**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ**
**«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**
**імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Фізико-математичний факультет**

**Кафедра математичної фізики**

«На правах рукопису»

УДК 517.43 + 517.5

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

________Горбачук В.М.

«___»___________20__р.

# Магістерська дисертація

**на здобуття ступеня магістра**

**зі спеціальності 111 «Математика»**

**на тему: «Про розв’язність $(n+1)$ разів інтегрованої задачі Коші в класі аналітичних вектор-функцій»**

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-72мп
Дем’янок Ольга Іванівна _____________

Керівник:
доцент, доктор фіз.-мат. наук
Горбачук Володимир Мирославович _____________

Рецензент:
старший науковий співробітник інституту
математики, кандидат фіз.-мат. наук
Грушка Ярослав Іванович _____________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка_________________

Київ -2018 р.

**Національний технічний університет України**

**«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

**Фізико-математичний факультет**

**Кафедра математичної фізики**

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність -111 «Математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________Горбачук В. М.

«___»____________20__р.

**ЗАВДАННЯ**

**На магістерську дисертацію студентці**

**Дем’янок Ользі Іванівні**

1. Тема дисертації «Про розв’язність (n+1) разів інтегрованої задачі Коші в класі аналітичних вектор-функцій» та її науковий керівник доцент, доктор фізико-математичних наук Горбачук Володимир Мирославович затверджені наказом по університету від 02 листопада 2018 р. № 4064 - с.

2. Термін подання студентом дисертації: 06 грудня 2018 р.

3. Об’єкт дослідження: диференціально-операторні рівняння.

4. Предмет дослідження: задача Коші для диференціальних рівнянь у банаховому просторі.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

   1) ознайомитись з теорією абстрактних лінійних диференціальних рівнянь та пов'язаних з нею теорією півгруп лінійних операторів;

2) знайти умову, необхідну і достатню для розв'язності (n+1) разів інтегрованої задачі Кошів класі аналітичних вектор-функцій;

3) установити критерій можливості продовження розв'язку (n+1) разів інтегрованої задачі Коші до цілої вектор-функції скінченного порядку та скінченного типу.

6. Орієнтовний перелік публікацій:

1) Горбачук В.М., Дем'янок О.І., Про розв'язність $(n+1)$ раз інтегрованої задачі Коші // Сьома всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, 19-20 квітня 2018р, Тези доповідей - Київ, с. 85.

2) Горбунова О.С., Дем'янок О.І., Стогній В.І. Історія розвитку теоретико-групового аналізу диференціальних рівнянь // XVI міжнародна молодіжна науково-практична конференція «Історія розвитку науки, техніки та освіти», присвячена 120-річчю «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Збірник праць - Київ, 2018.

7. Дата отримання завдання: 02 лютого 2018 р.

Календарний план

| № з/п | Назва етапів виконання магістерської дисертації | Термін виконання етапів магістерської дисертації | Примітка |
|---|---|---|---|
| 1. | Ознайомлення з теорією абстрактних лінійних диференціальних рівнянь та теорією півгруп лінійних операторів у локально-опуклих топологічних, зокрема банахових, просторах. | 01.02.2018-30.03.2018 | Виконано |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2. | Відшукання необхідної й достатньої умови для того, щоб вектор-функція була розв'язком $C_{n+1}[\tau]$ –задачі Коші. | 02.04.2018-31.05.2018 | Виконано |
| 3. | Установлення критерію можливості продовження розв'язку (n+1) разів інтегрованої задачі Коші до цілої вектор-функції певного скінченного порядку і скінченного типу. | 03.09.2018-31.10.2018 | Виконано |

Студент __________ Дем'янок О.І.

Науковий керівник дисертації __________ Горбачук В.М.

# Реферат

***Магістерська дисертація:*** 46 сторінок, 13 літературних джерел.

***Актуальність теми***. Тема дисертації пов'язана з одним із основних підрозділів сучасного функціонального аналізу - теорією абстрактних диференціальних рівнянь, коефіцієнтами яких є необмежені оператори у банаховому просторі, котрі, як відомо, охоплюють багато рівнянь з частинними похідними, включаючи модельні. Тому ця тематика була і наразі є актуальною. Дослідженню крайових задач для таких рівнянь, зокрема класичної задачі Коші, присвячено чимало робіт різних математиків в тому числі й монографій. У дисертації розглядається більш загальна, так звана (n+1) разів інтегрована задача Коші. Питання її коректної постановки вивчалось раніше. В роботі досліджуються умови існування розв'язків у деяких класах аналітичних вектор-функцій, при цьому важливим є з'ясування зв'язку між цими класами розв'язків та повними підпросторами їх початкових даних.

***Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.*** Дисертація виконана в рамках НДР «Розвиток методів дослідження розв'язків диференціально-операторних рівнянь і рівнянь із частинними похідними параболічного типу» (№ держ. реєстрації 0117U003173) кафедри математичної фізики.

***Мета і завдання дослідження***. Метою дослідження є відшукання умов, необхідних і достатніх для розв'язності $C_{n+1}[\tau]$ - задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку у банаховому просторі у певних класах аналітичних вектор-функцій. Основне завдання - знайти критерії можливості продовження розв'язку до цілої вектор-функції певного скінченного порядку і скінченного типу.

***Об'єкт дослідження***. Абстрактні диференціальні рівняння у банаховому просторі.

***Предмет дослідження***. Розв'язність у певних класах аналітичних вектор-функцій (n+1) разів інтегрованої задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку у банаховому просторі.

***Методи дослідження***. Методи теорії півгруп лінійних операторів у банаховому та гільбертовому просторах, операторного числення, теорії локально-опуклих топологічних просторів.

***Наукова новизна одержаних результатів***. Для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом у банаховому або гільбертовому просторі знайдено критерії існування розв'язків (n+1) разів інтегрованої задачі Коші в деяких класах аналітичних вектор-функцій, а також можливості продовження розв'язків до цілої вектор-функцій певного скінченного типу. Встановлено зв'язок між порядком росту і типом таких розв'язків та порядком і типом відносно операторного коефіцієнта їх початкових даних.

***Практичне значення одержаних результатів***. Дослідження мають теоретичний характер, але їх результати та методика одержання можуть бути застосовані у подальшому дослідженні крайових задач для рівнянь з частиними похідними, зокрема вивчення динаміки обертання твердих тіл, наповнених рідиною.

***Апробація результатів дисертації***. Результати досліджень доповідались на науковому семінарі кафедри, на конференціях.

***Публікації***. Результати дисертації опубліковано в матеріалах [12] та [13].

***Ключові слова***. півгрупа, інфінітезимальний оператор, індуктивна та проективна границі, спряжений оператор, самоспряжений оператор, розклад одиниці, задача Коші, $C_{n+1}[\tau]$ -задача Коші, порядок і тип цілої вектор-функції.

## Abstract

***Master's dissertation:*** 46 pages., 13 references to authorities.

***The relevance of the subject.*** The subject of the master's degree work is related to one of the basic branches of modern functional analysis, namely the theory of abstract differential equations, whose coefficients are unbounded operators in a Banach space. As is well known, such equations including the model ones. That's why this themes was and remains actual up till now. Many works of different mathematicians, in particular monographs, are devoted to investigation of boundary-value problems (the classical Cauchy problem is among them) for such equations. In this work more general, the so-called (n+1)- times integrated Cauchy problem, is considered. Its well-posedness was investigated previously.In the dissertation, the conditions of existence of solutions to this problem in some classes of existence of solutions to this problem in some classes of analytic vector-valued functions are found. Moreover, the relationship between these classes of solutions and certain subspaces of ther initial data is established.

***The purpose and targets of the research***. The purpose of the work is findig the necessary and sufficient conditions for the solvability in certain classes of analytic vector-valued functions of the $C_{n+1}[\tau]$ Cauchy problem for a first-order differential equation in a Banach space. The main target of the research is to find the conditions under which a solution admits extension to an entire vector-valued function of a certain finite growth order and finite type.

***The object of the reseach***. The reseach object is an abstract differential equation in a Banach space.

***The subject of the research***. The solvability in certain classes of analytic vector-valued functions for a first-order differential equation in a Banach space.

***Methods of the reseach***. Methods of the theory of semigroups of linear operators in a Banach and Hilbert space, operator calculus, the theory of locally convex space.

***Scientific novelty of the resuts***. For a first-order differential equation with an unbounded operator coefficient in a Banach or Hilbert space, the criterions of

existence of solutions in certain classes of analytic vector-valued functions to the (n+1) - times integrated Cauchy problem were established the conditions under which such a solution admits an extension to an entire vector-valued function of a certain finite order and finite type were found. it was also shown the relation of the growth order and type of such a solution to the order and type of its initial data.

***The importance of the results***. The investigations fulfilled in the work are of the theoretical character, but its results may be applied in the further study of boundary-value problems for partial differential equations,for example, to investigation of the rotation dynamics of solids filled with fluid.

The results of reseach were discussed at the seminar of the Department of Mathematical Physics.

The results were published in [12],[13].

# ЗМІСТ

## ВСТУП

Магістерська робота присвячена з'ясуванню можливості продовження розв'язку $(n+1)$ разів інтегрованої задачі Коші до цілої вектор-функції скінченного порядку і скінченного типу, а також існування її розв'язків у деяких класах аналітичних вектор-функцій у банаховому просторі.

