МІНІСТЕРСТВО НАУКИ ТА ОСВІТИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ТА ВАРІАНТИ ТИПОВО-РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Рекомендовано вченою радою
фізико-математичного факультету
протокол № 3 від 28 квітня 2015 року

КИЇВ - 2015
НТУУ «КПІ»

Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт. Кратні інтеграли/ Уклад.: Г. В. Журавська, І. М. Копась, Г. М. Кулик, Н. В. Рева, Н. В. Степаненко – К.: НТУУ«КПІ», 2015. – 88 с.

Укладачі: Г. В. Журавська
І. М. Копась
Г. М. Кулик
Н. В. Рева
Н. В. Степаненко

Відповідальний редактор В.І.Стогній кан. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент: Денисенко Н.Л.
кан. фіз.-мат. наук,
доцент каф. диференціальних рівнянь НТУУ «КПІ»

Зміст

1. Подвійний інтеграл

1.1. Означення та властивості подвійного інтеграла

Нехай в замкненій обмеженій області $D \subset \mathbf{R}^2$ визначена функція двох змінних $z = f(x, y)$, графіком якої є деяка поверхня (рис.1).

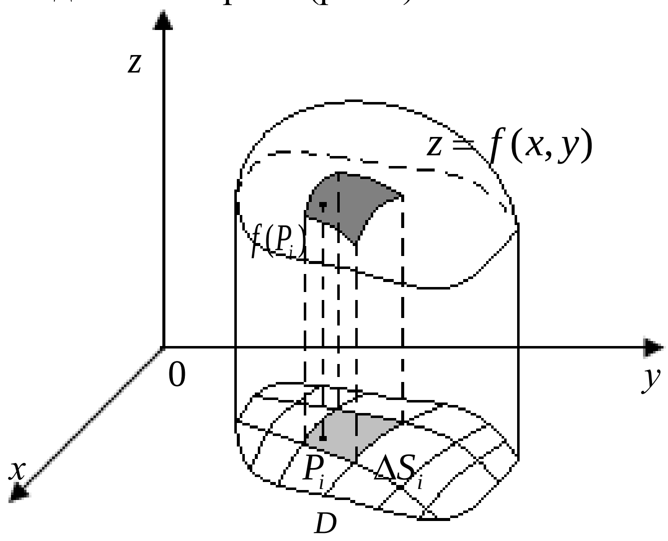


Рис.1.

Довільними кривими розіб'ємо область D на скінченне число областей D_i, $i = 1,2,..n,$ які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1,2,..n.$ Будемо називати діаметром $d(G)$ замкненої обмеженої області G найбільшу відстань між двома точками області, що лежать на її межі. Позначимо через λ найбільший з діаметрів D_i : $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(D_i)$.

У кожній області D_i виберемо довільним чином точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$, обчислимо значення функції $f(x, y)$ в цій точці та помножимо його на площу області D_i. Утворимо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i \qquad (1)$$

(кожен доданок цієї суми дорівнює об'єму циліндричного стовпчика з основою D_i і висотою $f(\xi_i, \eta_i)$, а сама сума σ − наближене значення об'єму циліндричного тіла, яке буде тим точніше, чим дрібніше буде розбиття).

Суму (1) називають *інтегральною* сумою функції $z = f(x, y)$ по області D.

<u>Означення.</u> Якщо існує скінчена границя інтегральної суми (1) при $\lambda \to 0$ така, що не залежить ні від способу розбиття області D на частини D_i, ні від вибору точок P_i в них, то така границя називається *подвійним інтегралом* функції $f(x, y)$ в області D і позначається

$$\iint\limits_D f(x, y)ds \quad \text{або} \quad \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

У цьому випадку функція $f(x, y)$ називається інтегровною в області D, D − областю інтегрування, x, y − змінними інтегрування, ds (або $dxdy$) − елементом площі. Отже, за означенням:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i. \qquad (2)$$

<u>Теорема.</u> Довільна неперервна в замкненій обмеженій області функція інтегрована в цій області.

