином, при  $\sigma = -1$  величина  $\lambda$  може бути лише додатною, тобто локалізований стан реалізується лише у випадку притягуючого дефекту.

Тепер інтервал допустимих частот має верхню та нижню границі: мінімальному значенню відповідає частота локальних коливань лінійної системи  $\omega_l$ , а максимальному (нульовому) відповідає межа спектра лінійних хвиль.

Отже, нелінійні локалізовані стани існують при таких співвідношеннях параметрів  $\sigma$  та  $\lambda$ : (1)  $\sigma = +1, \lambda > 0$ ; (2)  $\sigma = +1, \lambda < 0$ ; (3)  $\sigma = -1, \lambda > 0$ .

### 3.2. Інтеграли руху

Рівняння (3.1) описує динаміку консервативної системи і тому володіє інтегралами руху [9] – повною енергією

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 - \sigma |u|^4 - \lambda \delta(z) \cdot |u|^2 \right\}, \quad (3.12)$$

і повним числом елементарних збуджень (або квантів поля)

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dz. \quad (3.13)$$

Розглянемо спочатку **випадок**  $\sigma = +1$ .

Виразимо інтеграли руху  $E$  та  $N$  через частоту (або зв'язаний з нею параметр  $\varepsilon$ ). Використовуючи явний вигляд розв'язку (3.7) в формулах (3.12), (3.13) і враховуючи при цьому залежність  $z_0(\varepsilon)$  (див. співвідношення (3.8)), отримаємо

$$E = \sigma \cdot \left[ -\frac{2\varepsilon^3}{3} + \frac{\lambda^3}{12} \right], \quad (3.14)$$

$$N = 2\sigma \cdot \left[ \varepsilon - \frac{\lambda}{2} \right]. \quad (3.15)$$

При  $\sigma = -1$ , підставляючи розв'язок (3.10) і  $z_0(\varepsilon)$  зі співвідношення (3.11) у формули (3.12), (3.13), отримуємо залежності  $E = E(\omega)$  і  $N = N(\omega)$ , які повністю збігається з виразами (3.14), (3.15), але з  $\sigma = -1$ .

Використовуючи вирази (3.14) і (3.15) та виключаючи параметр  $\omega$ , знаходимо зв'язок повної енергії з числом зв'язаних збуджень:

$$E(N) = -\frac{N\lambda^2}{4} - \frac{N^3}{12} - \frac{\sigma\lambda N^2}{4} = N\omega_l - \frac{N^3}{12} - \frac{\sigma\lambda N^2}{4}. \quad (3.16)$$



У випадку  $\sigma = +1$  формула (3.16) має таке тлумачення. Перший доданок описує енергію  $N$  не взаємодіючих між собою елементарних збуджень і відповідає описанню системи в лінійному наближенні. Другий доданок описує енергію взаємодії елементарних збуджень в солітоні й має той самий вигляд, що і у випадку солітонів в однорідному середовищі. Нарешті, останній доданок описує взаємодію зв'язаних частинок через домішок. Зауважимо, що від знаку дефекту (знак  $\lambda$ ) залежить лише останній доданок: при  $\lambda > 0$  енергія зменшується, тобто домішок «притягує» частинки і солітон як ціле до себе, а при  $\lambda < 0$  наявність домішку збільшує енергію солітона, тобто «відштовхує» солітон.

### 3.3. Стійкість локалізованих станів у нелінійному середовищі з точковим дефектом, який має лінійні властивості

Досліджуватимемо стійкість отриманих розв'язків відносно малих збурень амплітуди і фази. При розв'язуванні цієї задачі будемо дотримуватися схеми, запропонованої Вахітовим-Колоколовим [3].

Запишемо розв'язок рівняння (3.1) у вигляді

$$\begin{aligned} u(z,t) &= \tilde{u}(z,t) + \theta(z,t) = \\ &= u(z) \cdot \exp(-i\omega t) + v(z,t) \cdot \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (3.17)$$

де  $\tilde{u}(z,t)$  – розв'язок рівняння (3.1) для стаціонарного солітону (3.6) і  $|\theta(z,t)| \ll |\tilde{u}(z,t)|$ . Лінеаризуємо (3.1) за малими добавками  $v(z,t)$  і для комплексної функції  $v(z,t)$  отримуємо рівняння:

$$\begin{aligned} i \cdot \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} - \varepsilon^2 v(z,t) + \\ + 4\sigma v(z,t) u^2(z) + 2\sigma v^*(z,t) u^2(z) = -\lambda \delta(z) v(z,t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Подаючи розв'язок рівняння (3.18) у вигляді

$$v(z,t) = \{A(z) + i \cdot B(z)\} \cdot \exp(\Omega t), \quad (3.19)$$

отримуємо для функцій  $A$  і  $B$  систему двох звичайних лінійних диференціальних рівнянь:

$$\hat{L}_0 B = \Omega A, \quad (3.20)$$

$$\hat{L}_1 A = -\Omega B, \quad (3.21)$$

де оператори  $\hat{L}_0$  і  $\hat{L}_1$  визначаються виразами:

$$\hat{L}_0 = -\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - 2\sigma u^2(z) - \lambda\delta(z), \quad (3.22)$$

$$\hat{L}_1 = -\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - 6\sigma u^2(z) - \lambda\delta(z), \quad (3.23)$$

а функція  $u(z)$ , з урахуванням введених позначень, повинна задовольняти рівняння

$$\hat{L}_0 u(z) = 0. \quad (3.24)$$

Виключаємо із системи рівнянь (3.20), (3.21) функцію  $B$

$$B = -\frac{1}{\Omega} \hat{L}_1 A,$$

$$-\frac{1}{\Omega} \hat{L}_0 \hat{L}_1 A = \Omega A.$$

Звідси отримуємо наступну задачу на власні значення:

$$\hat{L}_0 \hat{L}_1 A = -\Omega^2 A. \quad (3.25)$$

Відмітимо, що, не зважаючи на те, що оператор  $\hat{L}_0 \hat{L}_1$  не є ермітовим, його власні значення  $\Omega^2$  є дійсними. Доведемо це, зводячи вихідну задачу на власні значення (3.20), (3.21) до еквівалентної задачі на власні значення для ермітового оператора:

$$\hat{L}^- \hat{L}_1 \hat{L}^+ W = -\Omega^2 W, \quad (3.26)$$

$$\text{де } \hat{L}^\pm = \pm \frac{d}{dz} + \frac{1}{u} \frac{du}{dz}, \quad W = \hat{L}^- B \quad \text{і} \quad \hat{L}_0 = \hat{L}^+ \hat{L}^-.$$

Дійсно, оскільки  $\hat{L}^+ \hat{L}^- \hat{L}_1 A = -\Omega^2 A$ , то враховуючи (3.26) і  $\hat{L}^\pm = \pm \frac{d}{dz} + \frac{1}{u} \frac{du}{dz}$ ,

$$W = \hat{L}^- B, \quad \hat{L}_0 = \hat{L}^+ \hat{L}^-, \quad \text{матимемо} \quad A = \frac{1}{\Omega} \hat{L}_0 B = \frac{1}{\Omega} \hat{L}^+ \hat{L}^- B. \quad \text{Отже,}$$

$\frac{1}{\Omega} \hat{L}^+ \hat{L}^- \hat{L}_1 \hat{L}^+ \hat{L}^- B = -\Omega \hat{L}^+ \hat{L}^- B$ . Помноживши ліву та праву частини цієї рівності на

$\Omega$ , отримаємо  $\hat{L}^- \hat{L}_1 \hat{L}^+ \hat{L}^- B = -\Omega^2 \hat{L}^+ \hat{L}^- B$ , а звідси і (3.26).

З того, що величина  $\Omega^2$  – дійсна, випливає, що якщо серед власних значень  $\Omega^2$  є додатні (на класі власних функцій, ортогональних до  $u$ ), то наш локалізований розв'язок нестійкий і малі збудження експоненціально зростають.

З огляду на те, що функція  $u$  ніде в нуль не перетворюється, на підпросторі функцій, ортогональних  $u$ , існує додатно визначений оператор  $\hat{L}_0^{-1}$ , обернений до оператора  $\hat{L}_0$ . Внаслідок цього до рівняння (3.25) можна застосувати варіаційний принцип, згідно якому власне значення  $-\Omega^2$  дорівнює

$$-\Omega^2 = \min \left[ \frac{\langle \varphi | \hat{L}_1 | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \hat{L}_0^{-1} | \varphi \rangle} \right], \quad \langle u | \varphi \rangle = 0. \quad (3.27)$$

Тоді задача про стійкість зводиться до дослідження умовного мінімуму функціонала  $F = \langle \varphi | \hat{L}_1 | \varphi \rangle$ . Якщо він невід'ємний, то розв'язок стійкий.

