НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет
Кафедра математичної фізики

«На правах рукопису»
УДК 517.95

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри
______В.М. Горбачук
"13" грудня 2018р.

Магістерська дисертація

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Симетрійні властивості та точні розв'язки лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону»

Виконала: студентка VI курсу, групи ОМ-72мп

Горбунова Олена Сергіївна ________
(підпис)

Науковий керівник:
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Стогній Валерій Іванович ________
(підпис)

Рецензент:

старший науковий співробітник відділу математичної фізики Інституту математики НАН України,

кандидат фізико-математичних наук
Спічак Станіслав Вікторович ________
(підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____________
(підпис)

Київ – 2018

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичної фізики

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність 111 «Математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
_________В.М. Горбачук
(підпис)
«___»_____________2018 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студентці
Горбуновій Олені Сергіївні

1. Тема дисертації «Симетрійні властивості та точні розв'язки лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону», науковий керівник дисертації кандидат фізико-математичних наук, доцент Стогній Валерій Іванович, затверджені наказом по університету від «02» листопада 2018 р. № 4064-с.

2. Строк подання студентом дисертації: 6 грудня 2018 р.

3. Об'єкт дослідження: лінійне рівняння ціноутворення азійського опціону.

4. Предмет дослідження: симетрійні властивості і точні розв'язки диференціальних рівнянь.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1. Вивчити рекомендовану літературу, що стосується ряду основних понять групового аналізу диференціальних рівнянь, а саме однопараметричної групи перетворень, інфінітезимального оператора

групи, інваріантів групи, а також обчислення групи симетрії деякого диференціального рівняння.

2. Застосувати метод Лі для дослідження симетрійних властивостей.
3. Провести симетрійну редукцію.
4. Знайти точні розв’язки лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону.

6. Перелік публікацій:

1. Горбунова О.С. Історія розвитку теоретико-групового аналізу диференціальних рівнянь / О.С. Горбунова, О.І. Дем'янок, В.І. Стогній // Збірник праць XVI Міжнародної молодіжної науково-практичної конференції «Історія розвитку науки, техніки та освіти, присвяченої 120-річчю “КПІ ім. Ігоря Сікорського”», 19.04.2018, Київ. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018 – с. 64-66.
2. Спічак С. Симетрійні властивості та точні розв'язки (2+1)-вимірного рівняння ціноутворення азійського опціону / С. Спічак, В. Стогній, І. Копась, О. Горбунова // Збірник праць Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми механіки та математики" присвяченої 90-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України. – Львів, 2018 – с. 165-166.

7. Дата видачі завдання: 02 лютого 2018 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Строк виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Вивчення рекомендованої літератури	01.02.2018-30.03.2018	Виконано
2.	Дослідження симетрійних властивостей рівняння ціноутворення азійського опціону	02.04.2018-31.05.2018	Виконано
3.	Проведення симетрійної редукції	03.09.2018-01.10.2018	Виконано
4.	Знаходження точних розв’язків лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону	02.10.2018-31.10.2018	Виконано

Студентка ___________О.С. Горбунова

(підпис)

Науковий керівник дисертації _____________В.І. Стогній

(підпис)

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація містить 46 сторінок, 2 таблиці, 15 посилань. Дисертація виконана за планом наукових робіт кафедри математичної фізики на тему: «Розвиток методів дослідження розв'язків диференціально-операторних рівнянь і рівнянь із частинними похідними параболічного типу», державний реєстраційний номер 0117U003173. Роботу присвячено симетрійному аналізу, редукції та пошуку точних розв'язків лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону, яке знаходить широке застосування на фінансових ринках і є ***актуальним***. Основні результати досліджень є ***новими*** і містяться у теоремі 2.1 (формули (2.15)), формулах (3.17), (3.15), (3.13), (3.10). ***Мета роботи:*** дослідити симетрійні властивості та знайти точні розв'язки лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону. ***Завдання дослідження:*** 1.Вивчити рекомендовану літературу, що стосується ряду основних понять групового аналізу диференціальних рівнянь. 2.Застосувати метод Лі для дослідження симетрійних властивостей. 3.Провести симетрійну редукцію і знайти точні розв'язки лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону. ***Об'єкт дослідження:*** лінійне рівняння ціноутворення азійського опціону. ***Предмет дослідження:*** симетрійні властивості і точні розв'язки диференціальних рівнянь. ***Методи дослідження:*** метод Лі, метод симетрійної редукції. Тему магістерської дисертації ***апробовано*** і опубліковано тези доповіді у збірнику матеріалів XVI Міжнародної Молодіжної науково-практичної конференції «Історія розвитку науки, техніки та освіти»; опубліковано статтю у збірнику матеріалів Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки та математики», присвяченої 90-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України.

Ключові слова: алгебра Лі, симетрійна редукція, метод Лі, азійський опціон, інфінітезимальний оператор.

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация содержит 46 страниц, 2 таблицы, 15 ссылок. Диссертация выполнена по плану научных работ кафедры математической физики на тему: «Развитие методов исследования решений дифференциально-операторных уравнений и уравнений с частными производными параболического типа», государственный регистрационный номер 0117U003173. Работа посвящена симметрийному анализу, редукции и поиску точных решений линейного уравнения ценообразования азиатского опциона, оно актуально и находит широкое применение на финансовых рынках. Основные результаты исследований являются новыми и содержатся в теореме 2.1 (формулы (2.15)), формулах (3.17), (3.15), (3.13), (3.10). Цель работы: исследовать симметрийные свойства, найти точные решения линейного уравнения ценообразования азиатского опциона. Задачи исследования: 1.Изучить рекомендованную литературу, касающуюся теории группового анализа дифференциальных уравнений. 2.Применить метод Ли для исследования симметрийных свойств. 3. Провести симметрийную редукцию и найти точные решения линейного уравнения ценообразования азиатского опциона. Объект исследования: линейное уравнение ценообразования азиатского опциона. Предмет исследования: симметрийные свойства и точные решения дифференциальных уравнений. Методы исследования: метод Ли, метод симметрийной редукции. Тема магистерской диссертации апробирована, опубликованы тезисы доклада в сборнике материалов XVI Международной Молодежной научно-практической конференции «История развития науки, техники и образования»; опубликована статья в сборнике материалов Международной научной конференции «Современные проблемы механики и математики», посвященной 90-летию со дня рождения академика НАН Украины Ярослава Степановича Подстригача и 40-летию созданного им Института прикладных проблем механики и математики НАН Украины.

Ключевые слова: алгебра Ли, симметрийная редукция, метод Ли, азиатский опцион, инфинитезимальный оператор.

ABSTRACT

The master's dissertation contains 46 pages, 2 tables, 15 references. The dissertation is executed according to the plan of scientific works of the Department of Mathematical Physics: "Development of Methods for Investigating Solutions of Differential-Operator Equations and Equations with Parabolic Partial Derivatives", state registration number 0117U003173. The work is devoted to the symmetric analysis, reduction and finding of exact solutions of the linear equation of pricing of the Asian option, which is widely used in financial markets and is relevant. The main results of the research are new and are contained in Theorem 2.1 (formula (2.15)), formulas (3.17), (3.15), (3.13), (3.10). Purpose: to study symmetric properties and to find exact solutions of the linear equation of pricing of the Asian option. Objectives of the study: 1. To study the recommended literature concerning a number of basic concepts of group analysis of differential equations. 2. Apply the Lee method to study symmetric properties. 3. Produce a symmetric reduction and find the exact solutions of the linear equation of the pricing of the Asian option. Object of research: linear equation of pricing of the Asian option. Subject of research: symmetric properties and exact solutions of differential equations. Methods of research: Lee method, method of symmetric reduction. The theme of the master's thesis is tested and published abstracts of the report in the collection of materials of the XVI International Youth Scientific and Practical Conference "History of the development of science, technology and education"; published an article in the collection of materials of the International scientific conference "Modern problems of mechanics and mathematics" devoted to the 90th anniversary of the birth of Academician of the National Academy of Sciences of Ukraine Yaroslav Stepanovich Pidstryhach and his 40th anniversary of the Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine.

Key words: Lie algebra, symmetric reduction, Lee method, Asian option, infinitesimal operator.

ЗМІСТ

ВСТУП

Принципи симетрії відіграють фундаментальну роль у природознавстві. Зокрема, симетрія лежить в основі законів збереження енергії, імпульсу, моменту кількості руху, котрі є наслідком однорідності, ізотропності простору-часу. Симетрію в математичній і теоретичній фізиці розглядають як принцип, за допомогою якого із множини допустимих моделей (рівнянь, співвідношень) реальних процесів відбираються найбільш адекватні [1]. Усі основні рівняння математичної фізики інваріантні відносно достатньо широких груп перетворень. Як правило, під час побудови математичних моделей фізичних процесів отримують диференціальні рівняння, симетрійні властивості яких невідомі. Тому принципово важливою є суто технічна задача знаходження найбільш широкої (максимальної) групи симетрії, яку допускає дане диференціальне рівняння. Наявність у диференціальному рівнянні нетривіальної групи інваріантності дозволяє застосувати до нього метод симетрійної редукції і зводити багатовимірну задачу до задачі з меншою кількістю невідомих. Зокрема, з використанням методу симетрійної редукції були отримані широкі класи точних розв’язків ряду нелінійних рівнянь, таких як: рівнянь Ліувілля, д’Аламбера, теплопровідності, Шредінгера та ряду інших нелінійних скалярних рівнянь. Відзначимо, що саме проблемі симетрійної редукції і побудови точних розв’язків нелінійних диференціальних рівнянь присвячені цілі монографії [2,3]. Використання вказаного методу дозволило також отримати і нові розв’язки нелінійних систем диференціальних рівнянь: рівнянь газової динаміки, Нав’є-Стокса, Дірака та інших.

Традиційною моделлю в теорії фінансових ринків є модель Блека-Шоулза [4], яка описується зворотним рівнянням теплопровідності зі змінними коефіцієнтами. Однак практичні дослідження показують, що ця модель, в силу зроблених припущень, далека від адекватності реальним процесам, що протікають на фінансових ринках, тому дослідники в останні десятиліття перейшли до більш складних моделей динаміки фінансових ринків.

Є різні методи дослідження таких моделей: чисельні методи, методи теорії часових рядів, теорії нейронних мереж [5-7].

Як завжди, коли йдеться про процеси, які моделюються диференціальними рівняннями, важливо мати точні розв’язки таких рівнянь. Одними із ефективних методів, що дозволяють здійснювати пошук розв’язків, є методи групового аналізу [2,3].

Перші дослідження групових властивостей лінійного рівняння Блека-Шоулза були проведені у роботі [8]. Крім лінійних рівнянь, методами групового аналізу досліджуються різні нелінійні модифікації рівняння Блека-Шоулза [9,10].

Магістерську дисертацію присвячено дослідженню симетрійних властивостей лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону та побудові його точних розв’язків методами групового аналізу [11].