<u>Зауваження:</u> надалі будемо мати справу лише з неперервними функціями, хоча існують і інші класи інтегрованих функцій.

За означенням подвійного інтеграла можна встановити такі його ***властивості***:

1. Якщо $f(x, y) = 1$ в області D, то $\iint\limits_D dxdy = S$, де S − площа області D.
2. Для довільної сталої C: $\iint\limits_D C \cdot f(x, y)dxdy = C \cdot \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$
3. $\iint\limits_D (f_1(x, y) \pm f_2(x, y))dxdy = \iint\limits_D f_1(x, y)dxdy \pm \iint\limits_D f_2(x, y)dxdy.$

Ця властивість лінійності справедлива також для суми чи різниці довільного скінченного числа доданків.

4. Якщо $D = D_1 \cup D_2$, де D_1 та D_2 не мають спільних внутрішніх точок

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

Ця властивість адитивності справедлива також для довільного скінченного числа областей.

5. Якщо в області D $f(x, y) \le g(x, y)$, то $\iint\limits_D f(x, y)dxdy \le \iint\limits_D g(x, y)dxdy.$

6. Якщо функція $f(x,y)$ в області D має найменше m та найбільше M значення, то справедлива оцінка інтеграла по області: $m\cdot S\le\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le M\cdot S$.

7. (*Теорема про середнє*). Якщо $f(x,y)$ неперервна в області D, то в цій області існує така точка (x_0,y_0), що $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)\cdot S$.

Величину $f(x_0,y_0)=\dfrac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ називають *середнім* значенням функції в області D.

1.2. Обчислення подвійних інтегралів

Означення. Область називається *правильною* у напрямі осі Оy (або Оx), якщо довільна пряма, яка проходить через внутрішню точку області паралельно до цієї осі, перетинає межу області не більше, ніж у двох точках (точки виходу та входу).

Область D правильну у напрямі осі Оy (рис. 2) можна визначити нерівностями $a\le x\le b$, $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$, де $y=\varphi_1(x)$ та $y=\varphi_2(x)$ − рівняння нижньої та верхньої лінії границі, a та b − абсциси крайніх справа та зліва точок області D. У цьому випадку подвійний інтеграл можна записати у вигляді *повторного* (або *двократного*) інтеграла:

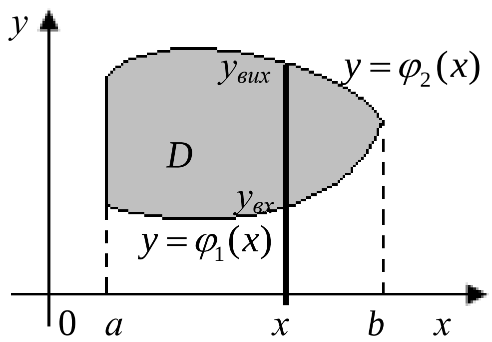


Рис. 2.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy. \qquad (3)$$

Інтегрування в (3) проводиться спочатку за змінною y (при цьому x вважається сталою), а потім за змінною x. Інтеграл за y називають внутрішнім, а за x − зовнішнім.

У випадку, коли нижня або верхня лінія межі складається з декількох частин, що мають різні рівняння, то область D потрібно розбити прямими, паралельними осі Оy, на частини, в яких нижня та верхня межі визначаються кожна своїм рівнянням.

Наприклад, для області, зображеної на рис. 3, обчислення подвійного інтеграла зведеться до суми двох повторних

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy +$$

$$+\int\limits_c^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(x,y)dy.$$

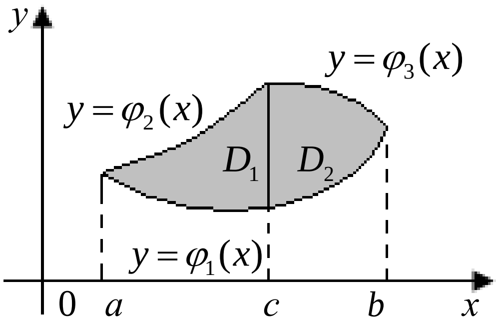


Рис. 3.