За допомогою невизначених множників Лагранжа можна дістати рівняння для функції  $\psi$ , яка мінімізує функціонал  $F$  за умови  $\langle u | \varphi \rangle = 0$ :

$$\hat{L}_1 \psi = \chi \psi + \alpha u. \quad (3.28)$$

Мінімум  $F$  визначається найменшим значення  $\chi$ , при якому рівняння (3.28) має розв'язок. Із (2.28), з урахуванням умови  $\langle u | \varphi \rangle = 0$ , випливає рівняння для  $\chi$ :

$$\alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{\chi_n - \chi} = \alpha f(\chi) = 0, \quad (3.29)$$

де  $C_n = \langle u | \psi_n \rangle$  і  $\psi_n, \chi_n$  – власні функції та власні значення оператора  $\hat{L}_1$  відповідно.

Проведемо спочатку аналіз стійкості розв'язків для випадку м'якої нелінійності  $\sigma = +1$  (випадки 1 та 2).

У відсутності дефекту дослідження стійкості розв'язку (3.7) повністю відповідає схемі, викладеній у роботі Вахітова-Колоколова [3]. При цьому оператор  $\hat{L}_1$  визначається виразом

$$L_1^{(0)} = -\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - \frac{6\varepsilon^2}{ch^2(\varepsilon z)}. \quad (3.30)$$

Власна функція основного стану цього оператора та відповідне власне значення мають вигляд

$$\psi_1^{(0)} = \frac{\sqrt{3\varepsilon}/2}{ch^2(\varepsilon z)}, \quad \chi_1^{(0)} = -3\varepsilon^2, \quad (3.31)$$

а власна функція й власне значення наступного стану дорівнюють відповідно

$$\psi_2^{(0)} = \sqrt{\frac{3\varepsilon}{2}} \frac{sh(\varepsilon z)}{ch^2(\varepsilon z)}, \quad \chi_2^{(0)} = 0. \quad (3.32)$$

У відсутності домішка, як відомо, солітонний розв'язок НУШ стійкий. Наявність дефекту ускладнює задачу дослідження стійкості розв'язків, оскільки у цьому випадку оператори  $\hat{L}_0$  і  $\hat{L}_1$  мають більш складний вигляд, ніж у випадку  $\lambda = 0$ . Переконаємося, однак, що для значень  $\varepsilon|z_0| \ll 1$  оператор  $\hat{L}_1$  буде мати вигляд  $\hat{L}_1 = \hat{L}_1^{(0)} + \hat{\eta}$ , де  $\hat{\eta}$  – збурення, лінійне за малими добавками, пропорційними малому параметру  $\frac{|\lambda|}{2\varepsilon}$ . При цьому можливо врахувати зміну власних функцій та власних значень оператора  $\hat{L}_1^{(0)}$  за теорією збурень.

При виконанні нерівності  $\varepsilon|z_0| \ll 1$  із граничної умови (3.8) випливає:

$$\varepsilon|z_0| \approx \frac{|\lambda|}{2\varepsilon}, \quad \varepsilon \gg \frac{|\lambda|}{2}. \quad (3.33)$$

При цьому із формули (3.15) маємо співвідношення між параметрами  $N$  та  $\lambda$ , яке визначає область на площині  $(N, \lambda)$ , в якій допускається розв'язок поставленої задачі за теорією збурень:

$$N \gg |\lambda|. \quad (3.34)$$

Наголосимо, що, взагалі кажучи, не потрібна малість амплітуди солітона (малість  $\varepsilon$ ). Роль збурення грає дефект, «потужність» якого визначає малий параметр розвинення  $\frac{|\lambda|}{2\varepsilon}$ .

Розкладаючи розв'язок (3.7) за степенями малого параметра  $\varepsilon|z_0|$  і враховуючи в розвиненні залежність (3.33), з точністю до членів першого порядку по  $\frac{|\lambda|}{2\varepsilon}$ , отримуємо

$$u(z) = \frac{2\varepsilon}{ch(\varepsilon z)} \cdot \left\{ 1 - \frac{\lambda}{2\varepsilon} \cdot th(\varepsilon|z|) \right\}. \quad (3.35)$$

Підставляючи отримані вирази для  $u(z)$  у формулу (40) і враховуючи доданки не вище першого степеня по  $\frac{|\lambda|}{2\varepsilon}$ , знаходимо вираз для оператора  $\hat{L}_1$ :

$$\hat{L}_1 = -\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - \frac{6\varepsilon^2}{ch^2(\varepsilon z)} + \frac{\lambda}{2\varepsilon} \cdot \left\{ \frac{12\varepsilon^2 sh(\varepsilon|z|)}{ch^3(\varepsilon z)} - 2\varepsilon\delta(z) \right\} \equiv \hat{L}_1^{(0)} + \hat{\eta}, \quad (3.36)$$

де  $\hat{\eta} \sim \frac{|\lambda|}{2\varepsilon}$  – збурення оператора  $\hat{L}_1^{(0)}$ .

За теорією збурень отримаємо добавки до власних значень оператора  $\hat{L}_1^{(0)}$ :

$$\chi_n^{(1)} = \eta_{nn} = \langle \psi_n^{(0)} | \hat{\eta} | \psi_n^{(0)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \psi_n^{(0)*} \hat{\eta} \psi_n^{(0)}. \quad (3.37)$$

При цьому власні функції оператора  $\hat{L}_1$  набувають вигляду  $\psi_n = \psi_n^{(0)} + \zeta(z)$ , де  $\zeta(z) \sim \frac{|\lambda|}{2\varepsilon}$  – поправка тієї ж парності, що й функція  $\psi_n^{(0)}$ .

Скориставшись виразом для збуреного оператора  $\hat{\eta}$  із (3.35) і власними функціями нульового наближення для двох нижніх рівнів (3.31) і (3.32), знаходимо поправки до власних значень  $\chi_1^{(1)}$  і  $\chi_2^{(1)}$ .

Поправка до власного значення, яка відповідає основному стану оператора  $\hat{L}_1^{(0)}$ , має вигляд

$$\chi_1^{(1)} = \frac{\lambda}{2\varepsilon} \cdot \frac{2\varepsilon}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{1}{ch^2(\varepsilon z)} \left\{ \frac{12\varepsilon^2 sh(\varepsilon|z|)}{ch^3(\varepsilon z)} - 2\varepsilon\delta(z) \right\} \frac{1}{ch^2(\varepsilon z)} = \frac{3\varepsilon}{4} \lambda, \quad (3.38)$$

а поправка до власного значення  $\chi_2^{(0)}$  наступного рівня дорівнює

$$\chi_2^{(1)} = \frac{\lambda}{2\varepsilon} \cdot \frac{3\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{sh(\varepsilon z)}{ch^2(\varepsilon z)} \left\{ \frac{12\varepsilon^2 sh(\varepsilon|z|)}{ch^3(\varepsilon z)} - 2\varepsilon\delta(z) \right\} \frac{sh(\varepsilon z)}{ch^2(\varepsilon z)} = \frac{3\varepsilon}{4} \lambda. \quad (3.39)$$

Таким чином, враховуючи вирази для  $\chi_1^{(0)}$  та  $\chi_2^{(0)}$ , знаходимо наближення (з точністю до  $\frac{|\lambda|}{\varepsilon}$ ) власних значень двох найнижчих власних станів оператора  $\hat{L}_1$ :

$$\chi_1 = -3\varepsilon^2 + \frac{3\varepsilon\lambda}{4}, \quad \chi_2 = \frac{3\varepsilon\lambda}{4}. \quad (3.40)$$

Видно, що  $\chi_1 < \chi_1^{(0)} < 0$  і  $\chi_2 < 0$  при  $\lambda < 0$ ; у свою чергу,  $\chi_1^{(0)} < \chi_1 < 0$  і  $\chi_2 > 0$  при  $\lambda > 0$ . Оскільки власне значення  $\chi_2$  має різний знак при  $\lambda < 0$  і  $\lambda > 0$  ці випадки повинні розглядатися окремо.