Зазначена задача належить до теорії абстрактних лінійних диференціальних рівнянь – одного з основних підрозділів сучасного функціонального аналізу, який, як відомо, охоплює чимало видів рівнянь з частинними похідними. Початок цієї теорії та її зв'язок з теорією півгруп покладено роботами Е. Хілле і К. Іосіди (1948), в яких одержано перші теореми існування розв'язків задачі Коші для рівняння вигляду $y' = Ay$ з необмеженим оператором $A$ у банаховому просторі і показано, що ця задача тісно пов'язана з теорією півгруп лінійних операторів у банаховому просторі, при цьому для знаходження розв'язку необхідно вміти відновлювати півгрупу лінійних операторів за її генератором. К. Іосіда, а невдовзі й В. Феллер пов'язали ці дослідження півгруп з різними задачами для рівняння дифузії. Паралельно з цим Е. Хілле, а потім Р. Філліпс розпочали побудову теорії абстрактної задачі Коші для рівнянь у банаховому просторі. Також ця теорія була розвинута в монографіях С. Г. Крейна «Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве» (Москва, 1967), М. Г. Крейна «Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве» ( Киев, 1964) та Ю. Л. Далецького і М. Г.Крейна «Устойчивость дифференциальных уравнений в банаховом пространстве» (Москва, 1970). Півгрупові методи дослідження різних класів рівнянь використовували в своїх працях П. Лакс, А. Мільгрем, А. Пазі, Неерван, Гольдстей В. Лянце, Т. Като, С. Агмон, та багато інших. Фундаментальні результати в цьому напрямку викладено в низці добре відомих монографій.

Останнім часом область застосувань теорії абстрактних диференціальних рівнянь і тісно пов'язаної з нею теорії півгруп значно розширилась і включає, крім теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, математичну фізику, теорію наближень, динаміку руху рідини тощо.

# РОЗДІЛ 1.

# ПОПЕРЕДНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.

## 1.1. Банахів простір.

Нехай $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ (поле скалярів або дійсних чисел).

Множина $X$ називається *лінійним простором* над полем $\mathbb{K}$, якщо на його елементах визначено операції додавання і множення на скаляр $\alpha \in \mathbb{K}$ такі, що:

1) для будь-яких $\{x, y\} \subset X$: $x + y = y + x$ (комутативність);
2) для будь-яких $\{x, y, z\} \subset X$: $(x + y) + z = x + (y + z)$ (асоціативність);
3) для будь-яких $\{x, y\} \subset X$ та $\alpha \in \mathbb{K}$: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (дистрибутивність щодо додавання векторів);
4) для будь-яких $x \in X$ та $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{K}$: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (дистрибутивність додавання щодо скалярів);
5) для будь-яких $\{x, y, z\} \subset X$: $x + z = x + y \Rightarrow y = z$;
6) для будь-яких $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{K}$ та $x \in X$: $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (асоціативність щодо множення на скаляр);
7) для будь-якого $x \in X$: $1 \cdot x = x$.

*Нормою* на лінійному просторі $X$ називається відображення $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ таке, що:

1) для будь-якого $x \in X$:$\|x\| \geq 0$ і $\|x\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$;
2) для будь-яких $x \in X$ та $\alpha \in \mathbb{K}$ : $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
3) для будь-яких $\{x, y,\} \subset X$ : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

*Лінійним нормованим простором* називають пару $(X, \|.\|)$, де $X$ – лінійний простір, а $\|.\|$ – норма на $X$.

Число $\|x - y\|$ називається *відстанню між елементами $x$ і $y$*. Вона володіє властивостями метрики.

У зв'язку з цим кажуть, що послідовність $x_n \in X$ збігається до елемента $x \in X :\ x_n \to x$, якщо $\|x - x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Відповідно вводяться поняття граничних точок множин та замкнених, відкритих, компактних множин.

Послідовність $x_n \in X$ називається *фундаментальною* (або *послідовністю Коші)*, якщо $\|x_n - x_m\| \to 0$, коли $n, m \to \infty$.
Збіжна послідовність є фундаментальною.

Якщо будь-яка фундаментальна послідовність у просторі $X$ збігається, то простір називається *повним*.

Повний лінійний нормований простір називається *банаховим*. Зазвичай він позначається як $\mathfrak{B}$. Будь-який лінійний нормований простір може бути доповнений до банахового .

## 1.2. Лінійні функціонали.

Нехай $\mathfrak{B}$ - банаховий простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Якщо кожному елементу $x \in \mathfrak{B}$ поставлено у відповідність деяке число $f(x)$ з $\mathbb{C}$ говорять, що на $\mathfrak{B}$ визначений функціонал $f(x)$, називається *лінійним*, якщо:

$$\forall\, x, y\ \in \mathfrak{B}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

$f(x)$ називається неперервним в точці $x_0 \in \mathfrak{B}$, якщо $f(x_n) \to f(x_0)$ при $x_n \to x_0$. З неперервності лінійного функціоналу в одній точці випливає його неперервність скрізь. Говорять, що лінійний функціонал $f(x)$ є обмеженим на $\mathfrak{B}$ , якщо

$$|f(x)| \le c\|x\|_{\mathfrak{B}} (x \in \mathfrak{B}), \tag{1.1}$$

де константа $c$ не залежить від $x$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$ – норма у просторі $\mathfrak{B}$.

Найменша можлива константа в нерівності (1.1) називається *нормою лінійного функціоналу* $f(x)$ і позначається $\|f\|$. Має місце така формула

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathfrak{B}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{\mathfrak{B}}} = \sup_{\|x\|_{\mathfrak{B}}=1} |f(x)|. \tag{1.2}$$

Для того, щоб лінійний функціонал був неперервним, необхідно і достатньо, щоб він був обмеженим . У банаховому просторі $\mathfrak{B}$ є достатньо багато лінійних функціоналів. Точніше, для всякого елемента $x_0 \in \mathfrak{B}$ існує лінійний функціонал $f_0(x)$ такий, що $\|f_0\| = 1$ і $f_0(x_0) = \|x_0\|$. Звідси випливає, що

$$\|x\|_{\mathfrak{B}} = \max_{\|f\|=1} |f(x)| = \max \frac{|f(x)|}{\|f\|}, \tag{1.3}$$

де в останньому виразі максимум береться по всіх лінійних функціоналах, визначених на $\mathfrak{B}$.

Над лінійними функціоналами природним чином визначаються дії додавання та множення на скаляр: $(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Множина усіх лінійних функціоналів на $\mathfrak{B}$ утворює лінійний нормований простір $\mathfrak{B}^*$ з нормою (1.2). Цей простір є повним, тобто він є банаховим. Простір $\mathfrak{B}^*$ називається *спряженим* до $\mathfrak{B}$.

Простір, спряжений до $\mathfrak{B}^*$, називається *другим спряженим* до простору $\mathfrak{B}$ і позначається $\mathfrak{B}^{**}$.

Кожний елемент $x \in \mathfrak{B}$ породжує лінійний функціонал $F_x$ на просторі $\mathfrak{B}^*$ за формулою $F_x(f) = f(x)$. З рівності (1.3) випливає, що норма функціоналу $F_x$ на $\mathfrak{B}^*$ дорівнює нормі елемента $x$. Таким чином, простір $\mathfrak{B}$ ізометрично і лінійно відображається у простір $\mathfrak{B}^{**}$. Якщо $\mathfrak{B}$ збігається з $\mathfrak{B}^{**}$, то $\mathfrak{B}$ є рефлексивним.

### 1.3. Функції зі значеннями у банаховому просторі.

Розглянемо функції $x(t)$, задані на проміжку $[0, T]$ дійсної осі, значення яких при кожному $t$ є елементами банахового простору $\mathfrak{B}$.

Функція $x(t)$ називається *неперервною в точці* $t_0$, якщо$\|x(t) - x(t_0)\| \to 0$при $t \to t_0$, і *неперервною на* $[0, T]$, якщо вона неперервна в кожній точці відрізку $[0, T]$.

Норма неперервної на $[0,T]$ функції є скалярною неперервною функцією. Множина усіх неперервних на $[0,T]$ функцій зі значеннями в $\mathfrak{B}$ утворює лінійний простір $C(\mathfrak{B},[0,T])$. У цьому просторі вводиться норма

$$\|x\|_{C(\mathfrak{B},[0,T])} = \max_{0\le t\le T}\|x(t)\|_{\mathfrak{B}}. \tag{1.4}$$

Відносно цієї норми простір $C(\mathfrak{B},[0,T])$ є банаховим. Збіжність за нормою $(1.4)$ означає рівномірну на $[0,T]$ збіжність. Функція $x(t)$ має в точці $t_0$ праву (ліву) похідну, якщо існує елемент $y \in \mathfrak{B}$ такий, що

$$\left\|\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} - y\right\|_{\mathfrak{B}} \to 0,$$

при $\Delta t \to +0 \quad (\Delta t \to -0)$.

Якщо права та ліва похідні існують і збігаються, то функція $x(t)$ *диференційовна в точці* $t_0$ і її похідна

$$x'(t_0) = \frac{dx(t_0)}{dt} = y.$$

Функція, диференційовна на відрізку (інтервалі, пів-інтервалі), якщо вона диференційовна в кожній точці цього відрізку (інтервалу, пів-інтервалу). У цьому випадку похідна $x'(t)$ також є функцією зі значеннями у $\mathfrak{B}$. Якщо функція $x'(t)$ неперервна, то говорять, що $x(t)$ є неперервно диференційовною. Так само вводяться поняття $n$ разів диференційовної і нескінченно диференційовної функції.

Розглянемо функції $x(z)$, визначені в деякій області $G$ комплексної площини, що приймають значеннями у просторі $\mathfrak{B}$.

Елемент ${x'}_0$ називається *похідною* функції $x(z)$ в точці $z_0$, якщо

$$\left\|\frac{x(z_0+\Delta z)-x(z_0)}{\Delta z} - {x'}_0\right\|_{\mathfrak{B}} \to 0,$$

при $\Delta z \to 0$.

Функція $x(z)$ називається *аналітичною* в області $G$, якщо вона диференційовна у кожній точці цієї області.

Аналітична в $G$ функція в околі кожної точки $z_0 \in G$ розкладається в ряд

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{1.5}$$

де $a_n = \frac{1}{n!} x^{(n)}(z_0)$.