Розділ 1. Основні поняття групового аналізу диференціальних рівнянь

1.1. Поняття однопараметричної неперервної групи перетворень

Одним із центральних понять симетрійного аналізу диференціальних рівнянь є поняття однопараметричної групи неперервних перетворень, дотичне векторне поле, рівняння Лі, інфінітезимальний оператор групи, інваріанти групи. Із розгляду цих понять ми і розпочинаємо виклад основних положень групового аналізу диференціальних рівнянь [2,3].

Розглянемо взаємно однозначне перетворення $T\colon \bar{x} = f(x)$ евклідового простору $\mathbb{R}^N$ на $\mathbb{R}^N$, при якому кожній точці простору $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ ставиться у відповідність нова точка $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_N)$, функція $f(x) = (f^1(x), f^2(x), \ldots, f^N(x))$ вважається достатню кількість разів диференційовною функцією (як і всі інші функції, які трапляються надалі). Будемо вважати, що перетворення обернене, а послідовне виконання перетворення T й оберненого T^{-1} дає тотожне перетворення I, що переводить точку x в себе.

Нехай розглянуті перетворення, які можна визначити системою рівностей

$$\bar{x_i} = f^i(x), \qquad i \in \{1, \ldots, N\}, \tag{1.1}$$

включені в однопараметричне сімейство

$$\bar{x} = f(x, a), \tag{1.2}$$

де дійсний параметр змінюється в інтервалі $\Delta \subset \mathbb{R}$, а кожному параметру a відповідає конкретне перетворення T_a, а відображення $f\colon \mathbb{R}^N \times \Delta \to \mathbb{R}^N$ є k разів неперервно диференційовним, тобто $f \in C_k\ (\mathbb{R}^N \times \Delta)$, де $0 \leq k \leq \infty$.

Будемо вважати, що значенню a_0 відповідає тотожне перетворення I, якщо $f(x, a_0) = x,$ а кожному перетворенню, яке відповідає параметру a в розглядуваному сімействі, відповідає й обернене перетворення, значення якого будемо позначать a^{-1}, також виконання послідовно двох перетворень (множення перетворень або композиція), що відповідають параметрам a і b, рівносильне третьому перетворенню з параметром $c = \varphi(a, b)$. Функція φ задає закон множення перетворень за формулою $T_b T_a = T_c$ (зрозуміло, що для довільного сімейства перетворень (1.2) така умова не завжди виконується), а в термінах функцій (1.1) закон множення буде мати вигляд [2]

$$f^i\big(f^i(x, a), b\big) = f^i\big(x, \varphi(a, b)\big), \quad i \in \{1, \dots, N\}. \tag{1.3}$$

Означення 1.1. Сімейство перетворень T_a, яке визначається формулою (1.1), називають однопараметричною неперервною групою перетворень $\mathbb{R}^N$, якщо

1) існує $a_0 \in \Delta$, таке, що $f(x, a_0) = x$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}^N$;

2) для будь-яких $a, b \in \Delta$ та $x \in \mathbb{R}^N$: $f(f(x, a), b) = f(x, \varphi(a, b))$, де φ – достатню кількість разів диференційована функція;

3) рівняння $\varphi(a, b) = a_0$ має єдиний розв'язок $b = a^{-1}$ для довільного $a \in \Delta$.

Надалі однопараметричну неперервну групу перетворень простору $\mathbb{R}^N$ будемо позначати символом G^1. З означення групи G^1 маємо такі властивості:

1) існує $a_0 \in \Delta$, що $T_{a_0} = I$;

2) існує $a^{-1} \in \Delta$, що $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$;

3) $T_c(T_b T_a)$=$(T_c T_b)T_a$ (асоціативність множення у групі).

Остання властивість випливає з означення множення як послідовного виконання перетворень. Справді,

$$T_c(T_b T_a)(x) = T_c((T_b T_a)(x)) = T_c(T_b(T_a)(x))) = (T_c T_b)(T_a)(x) = (T_c T_b)T_a(x).$$

Означення 1.2. Параметр a називають канонічним, якщо закон множення перетворень у групі G_1 визначається формулою $\varphi(a, b) = a + b$.

Якщо параметр a – канонічний, то $a^{-1} = -a$, а рівності (1.3) мають вигляд $f^i\big(f^i(x, a), b\big) = f^i(x, a + b)$, $i \in \{1, \dots, N\}$.

Теорема 1.1. У будь-якій однопараметричній групі можна ввести параметр $\bar{a}$ за формулою $\bar{a} = \int_{a_0}^{a} \frac{ds}{A(s)}$, де $A(a) = \frac{\partial \varphi(a,b)}{\partial b}\big|_{b=a_0}$.

1.2. Дотичне векторне поле. Рівняння Лі

Нехай групу G^1 породжує відображення:

$$\bar{x} = f(x, a), \tag{1.4}$$

де $f(x, a)$ задовольняє групову властивість

$$f(f(x, a), b) = f(x, a + b) \tag{1.5}$$

для будь-яких $a, b \in \Delta, x \in \mathbb{R}^N$.

Розкладемо функцію $f(x, a)$ в ряд Тейлора за параметром a в околі $a = 0$ [4]:

$$f(x, a) = f(x, a) + \frac{\partial f(x,a)}{\partial a}|_{a=0} \cdot a + \frac{\partial^2 f(x,a)}{\partial a^2}|_{a=0} \cdot a^2 + \cdots. \tag{1.6}$$

За властивістю групи $f(x, 0) = x$, тому, позначивши

$$\xi(x) = \frac{\partial f(x,a)}{\partial a}|_{a=0}, \tag{1.7}$$

можемо записати (1.6) у вигляді

$$\bar{x} = x + \xi(x)a + o(a). \tag{1.8}$$

Наступна теорема (теорема Лі) стверджує, що першими двома членами розкладу (1.8) однозначно визначається функція $f(x, a)$, яка задовольняє групову властивість (1.7). Також кажуть, що група G^1 визначається своїм дотичним векторним полем $\xi(x)$, оскільки формула (1.7) задає дотичний вектор в точці x до кривої, яку описують точки $\bar{x}$ в результаті групового перетворення (1.8).

Теорема 1.2 (теорема Лі). Нехай функція $f(x, a)$ задовольняє групову властивість (1.5) і має розклад (1.8). Тоді вона є розв'язком звичайного диференціального рівняння першого порядку (яке називають рівнянням Лі) із початковою умовою:

$$\frac{df}{da} = \xi(f), \; f|_{a=0} = x. \tag{1.9}$$

Навпаки, для будь-якого гладкого векторного поля $\xi(x)$ розв'язок задачі Коші (1.9) задовольняє групову властивість (1.5).

Теорема Лі встановлює певну відповідність між групами G^1 та векторними полями ξ. Виникає запитання: чи є така відповідність взаємно однозначною? Очевидно, що даному векторному полю ξ відповідає одна певна група G^1. Це випливає із теореми Лі. Але навпаки невірно. Справді, неважко переконатися, що векторним полям ξ та $\lambda\xi$ $(\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0)$ відповідає одна і та ж група G^1.

1.3. Інфінітезимальний оператор групи. Інваріанти групи

Розглянемо однопараметричну групу G^1 із канонічним параметром $a \in \Delta \subset \mathbb{R}$, яка задана перетворенням $\bar{x} = f(x, a), x \in \mathbb{R}^N$ і має дотичне векторне поле $\xi(x)$.

Означення 1.3. Інфінітезимальним оператором групи G^1 називається лінійний диференціальний оператор

$$X = \sum_{i=1}^{N} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.10}$$

де функції $\xi^i(x)$ називають координатами оператора X.

Якщо один і той же індекс стоїть вгорі і внизу, то для стислості запису знак $\sum$ можна опустити, тоді інфінітезимальний оператор можна записати у вигляді

$$X = \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.11}$$

Розглянемо поняття інваріантів групи G^1. Нехай функція $f: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ породжує групу G^1 і розглядається функція $F: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$.

Означення 1.4. Функція $F(x)$ називається інваріантом групи G^1, яка породжена функцією $f(x, a)$, якщо для будь-яких $(x, a) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ виконується рівність

$$F\big(f(x, a)\big) = F(x). \tag{1.12}$$

В наступній теоремі сформульовано необхідну і достатню умову того, що деяка функція $F\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ є інваріантом групи G^1.

Теорема 1.3. Функція $F(x)$ є інваріантом групи G^1 тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $x \in \mathbb{R}^N$ виконується рівність

$$XF = \xi^i(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = 0. \tag{1.13}$$

1.4. Операція продовження. Критерій інваріантності диференціальних рівнянь

Перш ніж перейти до опису алгоритму Лі відшукання симетрій диференціальних рівнянь, який грунтується на інфінітезимальному критерії інваріантності, нам потрібно замінити поняття системи диференціальних рівнянь конкретним геометричним об’єктом, який визначається перетворенням в нуль деяких функцій.

Для цього, перш за все, нам потрібно продовжити основний простір незалежних та залежних змінних до простору, який буде містити ще і різні частинні похідні, що зустрічаються в даній системі диференціальних рівнянь.

Як і раніше ми працюємо виключно в евклідовому просторі $\mathbb{R}^N$, але тут $\mathbb{R}^M = V = X \times U$, де $X = \mathbb{R}^N = \langle x \rangle = \langle x^1, \dots, x^N \rangle, U = \mathbb{R} = \langle u \rangle, N + 1 = M$.

Змінні $x = (x^1, \dots, x^N)$ будемо називати незалежними змінними, а змінну u – залежною (диференціальною) змінною.

Тоді перетворення, які визначають однопараметричну групу G^1, запишуться у вигляді

$$\bar{x} = f(x, u, a),\ f|_{a=0} = x,$$
$$\bar{u} = g(x, u, a),\ g|_{a=0} = u. \tag{1.14}$$

Введемо в розгляд ще і додаткові змінні

$$\underset{1}{u} = \{u_i | i = 1, \dots, n\}, \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x^i},$$

і задамо їх перетворення

$$\overline{u_i} = h_i\left(x, u, \underset{1}{u}, a\right), \quad h_i|_{a=0} = u_i \tag{1.15}$$

так, щоб формули (1.15) та перетворення похідних $\frac{\partial u(x)}{\partial x^i}$, в результаті заміни змінних (1.14), були узгоджені із рівностями

$$u_i = \frac{\partial u(x)}{\partial x^i} \tag{1.16}$$

для довільної функції $u = u(x)$.

Цією умовою перетворення (1.16) однозначно визначаються для кожної групи G^1, і в результаті ми приходимо до однопараметричної групи $\underset{1}{G}^1$ перетворень (1.17), (1.18) у просторі $\mathbb{R}^{N+M} = \underset{1}{V} = V \times \underset{1}{U}$, де $\underset{1}{U} = \langle \underset{1}{u} \rangle$, тобто у просторі $\underset{1}{V} = \langle x, u, \underset{1}{u} \rangle$.

Означення 1.5. Перетворення (1.14) називають точковими (локальними) перетвореннями, (1.15) – продовженням (першим) цих локальних перетворень, групу $\underset{1}{G}^1$ – першим продовженням групи G^1, а простір $\underset{1}{V}$ – першим продовженням простору V.