### 3.3.1. Випадок $\sigma = +1, \lambda < 0$

При  $\alpha = 0$  (див. (3.28))  $\psi$  є однією з власних функцій оператора  $\hat{L}_1$ , а  $\chi$  збігається з одним із його власних значень. Оскільки власна функція  $\psi_1$  не ортогональна  $u$ , а  $\langle u | \psi_2 \rangle = 0$ , найменше власне значення  $-\Omega_0^2$  визначається значенням  $\chi_2$ . Отже, умовний мінімум функціонала  $F$  від'ємний і дорівнює  $\chi_2 = \frac{3\varepsilon\lambda}{2} < 0$ , а це означає, що  $\Omega$  – дійсне.

Таким чином, для від'ємних  $\lambda$  існують експоненціально зростаючі збурення, а отже солітонний розв'язок нестійкий. Нестійкість проявляється в експоненціальному зростанні просторово-асиметричної добавки (симетрична функція  $\psi_1$  відповідає основному власному значенню  $\chi_1$ ). Динаміку солітона в цьому випадку можна трактувати як «перекачування» квазічастинок з одного півпростору (з однієї сторони дефекту) в інше. З часом відбувається повне «перекачування» частинок в один із півпросторів і утворення солітона, який «відштовхнувшись» від дефекту, прямує на нескінченність.

Розв'язок, який враховує малі добавки до форми солітона у випадку  $\lambda < 0$  має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
u(z,t) &= \tilde{u}(z,t) + v(z,t) \cdot \exp(-i\omega t) \cong \\
&\cong \left[ \frac{\varepsilon}{ch(\varepsilon z)} - \frac{\lambda}{2\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon \cdot sh(\varepsilon|z|)}{ch^2(\varepsilon z)} \right] \cdot \exp(-i\omega t) + \xi \sqrt{\frac{3\varepsilon}{2}} \cdot \frac{sh(\varepsilon z)}{ch^2(\varepsilon z)} \cdot \exp(\Omega t) \cdot \exp(-i\omega t) \cong \\
&\cong \frac{\varepsilon}{ch \left\{ \varepsilon \cdot \left[ z + \operatorname{sgn}(z) \cdot \frac{\lambda}{2\varepsilon^2} - \frac{\xi}{2\varepsilon} \sqrt{\frac{6}{\varepsilon}} \cdot \exp(\Omega t) \right] \right\}} \cdot \exp(-i\omega t), \quad (3.41)
\end{aligned}$$

де  $\xi \ll 1$ . (Тут для малої добавки  $v(z,t)$  (див. (3.19)) використано основне наближення в (3.20), (3.21):  $A \approx \xi \psi_2^{(0)}$ ,  $B \approx 0$  з  $\psi_2^{(0)}$  із формули (3.32)).

Таким чином, в цьому наближенні амплітуда розв'язку не змінюється, але відбувається синхронний рух в одну сторону двох солітонів, які розташовані по різні сторони дефекту і зв'язані з ним:

$$z_0^\pm \cong -\operatorname{sgn}(z) \cdot \frac{\lambda}{2\varepsilon^2} + \frac{\xi}{2\varepsilon} \sqrt{\frac{6}{\varepsilon}} \cdot \exp(\Omega t) \quad (3.42)$$

Для знаходження інкремента зростання цієї зсунутої нестійкості  $\Omega$  скористаємося формулою (3.25), взявши її в обкладинки з антисиметричною функцією  $\psi_2$ , яка відповідає другому рівню оператора  $\hat{L}_1$ . В основному порядку за малим параметром  $\frac{|\lambda|}{2\varepsilon}$  вираз (3.27) набуває вигляду

$$\Omega^2 \cong -\frac{\langle \psi_2^{(0)} | \hat{\eta} | \psi_2^{(0)} \rangle}{\langle \psi_2^{(0)} | \hat{L}_0^{(0)-1} | \psi_2^{(0)} \rangle} = -\frac{\chi_2}{\langle \psi_2^{(0)} | \hat{L}_0^{(0)-1} | \psi_2^{(0)} \rangle}, \quad (3.43)$$

де  $\chi_2 = \frac{3\varepsilon\lambda}{2}$ , оператор  $\hat{L}_0^{(0)}$  визначається виразом (3.22), а функція  $\psi_2^{(0)}$  – формулою (3.32). Легко перевірити прямою підстановкою, що

$$\hat{L}_0^{(0)} \left[ \frac{z}{ch(\varepsilon z)} \right] = \frac{2\varepsilon \cdot sh(\varepsilon z)}{ch^2(\varepsilon z)}, \quad (3.44)$$



і, отже,

$$\hat{L}_0^{(0)-1} \psi_2^{(0)} = \sqrt{\frac{3}{8\varepsilon}} \cdot \frac{z}{ch(\varepsilon z)}. \quad (3.45)$$

Таким чином, знаменник у формулі (3.43) дорівнює  $\frac{3}{4\varepsilon^2}$ , а інкремент зростання нестійкості дорівнює

$$\Omega \cong \sqrt{2|\lambda|\varepsilon^3}. \quad (3.46)$$

### 3.3.2. Випадок $\sigma = +1$ , $\lambda > 0$

Оскільки в цьому випадку  $\chi_2 > 0$ , то при  $\alpha = 0$  умовний мінімум функціонала  $F$  додатний і для аналізу стійкості необхідно перевірити випадок  $\alpha \neq 0$ . При ненульовому множнику Лагранжа  $\alpha$  умовний мінімум функціонала  $F$  визначається найменшим коренем рівняння (3.29)  $f(\chi) = 0$ . Можна показати, що у цьому випадку, так само як і для  $\lambda = 0$ , знак  $\chi_{\min}$  визначається знаком величини  $f(\chi = 0)$ : при  $f(0) \leq 0$  маємо  $\chi_{\min} \geq 0$ , а при  $f(0) > 0$  величина  $\chi_{\min}$  від'ємна.

При  $\chi = 0$  формула (3.29) може бути переписана у вигляді  $f(0) = \langle u | \hat{L}_1^{-1} | u \rangle$ . Для обчислення цієї величини достатньо диференціювати рівняння (3.24) по  $\varepsilon^2$  і, скориставшись видом операторів  $\hat{L}_0$  і  $\hat{L}_1$  ((3.22), (3.23)), переконатися у виконанні співвідношення  $\hat{L}_1 \frac{\partial u}{\partial \varepsilon^2} + u = 0$ . Звідси

$$f(0) = \langle u | \hat{L}_1^{-1} | u \rangle = - \left\langle u \left| \frac{\partial u}{\partial \varepsilon^2} \right. \right\rangle = - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon^2} \langle u | u \rangle = - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial N}{\partial \varepsilon^2} = \frac{\partial N}{\partial \omega}, \quad (3.45)$$

де  $N$  – число квазічастинок, які визначаються формулою (3.15).

Отже, знак умовного мінімуму функціонала  $F$  при  $\alpha \neq 0$  визначається знаком похідної  $\frac{\partial \omega}{\partial N}$  (тобто знаком величини  $\frac{\partial^2 E}{\partial N^2}$ ): при  $\frac{\partial \omega}{\partial N} \leq 0$  умовний мінімум функціонала  $F$  додатний, і як випливає з (3.27),  $\Omega^2 < 0$ .

Вище було показано, що у випадку додатних  $\lambda$  і  $\sigma = +1$  похідна  $\frac{\partial \omega}{\partial N}$  від'ємна. Це означає відсутність експоненціально зростаючих збурень ( $\Omega$  – чисто уявна величина) і стійкість розв'язку в лінійному по збуренні наближенні. Таким чином, антисиметричні добавки до розв'язку  $\tilde{u}(z, t)$  описують малі коливання солітона відносно домішка.

Розв'язок (3.17) при додатних  $\lambda$  та  $\sigma = +1$  може бути зведено до вигляду, аналогічному (3.41), але з осциляціями центра солітона:

$$u(z, t) \cong \frac{\varepsilon}{ch \left\{ \varepsilon \left[ z + \operatorname{sgn}(z) \cdot \frac{\lambda}{2\varepsilon^2} - \frac{\xi}{2\varepsilon} \sqrt{\frac{6}{\varepsilon}} \cdot \cos(vt) \right] \right\}} \cdot \exp(-i\omega t), \quad (3.46)$$

де  $\xi \ll 1$  – мала (довільна) амплітуда коливань центра солітона відносно місця локалізації домішка, а  $v \equiv -i\Omega$  – частота цих коливань.