Навпаки, будь-який степеневий ряд вигляду (1.5) визначає аналітичну функцію всередині його кола збіжності, радіус $r$ якого обчислюється за формулою Коші-Адамара

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\|a_n\|_{\mathfrak{B}}}.$$

Якщо функція $x(t)$ є неперервною на проміжку $[a, b]$, то для неї можна визначити інтеграл як границю інтегральних сум

$$\int_a^b x(t)dt = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} x(t_k) \Delta\, t_k. \tag{1.6}$$

Тут границя розуміється в сенсі збіжності за нормою простору $\mathfrak{B}$, коли діаметр розбиття $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ прямує до нуля. Так само, як і в класичному аналізі, вводиться поняття невласного інтегралу. Аналогічно визначаються невласний інтеграл від розривної функції та головне значення різних невласних інтегралів. Також розглядаються інтеграли, що залежать від параметра. На них переносяться класичні теореми про неперервну залежність від параметра, про інтегрування та диференціювання по параметру.

Найбільш популярним узагальненням інтегралу Лебега є інтеграл Бохнера від функції зі значеннями у банаховому просторі.

## 1.4. Обмежені лінійні оператори.

Оператор $A$, визначений на лінійному підпросторі банахового простору $\mathfrak{B}$, що діє в інший банаховий простір $\mathfrak{F}$, називається *лінійним*, якщо він адитивний та однорідний.

Лінійний підпростір, на якому визначений оператор $A$, називається його *областю визначення* $\mathcal{D}(A)$, а сукупність елементів вигляду $Ax$ $\big(x \in \mathcal{D}(A)\big)$ – його *областю значень* $\mathcal{R}(A)$.

Якщо $\mathcal{D}(A) = \mathfrak{B}$ і для $x \in \mathfrak{B}$ виконується нерівність

$$\|Ax\|_{\mathfrak{F}} \le c\|x\|_{\mathfrak{B}}, \tag{1.7}$$

де $c$ не залежить від вибору $x \in \mathfrak{B}$ , то оператор $A$ називається *обмеженим*, а найменше значення константи $c$ – його нормою $\|A\|_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{F}}$.

Якщо $A$ – лінійний обмежений оператор, то функціонал $\Phi(x) = \|Ax\|_{\mathfrak{F}}$ володіє тими властивостями, які вимагались від функціоналів у принципі рівномірної обмеженості. Тому, якщо сім'я лінійних обмежених операторів $A_\alpha$ рівномірно обмежена на кожному елементі $x$ простору $\mathfrak{B}$, то норми операторів $A_\alpha$ рівномірно обмежені.

Сукупність $\mathcal{L}(\mathfrak{B},\mathfrak{F})$ усіх обмежених операторів, що діють з $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{F}$ є банаховим простором відносно норми

$$\|A\|_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{F}} = \sup_{x\in\mathfrak{B}} \frac{\|Ax\|_{\mathfrak{F}}}{\|x\|_{\mathfrak{B}}}.$$

У просторі $\mathcal{L}(\mathfrak{B},\mathfrak{F})$ важливим є поняття сильної збіжності.

Послідовність лінійних обмежених операторів $A_n$ *сильно збігається* до оператора $A$, якщо при будь-якому $x \in \mathfrak{B}$

$$\|Ax - A_n x\|_{\mathfrak{F}} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Збіжність послідовності операторів по нормі простору $\mathcal{L}(\mathfrak{B},\mathfrak{F})$ спричиняє її сильну збіжність. Обернене твердження не є вірним.

Нехай $f$ – лінійний функціонал на просторі $\mathfrak{F}$ і $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}, \mathfrak{F})$. Розглянемо визначений на просторі $\mathfrak{B}$ функціонал

$$g(x) = f(Ax).$$

Таким чином, кожному функціоналу $f \in \mathfrak{F}^*$ ставиться у відповідність функціонал $g \in \mathfrak{B}^*$.

Оператор, що виконує відповідність $f \mapsto g$, називається *спряженим оператором* $A^*$ до оператора $A$. Отже, $(A^* f)(x) = f(Ax)$.

## 1.5. Оператори, що залежать від параметра.

Функцію $A(t)$ $(0 \le t \le T)$ зі значеннями у просторі $\mathcal{L}(\mathfrak{B}, \mathfrak{F})$ обмежених лінійних операторів, що діють з $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{F}$ будемо називати *оператором, що залежить від параметра*.

На оператор, що залежить від параметра, переносяться поняття неперервності, диференційованості та аналітичності.

Обмежений лінійний оператор $A(t)$ називається *сильно неперервним (в точці, на сегменті)*, якщо при кожному $x \in \mathfrak{B}$ функція $A(t)x$ зі значеннями в $\mathfrak{F}$ є неперервною (в цій точці, на цьому сегменті).

Сильно неперервний на проміжку $[0, T]$ оператор $A(t)$ є рівномірно обмеженим: $\|A(t)\|_{\mathfrak{B} \to \mathfrak{F}} \le c$. Тому сильно неперервний на $[0, T]$ оператор можна розглядати як обмежений лінійний оператор, що відображає простір $\mathfrak{B}$ в простір неперервних функцій $C(\mathfrak{F}; [0, T])$.

**Лема 1.1.** Якщо $x(t)$ – неперервна на $[0, T]$ функція зі значеннями в $\mathfrak{B}$, а $A(t)$ $(0 \le t \le T)$ – сильно неперервний оператор з $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{F}$, то функція $A(t)x(t)$ є неперервною в $\mathfrak{F}$.

**Лема 1.2.** Якщо $A(t)$ $(0 \le t \le T)$ – сильно неперервний оператор з $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{F}$, а $B(t)$ $(0 \le t \le T)$ – сильно неперервний оператор з $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{I}$, то $B(t)A(t)$ – сильно неперервний оператор з $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{I}$.

Лінійний обмежений оператор $A(t)$ називається *сильно неперервно диференційовним по* $t$, якщо при кожному $x \in \mathfrak{B}$ функція $A(t)x$ є неперервно диференційовною в $\mathfrak{F}$.

Формула $A'(t)x = (A(t)x)'$ визначає сильно неперервний оператор $A'(t)$, що діє з $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{F}$. Якщо оператор $A(t)$ сильно неперервно диференційовний, то послідовність операторів $\frac{1}{\Delta t}[A(t+\Delta t) - A(t)]$ сильно і рівномірно по $t$ збігається до оператора $A'(t)$. Тому вона обмежена рівномірно по $t$ і $\Delta t$.

**Лема 1.3.** Якщо оператор $A(t)$ сильно неперервно диференційовний, то він є неперервним по нормі простору лінійних обмежених операторів і задовольняє умову Ліпшица

$$\|A(t+\Delta t) - A(t)\|_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{F}} \le c|\Delta t|.$$

## 1.6. Алгебра операторів, що діють в одному просторі. Резольвента та спектр.

Розглянемо простір $\mathcal{L}(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ всіх обмежених лінійних операторів, що діють з $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}$. У цій множині визначений добуток операторів як $(AB)x = A(Bx)$, $x \in \mathfrak{B}$. Множина $\mathcal{L}(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ є не комутативною банаховою алгеброю.

Оператори $P$, для яких $P^2 = P$ називаються *проекційними* або *проекторами*.

В алгебрі $\mathcal{L}(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ можна побудувати многочлени від оператора $A$. Так, якщо $F(z)$ – ціла функція комплексної змінної $z$, то

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{1.8}$$

і тоді покладається

$$F(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n. \tag{1.9}$$

Ряд (1.8) збігається всюди, тому ряд (1.9) збігається по нормі простору $\mathcal{L}(\mathfrak{B},\mathfrak{B})$ для довільного лінійного обмеженого оператору $A$. Особливу роль відіграє функція $e^{tA}$, що визначається рядом

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n.$$

Ця функція задовольняє основному функціональному співвідношенню для показникової функції

$$e^{(t+\tau)A} = e^{tA} \cdot e^{\tau A}.$$

Оператор $e^{tA}$ є диференційовним по параметру $t$ в сенсі норми операторів і

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}.$$

Оператор $e^{zA}$ є цілою аналітичною функцією параметра $z$.

Однією з важливих функцій від оператора є його резольвента.

Якщо розглянути диференціальне рівняння $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ з обмеженим лінійним оператором $A$, то його розв'язок $x(t)$, що задовольняє початкову умову $x(0) = x_0$ дається формулою $x(t) = e^{tA}x_0$, при цьому усі розв'язки розглядуваного рівняння є цілими функціями по $t$.

Якщо для заданого комплексного $\lambda$ існує обмежений обернений оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ ($I$ – тотожний оператор), то число $\lambda$ називається *регулярною точкою оператора* $A$, а оператор $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ – *резольвентою оператора* $A$.

Регулярні точки оператора $A$ утворюють відкриту множину комплексної площини, а її замкнене доповнення називається *спектром цього оператора*. Спектр лінійного обмеженого оператора завжди не порожній. Скрізь у подальшому під $\|\cdot\|$ розумітимемо $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}}$.

Якщо $|\lambda| > \|A\|$, то резольвента $R_A(\lambda)$ існує, її можна визначити як

$$R_A(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n. \tag{1.10}$$

Цей ряд абсолютно збігається, оскільки $\left\| \frac{1}{\lambda^n} A^n \right\| \leq \left( \frac{\|A\|}{|\lambda|} \right)^n$. Однак ряд (1.10) може збігатись і в ширшій області, а саме, він збігається зовні круга радіуса

$$r_A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Число $r_A \leq \|A\|$ називається *спектральним радіусом оператора* $A$.