Продовження більш високого порядку здійснюються шляхом визначення дії групи G^1 на змінні $\underset{1}{u}, \underset{2}{u}$ ..., де

$$\underset{s}{u} = \left\{u_{i_1,\dots,i_s} | i_1, .., i_s = 1, \dots, N\right\}.$$

Змінні $x, u, \underset{1}{u}, \dots$ вважаються алгебраїчно незалежними, але пов’язаними диференціальними співвідношеннями

$$u_i = D_i(u),\ u_{ij} = D_j(u_i) = D_j\, D_i(u), \dots, \tag{1.17}$$

де

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial}{\partial u} + u_{ij} \frac{\partial}{\partial u_j} + \cdots \tag{1.18}$$

- оператор повного диференціювання за змінною x^i. Зазначимо, що для похідної (1.18) термін «повна» похідна вживається для того, щоб відрізняти $D_i u$ від «частинної похідної» $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Для визначення p-го $(p > 1)$ продовження групи G^1 потрібно задати перетворення змінних $\underset{p}{u}$

$$\bar{u}_{i_1,\dots,i_p} = h_{i_1,\dots,i_p}\left(x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{p}{u}, a\right), h_{i_1,\dots,i_p}|_{a=0} = u_{i_1,\dots,i_p}, \tag{1.19}$$

так, щоб формули (1.19) та перетворення похідних

$$\frac{\partial^p u(x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}},$$

в результаті заміни (1.14), були узгоджені із рівностями

$$u_{i_1,\dots,i_p} = \frac{\partial^p u(x)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_p}}, i_1, \dots, i_p = 1, \dots, N$$

для довільної функції $u(x) = u$. Цією умовою перетворення (1.19) однозначно визначаються для кожної групи G^1, і, в результаті, ми приходимо до однопараметричної групи $\underset{p}{G}^1$ перетворень (1.15), (1.16), (1.19) у просторі

$\underset{p}{V} = \langle x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{p}{u} \rangle$.

У подальшому нам будуть потрібні продовження не самих перетворень (1.14), а інфінітезимального оператора групи G^1, яку порождують перетворення (1.14).

Запишемо інфінітезимальний оператор групи G^1 у вигляді

$$v = \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{1.20}$$

де $i = 1, \dots, N$, за індексами, що повторюються, передбачено підсумовування в межах їх зміни, та, у відповідності із формулою (1.9),

$$\xi^i = \frac{\partial f^i}{\partial a}|_{a=0}, \quad \eta = \frac{\partial g}{\partial a}|_{a=0}. \tag{1.21}$$

Тут же ми, оскільки для подальшої роботи нам потрібні інфінітезимальні оператори продовжених груп $\underset{1}{G}^1$ (продовжені оператори груп G^1), запишемо продовження оператора v (1.21) на перші похідні у вигляді

$$\underset{1}{v} = v + \varphi_i \frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{1.22}$$

і знайдемо формулу для визначення додаткових координат

$$\varphi_i = D_i(\eta) - u_j D_i(\xi^j). \tag{1.23}$$

Формула (1.23) показує, що для побудови продовженого оператора (1.22) потрібно знати лише координати ξ^i та η початкового оператора v.

Нехай, тепер,

$$\underset{2}{v} = \underset{1}{v} + \varphi_{ij} \frac{\partial}{\partial u_{ij}}. \tag{1.24}$$

Знайдемо формулу для визначення додаткових координат

$$\varphi_{jl} = D_l(\varphi_j) - u_{jk} D_l(\xi^k). \tag{1.25}$$

Побудова продовження оператора v довільного порядку здійснюється аналогічно. Оскільки ця процедура вимагає досить громіздких викладок і значних обрахунків, тут ми наводимо кінцеву формулу, яка визначає довільне p-е продовження оператора v:

$$\underset{p}{v} = \underset{p-1}{v} + \varphi_{i_1,\dots,i_p} \frac{\partial}{\partial u_{i_1,\dots,i_p}}, \tag{1.26}$$

де

$$\varphi_{i_1,\dots,i_p} = D_{i_p}\left(\varphi_{i_1,\dots,i_{p-1}}\right) - u_{j,i_1,\dots,i_{p-1}} D_{i_p}(\xi^j). \tag{1.27}$$

Формули (1.26), (1.27) показують, що для побудови p-го продовження оператора v потрібно знати його $(p-1)$-е продовження.

На закінчення розгляду операції продовження зупинимося на прикладі побудови другого продовження оператора v визначеного в просторі V, де $X = \mathbb{R}^3, U = \mathbb{R}^1$.

Покладемо $X = \langle t, x, y \rangle,\ U = \langle u \rangle$, тоді

$$v = \tau(t,x,y,u)\partial_t + \xi^1(t,x,y,u)\partial_x + \xi^2(t,x,y,u)\partial_y + \eta(t,x,y,u)\partial_u,$$

і друге продовження оператора v шукаємо у вигляді

$$\underset{2}{v} = v + +\varphi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^y \frac{\partial}{\partial u_y} + \varphi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \varphi^{tx} \frac{\partial}{\partial u_{tx}} + \varphi^{ty} \frac{\partial}{\partial u_{ty}} +$$

$$\varphi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xy} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \varphi^{yy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}}. \tag{1.28}$$

У наших позначеннях оператор повного диференціювання (1.18) збігається з одним із таких операторів:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{tx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{ty} \frac{\partial}{\partial u_y} + \cdots,$$

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_y} + \cdots,$$

$$D_y = \frac{\partial}{\partial y} + u_y \frac{\partial}{\partial u} + u_{yt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{yx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{yy} \frac{\partial}{\partial u_y} + \cdots. \qquad (1.29)$$

Тому формули (1.24), (1.25) для визначення додаткових координат в операторі $\underset{2}{v}$ (1.28) набувають такого вигляду:

$$\varphi^t = D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi^1) - u_y D_t(\xi^2),$$
$$\varphi^x = D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi^1) - u_y D_x(\xi^2),$$
$$\varphi^y = D_y(\eta) - u_t D_y(\tau) - u_x D_y(\xi^1) - u_y D_y(\xi^2),$$
$$\varphi^{tt} = D_t(\varphi^x) - u_{tt} D_t(\tau) - u_{tx} D_t(\xi^1) - u_{ty} D_t(\xi^2),$$
$$\varphi^{tx} = D_x(\varphi^t) - u_{tt} D_x(\tau) - u_{tx} D_x(\xi^1) - u_{ty} D_x(\xi^2),$$
$$\varphi^{ty} = D_y(\varphi^t) - u_{tt} D_y(\tau) - u_{tx} D_y(\xi^1) - u_{ty} D_y(\xi^2),$$
$$\varphi^{xx} = D_x(\varphi^x) - u_{xt} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi^1) - u_{xy} D_x(\xi^2),$$
$$\varphi^{yy} = D_y(\varphi^x) - u_{yt} D_y(\tau) - u_{yx} D_y(\xi^1) - u_{yy} D_y(\xi^2),$$
$$\varphi^{xy} = D_y(\varphi^x) - u_{xt} D_y(\tau) - u_{xx} D_y(\xi^1) - u_{xy} D_y(\xi^2).$$

Оскільки для довільної функції $f = f(t, x, y, u)$

$$D_t(f) = f_t + u_t f_u, \;\; D_x(f) = f_x + u_x f_u, \;\; D_y(f) = f_y + u_y f_u,$$

то

$$\varphi^t = \eta_t + u_t \eta_u - u_t(\tau_t + u_t \tau_u) - u_x(\xi^1_t + u_t \xi^1_u) - u_y(\xi^2_t + u_t \xi^2_u),$$
$$\varphi^x = \eta_x + u_x \eta_u - u_t(\tau_x + u_x \tau_u) - u_x(\xi^1_x + u_x \xi^1_u) - u_y(\xi^2_x + u_x \xi^2_u),$$
$$\varphi^y = \eta_y + u_y \eta_u - u_t(\tau_y + u_y \tau_u) - u_x(\xi^1_y + u_y \xi^1_u) - u_y(\xi^2_y + u_y \xi^2_u), \qquad (1.30)$$
$$\varphi^{tt} = \eta_{tt} + u_t \eta_{ut} - u_t(\tau_{tt} + u_t \tau_{ut}) - u_x(\xi^1_{tt} + u_t \xi^1_{ut}) - u_y(\xi^2_{tt} + u_t \xi^2_{ut}) +$$
$$u_x[\eta_{tu} + u_t \eta_{uu} - u_t(\tau_{tu} + u_t \tau_{uu}) - u_x(\xi^1_{tu} + u_t \xi^1_{uu}) - u_y(\xi^2_{tu} + u_t \xi^2_{uu})] -$$
$$u_{tx}(\tau_t + u_t \tau_u) + u_{xx}(\eta_u - u_t \tau_u - \xi^1_t - 2u_t \xi^1_u - u_y \xi^2_u) - u_{xy}(\xi^2_t + u_t \xi^2_u) -$$
$$u_{xx}(\xi^1_t + u_t \xi^1_u) - u_{xy},$$
$$\varphi^{tx} = \eta_{tx} + u_t \eta_{ux} - u_t(\tau_{tx} + u_t \tau_{ux}) - u_x(\xi^1_{tx} + u_t \xi^1_{ux}) - u_y(\xi^2_{tx} + u_t \xi^2_{ux}) +$$
$$u_x[\eta_{tu} + u_t \eta_{uu} - u_t(\tau_{tu} + u_t \tau_{uu}) - u_x(\xi^1_{tu} + u_t \xi^1_{uu}) - u_y(\xi^2_{tu} + u_t \xi^2_{uu})] -$$

$u_{tx}(\eta_u - \tau_t - 2u_t\tau_u - u_x\xi_u^1 - u_y\xi_u^2) + u_{xx}(-\xi_t^1 - 2u_t\xi_u^1) - u_{xy}(\xi_t^2 - u_t\xi_u^2) - u_{tt}(\tau_x + u_x\tau_u) - u_{tx}(\xi_x^1 + u_x\xi_u^1) - u_{ty}(\xi_x^2 + u_x\xi_u^2),$

$\varphi^{ty} = \eta_{ty} + u_t\eta_{uy} - u_t(\tau + u_t\tau_{uy}) - u_x(\xi_{ty}^1 + u_t\xi_{uy}^1) - u_y(\xi_{ty}^2 + u_t\xi_{uy}^2) + u_x[\eta_{tu} + u_t\eta_{uu} - u_t(\tau_{tu} + u_t\tau_{uu}) - u_x(\xi_{tu}^1 + u_t\xi_{uu}^1) - u_y(\xi_{tu}^2 + u_t\xi_{uu}^2)] - u_{tx}(\eta_u - \tau_t - 2u_t\tau_u - u_x\xi_u^1 - u_y\xi_u^2) + u_{xx}(-\xi_t^1 - 2u_t\xi_u^1) - u_{xy}(\xi_t^2 - u_t\xi_u^2) - u_{tt}(\tau_y + u_y\tau_u) - u_{tx}(\xi_y^1 + u_y\xi_u^1) - u_{ty}(\xi_y^2 + u_y\xi_u^2),$