Аналогічно вводиться означення повторного інтеграла по області правильній у напрямі осі Оx (рис. 4). Її можна визначити нерівностями $c \le y \le d$, $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$, де $x=\psi_1(y)$ та $x=\psi_2(y)$ − рівняння лівої та правої лінії границі; c та d − ординати крайніх знизу та зверху точок області D.

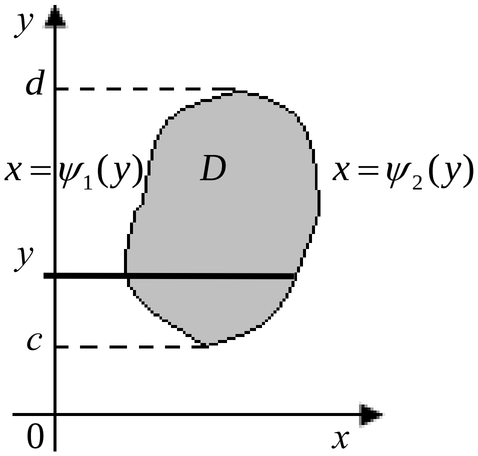


Рис. 4.

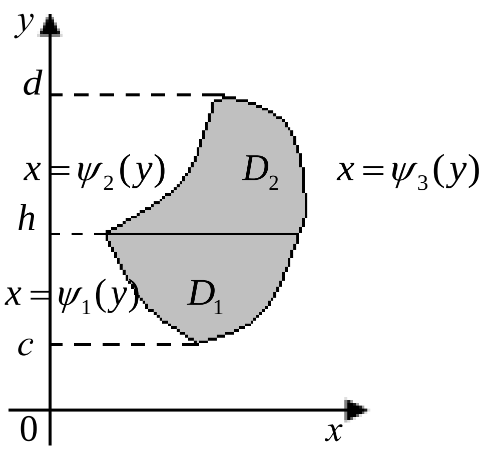


Рис. 5.

В цьому випадку подвійний інтеграл можна записати у вигляді повторного

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Коли права або ліва лінія межі складається з декількох частин, що мають різні рівняння, то область D потрібно розбити прямими, паралельними осі Оx, на частини, в яких права та ліва межі визначаються кожна своїм рівнянням. Таким чином, для області, зображеної на рис. 5, обчислення подвійного інтеграла зводиться до суми двох повторних

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^h dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_3(y)} f(x,y)dx + \int\limits_h^d dy \int\limits_{\psi_2(y)}^{\psi_3(y)} f(x,y)dx.$$

Межі зовнішнього інтеграла завжди сталі. Межі внутрішнього, як правило, залежать від змінної інтегрування зовнішнього інтеграла (сталими вони будуть, якщо область − прямокутник зі сторонами, паралельними осям координат).

Отже, сформулюємо правила обчислення подвійного інтеграла.

1. У системі координат Оxy побудувати область D та визначити її границі.

2. Вибрати порядок інтегрування:

$\int dx \int f(x,y)dy$	$\int dy \int f(x,y)dx$
3. Спроектувати D на вісь Оx (рис.2) та знайти на цій осі межові точки a та b. Це межі зовнішнього інтеграла.	3. Спроектувати D на вісь Оy (рис.4) та знайти на цій осі межові точки c та d. Це межі зовнішнього інтеграла.
4. Зафіксувати довільну точку x $(a \le x \le b)$ на осі Оx і провести через неї пряму, паралельну до осі Оy, відмітити точки входу в область та виходу з неї. Значення координати y ($y_{вх}=\varphi_1(x)$, $y_{вих}=\varphi_2(x)$) в цих точках є відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування внутрішнього інтеграла.	4. Зафіксувати довільну точку y $(c \le y \le d)$ на осі Оy і провести через неї пряму, паралельну до осі Оx, відмітити точки входу в область та виходу з неї. Значення координати x ($x_{вх}=\psi_1(x)$, $x_{вих}=\psi_2(x)$) в цих точках є відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування внутрішнього інтеграла.