Нехай $F(z)$ – однозначна аналітична функція, що визначена в області, що містить спектр оператора $A$, і $\Gamma$ – спрямлюваний жорданів контур, що лежить у цій області і оточує спектр оператора $A$. Розглянемо інтеграл

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(\lambda) R_A(\lambda) d\lambda.$$

Цей інтеграл існує як інтеграл від неперервної функції $F(\lambda)R_A(\lambda)$ зі значеннями в банаховому просторі $\mathcal{L}(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ і має властивості інтегралу Коші. Його значення не залежить від вибору контуру $\Gamma$, що володіє описаними властивостями, і являє собою лінійний обмежений оператор, що залежить від вибору $A$

$$F(A) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F(\lambda) R_A(\lambda) d\lambda. \tag{1.11}$$

У випадку коли $F(z)$ – ціла функція, (1.11) збігається з (1.9). Таким чином, операторний інтеграл Коші дозволяє значно розширити клас природно визначених функцій від оператора, включивши в нього алгебру функцій, голоморфних в околі спектру оператора $A$.

## 1.7. Необмежені оператори.

Оператор $A$ називається *замкненим*, якщо з того, що $x_n \to x\big(x_n \in \mathcal{D}(A)\big)$ і $Ax_n \to y$ випливає, що $x \in \mathcal{D}(A)$ і $y = Ax$.

Обмежений оператор завжди замкнений. Якщо оператор $A$ не є замкненим, то він допускає замикання, тоді і тільки тоді, коли співвідношення $x_n \to 0 \ \left(x_n \in \mathcal{D}(A)\right)$ та $Ax_n \to y$ обумовлюють рівність $y = 0$.

Найменше замкнене розширення $\bar{A}$ оператора $A$ називається *замиканням*. Якщо оператор $A$ допускає замикання, то співвідношення $x_n \to x\left(x_n \in \mathcal{D}(A)\right)$ і $Ax_n \to y$ спричиняють рівність$y = \bar{A}x$, тобто $\bar{A} \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n$, якщо ці дві границі існують. Застосувавши вище сказане до операцій диференціювання та інтегрування отримуємо

$$\bar{A}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(Ax), \tag{1.12}$$

якщо зазначені похідні існують, а також

$$\bar{A}\int x(t)dt = \int Ax(t)dt, \tag{1.13}$$

якщо ці інтеграли існують.

## 1.8. Гільбертів простір.

Гільбертів простір $\mathfrak{H}$ - це банахів простір, в якому норма генерується скалярним добутком. Під *скалярним добутком елементів* $x, y \in \mathfrak{B}$ розуміється число $(x, y)$, яке має такі властивості:

1) $(x, x) > 0$, якщо $x \neq 0$;
2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
4) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

У гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ норма породжується за формулою $\|x\|_{\mathfrak{H}}^2 = (x, x)$.

Нехай тепер $\mathfrak{H}$ - гільбертів простір і $A$ – лінійний оператор в ньому з областю визначення $\mathcal{D}(A)$, щільною в $\mathfrak{H}$. Тоді можна однозначно визначити *спряжений до $A$ оператор* $A^*$ формулою $(Ax, y) = (x, A^*y)$ на елементах $y$, для яких $|(Ax, y)| \leq c\|x\|_{\mathfrak{H}}$ для всіх $x \in \mathcal{D}(A)$. Якщо оператор $A$ допускає замикання, то $\mathcal{D}(A^*)$ також щільна в $\mathfrak{H}$.

Лінійний оператор $A$ називається *самоспряженим*, якщо $A = A^*$.

Спектр необмеженого самоспряженого оператора є замкненою, взагалі кажучи необмеженою множиною точок дійсної осі. Для резольвенти $R_A(\lambda)$ самоспряженого оператора $A$ виконується нерівність

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{1}{d},$$

де $d$ – відстань від точки $\lambda$ до спектра оператора $A$.

Нехай $L$ - підпростір простору $\mathfrak{H}$. Будь-який вектор $x \in \mathfrak{H}$ однозначно зображується у вигляді: $x = y + z$, де $y \in L$, $z \perp L$. Нехай $Px = y$. Оператор $P$ визначений на всьому $\mathfrak{H}$, а його областю значень є підпростір $L$. Цей оператор називається *проекційним*, або *оператором ортогонального проектування* на підпростір $L$, і позначається як $P_L$.

## 1.9. Спектральний розклад самоспряженого оператора.

У монографії [5] наведено таку теорему.

**Теорема 1.1.** Кожний самоспряжений оператор $A$ породжує сім'ю $\{E_\lambda\}$ проекційних операторів, які залежать від дійсного параметра $\lambda$, $-\infty < \lambda < +\infty$, і мають властивості

1) $AC = CA \Rightarrow E_\lambda C = CE_\lambda$ для будь-якого $\lambda$;
2) $E_\lambda \leq E_\mu$, $\lambda < \mu$;
3) оператор-функція $E_\lambda$ є сильно неперервною зліва: $E_{\lambda-0} = E_\lambda$;
4) $E_\lambda = 0$ для $-\infty < \lambda \leq m$,$E_\lambda = I$ для $M < \lambda < +\infty$ ,

де $m = \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$ та $M = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x)$ – нижня та верхня границі спектру оператора $A$. Сім'я $\{E_\lambda\}$ називається *розкладом одиниці*, породженим оператором $A$.

Для будь-якої обмеженої неперервної скалярної функції $F(\lambda)$, заданої на осі $(-\infty, \infty)$, можна визначити операторний інтеграл Стілтьєса

$$\int_a^b F(\lambda) dE_\lambda, \tag{1.14}$$

як границюпо нормі інтегральних сум вигляду

$$\sum_{k=0}^{N} F(\lambda_k)\left(E_{\lambda_{k+1}} - E_{\lambda_k}\right),$$

якщо відрізок $[a, b]$ скінченний, і як невласний інтеграл, якщо $a = -\infty$ або $b = \infty$. Інтеграл $(1.14)$ являє собою обмежений оператор, причому

$$\left\| \int_a^b F(\lambda) dE_\lambda \right\| \leq \sup_{a \leq \lambda \leq b} |F(\lambda)|.$$

Якщо значення функції $F(\lambda)$ дійсні, то оператор $(1.14)$ є самоспряженим. Якщо функція $F(\lambda)$ є дійсною і необмежена, то формула $(1.14)$ після надання підходящого сенсу інтегралові дає самоспряжений, взагалі кажучи, необмежений оператор, область визначення якого складається з тих і тільки тих елементів $x$, для яких

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d(E_\lambda x, x) < \infty.$$

Виявляється, що кожному самоспряженому оператору $A$ відповідає деякий спектральний розклад одиниці $E_\lambda$, причому при $x \in \mathcal{D}(A)$

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda x.$$

Як вже зазначалось вище, оператори $E_\lambda$ комутують з будь-яким оператором, комутуючим з $A$. Якщо оператор $A$ обмежений, а $m$ та $M$ – точні нижня та верхня границі його спектру, то $E_\lambda = 0$ при $\lambda \leq m$ і $E_\lambda = \mathrm{I}$ при $\lambda > M$, а, отже, має місце така теорема.

**Теорема 1.2.** Нехай $A$ – самоспряжений оператор в $\mathfrak{H}$. Тоді

$$A = \int_{m}^{M+\varepsilon} \lambda dE_\lambda,$$

де інтеграл розуміється як границя інтегральних сум в сенсі рівномірної збіжності у просторі операторів, а $\varepsilon$ – будь-яке додатне число.

Визначимо тепер інтеграли вигляду

$$\int_{m}^{M+\varepsilon} F(\lambda) dE_\lambda,$$

де $F(\lambda)$ - довільна комплекснозначна ступінчаста на проміжку $[m, M]$ функція, а $\{E_\lambda\}$ - розклад одиниці, породжений самоспряженим оператором $A$. Якщо $\lambda_0$ - точка розриву цієї функції, то будемо вважати, що

$$F(\lambda_0) = F(\lambda_0 + 0).$$

Продовжимо $F(\lambda)$ на $[m, M + \varepsilon)$, поклавши там $F(\lambda) = F(M)$. Нехай $F(\lambda_k) = \nu_k$ на $\Delta_k = [\lambda_k, \mu_k), k = 1, \dots, n,$ причому

$$\bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k = [m, M + \varepsilon).$$

За означенням

$$\int_{m}^{M+\varepsilon} F(\lambda)dE_{\lambda} = \sum_{k=1}^{n} \nu_k E(\Delta_k).$$

Оператор $\int_{m}^{M+\varepsilon} F(\lambda)dE_{\lambda}$ позначимо $F(A)$ і назвемо *функцією оператора* $A$ , що відповідає функції $F(\lambda)$ дійсної змінної $\lambda$.

Аналогічно можна побудувати функціональне числення для нормальних операторів у гільбертовому просторі.

## 1.10. Висновок до розділу 1.

У цьому розділі наводяться результати з теорії гільбертових і банахових просторів та лінійних операторів у них, функціонального числення для операторів у таких просторах необхідні для подальшого викладу основного результату роботи.

# РОЗДІЛ 2.

# ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОПЕРАТОРНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В КЛАСАХ ЦІЛИХ ВЕКТОР-ФУНКЦІЙ.

## 2.1. Коректність задачі Коші для диференціального операторного рівняння першого порядку у банаховому просторі.

Розглянемо рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), t \in [0, b], 0 < b \leq \infty, \tag{2.1}$$

де $A$ – замкнений лінійний оператор з областю визначення $\mathcal{D}(A)$ у банаховому просторі $\mathfrak{B}$. Припускатимемо також, що $\mathcal{D}(A)$ є щільною в $\mathfrak{B}$ : $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{B}$.