$\varphi^{xy} = \eta_{xy} + u_x\eta_{uy} - u_t(\tau_{xy} + u_x\tau_{uy}) - u_x(\xi_{xy}^1 + u_x\xi_{uy}^1) - u_y(\xi_{xy}^2 + u_x\xi_{uy}^2) + u_x[\eta_{xu} + u_x\eta_{uu} - u_t(\tau_{xu} + u_x\tau_{uu}) - u_x(\xi_{xu}^1 + u_x\xi_{uu}^1) - u_y(\xi_{xu}^2 + u_x\xi_{uu}^2)] - u_{tx}(\eta_u - \tau_x - 2u_t\tau_u - u_x\xi_u^1 - u_y\xi_u^2) + u_{xx}(-\xi_x^1 - 2u_x\xi_u^1) - u_{xy}(\xi_x^2 - u_x\xi_u^2) - u_{tt}(\tau_y + u_y\tau_u) - u_{tx}(\xi_y^1 + u_y\xi_u^1) - u_{ty}(\xi_y^2 + u_y\xi_u^2),$

$\varphi^{xx} = \eta_{xx} + u_x\eta_{ux} - u_t(\tau_{xx} + \tau\tau_{ux}) - u_x(\xi_{xx}^1 + u_x\xi_{ux}^1) - u_y(\xi_{xx}^2 + u_x\xi_{ux}^2) + u_x[\eta_{xu} + u_x\eta_{uu} - u_t(\tau_{xu} + u_x\tau_{uu}) - u_x(\xi_{xu}^1 + u_x\xi_{uu}^1) - u_y(\xi_{xu}^2 + u_x\xi_{uu}^2)] - u_{tx}(\tau_x + u_x\tau_u) + u_{xx}(\eta_u - u_t\tau_u - \xi_x^1 - 2u_x\xi_u^1 - u_y\xi_u^2) - u_{xy}(\xi_x^2 + u_x\xi_u^2) - u_{xx}(\xi_x^1 + u_x\xi_u^1) - u_{xy}(\xi_x^2 + u_x\xi_u^2),$

$\varphi^{yy} = \eta_{yy} + u_y\eta_{uy} - u_t(\tau_{yy} + u_y\tau_{uy}) - u_x(\xi_{yy}^1 + u_y\xi_{uy}^1) - u_y(\xi_{yy}^2 + u_y\xi_{uy}^2) + u_x[\eta_{yu} + u_y\eta_{uu} - u_t(\tau_{yu} + u_y\tau_{uu}) - u_x(\xi_{yu}^1 + u_y\xi_{uu}^1) - u_y(\xi_{yu}^2 + u_y\xi_{uu}^2)] - u_{tx}(\tau_y + u_y\tau_u) + u_{xx}(\eta_u - u_t\tau_u - \xi_y^1 - 2u_y\xi_y^1 - u_y\xi_u^2) - u_{xy}(\xi_y^2 + u_y\xi_u^2) - u_{xx}(\xi_y^1 + u_y\xi_u^1) - u_{xy}.$

Отже, друге продовження оператора v має вигляд (1.28), де додаткові координати обраховуються за формулами (1.30).

1.5. Приклад обчислення симетрії рівнянь

Перейдемо тепер до розгляду задачі відшукання групи точкових перетворень, яку допускає диференціальне рівняння з частинними похідними (або задачі обчислення симетрії рівняння).

Розглянемо рівняння теплопровідності для одновимірного стержня

$$u_t = u_{xx}, \tag{1.31}$$

де коефіцієнт дифузії покладено рівним одиниці.

Перепишемо рівняння (1.31) у вигляді

$F = u_t - u_{xx} = 0,$

бачимо, що воно визначає поверхню (гіперплощину) у просторі $\underset{2}{V}$, де $V = \langle t, x, u\rangle$. Тому тут оператор v має вигляд

$$v = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u. \qquad (1.32)$$

Нам потрібно знайти друге продовження $\underset{2}{v}$ оператора v (1.32), яке збігається із оператором (1.27).

Далі знаходимо:

$\underset{2}{v}F = \varphi^t - \varphi^{xx}.$

Оскільки вже перші диференціювання

$D_tF = u_{tt} - u_{txx}, \quad D_xF = u_{tx} - u_{xxx}$

виводять нас за межі простору $\underset{2}{V}$, то умова інваріантності набуває вигляду

$$\varphi^t - \varphi^{xx}|_{u_t = u_{xx}} = 0. \qquad (1.33)$$

Отже, для побудови визначальної системи нам потрібно у правих частинах рівностей (1.28) замінити u_t на u_{xx} і отримані вирази підставити у ліву частину рівності (1.33). Приходимо до рівності:

$$\eta_t - \xi_t u_x + 2\xi_x u_{xx} - \eta_{xx} - 2\eta_{xu}u_x + \tau_{xx}u_{xx} - \tau_t u_{xx} + 2\tau_x u_{tx} + 2\tau_u u_x u_{tx} + \xi_{xx}u_x + 2\tau_{xu}u_{xx}u_x + \tau_{uu}u_x^2 u_{xx} + \xi_{uu}u_x^3 + 2\xi_{xu}u_x^2 + 2\xi_u u_{xx}u_x - \eta_{uu}u_x^2 = 0. \qquad (1.34)$$

Коефіцієнти, які стоять біля різних одночленів частинних похідних першого та другого порядку функції u, є функціями змінних t, x, u і не залежать від похідних. Тому рівність (1.34) буде виконуватись тоді і тільки тоді, коли ці коефіцієнти дорівнюють нулю:

$1\colon \eta_t - \eta_{xx} = 0,$

$u_x\colon -2\eta_{xu} + \xi_{xx} - \xi_t = 0,$

$u_{xx}\colon -\tau_t + 2\xi_x + \tau_{xx} = 0,$

$u_x u_{xx}\colon 2\tau_{ux} + 2\xi_u = 0,$

$u_x^2\colon 2\xi_{xu} - \eta_{uu} = 0, \qquad (1.35)$

u_x^3: $\xi_{uu} = 0$,

u_{tx}: $2\tau_x = 0$,

$u_x^2 u_{xx}$: $\tau_{uu} = 0$,

$u_x u_{tx}$: $2\tau_u = 0$.

Справді, із третього та четвертого рівнянь випливає, що $\tau = \tau(t)$, а тому друге рівняння набуває вигляду:

$$\xi_u = 0,$$

тобто $\xi = \xi(t, x)$. Далі, перше і шосте рівняння системи (1.35) для знайдених значень функцій τ і ξ задовольняються, а решта рівнянь набувають такого вигляду:

$$\tau_t = 2\xi_x, \eta_{uu} = 0, 2\eta_{xu} = \xi_{xx} - \xi_t, \eta_t - \eta_{xx} = 0. \qquad (1.36)$$

Із другого рівняння системи (1.36) випливає, що функція η є лінійною функцією відносно змінної u

$$\eta = \alpha(t, x)u + \beta(t, x),$$

а із першого рівняння отримуємо, що

$$\xi = \frac{1}{2}\tau_t x + \gamma(t).$$

Підстановка отриманих значень η та ξ в третє і четверте рівняння (1.36), приводить до таких рівностей:

$$-\frac{1}{2}\tau_t x + \gamma(t) = 2\alpha_x, \qquad (1.37)$$

$$(\alpha_t - \alpha_{xx})u + \beta_t - \beta_{xx} = 0. \qquad (1.38)$$

Оскільки $\tau = \tau(t)$, $\gamma = \gamma(t)$, то із рівності (1.35) випливає, що α – функція не більш ніж другого порядку за x:

$$\alpha = -\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\gamma_t x + \theta(t).$$

Оскільки в (1.38) α і β не залежать від змінної u, то рівність (1.38) еквівалентна таким двом:

$$\alpha_t - \alpha_{xx} = 0, \qquad (1.39)$$

$$\beta_t - \beta_{xx} = 0. \qquad (1.40)$$

Підставивши знайдене значення α в (1.38) і врахувавши, що $\tau = \tau(t)$, $\tau = \tau(t)$, $\gamma = \gamma(t), \theta = \theta(t)$, приходимо до рівнянь:

$\tau_{ttt} = 0, \gamma_{ttt} = 0, \theta_t = -\frac{1}{4}\tau_{tt},$

Звідки випливає, що

$\tau = C_1 t^2 + C_2 t + C_3,\ \gamma = C_4 t + C_5, \theta = -\frac{1}{2} C_1 + C_6,$

де $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ - довільні сталі інтегрування.

Тому розв'язками системи (1.31) є функції

$\tau = C_1 t^2 + C_2 t + C_3,$

$\xi = C_1 t x + \frac{1}{2} C_2 x + C_4 t + C_5,$

$\eta = -\frac{1}{2} C_1 (x^2 + 2t)u - \frac{1}{2} C_4 x u + C_6 u + \beta(t, x),$

де C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – довільні сталі, $\beta(t, x)$ - довільний розв'язок рівняння теплопровідності (1.31).

Звідси випливає, що простір L складають такі векторні поля (або, що те саме, інфінітезимальні оператори):

$$v_1 = 4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - (x^2 + 2t)u\partial_u, \qquad v_2 = 2t\partial_t + x\partial_x,$$

$$v_3 = \partial_t, \qquad v_4 = 2t\partial_x - xu\partial_u,$$

$$v_5 = \partial_x, \qquad v_6 = u\partial_u, \qquad v_\infty = \beta(t, x)\partial_u, \qquad \beta_t = \beta_{xx}.$$

Позначення v_∞ вживають для того, щоб підкреслити наявність нескінченної множини операторів симетрії. У цьому випадку кажуть: оператор породжує нескінченнопараметричну групу інваріантності, або нескінченновимірну алгебру симетрії рівняння (1.31).

1.6. Алгебри Лі операторів симетрії диференціальних рівнянь

У попередніх пунктах було розглянуто метод Лі-Овсяннікова (інфінітезимальний метод) дослідження симетрійних властивостей рівнянь з частинними похідними. Виявилося, що симетрійні властивості розглянутих рівнянь повністю визначаються деяким набором інфінітезимальних операторів, які допускають дані рівняння. Також там було зауважено, що такі оператори складають базис лінійних просторів. У цьому пункті ми зупинимося на структурі таких просторів (алгебр Лі операторів симетрії).

Нехай P – поле дійсних чисел, L – векторний простір над полем P.

Означення 1.6. Векторний простір L називається алгеброю Лі над полем P, якщо в L задано правило композиції $(x, y) \to [x, y]$ для будь-яких $x, y \in L$, яке задовольняє такі аксіоми:

a) $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$ для $x, y, z \in L$ та $\alpha, \beta \in P$ (лінійність);
b) $[x, y]$=$-[y, x]$ для будь-яких x,$y \in L$ (антисиметричність);
c) $\big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0$ для будь-яких x,y,$z \in L$ (тотожність Якобі).

Операцію [,] називають множенням Лі або операцією комутування.

Із аксіоми c) випливає, що, взагалі кажучи, множення Лі є неасоційованою операцією. Якщо P – поле дійсних чисел, то L називають дійсною алгеброю Лі. Алгебру Лі називають абелевою або комутативною, якщо $[x, y] = 0$ для будь-яких x,$y \in L$.