Для знаходження частоти  $\nu$  скористаємось формулою (3.43), де тепер  $\chi_2 = \frac{3\varepsilon\lambda}{2} > 0$  (див. (3.40)). Таким чином, частота осциляцій центра солітона дорівнює

$$\nu = \sqrt{2\lambda\varepsilon^3}. \quad (3.47)$$

Зазначимо, що у випадку «розмазаного» домішка, коли область його локалізації  $L$  набагато більша ширини солітона, частота коливань солітона в зовнішньому полі  $U(z)$ , яке моделює домішок, зв'язана з потужністю потенціалу  $\lambda = \int U(z) dz$  співвідношенням

$$v = \sqrt{\frac{\lambda}{L^3}}, \quad (3.48)$$

де  $L$  – характерний просторовий розмір неоднорідності. Це якісно узгоджується з результатом (3.47), отриманим для  $\delta$ - подібного домішка, але тепер в ролі характерного лінійного розміру виступає розмір дефекту  $L$  замість ширини солітона  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Нагадаємо, що наш розгляд справедливий лише при виконанні нерівності (2.34).

Враховуючи результати нашого дослідження, можна припустити, що нелінійні локальні збурення стійкі при всіх значеннях параметрів  $\lambda$  та  $N$  в секторі  $\lambda > 0, N > 0$ .

### 3.3.3. Випадок $\sigma = -1, \lambda > 0$

Перейдемо до аналізу стійкості розв'язку (3.10), який описує локалізоване на домішку нелінійне збудження у випадку  $\sigma = -1$  і додатних  $\lambda$ .

Дотримуючись викладеної вище схеми, покажемо, що при  $\sigma = -1$  і  $\lambda > 0$  оператор  $\hat{L}_1$  є додатньо визначеним. Розглянемо спочатку оператор  $\hat{L}_0$ , який має в цьому випадку наступний вигляд (див. (3.22)):

$$\hat{L}_0 = -\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 + 2u^2(z) - \lambda\delta(z), \quad (3.49)$$

де  $u(z)$  визначається виразом (3.10).

Розв'язок  $u(z)$  є власною функцією основного стану оператора  $\hat{L}_0$  з нульовим власним значенням (див. (3.24)). Оператор  $\hat{L}_0$ , таким чином, є невід'ємним.

«Потенціальна енергія», яка відповідає оператору  $\hat{L}_0$ , має вигляд

$$U_0(z) = \varepsilon^2 + 2u^2(z) - \lambda\delta(z). \quad (3.50)$$

Суттєво, що на відміну від випадку  $\sigma = +1$ ,  $\lambda > 0$ , добавка до  $\delta$ -подібного потенціалу тепер додатна. Потенціальна яма (3.50) містить єдиний дискретний рівень, який відповідає основному стану оператора  $\hat{L}_0$  з нульовим власним значенням, а наступний рівень збігається з нижньою межею зони суцільного спектру.

Потенціальна енергія, яка відповідає оператору  $\hat{L}_1$ , тепер має вигляд (порівнюємо з (3.23)):

$$U_1 = \varepsilon^2 + 6u^2(z) - \lambda\delta(z). \quad (3.51)$$

Таким чином, на відміну від випадку  $\sigma = +1$ ,  $\lambda > 0$ , коли мала місце нерівність

$$\int U_0(z) dz > \int U_1(z) dz, \quad (3.52)$$

при  $\sigma = -1$  маємо

$$\int U_0(z) dz < \int U_1(z) dz. \quad (3.53)$$

Отже, при переході від оператора  $\hat{L}_0$  до оператора  $\hat{L}_1$  вся система власних значень піднімається вгору, що означає відсутність в оператора  $\hat{L}_1$  від'ємних власних значень і другого дискретного рівня. Звідси можна зробити висновок про стійкість зв'язаного стану при  $\sigma = -1$ ,  $\lambda > 0$  у всій області його існування та відсутності внутрішньої коливальної моди (яка зв'язана з другим дискретним рівнем) в цьому нелінійному локалізованому збудженні.

### 3.4. Висновки до розділу III

Показано, що в нелінійному середовищі з точковими дефектами локалізованими на домішку нелінійні стани можливі при будь-якому значенні ангармонізмів (при будь-якому значенні  $\sigma$ ) у випадку тяжіння квазічастинок до дефекту ( $\lambda > 0$ ). При взаємному тяжінні між квазічастинками ( $\sigma = +1$ )

локалізація нелінійного збудження поблизу домішка можлива навіть при відштовхуючому характері дефекту ( $\lambda < 0$ ).

У випадку  $\sigma = +1$  (тяжіння між квазічастинками),  $\lambda > 0$  (притягуючий домішок) точковий дефект відіграє роль потенціальної ями для багаточастинного стану – солітон локалізується поблизу дефекту і може коливатися біля його центра з частотою  $\sqrt{2\lambda\varepsilon^3}$ . Тобто в спектрі малих збуджень солітона існує мода коливань його центра відносно домішка. При цьому локалізований солітонний розв'язок стійкий.

У випадку  $\sigma = +1$ ,  $\lambda < 0$  солітонний розв'язок, локалізований поблизу відштовхуючого квазічастинки домішка, нестійкий. Ця нестійкість проявляється в експоненціальному зростанні антисиметричних добавок до розв'язку: квазічастинки «перекочуються» з одного півпростору в інший і формують солітон, локалізований по одну сторону від домішка, який відштовхується від нього і прямує на нескінченність. Таким чином, домішок, який відштовхується, не руйнує самолокалізований за рахунок тяжіння між квазічастинками солітон, а лише деформує його і відштовхує від себе. Цей процес описується лінійною модою нестійкого відносно зв'язку з дефектом локалізованого збудження.

У випадку  $\sigma = -1$  (відштовхування між квазічастинками) нелінійні локальні збудження можливі лише при  $\lambda > 0$  і зв'язаний з дефектом стан виявляється стійким. Однак «внутрішньої моди» коливань центру тяжіння тут немає, а існує лише суцільний спектр збурень, який відповідає вільним квазічастинкам.

Відповідно, при розповсюдженні нелінійної хвилі вздовж хвилеводу в фокусуєчому нелінійному середовищі відбувається її локалізація поблизу хвилеводу і можливі коливання цього локалізованого потоку відносно площини хвилеводу. У разі дефокусуєчому середовища коливання потоку щодо осі хвилеводу відсутні, хоча його локалізація зберігається.

## Розділ IV

### 4.1 Основні поняття про еліптичні інтеграли та еліптичні функції Якобі

Інтеграли виду

$$\int f(x, R) dx$$

де  $R = \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}$  або  $R = \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$ , а  $f(x, R)$  – раціональна функція відносно  $x$  і  $R$ , називають еліптичними, у зв'язку з тим, що вони виникають при обчислення довжини дуги еліпса.

Лежандром показано, що всі еліптичні інтеграли можна звести до трьох основних [10]:

$$u = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-q^2\xi^2)}}, \quad (4.1)$$

$$v = \int_0^{\xi} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-q^2\xi^2)}}, \quad (4.2)$$

$$w = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-n\xi^2)(1-\xi^2)(1-q^2\xi^2)}}, \quad (4.3)$$

де  $|q| < 1$ . Число  $q$  називається модулем, а  $n$  – параметром інтеграла.

Нехай  $\xi = \sin \varphi$ , тоді інтеграл (4.1) набуває вигляду

$$F(\varphi, q) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-q^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Для (4.2) маємо

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-q^2\xi^2)(1-\xi^2)}} &= \frac{1}{q^2} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-q^2 \sin^2 \varphi}} - \int_0^{\varphi} \sqrt{1-q^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{q^2} [F(\varphi, q) - E(\varphi, q)], \end{aligned}$$

де

$$E(\varphi, q) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Інтеграл (4.3) перетворюється у

$$\Pi(\varphi, q) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - n \sin^2 \varphi)(1 - q^2 \sin^2 \varphi)}}$$

Інтеграли  $F(\varphi, q)$ ,  $E(\varphi, q)$  і  $\Pi(\varphi, q)$  є зведеними до нормальних форм Лежандра. Саме ці інтеграли називають *еліптичними*, а число  $\varphi$  – амплітудою.