Під розв'язком рівняння (2.1) розумітимемо вектор-функцію $y(t)$: $[0, b] \mapsto \mathcal{D}(A)$, неперервно диференційовну на $[0, b]$ для якої виконується (2.1). Задача Коші для рівняння $(2.1)$ полягає у відшуканні його розв'язку, що задовольняє початкову умову

$$y(0) = y_0, \qquad y_0 \in \mathcal{D}(A). \tag{2.2}$$

Задача Коші $(2.1) - (2.2)$ є коректною, якщо для будь-якого $y_0 \in \mathcal{D}(A)$ вона має єдиний розв'язок і цей розв'язок неперервно залежить від початкової даної в тому розумінні, що якщо $y_n(0) \to 0$ $\big(y_n(0) \in \mathcal{D}(A)\big)$, то $y_n(t) \to 0$ для відповідного розв'язку в кожній точці розглядуваного проміжку. Якщо задача Коші є коректною на деякому сегменті $[0, b]$, то вона є коректною і на всій числовій пів осі $[0, \infty)$.

**Теорема 2.1 (див. [10] ).** Якщо задача Коші $(2.1) - (2.2)$ є коректною, то її розв'язок дається формулою

$$y(t) = U(t)y_0, \tag{2.3}$$

де $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ – сильно неперервна півгрупа операторів в $\mathfrak{B}$.

Таким чином, розв'язність розглядуваної задачі Коші тісно пов'язана з теорією півгруп.

Нагадаємо, що сім'я $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ обмежених лінійних операторів в $\mathfrak{B}$, що залежить від параметра $t\ (0 < t < \infty)$, утворює сильно неперервну півгрупу ($C_0 -$ півгрупу), якщо

1) $U(t)U(s) = U(t+s), (t,s > 0);$
2) $U(0) = I.$

Для $C_0$ – півгрупи $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ визначається її генератор (*інфінітезимальний твірний оператор)* $A_0$ як

$$A_0 x = \lim_{t\to 0} \frac{U(t)x - x}{t}\ , \mathcal{D}(A_0) = \left\{x \in \mathfrak{B} \middle| \lim_{t\to 0} \frac{U(t)x-x}{t} \text{ існує}\right\}.$$

Якщо $\mathcal{D}(A) = \mathfrak{B}$, тобто оператор $A$ обмежений, то множина всіх розв'язків рівняння (2.1) на $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ описується виразом

$$y(t) = e^{tA}y_0,\ \ y_0 \in \mathfrak{B}, \tag{2.4}$$

де $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k A^k / k!$. Зображення (2.4) показує, що кожний такий розв'язок $y(t)$ допускає продовження до цілої вектор-функції експоненціального типу. У випадку, коли $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ - гільбертів простір, а $A$ – нормальний обмежений оператор в ньому, порядок росту $\rho(y)$ розв'язку $y(t)$ дорівнює одиниці, а його тип $\sigma(y)$ не перевищує $\|A\|$; більш того, $\sigma(y)$ дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли $y_0 \in \ker A$. Існують приклади обмежених операторів $A$, для яких розв'язки рівняння (2.1) на $\mathbb{R}_+$є цілими вектор-функціями з наперед заданим порядком росту $\rho \in [0,1)$ або типом $\sigma \in [0,\infty)$. Нагадаємо, що ціла вектор-функція $f(\lambda)$ має скінченний порядок росту, якщо при досить великих $|\lambda|$ $\|f(\lambda)\| \leq \exp(|\lambda|^k)$ з деяким числом $k > 0$. Точна нижня межа таких $k$ називається порядком росту $\rho = \rho(f)$ функції $f(\lambda)$. Під типом цілої вектор-функції $f(\lambda)$ порядку $\rho$ розуміється число

$$\sigma = \sigma(f) = inf\{a > 0 \colon \|f(\lambda)\| \leq exp(a|\lambda|^{\rho})\}.$$

Якщо $\sigma(f) = 0$, то говорять, що $f(\lambda)$ має мінімальний, а при $0 < \sigma(f) < \infty$ - нормальний тип. Якщо ж $\rho(f) \leq 1$, то $f(\lambda)$ називається *цілою функцією* *експоненціального типу.* Як і в скалярному випадку, порядок і тип цілої вектор-функції

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k, \qquad c_k \in \mathfrak{B},$$

знаходяться за формулами

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln(1/\|c_n\|)}, \qquad (e\sigma\rho)^{1/\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(n^{1/\rho} \sqrt[n]{\|c_n\|}\right). \tag{2.5}$$

Припустимо тепер, що оператор $A$ не є обмеженим. Тоді рівняння (2.1) може зовсім не мати розв'язків на $\mathbb{R}_+$, які продовжуються до цілих вектор-функцій, і тому постають такі питання.

1) За яких умов на оператор $A$ та початкові дані $y_0$, задача $(2.1) - (2.2)$ є локально розв'язною в околі нуля в класі аналітичних вектор-функцій, тобто існує вектор-функція $y(t)$, аналітична в деякому околі точки 0, яка задовольняє $(2.1)$, $(2.2)$ у цьому околі?
2) Коли множина розв'язків рівняння $(2.1)$, аналітичних в околі нуля, складається лише з тривіального розв'язку $y(t) \equiv 0$?
3) За яких умов кожний розв'язок рівняння $(2.1)$ є локально аналітичним в околі нуля?
4) За яких умов кожен розв'язок $(2.1)$ є цілою вектор-функцією?

Щоб відповісти на ці питання, потрібно ввести деякі локально-опуклі простори.

## 2.2. Індуктивна та проективна границі, простори гладких векторів замкненого оператора.

Введемо означення індуктивної та проективної границі деяких просторів гладких векторів замкненого оператора.

Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - послідовність лінійних множин, «спадна» в такому загальному сенсі: існують адитивні та однорідні відображення $\omega_n$ , що переводять $X_{n+1}$ в $X_n (n = 1,2, \dots)$. Позначимо через $X$ множину всіх можливих послідовностей $\{x_n\}$ таких, що

$$x_n \in X_n,\ x_n = \omega_n(x_{n+1})(n = 1,2, \dots). \tag{2.6}$$

В $X$ природним чином вводяться алгебраїчні операції, в силу яких $X$ є лінійною множиною.

Якщо відображення $\omega_n$ взаємно-однозначні, то , ототожнюючи елемент $x_2 \in X$, з елементом $\omega_1(x_2) \in X_1$, можемо вважати, що $X_1 \supset X_2$ і, аналогічно, $X_2 \supset X_3 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ . У цьому випадку послідовність $\{x_n\} \in X$ однозначно визначається будь-яким своїм елементом, в тому числі елементом $x_1 \in X_1$. Зіставляючи послідовність $\{x_n\} \in X$ елементу $x_1 \in X_1$, помічаємо, що множині $X$ при цьому відповідає перетин $\bigcap_{k=1}^{\infty} X_n$.

Зазначений факт оправдовує вживання для позначення множини $X$ терміну «узагальнений перетин». Оскільки предметом зацікавленості є не природа елементів множини $X$, а її алгебраїчна структура, то під узагальненим перетином розуміється не тільки сама множина $X$, а й будь-яка ізоморфна їй лінійна множина. Відмітимо також, що узагальнений перетин визначається не тільки множинами $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ , але й характером їх вкладення одна в одну, тобто відображеннями $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ . Цей факт відбивається і на позначенні узагальненого перетину, для якого використовується символ

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X_n, \omega_n).$$

Незалежно від наведеної конструкції узагальнений перетин може бути охарактеризований наступним чином.

**Лема 2.1 (див.[3]).** Для того щоб $X = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X_n, \omega_n)$, необхідно і достатньо, щоб існували адитивні й однорідні операції $\Omega_n$, що відображають $X$ в $X_n$, такі, що

1) $\Omega_n = \omega_n \Omega_{n+1} (n = 1,2, \dots)$;

2) якщо $\Omega_n(x) = 0$ при всіх $n = 1,2, \dots$, то $x = 0$;

3) якщо $\{x_n\}$ – послідовність, що задовольняє умову (2.6), то

$$\exists x \in X: \Omega_n(x) = x_n (n = 1,2, \dots).$$

Нехай тепер $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ - не тільки лінійні множини, а й локально-опуклі простори, причому операції $\omega_n$є неперервними. Позначимо через $X$ узагальнений перетин просторів $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ і визначимо в $X$ топологію наступним чином. Нехай $\mathrm{O}_n$– породжуюча (твірна) система опуклих околів нуля у просторі $X_n$ $(n = 1,2, \dots)$. За твірну систему $\mathrm{O}$ у просторі $X$ візьмемо сукупність усіх множин вигляду $\Omega_n^{-1}(V_n)$ $(V_n \in \mathrm{O}_n;\ n = 1,2, \dots)$. Побудований локально-опуклий простір $X$ називається *проективною границею* послідовності просторів $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ і позначається як

$$X = proj \lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \omega_n).$$

Операції $\Omega_n$, очевидно, неперервні. Якщо в множині $X$ ввести топологію іншим способом, але так, щоб операції $\Omega_n$ залишились неперервними, то нова топологія обов'язково буде сильніша за топологію проективної границі, оскільки в новій топології множини $\Omega_n^{-1}(V_n)$ повинні бути околами нуля.

Якщо операції $\omega_n$ виконують взаємно однозначне відображення і можна вважати $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$, то, беручи за модель узагальненого перетину звичайний перетин множин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, отримаємо, що $\Omega_n$ є операціями ототожнення: $\Omega_n(x) = x$. Система $\mathrm{O}$ в цьому випадку складається з усіх можливих множин вигляду $V_n \cap X$ $(V_n \in \mathrm{O}_n)$.

Проективна границя є границею «спадної» послідовності просторів. Можна розглядати і «зростаючі» послідовності. При цьому приходимо до означення індуктивної границі.

Почнемо з алгебраїчної конструкції. Нехай $X_1, X_2, \dots$ - послідовність лінійних множин, «зростаюча» в тому загальному сенсі, що існують адитивні та однорідні операції $\omega_n$, що відображають $X_n$ в $X_{n+1}$.