Зупинимося на операції ізоморфності алгебр Лі більш детально. Нехай L та $\bar{L}$ – дві довільні алгебри Лі над полем P, φ – відображення L в $\bar{L}$.

Відображення φ називається гомоморфізмом, якщо

$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y), x, y \in L, \alpha, \beta \in P$;

$\varphi[x, y] = [\varphi(x), \varphi(y)], x, y \in L$.

Взаємно однозначний гомоморфізм однієї алгебри на іншу називається ізоморфізмом, а відповідні алгебри L та $\bar{L}$ – ізоморфними (у таких випадках пишуть $L \sim \bar{L}$). Ізоморфне відображення в себе називають автоморфізмом.

Такий множення називають операцією комутування, а добуток $[u, v]$ – комутатором векторів u, v.

Нехай $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ і $Y = \eta^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ – два оператори в $\mathbb{R}^N$.

Означення 1.7. Комутатором операторів X і Y називається новий оператор $[X, Y]$, який визначається наступною формулою:

$$[X, Y] = \left(X\eta^i - Y\xi^i\right)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.41}$$

Його можна перетворити по такому принципу: розглянемо $X\big(YF(x)\big) - Y(XF(x))$ як результат дії деякого оператора на функцію $F(x)$. Якщо розкрити цей вираз, то похідні другого порядку скоротяться и отримаємо результат дії комутатора на F. Тому виконується

$$[X, Y] = \left(X\eta^i - Y\xi^i\right)\frac{\partial}{\partial x_i} = XY - YX. \qquad (1.42)$$

Формулою (1.41) визначається деяка операція, яка ставить у відповідність операторам X і Y їхній комутатор $[X, Y]$. Цю операцію називають комутуванням. Деякі властивості операції комутування:

a) Комутатор білінійний відносно X і Y, тобто для будь-яких сталих α, β виконується $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$;

b) Комутатор антисиметричний $[u, v]$=$-[v, u]$;

c) Для будь-яких X, Y, Z виконується тотожність Якобі

$\big[[X, Y], Z\big] + \big[[Y, Z], X\big] + \big[[Z, X], Y\big] = 0.$

Означення 1.8. Лінійний простір L операторів називається алгеброю Лі, якщо для будь-яких X,$Y \in L$ їхній комутатор $[X, Y]$ також належить L.

Теорема 1.4. Якщо многовид $M \in \mathbb{R}^N$ інваріантний відносно операторів X і Y, то він також інваріантний відносно комутатора $[X, Y]$.

Теорема 1.5. Для довільного диференціального рівняння лінійний простір L допустимих ним операторів утворює алгебру Лі операторів [4].

Із теореми 1.5 маємо, що комутатор будь-яких двох операторів із L є оператором із L. Зокрема, у випадку скінченновимірної L, комутатор довільних двох базисних операторів повинен бути лінійною комбінацією базисних операторів. Це зручно записувати у вигляді таблиці комутаторів, у якій на перетині *k*-го рядка та *l*-го стовпця записаний комутатор $[X_k, X_l]$.

Для прикладу наведемо таблицю комутаторів для базисних операторів алгебри Лі L_6, яку допускає рівняння теплопровідності (1.31).

Таблиця 1

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	0	X_1	$-X_6$	$\frac{1}{2}X_4$	0
X_2	0	0	$2X_2$	$2X_1$	$X_3-\frac{1}{2}X_6$	0
X_3	$-X_1$	$-2X_2$	0	X_4	$2X_5$	0
X_4	X_6	$-2X_1$	$-X_4$	0	0	0
X_5	$-\frac{1}{2}X_4$	$-X_3+\frac{1}{2}X_6$	$-2X_5$	0	0	0
X_6	0	0	0	0	0	0

Висновки до розділу 1

Для розв’язання поставлених завдань у магістерській дисертації важливим є якісний огляд основних теоретичних понять теорії групового аналізу. Особливої уваги заслуговують означення однопараметричної неперервної групи перетворень, інфінітезимального оператора, алгебри Лі та операції комутування. Також у Розділі 1 було наведено теорему Лі, детально описано процес обчислення симетрії рівнянь на прикладі рівняння теплопровідності та побудовано таблицю комутаторів для базисних операторів алгебри Лі L_6, яку допускає це рівняння.

Розділ 2. Симетрійні властивості лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону

2.1. Лінійне рівняння ціноутворення азійського опціону та його перетворення

У роботі [12] розглянуто рівняння, яке описує ціноутворення азійського опціону в неперервному часі $\tau \in [0; T]$:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + S\frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0, \tag{2.1}$$

де T – термін дії контракту; $V = V(\tau, S, A)$ – функція вартості опціону; S – вартість базового активу; A – усереднене значення всіх наявних цін базових активів S до моменту часу τ; r і σ – сталі, що описують безризикову процентну ставку і волатильність акції відповідно.

Рівняння (2.1) за допомогою заміни [12]

$$V(\tau, S, A) = f(\tau, S, A)u\big(t(\tau, S, A), x(\tau, S, A), y(\tau, S, A)\big), \tag{2.2}$$

де функція $f(\tau, S, A)$ і нові незалежні змінні t, x, y визначаються відповідно формулами

$$f = S^{-m}e^{q\sigma^2(\tau - T)/2},\ t = \frac{\sigma^2}{2}(T - \tau),\ x = S, y = \frac{\sigma^2}{2}A,\ m = \frac{r}{\sigma^2},\ q = m^2 + m,$$

зведемо до рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \ x\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{2.3}$$

де $u = u(t, x, y)$.

Знайдемо $\frac{\partial V}{\partial \tau}, \frac{\partial V}{\partial S}, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \frac{\partial V}{\partial A}$ через нові незалежні змінні t, x, y та функції u і f:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau}u + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}f + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau}f + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}f,\\
&\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial f}{\partial S}u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S}f + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial S}f + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial S}f,\\
&\frac{\partial V}{\partial A} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial A}f + \frac{\partial f}{\partial A}u + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial A}f + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial A}f,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} u + 2\frac{\partial f}{\partial S}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)^2 f + 2\frac{\partial f}{\partial S}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial S} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial S}\right)^2 +$$

$$\frac{\partial u}{\partial t\partial x}\frac{\partial t}{\partial S}\frac{\partial x}{\partial S} f + \frac{\partial u}{\partial t\partial y}\frac{\partial t}{\partial S}\frac{\partial y}{\partial S} f + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial S^2} + 2\frac{\partial f}{\partial S}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial S} + \frac{\partial u}{\partial x\partial t}\frac{\partial x}{\partial S}\frac{\partial t}{\partial S} f + \frac{\partial u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial S}\frac{\partial x}{\partial S} f +$$

$$\frac{\partial u}{\partial y\partial t}\frac{\partial y}{\partial S}\frac{\partial t}{\partial S} f + \frac{\partial u}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial S}\frac{\partial x}{\partial S} f + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial S}\right)^2 f + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)^2 f + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial S}\right)^2 f.$$

Зауважимо, що в (2.4) доданки $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} f$, $\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} f$, $\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial S} f$, $\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial S} f$, $2\frac{\partial f}{\partial S}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial S}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial S}\right)^2$, $\frac{\partial u}{\partial t\partial x}\frac{\partial t}{\partial S}\frac{\partial x}{\partial S} f$, $\frac{\partial u}{\partial t\partial y}\frac{\partial t}{\partial S}\frac{\partial y}{\partial S} f$, $\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial S^2}$, $2\frac{\partial f}{\partial S}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial S}$, $\frac{\partial u}{\partial x\partial t}\frac{\partial x}{\partial S}\frac{\partial t}{\partial S} f$, $\frac{\partial u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial S}\frac{\partial x}{\partial S} f$, $\frac{\partial u}{\partial y\partial t}\frac{\partial y}{\partial S}\frac{\partial t}{\partial S} f$, $\frac{\partial u}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial S}\frac{\partial x}{\partial S} f$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial S}\right)^2 f$, $\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)^2 f$, $\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial S}\right)^2 f$ дорівнюють нулю, тому вигляд $\frac{\partial V}{\partial \tau}, \frac{\partial V}{\partial S}, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \frac{\partial V}{\partial A}$ значно спроститься. Помітимо також, що в кожному доданку є множник $e^{q\sigma^2(\tau-T)/2}$, тому надалі писати його не будемо, оскільки якщо його підставити у рівняння (2.1), він скоротиться.

Знайдемо $\frac{\partial f}{\partial \tau}, \frac{\partial t}{\partial \tau}, \frac{\partial f}{\partial S}, \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}, \frac{\partial y}{\partial A}, \frac{\partial x}{\partial \tau}, \frac{\partial y}{\partial \tau}, \frac{\partial f}{\partial A}, \frac{\partial t}{\partial A}, \frac{\partial x}{\partial A}, \frac{\partial t}{\partial S}, \frac{\partial y}{\partial S}, \frac{\partial^2 x}{\partial S^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial S^2}, \frac{\partial^2 t}{\partial S^2}, \frac{\partial x}{\partial s}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial \tau} = S^{-m}\frac{q\sigma^2}{2},\\
&\frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{\sigma^2}{2},\\
&\frac{\partial f}{\partial S} = -S^{-m}\frac{m}{S},\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = S^{-m}\left(\frac{m}{S}\right)^2 + S^{-m}\frac{m}{S^2},\\
&\frac{\partial y}{\partial A} = \frac{\sigma^2}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial A} = 0,\\
&\frac{\partial x}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial S^2} = 0,\\
&\frac{\partial y}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial S^2} = 0,\\
&\frac{\partial f}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial S} = 1, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} = 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Підставимо (2.5) у (2.4), а потім отримані вирази у рівняння (2.1), після ряду перетворень отримаємо:

$$-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2 S}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Поділимо отримане рівняння на $-\frac{\sigma^2}{2}$ та замінимо S на x, отримаємо рівняння (2.3).

2.2. Дослідження групових властивостей рівняння ціноутворення азійського опціону

За допомогою методу Лі, описаного в роботі [2], дослідимо групові властивості рівняння (2.3). Спочатку перепишемо рівняння (2.3) у вигляді

$$F = u_t - x^2 u_{xx} - x u_y = 0, \tag{2.6}$$

Нехай оператор, що визначає групу перетворень рівняння (2.1), має вигляд:

$$X = \tau(t,x,y,u)\partial_t + \xi^1(t,x,y,u)\partial_x + \xi^2(t,x,y,u)\partial_y + \eta(t,x,y,u)\partial_u \tag{2.7}$$

Слід знайти друге продовження $\underset{2}{X}$ оператора X, яке збігається з оператором:

$$\underset{2}{X} = X + \varphi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^y \frac{\partial}{\partial u_y} + \varphi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \varphi^{tx} \frac{\partial}{\partial u_{tx}} + \varphi^{ty} \frac{\partial}{\partial u_{ty}} + \varphi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xy} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \varphi^{yy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}}, \tag{2.8}$$

де $\varphi^t, \varphi^y, \varphi^x, \varphi^{xx}$ знаходять за формулами (1.30).