Якщо в інтегралі  $F(\varphi, q)$  амплітуда  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , то інтеграл називається повним еліптичним інтегралом першого роду і позначається через  $K$ :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varphi}}$$

Модуль  $q'$  зв'язаний із модулем  $q$  співвідношенням

$$q^2 + q'^2 = 1.$$

називається додатковим для модуля  $q$ . Отже,

$$\operatorname{sn}K = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \operatorname{cn}K = 0, \quad \operatorname{dn}K = q'.$$

Якщо  $q = 0$ , то інтеграл (4.1)

$$u = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \arcsin \xi.$$

Для практичного застосування більш важливою є не багатозначна функція  $u = \arcsin \xi$ , а однозначна  $\xi = \sin u$ , тобто така функція для якої аргументом є сам інтеграл  $u$ . Оскільки  $\varphi$  є амплітудою інтеграла  $F(\varphi, q)$ , який позначається літерою  $u$ , то  $\varphi$  можна виразити таким чином:

$$\varphi = am u .$$

У цьому випадку  $\xi = \sin \varphi = \sin am u$  ,  $\sqrt{1 - \xi^2} = \cos \varphi = \cos am u$  . Вводячи позначення  $\sqrt{1 - q^2 \xi^2} = \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varphi} = \Delta am u$  , усі три еліптичні функції можна записати у вигляді

$$\sin am u = snu , \quad \cos am u = cnu , \quad \Delta am u = dnu .$$

Функції  $snu$  ,  $cnu$  і  $dnu$  , які являють собою набір основних еліптичних функцій комплексної змінної називають *еліптичними функціями Якобі*.

Області значення функцій Якобі:

$$-1 \leq sn(u, q) \leq 1, \quad -1 \leq cn(u, q) \leq 1, \quad \sqrt{1 - q^2} \leq dn(u, q) \leq 1.$$

Справедливі такі формули диференціювання:

$$\frac{d}{du}(snu) = cnu \cdot dnu , \quad \frac{d}{du}(cnu) = -snu \cdot dnu , \quad \frac{d}{du}(dnu) = -q^2 cnu \cdot snu .$$

Наведемо графіки еліптичних функцій:

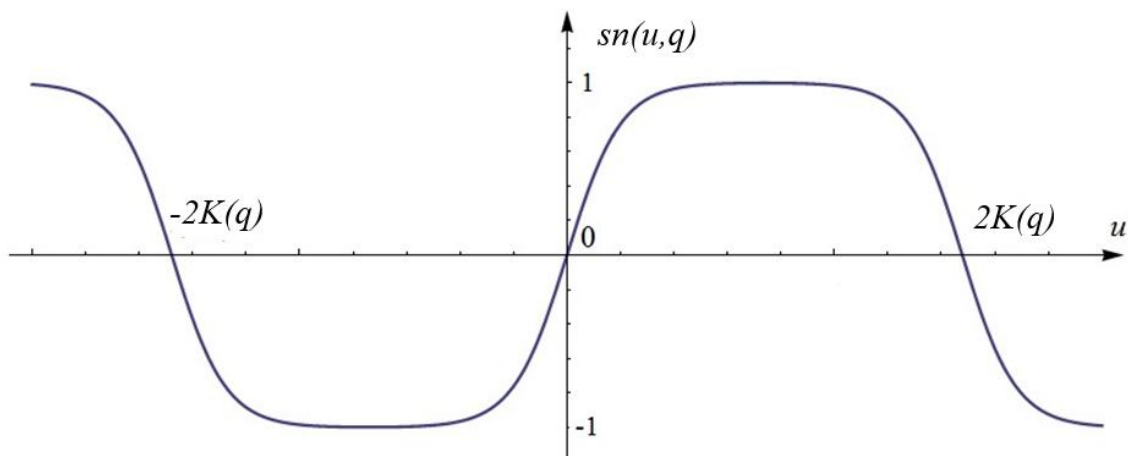


Рис. 8. Графік еліптичного синуса Якобі



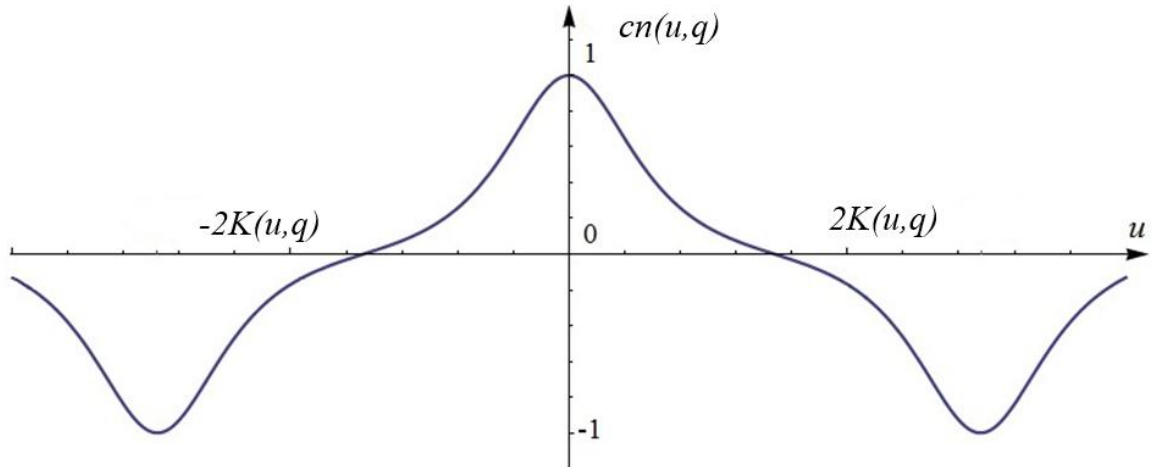


Рис. 9. Графік еліптичного косинуса Якобі

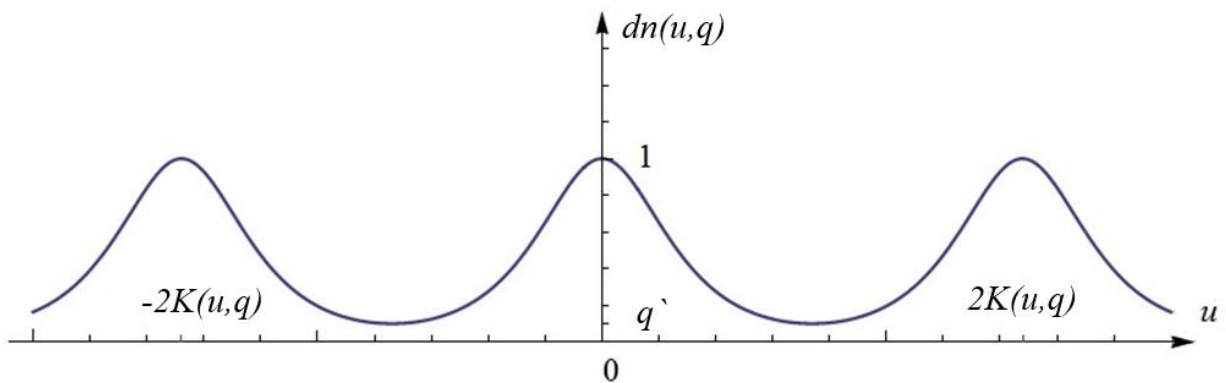


Рис. 10. Графік дельта амплітуди Якобі

Графік кожної з цих функцій приймає визначений вигляд лише при певному значенні модуля  $q$ .

#### 4.2. Антисиметричний розв'язок НРШ з двома лінійними точковими дефектами

Вважаємо, що в суцільно нелінійному середовищі на малій відстані один від одного знаходяться два лінійні точкові дефекти.

За наявності двох точкових дефектів, які розташовані на відстані  $2a$  один від одного, нестационарне нелінійне рівняння Шредінгера для змінної  $u$  має вигляд

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\sigma |u|^2 u = -\lambda [\delta(z+a) + \delta(z-a)]u \quad (4.4)$$

де  $\lambda$  – характеристика (потужність) дефекту, ідентичні дефектні потенціали характеризуються параметром  $\lambda > 0$  у випадку, якщо вони притягують лінійні хвилі та відіграють роль хвилеводів; вісь  $z$  спрямована перпендикулярно до дефектних потенціалів, знак функції  $\sigma = \pm 1$  залежить від фокусуєчих або дефокусуєчих властивостей потенціалів відповідно.

Цей випадок показано на Рис. 10.