**Лема 2.2 (див.[3]).** Існує єдина (з точністю до ізоморфізму) лінійна множина $X$ і адитивні однорідні операції $\Omega_n$, що відображають $X_n$ в $X$ такі, що

1) $\Omega_n = \Omega_{n+1}\omega_n (n = 1,2, \dots)$;

2) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n(\mathrm{X}_n)$;

3) якщо при деякому $n$ буде $\Omega_n(x) = 0$, то існує $m \geq n$ таке, що $\omega_m \omega_{m-1} \dots \omega_n(x) = 0$.

Множина $X$ називається узагальненим об'єднанням множин $X_1, X_2, \dots$ і позначається

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n, \omega_n).$$

Нехай тепер $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ послідовність локально-опуклих просторів, зростаюча у вище зазначеному загальному сенсі. Операції $\omega_n$ вважаються неперервними. Покладемо $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n, \omega_n)$ і введемо в $X$ топологію. Для цього позначимо через $\mathrm{O}_n$ систему всіх опуклих симетричних околів нуля в просторі $X_n (n = 1,2, \dots)$ і розглянемо послідовність $\{V_n\}$ таку, що

$$V_n \in \mathrm{O}_n, \;\; \omega_n(V_n) \subset V_{n+1} (n = 1,2, \dots).$$

Оскільки $\Omega_{n+1}\omega_n(V_n) \subset \Omega_{n+1}(V_{n+1})$, то за лемою 2.2 $\Omega_n(V_n) \subset \Omega_{n+1}(V_{n+1})$.

Нехай

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n(V_n), \tag{2.7}$$

Приймемо сукупність $\mathrm{O}$ всіх множин зазначеного вигляду за фундаментальну систему околів нуля в $X$. Локально-опуклий простір, у який перетворюється $X$, називається *індуктивною границею* послідовності $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ і позначається $X = ind \lim_{n \in \mathbb{N}} (X_n, \omega_n)$.

Скрізь у подальшому через $E(\mathfrak{B})\big(L(\mathfrak{B})\big)$ позначатимемо множину усіх щільно визначених замкнених (обмежених) операторів в $\mathfrak{B}$.

Припустимо, що $A \in E(\mathfrak{B})$. Для числа $\beta \geq 0$ покладемо

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \left\{x \in C^{\infty}(A) \middle| \exists\alpha > 0, \exists c = c(x) > 0\ \forall k \in \mathbb{N}_0 \colon \left\|A^k x\right\| \leq c\alpha^k k^{k\beta}\right\},$$

$$\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \left\{x \in C^{\infty}(A) \middle| \forall\alpha > 0, \exists c = c(x,\alpha) > 0\ \forall k \in \mathbb{N}_0 \colon \left\|A^k x\right\| \leq c\alpha^k k^{k\beta}\right\},$$

де

$$C^{\infty}(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n)\ (\mathbb{N}_0 = 0,1,2,\dots)$$

– простір нескінченно диференційовних векторів оператора $A$.

Очевидно, що $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ і $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ – лінійні простори,

$$\forall\lambda \neq 0, \mu \in \mathbb{C} \colon\ \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(\lambda A + \mu I), \quad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \mathfrak{G}_{(\beta)}(\lambda A + \mu I),$$

і якщо $\beta_1 < \beta_2$, то

$$\mathfrak{G}_{(\beta_1)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_1\}}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{(\beta_2)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_2\}}(A).$$

У просторах $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ і $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ введемо топологію індуктивної і, відповідно, проективної границі банахових просторів

$$\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A) = \left\{x \in C^{\infty}(A) \middle|\ \exists c = c(x) > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0 \colon \left\|A^k x\right\| \leq c\alpha^k k^{k\beta}\right\} (\alpha > 0),$$

з нормою

$$\|x\|_{\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)} = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\left\|A^k x\right\|}{\alpha^k k^{k\beta}}.$$

Ясно, що $\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha_1}(A) \subset \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha_2}(A)$ при $\alpha_1 < \alpha_2$ і $\forall x \in \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha_1}(A)$

$$\|x\|_{\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha_1}(A)} \geq \|x\|_{\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha_2}(A)}.$$

Отже, це вкладення є неперервним і

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = ind \lim_{\alpha \to \infty} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A) = \bigcup_{\alpha > 0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A),$$

$$\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = proj\ \lim_{\alpha\to 0} \mathfrak{G}_\beta^\alpha(A) = \bigcap_{\alpha>0} \mathfrak{G}_\beta^\alpha(A).$$

Оскільки норми у просторах $\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A)$ є порівнянними і узгодженими, то $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ – регулярна індуктивна границя банахових просторів $\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A)$, а тому збіжність в $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ означає збіжність в $\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A)$ при деякому $\alpha > 0$, а збіжність в $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ рівносильна збіжності в $\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A)$ при всіх $\alpha \in (0, \delta)$ з достатньо малим $\delta$.

Якщо $A \in L(\mathfrak{B})$, тобто оператор $A$ обмежений, то для довільного $\beta > 0$

$$\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \mathfrak{B}.$$

Відмітимо також, що, завдяки добре відомій формулі Стірлінга

$$k! \approx \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k},\ \ k \to \infty,$$

у нерівності, присутній в означенні просторів $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ та $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$, можна $k^{k\beta}$ замінити на $(k!)^\beta$.

Простори $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A), \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ називаються просторами аналітичних, цілих і цілих експоненціального типу векторів оператора $A$.

У випадку, коли

$$\mathfrak{B} = C[a,b], (-\infty < a < b), A = \frac{d}{dt}, \mathcal{D}(A) = C^1([a,b]),$$

простори $C^\infty(A)$, $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ та $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ є не що інше, як простори звичайних нескінченно диференційовних, аналітичних на $[a,b]$, цілих та цілих експоненціального типу функцій.

У випадку, коли

$$\mathfrak{B} = L_2(\mathbb{R}^1), A = \overline{A_0}, A_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2, \mathcal{D}(A_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

($C_0^\infty(\mathbb{R})$ означає множину всіх нескінченно диференційовних функцій на $\mathbb{R}$ з компактним носієм), $C^\infty(A) = S$, $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A) = S_{1/2}^{1/2}$, де $S$ – відомий простір Шварца, $S_{1/2}^{1/2}$ – простір Гельфанда – Шилова, а саме

$$S_{1/2}^{1/2} = \left\{ f(t) \middle| \exists h > 0, \exists c > 0 : \sup_{t\in\mathbb{R};m,n\in\mathbb{N}_0} \frac{|x^m f^{(n)}(t)|}{h^{m+n} m^{m/2} n^{n/2}} < \infty \right\}.$$

У наступній теоремі (див. [2]) знайдено умови на вектор $y_0 \in \mathfrak{B}$, за яких існує розв'язок $y(t)$ рівняння (2.1) на $\mathbb{R}_+$, що задовольняє початкову умову $y(0) = y_0$ і допускає продовження до цілої вектор-функції.

**Теорема 2.2.** Для того щоб розв'язок $y(t)$ рівняння (2.1) на $\mathbb{R}_+$ можна було продовжити до цілої вектор-функції, необхідно і достатньо, щоб $y(0) \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Цей розв'язок є цілою вектор-функцією скінченного порядку росту $\rho$ і нормального (мінімального) типу $\sigma$ тоді і тільки тоді, коли $y(0)$ має порядок $p$ і нормальний (мінімальний) тип $s$. Порядок $p$ і тип $s$ відносно цього порядку $x \in \mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$ визначаються наступним чином: $p = p(x, A) = \overline{\lim_{n\to\infty} \frac{ln\|A^n x\|}{n ln(n)}}$ ; $s = s(x, p, A) = \overline{\lim_{n\to\infty} \frac{\|A^n\|^{1/n}}{n^p}}$ які зв'язані з $\rho$ та $\sigma$ співвідношеннями

$$\rho = \frac{1}{1-p}, \quad \sigma = \frac{(se)^\rho}{\rho e}.$$

**Наслідок 2.1 (див. [2]).** Якщо розв'язок $y(t)$ рівняння (2.1) на $\mathbb{R}_+$ допускає продовження до цілої вектор-функції скінченного порядку росту $\rho$ і скінченного типу $\sigma$, то для будь-якого $\lambda \in \mathbb{C}, y(\lambda) \in \mathfrak{G}_{\{p\}}(A)$ з $p = 1 - 1/\rho$.

Доведення випливає з того факту, що внаслідок зображення

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k u_0}{k!},$$

в якому $y_0 \in \mathfrak{G}_{\{p\}}(A)$, маємо

$$\|A^n y(\lambda)\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^k}{k!} \|A^{n+k} y_0\| \le c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^k}{k!} \alpha^{n+k} (n+k)^{p(n+k)} =$$

$$= c\alpha^n n^{pn} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha\lambda|^k}{k!} k^{kp} (1 + k/n)^{pn} (1 + n/k)^{pk}.$$

З нерівностей

$$(1 + k/n)^{pn} \le (1 + k/n)^n \le e^n$$

та

$$(1 + n/k)^{pk} \le (1 + n/k)^k \le e^k$$

випливає, що

$$\|A^n y(\lambda)\| \le \tilde{c}(\alpha e)^n n^{pn},$$

де

$$\tilde{c} = \tilde{c}(\lambda) = c\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha e \lambda|^k}{k!} k^{kp} < \infty,$$

а це означає, що $y(\lambda) \in \mathfrak{G}_{\{p\}}(A)$.

### 2.3. Висновок до розділу 2.

У цьому розділі розглянуто класичну постановку задачі Коші для диференціально-операторних рівнянь у банаховому просторі. Вводяться поняття індуктивної та проективної границі банахових просторів. Наводяться умови, необхідні й достатні для розв’язності цієї задачі у різних класах аналітичних вектор-функцій.