У рівняння (2.6) входять похідні вигляду u_t, u_{xx}, u_y, тому для другого продовження $\underset{2}{X}$ достатньо знати $\varphi^t, \varphi^y, \varphi^{xx}$.

У нашому випадку $\varphi^t, \varphi^y, \varphi^{xx}$ знаходять за формулами:

$$\begin{aligned}
&\varphi^t = \eta_t + u_t\eta_u - u_t(\tau_t + u_t\tau_u) - u_x(\xi^1_t + u_t\xi^1_u) - u_y(\xi^2_t + u_t\xi^2_u),\\
&\varphi^y = \eta_y + u_y\eta_u - u_t\left(\tau_y + u_y\tau_u\right) - u_x\left(\xi^1_y + u_y\xi^1_u\right) - u_y\left(\xi^2_y + u_y\xi^2_u\right),\\
&\varphi^x = \eta_x + u_x\eta_u - u_t(\tau_x + u_x\tau_u) - u_x(\xi^1_x + u_x\xi^1_u) - u_y(\xi^2_x + u_x\xi^2_u),\\
&\varphi^{xx} = \eta_{xx} + u_x\eta_{ux} - u_t(\tau_{xx} + u_x\tau_{ux}) - u_x(\xi^1_{xx} + u_x\xi^1_{ux}) - u_y(\xi^2_{xx} + u_x\xi^2_{ux}) + u_x\left[\eta_{xu} + u_x\eta_{uu} - u_t(\tau_{xu} + u_x\tau_{uu}) - u_x(\xi^1_{xu} + u_x\xi^1_{uu}) - u_y(\xi^2_{xu} + u_x\xi^2_{uu})\right] - u_{tx}(\tau_x + u_x\tau_u) + u_{xx}\left(\eta_u - u_t\tau_u - \xi^1_x - 2u_x\xi^1_u - u_y\xi^2_u\right) - u_{xy}(\xi^2_x + u_x\xi^2_u) - u_{tx}(\tau_x + u_x\tau_u) - u_{xx}(\xi^1_x + u_x\xi^1_u) - u_{xy}(\xi^2_x + u_x\xi^2_u).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Далі знаходимо $\underset{2}{X}F$:

$$\underset{2}{X}F = \varphi^t - 2\xi^1 x u_{xx} - x^2\varphi^{xx} - \xi^1 u_y - x\varphi^y.$$

Рівняння (2.6) інваріантне відносно оператора $\underset{2}{X}$, якщо виконується співвідношення

$$\underset{2}{X}F|_{F=0} = 0. \quad (2.10)$$

Умова інваріантності (2.10) у нашому випадку має вигляд

$$\varphi^t - 2\xi^1 x u_{xx} - x^2\varphi^{xx} - \xi^1 u_y - x\varphi^y|_{u_t = x^2 u_{xx} + x u_y} = 0. \quad (2.11)$$

Отже, для побудови визначальної системи функцій τ, ξ^1, ξ^2, η у правих частинах (2.9) замінюємо u_t на $x^2 u_{xx} + x u_y$ і отримані вирази підставляємо у ліву частину рівності (2.11). Після алгебраїчних перетворень маємо рівняння:

$$\eta_t - x^2\tau_t u_{xx} + x\tau_t u_y - u_y\xi^2_t - 2\xi^1_x u_{xx} - x^2\eta_{xx} - 2x^2\eta_{xu}u_x +$$
$$x^4\tau_{xx}u_{xx} + x^3\tau_{xx}u_y + 2x^4\tau_{ux}u_x u_{xx} + 2x^3\tau_{ux}u_x u_y + x^2\xi^1_{xx}u_x + 2x^2\xi^1_{ux}u_x^2 +$$
$$x^2\xi^2_{xx}u_y + 2x^2\xi^2_{ux}u_x u_y - x^2\eta_{uu}u_x^2 + x^4\tau_{uu}u_x^2 u_{xx} + x^3\tau_{uu}u_x^2 u_y + x^2\xi^1_{uu}u_x^3 +$$
$$x^2\xi^2_{uu}u_x^2 u_y + 2x^2\tau_x u_{tx} + 2x^2\tau_u u_x u_{tx} + 2x^2\xi^1_x u_{xx} + 2x^2\xi^1_u u_{xx}u_x +$$
$$2x^2\xi^2_x u_{xy} + 2x^2\xi^2_u u_{xy}u_x - \xi^1 u_y - x\eta_y + x^3\tau_y u_{xx} + x^2\tau_y u_y + x\xi^1_y u_x +$$
$$x\xi^2_y u_y - u_x\xi^1_t = 0. \quad (2.12)$$

Коефіцієнти, які стоять біля різних одночленів частинних похідних першого та другого порядку функції u, є функціями змінних t, x, y і не залежать від похідних. Тому рівність (2.12) буде виконуватись тоді й тільки тоді, коли ці коефіцієнти дорівнюють нулю:

$$1\colon \eta_t - x^2\eta_{xx} - x\eta_y = 0,$$
$$u_x\colon -2x^2\eta_{xu} + x^2\xi^1_{xx} + x\xi^1_y - \xi^1_t = 0,$$
$$u_y\colon x\tau_t - \xi^2_t + x^3\tau_{xx} + x^2\xi^2_{xx} - \xi^1 + x^2\tau_y + x\xi^2_y = 0,$$
$$u_{xx}\colon -x^2\tau_t - 2\xi^1_x + x^4\tau_{xx} + 2x^2\xi^1_x + x^3\tau_y = 0,$$
$$u_x u_y\colon 2x^3\tau_{ux} + 2x^2\xi^2_{ux} = 0,$$
$$u_x u_{xx}\colon 2x^4\tau_{ux} + 2x^2\xi^1_u = 0,$$
$$u_x^2\colon 2x^2\xi^1_{ux} - x^2\eta_{uu} = 0, \quad (2.13)$$
$$u_x^3\colon x^2\xi^1_{uu} = 0,$$

u_{tx}: $2x^2\tau_x = 0$,

u_{xy}: $2x^2\xi^2_x = 0$,

$u_x^2 u_{xx}$: $x^4\tau_{uu} = 0$,

$u_x^2 u_y$: $x^3\tau_{uu} + x^2\xi^2_{uu} = 0$,

$u_{xy}u_x$: $2x^2\xi^2_u = 0$,

$u_x u_{tx}$: $2x^2\tau_u = 0$.

Розв'яжемо визначальні рівняння системи (2.13) й отримаємо функції:

$$\tau = C_1,$$
$$\xi^1 = C_4x + C_5xy, \tag{2.14}$$
$$\xi^2 = C_2 + C_4y + \frac{C_5}{2}y^2,$$
$$\eta = C_3u + \frac{C_5}{2}xu + \beta(t,x,y),$$

де C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – довільні сталі, $\beta(t,x,y)$ є довільний розв'язок рівняння (2.3).

Для того, щоб знайти X_1, підставимо (2.14) у (2.7) за $C_1 = 1$, $C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$. Для того, щоб знайти X_2, підставимо (2.14) у (2.7) за $C_2 = 1$, $C_1 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$. Для того, щоб знайти X_3, підставимо (2.14) у (2.7) за $C_3 = 1$, $C_2 = C_1 = C_4 = C_5 = 0$. Для того, щоб знайти X_4, підставимо (2.14) у (2.7) за $C_4 = 1$, $C_2 = C_3 = C_1 = C_5 = 0$. Для того, щоб знайти X_5, підставимо (2.14) у (2.7) за $C_5 = 1$, $C_2 = C_3 = C_4 = C_1 = 0$. Для того, щоб знайти X_∞, підставимо (2.14) у (2.7) за $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$. Звідси випливає, що алгебру інваріантності складають такі оператори:

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = u\partial_u,\ X_4 = x\partial_x + y\partial_y,$$
$$X_5 = xy\partial_x + \frac{1}{2}y^2\partial_y + \frac{1}{2}xu\partial_u,\ X_\infty = \beta(t,x,y)\,\partial_u.$$

Таким чином, має місце таке твердження.

Теорема 2.1. Максимальна алгебра Лі інваріантності рівняння (2.3) генерується такими диференціальними операторами:

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = u\partial_u,\ X_4 = x\partial_x + y\partial_y, \tag{2.15}$$
$$X_5 = xy\partial_x + \frac{1}{2}y^2\partial_y + \frac{1}{2}xu\partial_u,\ X_\infty = \beta(t,x,y)\,\partial_u,$$

де функція $\beta(t, x, y)$ є довільним розв'язком рівняння (2.3).

Зауваження. Далі ми не будемо враховувати оператор симетрії $X_\infty = \beta(t, x, y)\,\partial_u$, який притаманний лінійним рівнянням і обумовлює принцип суперпозиції. Задача опису таких операторів еквівалентна пошуку загального розв'язку даних рівнянь.

2.3. Класифікація підалгебр алгебри Лі операторів симетрії

Як було показано у попередньому пункті, алгебра інваріантності L_5 рівняння (2.3) генерується диференціальними операторами (2.15). Переконаємося, що оператори (2.15) складають базис деякої алгебри Лі L_5. Для цього знайдемо комутатори усіх пар операторів і побачимо, що в результаті виконання операції комутування будуть отримані оператори, які належать простору L_5 із базисними операторами $X_i, \{i = 1, \dots, 5\}$.

Під час обчислень будемо використовувати формулу комутатора двох операторів X і Y (1.41)

$$[X, Y] = XY - YX. \tag{2.16}$$

Результати комутаційних співвідношень, отримані згідно із формулою (2.16), зведені у таблиці 2.

Таблиця 2

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	0	0	0
X_2	0	0	0	X_2	X_4
X_3	0	0	0	0	0
X_4	0	$-X_2$	0	0	X_5
X_5	0	$-X_4$	0	$-X_5$	0

Зазначимо, що диференціальні оператори $X_i, \{i = 1, \dots, 5\}$ симетрії становлять базис п'ятивимірної алгебри, яка є прямою сумою алгебр X_1, X_2 і $\langle X_2, X_4, X_5 \rangle$, тобто

$L_5 = X_1 \oplus X_2 \oplus \langle X_2, X_4, X_5 \rangle.$

Алгебра L_5 ізоморфна алгебрі

$$A_5 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \oplus \langle e_4, e_5 \rangle = sl(2, R) \oplus 2A_1, \quad (2.17)$$

яка є напівпрямою сумою підалгебр $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = sl(2, R)$ та $\langle e_4, e_5 \rangle = 2A_1$.

Ізоморфізм між алгебрами встановлюється лінійними перетвореннями:

$$e_1 = 2X_4 = 2x\partial_x + 2y\partial_y,$$
$$e_2 = -2X_5 = -2xy\partial_x - y^2\partial_y - xu\partial_u,$$
$$e_3 = X_2 = \partial_y, \quad (2.18)$$
$$e_4 = X_1 = \partial_t,$$
$$e_5 = X_3 = u\partial_u.$$

Для того, щоб використати можливі редукції рівняння (2.3), необхідно знайти нееквівалентні підалгебри алгебри A_5. Зокрема, одновимірним підалгебрам буде відповідати редукція рівняння (2.3) до рівняння із частинними похідними від двох незалежних змінних. Симетрійна редукція рівняння (2.3) до звичайних диференціальних рівнянь передбачає наявність списку двовимірних підалгебр алгебри.