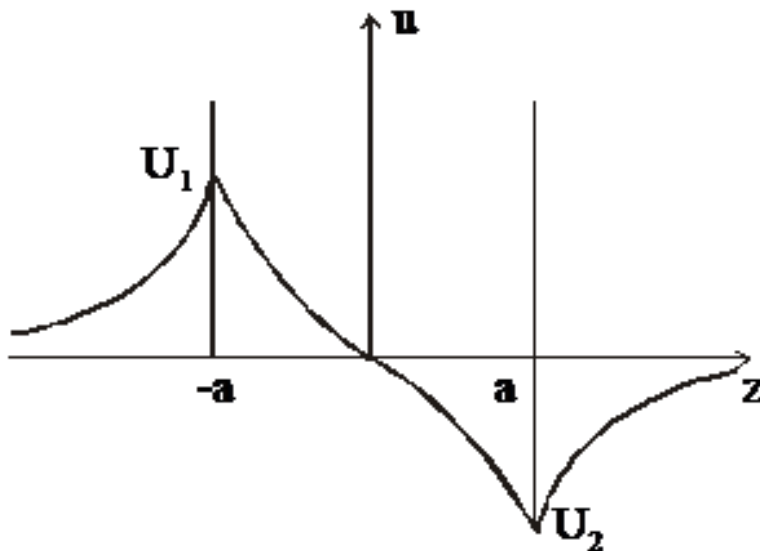


Рис.10. Антисиметричний розв'язок для системи з двома нелінійними точковими дефектами

Розв'язок рівняння (4.4) шукаємо у вигляді

$$u(z,t) = u(z)e^{-i\omega t}. \quad (4.5)$$

Знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u''(z)e^{-i\omega t} \quad (4.6)$$

та

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -i\omega u(z)e^{-i\omega t}. \quad (4.7)$$

Підставляючи функцію (4.5) та її похідні (4.6)-(4.7) у рівняння (4.4), отримуємо

$$\begin{aligned} \omega u(z)e^{-i\omega t} + u''(z)e^{-i\omega t} + 2|u(z)|^2 u(z)e^{-i\omega t} = \\ = -\lambda [\delta(z+a) + \delta(z-a)]u(z)e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Позначимо  $\varepsilon = \sqrt{-\omega}$  і скоротимо на  $e^{-i\omega t}$ :

$$u''(z) - \varepsilon^2 u(z) + 2u^3(z) = -\lambda [\delta(z+a) + \delta(z-a)]u(z). \quad (4.8)$$

Розв'язку цього однорідного рівняння відповідає розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$u''(z) - \varepsilon^2 u(z) + 2u^3(z) = 0, \quad (4.9)$$

яке задовольняє крайові умови

$$u|_{\mp a-0} = u|_{\mp a+0}, \quad (4.10)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{\mp a+0} - \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{\mp a-0} = -\lambda u|_{\mp a}, \quad (4.11)$$

з нульовою асимптотою на нескінченності ( $z \rightarrow \mp\infty$ ).

Перша крайова умова випливає з неперервності шуканої функції, а друга – за рахунок інтегрування рівняння (4.8) по вузькому околу лінійних точкових дефектів, тобто

$$\int_{\mp a-0}^{\mp a+0} (u''(z) - \varepsilon^2 u(z) + 2u^3(z)) dz = -\lambda \int_{\mp a-0}^{\mp a+0} [\delta(z+a) + \delta(z-a)]u(z) dz$$

$$u'(z)|_{\mp a+0} - u'(z)|_{\mp a-0} = -\lambda u(z)|_{\mp a},$$

де ми скористалися властивістю  $\delta$ -функції:

$$\int_{\mp a-0}^{\mp a+0} [\delta(z+a) + \delta(z-a)]u(z) dz = u(z)|_{\mp a}.$$

Розв'язки в областях  $z < -a$  (1),  $z > a$  (2) і  $-a < z < a$  (3) мають вигляд:

$$u_{1,2}(z,t) = u_{1,2}(z,t)e^{-i\omega t} = \pm \frac{\varepsilon}{ch[\varepsilon(z \mp z_0)]} e^{-i\omega t}, \quad (4.12)$$

$$u_3(z,t) = u_3(z,t)e^{-i\omega t} = -qq'\eta \frac{sn(\eta z, q)}{dn(\eta z, q)} e^{-i\omega t}, \quad (4.13)$$

де параметр  $\varepsilon$  характеризує амплітуду хвилі й зв'язаний з  $\omega$ :  $\varepsilon = \sqrt{-\omega}$ ;  $sn(\eta z, q)$  і  $dn(\eta z, q)$  – еліптичні функції Якобі з модулем  $q$ ;  $\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2q^2 - 1}}$  і  $q' = \sqrt{1 - q^2}$ . Еліптичний модуль  $q$  змінюється в діапазоні від  $\frac{1}{2}$  до 1.

Розв'язки (4.12) і (4.13) характеризуються параметром  $\varepsilon$ . Інші два параметри  $q$  і  $z_0$  виражаються з граничних умов (4.10)-(4.11).

Оскільки хвильовий потік локалізований біля фокусуєчих потенціалів, то характеристику локалізованої хвилі забезпечує амплітуда поля всередині тонких дефектних потенціалів,  $U_1 = u(z = -a)$  і  $U_2 = u(z = a)$ .

Використовуючи граничні умови (4.10)-(4.11), і враховуючи  $U_1 = -U_2 \equiv U$  отримаємо умови зв'язку параметрів  $\varepsilon$ ,  $q$ ,  $z_0$  з  $U$ :

$$U = \frac{\varepsilon}{ch[\varepsilon(a + z_0)]} = qq' \frac{sn(\eta a, q)}{dn(\eta a, q)} \quad (4.14)$$

$$U\sqrt{\varepsilon^2 - U^2} - \lambda U + \sqrt{U^2 + q'^2 \eta^2} \sqrt{q^2 \eta^2 - U^2} = 0 \quad (4.15)$$

Співвідношення (4.15) знайдено з використанням співвідношення (4.14) і записано у вигляді алгебраїчного рівняння для амплітуди  $U$ , яка містить лише амплітуду хвилі  $\varepsilon$  і характеристику дефекту  $\lambda$  [11].

Зазначимо, що отриманий розв'язок (4.12)-(4.13) виконуються лише за умови, що відстань між двома дефектами  $2a$  не перевищує періоду цього розв'язку в області  $|z| < a$  (3). Тобто

$$\eta a \leq K(q) \quad \text{або} \quad \varepsilon a \leq \sqrt{2-q^2} \cdot K(q), \quad (4.16)$$

де  $K(q)$  – повний еліптичний інтеграл першого роду.

### 4.3. Розрахунок повного числа елементарних збуджень

Розрахунок числа нелінійних збуджень проводимо за формулою

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dz. \quad (4.17)$$

Враховуючи те, що рівняння (4.4) описує динаміку консервативної системи та має різні розв'язки для кожної з областей, а також те що ми розглядаємо антисиметричний випадок, формулу (4.17) можна переписати у вигляді інтегралу руху – загальної кількості елементарних збуджень (поля квантів), локалізованих у системі:

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dz = \int_{-\infty}^a |u_1|^2 dz + \int_{-a}^a |u_3|^2 dz + \int_a^{+\infty} |u_2|^2 dz = 2 \int_0^a |u_3|^2 dz + 2 \int_a^{+\infty} |u_2|^2 dz = \\ &= 2 \int_0^a \frac{q^2 q'^2 \eta^2 \operatorname{sn}^2(\eta z, q)}{\operatorname{dn}^2(\eta z, q)} dz + 2 \int_a^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{ch^2[\varepsilon(z \mp z_0)]} dz \end{aligned}$$

Використовуючи властивість  $\operatorname{sn}^2(\eta z, q) + q^2 \operatorname{dn}^2(\eta z, q) = 1$  виконаємо деякі перетворення:

$$\begin{aligned} N &= 2 \int_0^a \frac{q^2 q'^2 \eta^2 (1 - \operatorname{dn}^2(\eta z, q))}{q^2 \operatorname{dn}^2(\eta z, q)} dz + 2 \int_a^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{ch^2[\varepsilon(z \mp z_0)]} dz = \\ &= 2 \int_0^a \frac{q'^2 \eta^2 (1 - \operatorname{dn}^2(\eta z, q))}{\operatorname{dn}^2(\eta z, q)} dz + 2 \int_a^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{ch^2[\varepsilon(z \mp z_0)]} dz = \\ &= 2 \int_0^a \frac{q'^2 \eta^2}{\operatorname{dn}^2(\eta z, q)} dz + 2 \int_0^a q'^2 \eta^2 dz + 2 \int_a^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{ch^2[\varepsilon(z \mp z_0)]} dz. \end{aligned}$$

Застосуємо табличні інтеграли [12] від еліптичних функцій Якобі

$$\int dn^m u du = \frac{1}{(m+1)q'^2} \left[ q^2 dn^{m+1} u \cdot snu \cdot cnu + \right. \\ \left. + (m+1)(2-q^2) \int dn^{m+1} u du - (m+3) \int dn^{m+4} u du \right], \\ \int dn^2 u du = E(am u, q)$$

та гіперболічних функцій

$$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx,$$

отримуємо

$$N = -2q^2 \eta \frac{sn(\eta a, q) cn(\eta a, q)}{dn(\eta a, q)} + 2\eta E(am(\eta a, q)) + \\ + 2aq'^2 \eta^2 + 2\varepsilon \left[ 1 - th(\varepsilon(a \mp z_0)) \right], \quad (4.18)$$

де  $E(am(\eta a, q))$  – еліптичний інтеграл другого роду,  $am(\eta a, q)$  – еліптична амплітуда.