# РОЗДІЛ 3.

# ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ.

## 3.1. Критерій розв’язності (n+1) разів інтегрованої задачі Коші в класі аналітичних вектор-функцій.

Нехай $A$ – замкнений оператор у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ з нормою $\|.\|$, $0 < \tau < \infty$ зі щільною в $\mathfrak{B}$ областю визначення. Під $C_0[\tau]$ – задачею Коші розумітимемо задачу відшукання неперервно диференційовної на $[0,\tau]$ вектор-функції із значеннями в $\mathcal{D}(A)$: $u \in \big(C([0,\tau]), \mathcal{D}(A)\big) \cap (C^1([0,\tau]), \mathfrak{B})$, що задовольняє систему

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \ \ t \in [0,\tau], \\ \qquad\quad u(0) = x. \end{cases} \qquad C_0[\tau]$$

Тут $\mathcal{D}(A)$ розглядається з нормою графіка: $\|x\|_{\mathcal{D}(A)} = \|x\| + \|Ax\|$.

Для $n \in \mathbb{N}_0$ $C_{n+1}[\tau]$ – задача Коші полягає у знаходженні вектор-функції $v \in \big(C([0,\tau]), \mathcal{D}(A)\big) \cap (C^1([0,\tau]), \mathfrak{B})$, для якої

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + \dfrac{t^n}{n!}x, \ \ t \in [0,\tau] \\ \qquad\qquad v(0) = 0. \end{cases} \qquad C_{n+1}[\tau]$$

При цьому задача $C_n[\tau]$ вважається коректною, якщо для будь-якого $x \in \mathfrak{B}$ вона має розв’язок і цей розв’язок єдиний. Задача $C_{n+1}[\tau]$ називається (n+1) разів інтегрованою задачею Коші (див. [11]).

Як зазначалось вище, задача $C_0[\tau]$ коректна тоді і тільки тоді, коли $A$ – генератор $C_0$ – півгрупи $U(t)$ в $\mathfrak{B}$, і її розв'язок має вигляд $u(t) = U(t)x$.

Розглянемо функцію

$$\Phi_n(\lambda, t) = \frac{e^{\lambda t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t\lambda)^k}{k!}}{\lambda^{n+1}}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ця функція має властивості

1) при фіксованому $\lambda$ $\Phi_n(\lambda, t)$ є цілою по $t$, а при фіксованому $t$ - цілою по $\lambda$;

2) $\frac{d\Phi_n(\lambda,t)}{dt} = \Phi_{n-1}(\lambda, t), \quad \frac{d^k\Phi_n(\lambda,t)}{dt^k} = \lambda^k\Phi_n(\lambda, t) + \frac{\lambda^{k-1}t^n}{n!} + \cdots +$
$+ \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!}, \quad k = 0,1, \dots, n,;$

3) $\frac{d^k\Phi_n(\lambda,0)}{dt^k} = 0, \ k = 0,1, \dots, n, \ \frac{d^{n+1}\Phi_n(\lambda,0)}{dt^{n+1}} = 1.$

У випадку, коли $A$ – нормальний оператор у гільбертовому просторі, виходячи з перелічених властивостей і операційного числення для $A$, одержуємо таке твердження.

**Лема 3.1.** Нехай $\mathfrak{H}$ – гільбертів простір, $A$ – нормальний оператор у ньому і $x \in \mathcal{D}(A)$. Для того, щоб $C_{n+1}[\tau]$ – задача Коші була розв'язною, необхідно і достатньо, щоб

$$\int\limits_{\sigma(A)} |\Phi_{n-1}(\lambda, \tau)|^2 d(E_\lambda x, x) < \infty,$$

при цьому розв’язок можна подати у вигляді

$$v(t) = \int\limits_{\sigma(A)} \Phi_n(\lambda, t) dE_\lambda x.$$

Тут $E_\lambda$ – розклад одиниці оператора $A$, а $\sigma(A)$ – його спектр.

**Доведення.** Доведемо спочатку необхідність, розглянемо вектор-функцію $v(t) = \int_{\sigma(A)} \Phi_n(\lambda, t) dE_\lambda x$, де $\Phi_n(\lambda, t) = \frac{e^{\lambda t} - \sum_{k=0}^n \frac{(t\lambda)^k}{k!}}{\lambda^{n+1}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, і покажемо, що вона є розв’язком $C_{n+1}[\tau]$ – задачі Коші.

Справді,

$$v(0) = \int\limits_{\sigma(A)} \Phi_n(\lambda, 0) dE_\lambda x = \int\limits_{\sigma(A)} \frac{1}{\lambda^{n+1}} dE_\lambda x = 0.$$

За формулою Коші для функції $f(\lambda)$, аналітичної всередині кола $C$ з центром в точці $\lambda_0$,

$$\int\limits_C \frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^n} d\lambda = f^{(n-1)}(\lambda_0),$$

тому

$$\int\limits_C \frac{1}{\lambda^n} d\lambda = f^{n-1}(0) = 0.$$

З властивості 2) функції $\Phi_n(\lambda, t) = \frac{e^{\lambda t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t\lambda)^k}{k!}}{\lambda^{n+1}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ випливає, що

$$v'(t) = \int\limits_{\sigma(A)} \left(\lambda\Phi_n(\lambda, t) + \frac{t^n}{n!}\right) dE_\lambda x = \int\limits_{\sigma(A)} \lambda\Phi_n(\lambda, t) dE_\lambda x + \int\limits_{\sigma(A)} \frac{t^n}{n!} dE_\lambda x =$$

$$= \lambda v(t) + \frac{t^n}{n!} x, \ \ t \in [0, \tau].$$

Доведемо тепер достатність. Коректність задачі $C_{n+1}[\tau]$ у випадку нормального $A$ рівносильна визначеності замкненого оператора $\Phi_{n-1}(A, t), t \in [0, \tau]$, на всьому просторі $\mathfrak{B}$, а отже, за теоремою Банаха про замкнений графік, його обмеженості, тобто співвідношенню

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\Phi_{n-1}(\lambda, t)| < \infty \, , \qquad t \in [0, \tau] \, .$$

Звідси $\int_{\sigma(A)} |\Phi_{n-1}(\lambda, t)|^2 d(E_\lambda x, x) < \infty$. ■

## 3.2. Про можливість продовження розв'язку (n+1) разів інтегрованої задачі Коші до цілої вектор-функції скінченного порядку та скінченного типу.

А зараз розглянемо загальну ситуацію, коли А – довільний замкнений оператор зі щільною областю визначення у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ з нормою $\|.\|$. Нагадаємо, що вектор $x \in C^\infty(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}} \mathcal{D}(A^n)$ називається цілим вектором оператора A, якщо для довільного додатного числа $\delta$ існує стала $c = c(\delta) > 0$ така, що

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \|A^n x\| \le c\delta^n n^n,$$

а це рівносильне збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n A^n x}{n!},$$

для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$. Для обмеженого оператора A будь-який вектор $x \in \mathfrak{B}$ є цілим.

Як зазначалось вище, вектор $x$ має скінченний порядок відносно оператора A, якщо існує число $\gamma \in \mathbb{R}$ таке, що для достатньо великих $n \in \mathbb{N}$

$$\|A^n x\| \le n^{n\gamma}.$$

Точна нижня межа$p = p(x, A)$ таких $\gamma$ є порядком вектора $x$ відносно A ( A – порядком). Якщо такого числа немає, то вважається $p(x, A) = \infty$. Якщо ж $\|A^n x\| = 0$, починаючи з деякого $n$, тоді покладається $p(x, A) = -\infty$.

$$p = p(x, A) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\|A^n x\|}{n \ln n}.$$

Тип вектора $x$ порядку $p$ визначався як

$$s = s(x, p, A) = inf\{\delta > 0 : \|A^n x\| \le \delta^n n^{np(x,A)},\ \ n > n_0(\delta)\},$$

звідки

$$s = s(x, p, A) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{\|A^n x\|}}{n^{p(x,A)}}.$$

Нас буде цікавити, за яких умов на вектор $x$ задача $C_{n+1}[\tau]$ має аналітичний в околі нуля розв'язок, і якщо це так, то коли цей розв'язок допускає продовження до цілої вектор-функції скінченного порядку $\rho$ і скінченного типу $\sigma$. Нагадаємо, що ціла вектор-функція $y(z)$ має скінченний порядок росту, якщо при досить великих $|\lambda|$ $\|y(z)\| \le exp(|\lambda|^k)$ для деякого числа $k > 0$. Точна нижня межа $\rho = \rho(y)$ таких $k$ називається порядком росту функції $y(z)$. Отже, ціла вектор-функція $y(z)$ має порядок $\rho$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує стала $c_\varepsilon > 0$ така, що

$$\|y(z)\| \le c_\varepsilon e^{|z|^{\rho+\varepsilon}}.$$

Той факт, що ця функція має тип $\sigma$ означає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists c_\varepsilon \colon \|y(z)\| \le c_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|^\rho}.$$

**Теорема 3.1.** Задача $C_{n+1}[\tau]$ має аналітичний в околі нуля розв'язок тоді і тільки тоді, коли $p(x) < 1$, або $p(x) = 1,\; s(x) = 0$. Для того, щоб розв'язок допускав продовження до цілої вектор-функції, що має порядок $\rho$ і тип $\sigma$, необхідно і достатньо, щоб вектор $x$ мав порядок $p$ і тип $s$, пов'язані з $\rho$ і $\sigma$ співвідношеннями

$$\rho = \frac{1}{1-p}, \;\; \sigma = \frac{(se)^\rho}{\rho e}.$$

При цьому, розв'язок $v(t)$ зображується у вигляді

$$v(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{t^k A^{k-(n+1)}}{k!} x.$$

**Доведення:** Доведемо спочатку достатність у випадку, коли $p(x) < 1$.

Припустимо, що розв'язок $v(t)$ задачі $C_{n+1}[\tau]$ допускає продовження до цілої вектор-функції $y(z)$. Позначимо

$$v_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} x - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} x = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} x =$$

$$= \frac{t^{n+1} A^{n+1}}{(n+1)!} x + \frac{t^{n+2} A^{n+2}}{(n+2)!} x + \frac{t^{n+3} A^{n+3}}{(n+3)!} x + \cdots,$$