Класифікація підалгебр дійсних алгебр Лі невисоких розмірностей із точністю до перетворень, які визначають групи внутрішніх автоморфізмів цих алгебр Лі, проведена в статті [13], згідно із результатами якої, одновимірні підалгебри алгебри A_5 вичерпуються алгебрами

$$\langle e_4 + \alpha e_5 \rangle, \langle e_5 \rangle, \langle e_1 + \alpha e_4 + \beta e_5 \rangle,$$
$$\langle e_2 + \alpha e_4 + \beta e_5 \rangle, \langle e_2 - e_3 + \alpha e_4 + \beta e_5 \rangle, \quad (2.19)$$

а двовимірні підалгебри – такими алгебрами:

$$\langle e_4, e_5 \rangle, \langle e_1 + \alpha e_5, e_4 + \beta e_5 \rangle, \langle e_2 + \alpha e_4, e_5 \rangle, \langle e_2 - e_3 + \alpha e_5, e_4 + \beta e_5 \rangle, \quad (2.20)$$
$$\langle e_1 + \alpha e_4, e_5 \rangle, \langle e_2 + \alpha e_5, e_4 + \beta e_5 \rangle, \langle e_2 - e_3 + \alpha e_4, e_5 \rangle, \langle e_1 + \alpha e_4 + \beta e_5, e_2 \rangle,$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Висновки до розділу 2

Одним із основних завдань магістерської дисертації було дослідження симетрійних властивостей лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону, яке розв'язано у Розділі 2. Перш за все, задане рівняння було зведено за допомогою заміни до рівняння, яке є простішим у використанні. Далі, за допомогою методу Лі, було отримано п'ятивимірну алгебру інваріантності L_5, яка ізоморфна алгебрі A_5. За допомогою класифікації підалгебр останньої було знайдено одновимірні та двовимірні підалгебри.

Розділ 3. Симетрійна редукція і точні розв'язки лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону

3.1. Симетрійна редукція до рівняння з частинними похідними від двох незалежних змінних

Як було показано у пункті 2.1, рівняння ціноутворення азійського опціону (2.1) локальною заміною змінних (2.2) зводиться до рівняння (2.3). Визначаючи зворотну заміну змінних, з відомих точних розв'язків рівняння (2.3) можна отримати точні розв'язки рівняння (2.1) [6].

Використовуючи інваріанти підгруп групи симетрій рівняння (2.3), що відповідають знайденим одновимірним підалгебрам, можна провести ефективну редукцію цього рівняння до рівняння із частинними похідними від двох незалежних змінних [2].

Розглянемо детально випадок підалгебри

$$\langle e_4 + \alpha e_5 \rangle, \tag{3.1}$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$.

Для побудови інваріантів треба знайти фундаментальну систему розв'язків рівняння з частинними похідними [4]

$$(e_4 + \alpha e_5) \circ F(t, x, y, u) = F_t + \alpha u F_u = 0, \tag{3.2}$$

або, що те саме, набір перших інтегралів системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{0} = \frac{dy}{0} = \frac{du}{\alpha u}. \tag{3.3}$$

Система (3.3) має такі перші інтеграли:

$$x = C_1, y = C_2, u e^{-\alpha t} = C_3.$$

Отже, базис інваріантів піалгебри (3.1) складають функції

$$\omega_1 = x, \omega_2 = y, \omega_3 = u e^{-\alpha t}.$$

Інваріантний розв'язок знаходять із рівняння $\omega_3 = f(\omega_1, \omega_2)$, із якого для відповідної підалгебри (3.1) одержуємо підстановку (анзац):

$$u = e^{\alpha t} f(\omega_1, \omega_2), \omega_1 = x, \omega_2 = y,$$

що зводить досліджуване рівняння (2.3) до такого звичайного диференціального рівняння із частинними похідними від двох змінних:

$$\omega_1^2 f_{\omega_1\omega_1} + \omega_1 f_{\omega_2} - \alpha f = 0.$$

Нижче, для кожної із одновимірних підалгебр (2.19), подано відповідно анзац та редуковане рівняння:

1. $\langle e_1 + \alpha e_4 + \beta e_5 \rangle, \alpha \neq 0$:

$$u = e^{\frac{\beta}{\alpha}t} f(\omega_1, \omega_2),\ \omega_1 = \frac{x}{y},\ \omega_2 = y e^{-\frac{2}{\alpha}t},$$

$$\omega_1^2 f_{\omega_1\omega_1} + \omega_2 \left(\frac{2}{\alpha} + \omega_1\right) f_{\omega_2} - \omega_1^2 f_{\omega_1} - \frac{\beta}{\alpha} f = 0.$$

2. $\langle e_1 + \beta e_5 \rangle$:

$$u = y^{\frac{\beta}{2}} f(\omega_1, \omega_2),\ \omega_2 = \frac{x}{y},\ \omega_1 = t,$$

$$\omega_2^2 f_{\omega_2\omega_2} - \omega_2^2 f_{\omega_2} - f_{\omega_1} + \frac{\beta}{2}\omega_2 f = 0. \qquad (3.4)$$

3. $\langle e_2 + \alpha e_4 + \beta e_5 \rangle$:

$$u = e^{\frac{\beta + x}{y}} f(\omega_1, \omega_2),\ \omega_2 = \frac{x}{y^2},\ \omega_1 = t - \frac{\alpha}{y},$$

$$\omega_2^2 f_{\omega_2\omega_2} + (\alpha\omega_2 - 1) f_{\omega_1} - \beta\omega_2 f = 0.$$

4. $\langle e_2 - e_3 + \alpha e_4 + \beta e_5 \rangle$:

$$u = e^{-\beta \operatorname{arctg} y + \frac{xy}{y^2+1}} f(\omega_1, \omega_2),\ \omega_1 = t + \alpha \cdot \operatorname{arctg} y,\ \omega_2 = \frac{x}{y^2+1},$$

$$\omega_2^2 f_{\omega_2\omega_2} + (1 - \alpha\omega_2) f_{\omega_1} + (\omega_2 - \beta)\omega_2 f = 0.$$

3.2. Симетрійна редукція до звичайних диференціальних рівнянь

Використовуючи інваріанти підгруп групи симетрій рівняння (2.3), що відповідає знайденим двовимірним підалгебрам, можна провести ефективну редукцію цього рівняння до звичайних диференціальних рівнянь.

Розглянемо детально випадок двовимірної підалгебри

$$\langle e_1 + \alpha e_5, e_4 + \beta e_5 \rangle, \qquad (3.5)$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$.

Для побудови інваріантів треба знайти фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь з частинними похідними

$(e_1 + \alpha e_5) \circ F(t, x, y, u) = 2xF_x + 2yF_y + \alpha uF_u = 0,$

$(e_1 + \beta e_5) \circ F(t, x, y, u) = F_t + \beta uF_u = 0.$ (3.6)

Розв'язавши систему (3.6), отримуємо базис інваріантів підалгебри (3.5)

$\omega_1 = \frac{x}{y}, \omega_2 = uy^{-\frac{\alpha}{2}}e^{-\beta t}.$

Інваріантний розв'язок знаходять із рівняння $\omega_2 = f(\omega_1)$, із якого для відповідної підалгебри (3.5) одержуємо підстановку (анзац):

$u = y^{\frac{\alpha}{2}}e^{\beta t}f(\omega_1), \omega_1 = \frac{x}{y},$

що зводить досліджуване рівняння (2.3) до такого звичайного диференціального рівняння:

$\omega_1^2 f_{\omega_1\omega_1} - \omega_1^2 f_{\omega_1} + (\frac{\alpha}{2}\omega_1 - \beta)f = 0.$

Нижче, для кожної із двовимірних підалгебр (2.20), подано відповідно анзац та редуковане рівняння:

1. $\langle e_2 + \alpha e_5, e_4 + \beta e_5 \rangle$:

$u = e^{\beta t + \frac{\alpha + x}{y}} f(\omega_1),\ \omega_1 = \frac{\sqrt{x}}{y},$

$\omega_1^2 f_{\omega_1\omega_1} - \omega_1 f_{\omega_1} - 4(\alpha\omega_1^2 + \beta)f = 0.$

2. $\langle e_1 + \alpha e_4 + \beta e_5, e_2 \rangle$:

$u = e^{\frac{\beta}{\alpha}t + \frac{x}{y}} f(\omega_1),\ \omega_1 = \frac{x}{y^2}e^{\frac{2t}{\alpha}},$

$\alpha\omega_1^2 f_{\omega_1\omega_1} - 2\omega_1 f_{\omega_1} - \beta f = 0.$ (3.7)

3. $\langle e_2 - e_3 + \alpha e_5, e_4 + \beta e_5 \rangle$:

$u = e^{\beta t - \alpha \mathrm{arctg} y + \frac{xy}{y^2+1}} f(\omega_1),\ \omega_1 = \frac{x}{y^2+1},$

$\omega_1^2 f_{\omega_1\omega_1} + (\omega_1^2 - \alpha\omega_1 - \beta)f = 0.$

3.3. Побудова точних розв'язків лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону

Перейдемо далі до побудови інваріантних розв’язків рівняння (2.1). Для цього проведемо аналіз редукованих рівнянь (3.4) та (3.7). У деяких випадках можна явно проінтегрувати редуковані рівняння та отримати точні розв’язки. Як приклад розглянемо одновимірну підалгебру $\langle e_2 + \alpha e_4 + \beta e_5 \rangle$, якій відповідає редуковане рівняння

$$\omega_2^2 f_{\omega_2\omega_2} + (\alpha\omega_2 - 1) f_{\omega_1} - \beta\omega_2 f = 0. \quad (3.8)$$

У випадку $\alpha = \beta = 0$ рівняння (3.8) має частинні розв’язки [14]

$$f(\omega_1, \omega_2) = (C_1 \ln\omega_2 + C_2)\sqrt{\omega_2}\exp\{-\frac{\omega_1}{4}\},$$

$$f(\omega_1, \omega_2) = (2\omega_1 + \ln^2\omega_2)\sqrt{\omega_2}\exp\{-\frac{\omega_1}{4}\},$$

$$f(\omega_1, \omega_2) = \omega_2^{\mu}\exp\{(\mu^2 - \mu)\omega_1\},$$

де $C_1, C_2, \mu \in \mathbb{R}$.