#### 4.4 Розрахунок повної енергії системи

Розрахунок повної енергії проводимо за формулою

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 - \sigma |u|^4 - \lambda [\delta(z+a) + \delta(z-a)] |u|^2 \right\}. \quad (4.19)$$

Враховуючи, що в різних областях рівняння (4.4) має різні розв'язки і розглядається антисиметричний випадок, перепишемо формулу (4.19) у такий спосіб

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 - \sigma |u|^4 - \lambda [\delta(z+a) + \delta(z-a)] |u|^2 \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^a \left| \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|^2 dz - 2\sigma \int_0^a |u_3|^4 dz + 2 \int_a^{+\infty} \left| \frac{\partial u_2}{\partial z} \right|^2 dz - 2\sigma \int_a^{+\infty} |u_2|^4 dz - \\
&\quad - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \delta(z+a)|u|^2 + \delta(z-a)|u|^2 \right] dz = \\
&= 2(I_1 - I_2) + 2I_3 - 2I_4 - \lambda I_5.
\end{aligned}$$

Знайдемо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_3}{\partial z} &= -qq'\eta \frac{sn'(\eta z, q) dn(\eta z, q) - sn(\eta z, q) dn'(\eta z, q)}{dn^2(\eta z, q)} = \\
&= -qq'\eta \frac{cn(\eta z, q) dn^2(\eta z, q) + q^2 sn^2(\eta z, q) cn(\eta z, q)}{dn^2(\eta z, q)} = \\
&= -qq'\eta \frac{cn(\eta z, q) (dn^2(\eta z, q) + q^2 sn^2(\eta z, q))}{dn^2(\eta z, q)} = \\
&= -qq'\eta \frac{cn(\eta z, q)}{dn^2(\eta z, q)}. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

З урахуванням (4.20), обчислимо при  $\sigma = +1$  кожен з інтегралів окремо, користуючись властивості еліптичних функцій Якобі

$$\begin{aligned}
I_1 - I_2 &= \int_0^a q^2 q'^2 \eta^2 \frac{cn^2(\eta z, q) - sn^2(\eta z, q)}{dn^4(\eta z, q)} dz = \\
&= \int_0^a q^2 q'^2 \eta^2 \frac{1 - 2sn^2(\eta z, q)}{dn^4(\eta z, q)} dz = \\
&= \int_0^a q^2 q'^2 \eta^2 \frac{1}{dn^4(\eta z, q)} dz - \int_0^a q^2 q'^2 \eta^2 \frac{2sn^2(\eta z, q)}{dn^4(\eta z, q)} dz = \\
&= \int_0^a q^2 q'^2 \eta^2 \frac{1}{dn^4(\eta z, q)} dz - \int_0^a q^2 q'^2 \eta^2 \frac{2(1 - dn^2(\eta z, q))}{q^2 dn^4(\eta z, q)} dz =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^a q^2 q'^2 \eta^2 \frac{1}{dn^4(\eta z, q)} dz - 2 \int_0^a q'^2 \eta^2 \frac{1}{dn^4(\eta z, q)} dz + 2 \int_0^a q'^2 \eta^2 \frac{dn^2(\eta z, q)}{dn^4(\eta z, q)} dz = \\
&= \int_0^a (q^2 - 2) q'^2 \eta^2 \frac{1}{dn^4(\eta z, q)} dz + 2 \int_0^a q'^2 \eta^2 \frac{1}{dn^2(\eta z, q)} dz = \\
&= (q^2 - 2) \eta^2 \left[ -\frac{q^2}{3} \frac{sn(\eta a, q) cn(\eta a, q)}{dn^3(\eta a, q)} - \frac{2}{3} (2 - q^2) \frac{q^2}{q'^2} \frac{sn(\eta a, q) cn(\eta a, q)}{dn(\eta a, q)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} (2 - q^2) \frac{1}{q'^2} E(am(\eta a, q)) - \frac{1}{3} \eta a \right] + \\
&\quad + 2 q'^2 \eta \left[ -\frac{q^2}{q'^2} \frac{sn(\eta a, q) cn(\eta a, q)}{dn(\eta a, q)} + \frac{1}{q'^2} E(am(\eta a, q)) \right] = \\
&= -\frac{1}{3} (q^2 - 2) q^2 \eta^2 \frac{sn(\eta a, q) cn(\eta a, q)}{dn^3(\eta a, q)} + \\
&\quad + \left( \frac{2}{3} (q^2 - 2) \frac{q^2 \eta^2}{q'^2} - 2 q^2 \eta \right) \frac{sn(\eta a, q) cn(\eta a, q)}{dn(\eta a, q)} + \\
&\quad + \left( 2 \eta - \frac{2}{3} (q^2 - 2) \frac{\eta^2}{q'^2} \right) E(am(\eta a, q)) - \frac{1}{3} \eta^3 a. \\
&I_3 = \int_a^{+\infty} \left| \frac{\partial u_2}{\partial z} \right|^2 dz = \int_a^{+\infty} \left| -\varepsilon^2 \frac{sh(\varepsilon(z \mp z_0))}{ch(\varepsilon(z \mp z_0))} \right|^2 dz = \\
&= \varepsilon^4 \int_a^{+\infty} \frac{sh^2(\varepsilon(z \mp z_0))}{ch^2(\varepsilon(z \mp z_0))} dz = \varepsilon^4 \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{+\infty} \frac{sh^2(\varepsilon(z \mp z_0))}{ch^2(\varepsilon(z \mp z_0))} d(th(\varepsilon(z \mp z_0))) = \\
&= \varepsilon^3 \int_a^{+\infty} th^2(\varepsilon(z \mp z_0)) d(th(\varepsilon(z \mp z_0))) = \frac{\varepsilon^3}{3} th^3(\varepsilon(z \mp z_0)) \Big|_a^{+\infty} = \\
&= \frac{\varepsilon^3}{3} [1 - th^3(\varepsilon(z \mp z_0))].
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_a^{+\infty} |u_2|^4 dz = \int_a^{+\infty} \left| \frac{\varepsilon}{ch(\varepsilon(z \mp z_0))} \right|^4 dz = \\
&= \int_a^{+\infty} \frac{\varepsilon^4}{ch^4(\varepsilon(z \mp z_0))} dz = \varepsilon^4 \int_a^{+\infty} \frac{ch^2(\varepsilon(z \mp z_0)) - sh^2(\varepsilon(z \mp z_0))}{ch^4(\varepsilon(z \mp z_0))} dz = \\
&= \varepsilon^4 \int_a^{+\infty} \frac{1}{ch^2(\varepsilon(z \mp z_0))} dz - \varepsilon^4 \int_a^{+\infty} \frac{sh^2(\varepsilon(z \mp z_0))}{ch^2(\varepsilon(z \mp z_0))} \frac{1}{ch^2(\varepsilon(z \mp z_0))} dz = \\
&= \varepsilon^3 th(\varepsilon(z \mp z_0)) \Big|_a^{+\infty} - \frac{\varepsilon^3}{3} (1 - th^3(\varepsilon(a \mp z_0))) = \\
&= \varepsilon^3 \left( 1 - th(\varepsilon(a \mp z_0)) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} th^3(\varepsilon(a \mp z_0)) \right) = \\
&= \varepsilon^3 \left( \frac{2}{3} - th(\varepsilon(a \mp z_0)) + \frac{1}{3} th^3(\varepsilon(a \mp z_0)) \right). \\
I_5 &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(z+a)|u|^2 + \delta(z-a)|u|^2] dz = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(z+a) + \delta(z-a)] |u|^2 dz = \\
&= \left| \frac{q'\eta}{dn(\varepsilon(-a \mp z_0))} \right|^2 + \left| \frac{q'\eta}{dn(\varepsilon(a \mp z_0))} \right|^2 = 2 \frac{q'^2 \eta^2}{dn^2(\varepsilon(a \mp z_0))}.
\end{aligned}$$