і покладемо

$$v_2(t) = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} x + \frac{t^{n+2} A}{(n+2)!} x + \frac{t^{n+3} A^2}{(n+3)!} x + \cdots.$$

Тоді

$$A^{n+1}v_2(t) = A^{n+1}\left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}x + \frac{t^{n+2}A}{(n+2)!}x + \frac{t^{n+3}A^2}{(n+3)!}x + \cdots\right) = v_1(t) =$$

$$= y(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} x,$$

де $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} x$, звідки

$$A^{n+1}v_2^{(n)}(t) = y^{(n)}(t) = A^n y(t),$$

тобто

$$A^{n+1}v_2^{(n)}(t) = A^n y(t).$$

Для будь-якого $r > 0$ маємо

$$\left\|A^{n+1}v_2^{(n)}(0)\right\| = \|A^n y(0)\| = \left\|y^{(n)}(0)\right\| =$$

$$= \frac{n!}{2\pi}\left\|\int\limits_{|z|=r} \frac{y(z)}{z^{n+1}} dz\right\| \leq c_r s^n n^n,$$

де $c_r = \max\limits_{|z|=r}\|y(z)\|$, $s = r^{-n}$. Оскільки $r$ може бути як завгодно великим, то $x = v_2^{(n)}(0) \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Навпаки, нехай розв'язок $v(t)$ рівняння $v'(t) = Av(t) + \frac{t^n}{n!}x$ на $t \in [0;\tau]$ є цілою вектор-функцією порядку росту $\rho$ і типу $\sigma$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$

$$\exists c_\varepsilon > 0:\ \|y(z)\| \leq c_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|^\rho}, \qquad c_\varepsilon = const,$$

звідки

$$\left\|A^{n+1}v^{(n)}(0)\right\| = \left\|y^{(n)}(0)\right\| \leq \frac{n!}{2\pi} \int\limits_{|z|=r} \frac{\|y(z)\|}{|z|^{n+1}} dz \leq c_\varepsilon n! \frac{e^{(\sigma+\varepsilon)r^\rho}}{r^n}.$$

Враховуючи, що мінімум функції $e^{ar^{\rho}}/r^n$ досягається в точці $r = (n/a\rho)^{1/\rho}$, за допомогою формули Стірлінга

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}[1 + O(1/n)],$$

одержуємо

$$\left\|A^{n+1}v^{(n)}(0)\right\| \le \mathrm{c}\left((e^{1-\rho}\sigma\rho)^{1/\rho} + \varepsilon_1\right)^n n^{\frac{\rho-1}{\rho}n}.$$

Тут $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Остання нерівність показує, що цілий вектор $x = v^{(n)}(0)$ має скінченний порядок $p$, який задовольняє нерівність

$$p \le \frac{\rho - 1}{\rho} < 1.$$

Припустимо, навпаки, що для розв'язку $v(t)$ рівняння $v'(t) = Av(t) + \frac{t^n}{n!}x$ на $[0;\tau]$ $v^{(n)}(0) \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Тоді ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{z^k A^{k-(n+1)}}{k!}x = f(z)$ збігається в $\mathfrak{B}$ для всіх $z \in \mathbb{C}$ і ціла вектор-функція $f(z)$ є розв'язком, що задовольняє умову $f(0) = 0$. З єдиності розв'язку задачі Коші для цього рівняння випливає, що $f(t) \equiv v(t)$. Таким чином, $f(z)$ – ціле продовження $v(t)$.

На підставі формул

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln n}{\ln(1/\|c_n\|)}, \qquad (e\sigma\rho)^{1/\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(n^{1/\rho}\sqrt[n]{\|c_n\|}\right),$$

і формули Стірлінга, для порядку $\rho$ маємо співвідношення

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln n}{\ln\frac{n!}{\|A^n x\|}} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln n}{\ln\frac{n!}{c(\sigma+\varepsilon)^n n^{np}}} = \frac{1}{1-p}.$$

Звідси

$$\rho = \frac{1}{1-p}.$$

Оскільки порядок росту вектор-функції $y(z)$ скінченний, то її тип $\sigma$ визначається з формули

$$(e\sigma\rho)^{1/\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(n^{1/\rho}\sqrt[n]{\frac{\|A^n x\|}{n!}}\right) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(n^{1/\rho}\sqrt[n]{\frac{(s+\varepsilon)^{n\rho}}{n!}n^{n(1-1/\rho)}}\right) \leq$$

$$\leq e(s+\varepsilon).$$

Беручи до уваги, що $\varepsilon > 0$ може бути як завгодно малим, робимо висновок, що

$$(e\sigma\rho)^{1/\rho} \leq es.$$

Звідси і з нерівності $\|A^n v^{(n)}(0)\| < \mathrm{c}\left((e^{1-\rho}\sigma\rho)^{1/\rho} + \varepsilon_1\right)^n n^{\frac{\rho-1}{\rho}n}$ випливає, що

$$\sigma = \frac{(se)^\rho}{\rho e}.$$

Теорему доведено.■

З цієї теореми видно, що якщо розв'язок $v(t)$ продовжується до цілої вектор-функції, то він допускає зображення у вигляді

$$v(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{t^k A^{k-(n+1)}}{k!} x,$$

де $v^{(n)}(0) \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, причому ця формула описує усі такі розв'язки.

Припустимо, що задача $C_{n+1}[\tau]$ коректна, і позначимо через $\mathcal{S}^n(A)$ множину її розв'язків, коли $x$ перебігає весь простір $\mathfrak{B}$, а через $\mathcal{S}_\rho^n(A)$ підмножину з $\mathcal{S}^n(A)$ усіх розв'язків, які допускають продовження до цілих вектор-функцій порядку $\rho < \infty$. Будемо говорити, що $\mathcal{S}_\rho^n(A)$є щільною в $\mathcal{S}^n(A)$, якщо для кожного $v(t) \in \mathcal{S}^n(A)$ існує послідовність $v_n(t) \in \mathcal{S}_\rho^n(A)$ така, що $\max\limits_{t\in[0;\tau]} \|v(t) - v_n(t)\| \to 0$, коли $n \to \infty$.

**Наслідок 3.1.** Нехай $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ є гільбертовим і $A$ – нормальний оператор в ньому. Якщо задача $C_{n+1}[\tau]$ коректна, то множина $\mathcal{S}_1^n(A)$ є щільною в $\mathcal{S}^n(A)$.

Зауважимо, $C_0[\tau]$ –задачу Коші розглянуто в [2].

## 3.3. Висновок до розділу 3.

У цьому розділі викладається основний результат роботи, присвячений дослідженню (n+1) разів інтегрованої задачі Коші. Наводиться критерій можливості продовження розв’язку цієї задачі до цілої вектор-функції певного скінченного порядку і скінченного типу. Встановлюється зв'язок між порядком і типом розв’язків та порядком і типом їх початкових даних.

# ВИСНОВКИ

У розділі 1 наводяться результати, необхідні для подальшого викладу основного результату роботи, а саме, з теорії гільбертових і банахових просторів та лінійних операторів у них, функціонального числення для операторів у таких просторах.

У розділі 2 розглянуто класичну постановку задачі Коші для диференціально-операторних рівнянь у банаховому просторі. Вводяться поняття індуктивної та проективної границі банахових просторів. Наводяться умови, необхідні й достатні для розв’язності цієї задачі у різних класах аналітичних вектор-функцій.

У розділі 3 викладається основний результат роботи, присвячений дослідженню (n+1) разів інтегрованій задачі Коші. Дається критерій можливості продовження розв’язку цієї задачі до цілої вектор-функції певного скінченного порядку і скінченного типу та встановлюється зв'язок між порядком і типом розв’язків та порядком і типом їх початкових даних.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Горбачук В.М. Про розв'язність $(n+1)$ разів інтегрованої задачі Коші в класі аналітичних вектор-функцій / В.М. Горбачук // Доповіді НАН України. - 2002. - № 6. - С. 7 - 10.
2. Горбачук М.Л. Про аналітичні розв'язки диференціально-операторних рівнянь / М.Л. Горбачук // Укр. мат. журн. - 2000. - Т. 52, № 5. - С. 596 - 607.
3. Канторович Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. - Москва: Физматгиз, 1959. - 684 с.
4. Березанський Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанський. - Киев: Наукова думка, 1965. - 798 с.
5. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. - Изд-во«Наука» Физ. - мат. лит., 1965.
6. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / A. Pazy. - New York: Springer - Verlag, 1983. - 279 p.
7. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. - Киев: Вища школа, 1989. - 347 с.
8. Neerven J. The Asymptotic Behavior of Semigroups of Linear Operators / Jan van Neerven. - Berlin: Birkhäuser - Verlag, 1996. - 237 p.
9. Крейн М.Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банохове пространстве / М.Г. Крейн. - Киев: Академия наук Укр. ССР, Ин-т математики, 1964. - 186 с.
10. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. - Москва: Изд-во «Наука» Физ. - мат. лит., 1967.
11. Arendt W. Local Integrated Semigroups: Evolution with Jumps of Regularity / W. Arendt, O. Mennaoui, V. Keyantuo // J. Math. Anal. Appl. - 1994. - V. 186. - P. 572 - 595.
12. Горбачук В.М., Дем'янок О.І., Про розв'язність $(n+1)$ раз інтегрованої задачі Коші // Сьома всеукраїнська наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, 19-20 квітня 2018р, Тези доповідей - Київ, с. 85.
13. Горбунова О.С., Дем'янок О.І., Стогній В.І. Історія розвитку теоретико-групового аналізу диференціальних рівнянь // XVI міжнародна молодіжна науково-практична конференція «Історія розвитку науки, техніки та освіти», присвячена 120-річчю «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Збірник праць - Київ, 2018.