Підставляючи ці функції у відповідний вираз (анзац) (3.4) для залежної змінної u, отримаємо розв’язки рівняння (2.3):

$$u = (C_1 \ln\frac{x}{y^2} + C_2)\sqrt{\frac{x}{y^2}}\exp\{\frac{x}{y} - \frac{t}{4}\},$$

$$u = (2t + \ln^2\frac{x}{y^2})\sqrt{\frac{x}{y^2}}\exp\{\frac{x}{y} - \frac{t}{4}\}, \quad (3.9)$$

$$u = (\frac{x}{y^2})^{\mu}\exp\{\frac{x}{y} + (\mu^2 - \mu)t\}.$$

Після підстановки (3.9) в (2.2) отримаємо точні розв’язки рівняння (2.1):

$$V(\tau, S, A) = S^{-\frac{r}{\sigma^2}}(C_1 \ln\frac{4S}{\sigma^4 A^2} + C_2)\sqrt{\frac{4S}{\sigma^4 A^2}}\exp\{\frac{2S}{\sigma^2 A} - \frac{\sigma^2(T-\tau)}{8} + (\frac{r^2}{\sigma^2} + r)\frac{\tau - T}{2}\},$$

$$V(\tau, S, A) = S^{-\frac{r}{\sigma^2}}(\sigma^2(T-\tau) + \ln^2\frac{4S}{\sigma^4 A^2})\sqrt{\frac{4S}{\sigma^4 A^2}}\exp\{\frac{2S}{\sigma^2 A} - \frac{\sigma^2(T-\tau)}{8} + (\frac{r^2}{\sigma^2} + r)\frac{\tau - T}{2}\},$$

$$V(\tau, S, A) = S^{-\frac{r}{\sigma^2}}(\frac{4S}{\sigma^4 A^2})^{\mu}\exp\{\frac{2S}{\sigma^2 A} + (\mu^2 - \mu)\frac{\sigma^2(T-\tau)}{2} + \left(\frac{r^2}{\sigma^2} + r\right)\frac{\tau - T}{2}\}. \quad (3.10)$$

Розглянемо двовимірну підалгебру $\langle e_1 + \alpha e_4 + \beta e_5, e_2 \rangle$, якій відповідає редуковане рівняння $\alpha\omega_1^2 f_{\omega_1\omega_1} - 2\omega_1 f_{\omega_1} - \beta f = 0$.

Нехай $\alpha \neq 0$, тоді

$$\omega_1^2 f_{\omega_1\omega_1} - \frac{2\omega_1}{\alpha} f_{\omega_1} - \frac{\beta}{\alpha} f = 0. \tag{3.11}$$

Рівняння (3.11) є рівнянням Ейлера і воно має розв’язки [15]

a. Якщо $(1+\frac{2}{\alpha})^2 > -\frac{4\beta}{\alpha}$, то $f(\omega_1) = \omega_1^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}(C_1\omega_1^{\mu} + C_2\omega_1^{-\mu})$,

b. Якщо $(1+\frac{2}{\alpha})^2 = -\frac{4\beta}{\alpha}$, то $f(\omega_1) = \omega_1^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}(C_1 + C_2 \ln\omega_1)$,

c. Якщо $(1+\frac{2}{\alpha})^2 < -\frac{4\beta}{\alpha}$, то $f(\omega_1) = \omega_1^{\frac{\alpha+2}{2\alpha}}(C_1 \sin(\mu\ln\omega_1) + C_2\cos(\mu\ln\omega_1))$,

де $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\left|(1+\frac{2}{\alpha})^2 + \frac{4\beta}{\alpha}\right|}$, C_1 і C_2 – довільні сталі.

Зокрема, при $\alpha = -2, \beta = -2$ маємо розв’язок

$$f(\omega_1) = C_1\omega_1 + \frac{C_2}{\omega_1}.$$

Підставляючи цю функцію у відповідний вираз (анзац) для залежної змінної отримаємо розв’язок рівняння (2.3).

$$u = e^{\frac{x}{y}+t}\left(C_1\frac{x}{y^2e^t} + C_2\frac{y^2e^t}{x}\right). \tag{3.12}$$

Після підстановки (3.12) в (2.2) отримаємо точний розв’язок рівняння (2.1):

$$V(\tau, S, A) = S^{-\frac{r}{\sigma^2}}\exp\left\{\frac{2S}{\sigma^2 A} + \frac{\sigma^2(T-\tau)}{2} + \left(\frac{r^2}{\sigma^2} + r\right)\frac{\tau - T}{2}\right\}\left(C_1\frac{4S}{\sigma^4A^2\exp\left\{\frac{\sigma^2(T-\tau)}{2}\right\}} + C_2\frac{\sigma^4A^2\exp\left\{\frac{\sigma^2(T-\tau)}{2}\right\}}{4S}\right), \tag{3.13}$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

При $\alpha = -2, \beta = 2$ маємо розв’язок

$$f(\omega_1) = C_1\sin(\ln\omega_1) + C_2\cos(\ln\omega_1).$$

Підставляючи цю функцію у відповідний вираз (анзац) для залежної змінної отримаємо розв’язок рівняння (2.3).

$$u = e^{\frac{x}{y}-t}(C_1\sin\left(\ln\frac{x}{y^2e^t}\right) + C_2\cos\left(\ln\frac{x}{y^2e^t}\right)). \quad (3.14)$$

Після підстановки (3.14) в (2.2) отримаємо точний розв’язок рівняння (2.1):

$$V(\tau,S,A) = S^{-\frac{r}{\sigma^2}}\exp\{\frac{2S}{\sigma^2A} - \frac{\sigma^2(T-\tau)}{2} + (\frac{r^2}{\sigma^2}+r)\frac{\tau-T}{2}\}(C_1\sin\left(\ln\frac{4S}{\sigma^4A^2\exp\left\{\frac{\sigma^2(T-\tau)}{2}\right\}}\right) + C_2\cos\left(\ln\frac{4S}{\sigma^4A^2\exp\left\{\frac{\sigma^2(T-\tau)}{2}\right\}}\right), \quad (3.15)$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

При $\alpha = 2, \beta = 2$ маємо розв’язок

$f(\omega_1) = \omega_1(C_1 + C_2\ln\omega_1)$.

Підставляючи цю функцію у відповідний вираз (анзац) для залежної змінної отримаємо розв’язок рівняння (2.3).

$$u = e^{\frac{x}{y}-t}\frac{xe^t}{y^2}(C_1 + C_2\ln\frac{xe^t}{y^2}). \quad (3.16)$$

Після підстановки (3.16) в (2.2) отримаємо точний розв’язок рівняння (2.1):

$$V(\tau,S,A) = S^{-\frac{r}{\sigma^2}}\exp\{\frac{2S}{\sigma^2A} - \frac{\sigma^2(T-\tau)}{2} + (\frac{r^2}{\sigma^2}+r)\frac{\tau-T}{2}\}\frac{4S\exp\left\{\frac{\sigma^2(T-\tau)}{2}\right\}}{\sigma^4A^2}(C_1 + C_2\ln\frac{4S\exp\left\{\frac{\sigma^2(T-\tau)}{2}\right\}}{\sigma^4A^2}). \quad (3.17)$$

Висновки до розділу 3

За допомогою одновимірних та двовимірних підалгебр, які отримано у Розділі 2, було проведено симетрійну редукцію заданого рівняння до рівняння із частинними похідними від двох незалежних змінних та до звичайних диференціальних рівнянь відповідно. Завдяки цьому було виконано основне завдання магістерської дисертації – знайдено точні розв’язки лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону.

ВИСНОВКИ

У магістерській дисертації було розв'язано усі поставлені задачі завдяки якісному огляду основних понять теорії групового аналізу, який проведено у Розділі 1. Особливої уваги заслуговують означення однопараметричної неперервної групи перетворень, інфінітезимального оператора, алгебри Лі та операції комутування. Також у Розділі 1 було наведено теорему Лі, детально описано процес обчислення симетрії рівнянь на прикладі рівняння теплопровідності та побудовано таблицю комутаторів для базисних операторів алгебри Лі L_6, яку допускає це рівняння.

У Розділі 2 розв'язано одне із основних завдань магістерської дисертації – дослідження симетрійних властивостей лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону. Перш за все, задане рівняння було зведено за допомогою заміни до рівняння, яке є простішим у використанні. Далі, за допомогою методу Лі, було отримано п'ятивимірну алгебру інваріантності L_5, яка ізоморфна алгебрі A_5. За допомогою класифікації підалгебр останньої було знайдено одновимірні та двовимірні підалгебри.

За допомогою отриманих одновимірних та двовимірних підалгебр у Розділі 3 було проведено симетрійну редукцію заданого рівняння до рівняння із частинними похідними від двох незалежних змінних та до звичайних диференціальних рівнянь відповідно. Завдяки цьому було виконано основне завдання магістерської дисертації – знайдено точні розв'язки лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Горбунова О.С. Історія розвитку теоретико-групового аналізу диференціальних рівнянь / О.С. Горбунова, О.І. Дем'янок, В.І. Стогній // Збірник праць XVI Міжнародної молодіжної науково-практичної конференції «Історія розвитку науки, техніки та освіти, присвяченої 120-річчю "КПІ ім. Ігоря Сікорського"», 19.04.2018, Київ. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018 – с. 64-66.
2. Лагно В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу / В.І. Лагно, С.В. Спічак, В.І. Стогній. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002.
3. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников – М.: Наука, 1978. – 400 с.
4. Black F. The pricing of options and corporate liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81. – P. 637-659.
5. Brandimarte P. Numerical Methods in Finance and Economics / P. Brandimarte // John Wiley and Sons Publications. – 2004: Second edition, 2006. – 669 p.
6. Bakshi G. Empirical performance of alternative option pricing models / G. Bakshi, C. Cao, Z. Chen // Journal of Finance. – 1997. – Vol. 52. – P. 2003-2049.
7. Morelli M.J. Pricing financial derivatives with neural networks / M.J. Morelli, G. Montagna, O. Nicrosini, M. Treccani, M. Farina, P. Amato // Physica A. – 2004. – Vol. 338. – P. 160-165.
8. Gazizov R.K., Ibragimov H. Lie symmetry analysis of differential equations in finance / R.K. Gazizov, H. Ibragimov // Nonlinear Dynamics. – 1998. Vol. 17. – P. 387-407.
9. Дышаев М.М. Симметрии и точные решения одного нелинейного уравнения ценообразования опционов / М.М. Дышаев, В.Е. Федоров // Уфимский математический журнал. – 2017. – Т.9, №1. – с. 29-41.

10. Patsiuk O. Symmetry reduction and exact solutions of the non-linear Black-Scholes equation / O. Patsiuk, S. Kovalenko // J. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2018. – Vol. 62. – P. 164-173.

11. Спічак С. Симетрійні властивості та точні розв'язки (2+1)-вимірного рівняння ціноутворення азійського опціону / С. Спічак, В. Стогній, І. Копась, О. Горбунова // Збірник праць Міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми механіки та математики" присвяченої 90-річчю від дня народження академіка НАН України Ярослава Степановича Підстригача та 40-річчю створеного ним Інституту прикладних проблем механіки і математики НАН України. – Львів, 2018 – с. 165-166.

12. Barucci E. Some results on partial differential equations and Asian options / E. Barucci, S. Polidoro, V. Vespri // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2001. – Vol. 11, №3. – P. 475-497.

13. Patera J. Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras / J. Patera, P. Winternitz // J. Math. Phys. 1977. – 18, № 7. – P. 1449-1455.

14. Полянини А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

15. Зайцев В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.