Підсумовуючи отримані результати, запишемо остаточний вираз для енергії системи з двома лінійними точковими потенціалами [11]:

$$\begin{aligned}
E &= 2 \left[ -\frac{1}{3} (q^2 - 2) q^2 \eta^2 \frac{sn(\eta a, q) cn(\eta a, q)}{dn^3(\eta a, q)} + \right. \\
&\left. + \left( \frac{2}{3} (q^2 - 2) \frac{q^2 \eta^2}{q'^2} - 2q^2 \eta \right) \frac{sn(\eta a, q) cn(\eta a, q)}{dn(\eta a, q)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( 2\eta - \frac{2}{3}(q^2 - 2)\frac{\eta^2}{q^2} \right) E(am(\eta a, q)) - \frac{1}{3}\eta^3 a \Big] + \\
& + 2\frac{\varepsilon^3}{3} \left( 1 - th^3(\varepsilon(z \mp z_0)) \right) - \\
& - 2\varepsilon^3 \left( \frac{2}{3} - th(\varepsilon(a \mp z_0)) + \frac{1}{3}th^3(\varepsilon(a \mp z_0)) \right) - \\
& - 2\lambda \frac{q^2 \eta^2}{dn^2(\varepsilon(a \mp z_0))}. \tag{4.21}
\end{aligned}$$

#### 4.5. Висновки до розділу IV

Розв'язана задача про поширення нелінійних хвиль (солітонів) у системі двох плоскопаралельних тонких інтерфейсів, які володіють лінійними властивостями в нелінійному середовищі. Рішення задачі отримано як розв'язок неоднорідного НРШ з двома симетричними точковими дефектами, які апроксимуються  $\delta$ -функціями. Розглянуто антисиметричний синфазний розв'язок НРШ у випадку фокусуєчого середовища. Отримано співвідношення, яке зв'язує основні параметри досліджуваної системи – частотну характеристику  $\varepsilon$ , інтенсивність інтерфейсів  $\lambda$ , відстань між інтерфейсами  $2a$  і модуль  $q$  еліптичної функції.

Обчислено повне число елементарних збуджень і повну енергію, які виникають в системі двох зв'язаних лінійних хвилеводів у нелінійному середовищі.

## Висновки

1. Розв'язана задача про локалізацію нелінійних хвиль (солітонів) біля плоского тонкого інтерфейсу, який має лінійні властивості в нелінійному середовищі. Рішення задачі знайдено як розв'язок неоднорідного НРШ з точковим дефектом, який апроксимується  $\delta$ -функцією. Досліджено випадки фокусуєчого та дефокусуєчого середовища при різному характері взаємодії (тяжіння або відштовхування) солітона з дефектом.

Показано, що в нелінійному середовищі з точковими дефектами локалізованими на домішку нелінійні стани можливі при будь-якому значенні ангармонізмів (при будь-якому значенні  $\sigma$ ) у випадку тяжіння квазічастинок до дефекту ( $\lambda > 0$ ). При взаємному тяжінні між квазічастинками ( $\sigma = +1$ ) локалізація нелінійного збудження поблизу домішка можлива навіть при відштовхуючому характері дефекту ( $\lambda < 0$ ).

У випадку  $\sigma = +1$  (тяжіння між квазічастинками),  $\lambda > 0$  (притягуючий домішок) точковий дефект відіграє роль потенціальної ями для багаточастинного стану – солітон локалізується поблизу дефекту і може коливатися біля його центра з частотою  $\sqrt{2\lambda\varepsilon^3}$ . Тобто в спектрі малих збуджень солітона існує мода коливань його центра відносно домішка. При цьому локалізований солітонний розв'язок стійкий.

У випадку  $\sigma = +1$ ,  $\lambda < 0$  солітонний розв'язок, локалізований поблизу відштовхуючого квазічастинки домішка, нестійкий. Ця нестійкість проявляється в експоненціальному зростанні антисиметричних доданок до розв'язку: квазічастинки «перекочуються» з одного півпростору в інший і формують солітон, локалізований по одну сторону від домішка, який відштовхується від нього і прямує на нескінченність. Таким чином, домішок, який відштовхується, не руйнує самолокалізований за рахунок тяжіння між квазічастинками солітон, а лише деформує його і відштовхує від себе. Цей процес описується лінійною модою нестійкого відносно зв'язку з дефектом локалізованого збудження.

У випадку  $\sigma = -1$  (відштовхування між квазічастинками) нелінійні локальні збудження можливі лише при  $\lambda > 0$  і зв'язаний з дефектом стан виявляється стійким. Однак «внутрішньої моди» коливань центру тяжіння тут немає, а існує лише суцільний спектр збурень, який відповідає вільним квазічастинкам.

Відповідно, при розповсюдженні нелінійної хвилі вздовж хвилеводу в фокусуєчому нелінійному середовищі відбувається її локалізація поблизу хвилеводу і можливі коливання цього локалізованого потоку відносно площини хвилеводу. У разі дефокусуєчого середовища коливання потоку щодо осі хвилеводу відсутні, хоча його локалізація зберігається.

2. Розв'язана задача про поширення нелінійних хвиль (солітонів) у системі двох плоскопаралельних тонких інтерфейсів, які володіють лінійними властивостями в нелінійному середовищі. Рішення задачі знайдено як розв'язок неоднорідного НРШ з двома симетричними точковими дефектами, які апроксимуються  $\delta$ -функціями. Досліджено випадок фокусуєчого середовища та антисиметричний синфазний розв'язок НРШ.

Отримане співвідношення, яке зв'язує основні параметри досліджуваної системи – частотну характеристику, інтенсивність інтерфейсів, відстань між інтерфейсами і модуль еліптичної функції. Обчислено повне число елементарних збуджень і повну енергію, які виникають в системі двох зв'язаних лінійних хвилеводів у нелінійному середовищі.

Результати досліджень доповідались на міжнародній конференції:  
Nonlinear localized states in the structured media with interfaces // 6<sup>th</sup> International Conference “Nanotechnology and Nanomaterial's” (NANO–2018), Kyiv, Ukraine, 27–30 August 2018, Abstract Book, P. 740

### Список використаних джерел

1. Захаров В. Е. Солитоны и коллапсы: два сценария эволюции нелинейных волновых систем / В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов // УФН. – 2012. – Т. 182, №6. – С. 571-572.
2. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости / Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1971. – 310 с.
3. Вахитов Н.Г. Стационарные решения волнового уравнения в среде с насыщенной нелинейностью / Н.Г. Вахитов, А.А. Колоколов // Изв. ВУЗов. Радиофизика. – 1973. – Т. XVI, № 7. – С. 1020-1028.
4. Доля П.Г. Введение в теорию обобщенных функций / П.Г. Доля. – Харьков. ХНУ. – 2012. – 57 с.
5. Ахманов С.А. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде / С.А. Ахманов, А.П. Сухоруков, Р.В. Хохлов // УФН. – 1967. – Т. 93, Вып. 1. – С. 19-70.
6. Янкаускас З.К. Радиальные распределения поля в самосфокусировавшемся пучке света / З.К. Янкаускас // Изв. ВУЗов. Радиофизика. – 1966. – Т. IX, № 2, – С. 412-415.
7. Захаров В.Е. О неустойчивости самофокусировки света / В.Е. Захаров // ЖЭТФ. – 1967. – Т. 53, Вып. 5. – С. 1735-1743.
8. Jan Bocheneck, Ann. Pol. Math., 24, № 2, 113 (1971).
9. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М.: Наука. – 1989. – 472 с.
10. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций / Н.И. Ахиезер – М.: Наука, 1970. – 304 с.
11. Gerasimchuk V.S. Nonlinear localized states in the structured media with interfaces / V.S. Gerasimchuk, I.V. Gerasimchuk, O.V. Konotopchyk, A.V. Grytsai // 6th International Conference “Nanotechnology and Nanomaterial’s” (NANO–2018), Kyiv, Ukraine, 27–30 August 2018, Abstract Book, P. 740.
12. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука. – 1963. – 1100 с.