5. Розставити межі у повторному інтегралі та обчислити його.

<u>Приклад 1.</u> Обчислити $\iint_D (y+x)dxdy$, де область D обмежена лініями $y=x$, $y=2x$, $x=1$.

Розв'язування.

Область D знаходиться між прямими $x=0$ та $x=1$, знизу обмежена прямою $y=x$, а зверху прямою $y=2x$ (рис. 6). Отже,

$$\iint_D (y+x)dxdy = \int_0^1 dx\int_x^{2x}(x+y)dy = \int_0^1 dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{2x} =$$

$$=\int_0^1\left(2x^2+\frac{(2x)^2}{2}-x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx = \int_0^1\frac{5}{2}x^2dx = \frac{5}{6}x^3\Bigg|_0^1 = \frac{5}{6}.$$

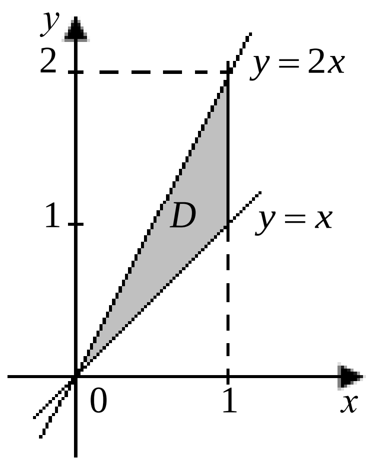


Рис. 6.

<u>Приклад 2.</u> Обчислити $\iint_D yxdxdy$, де область D обмежена лініями $y=x-4$, $y^2=2x$.

Розв'язування.

Виконаємо рисунок (рис.7). Для цього знайдемо точки перетину прямої і параболи, розв'язавши рівняння $y+4=0{,}5\,y^2$. Звідси отримаємо (2;−2) та (8;4).

В даному випадку зручніше вибирати зовнішнє інтегрування за змінною *y*. Тоді $-2\le y\le 4,\ 0{,}5y^2\le x\le y+4.$

Отже,

$$\iint_D yxdxdy = \int_{-2}^{4}dy\int_{0,5y^2}^{y+4}xydx = \int_{-2}^{4}dy\left(y\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0,5y^2}^{y+4} =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(y^3+8y^2+16y-\frac{y^5}{4}\right)dy =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4}+\frac{8y^3}{3}+8y^2-\frac{y^6}{24}\right)\Bigg|_{-2}^{4} = 90.$$

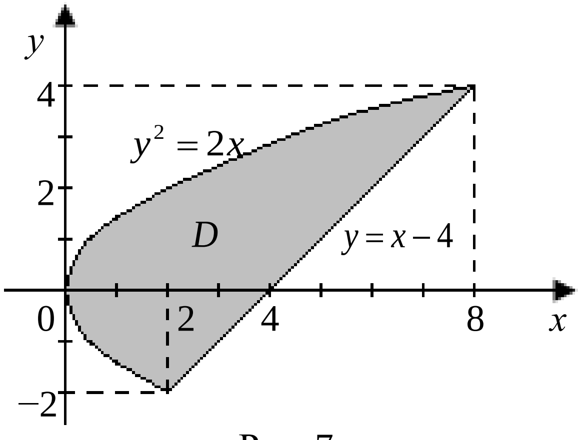


Рис. 7.

Приклад 3. Обчислити $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}dxdy,$ де область D обмежена лініями $y=x, \quad y=0, \quad x=1.$

Розв'язування.

Область є правильною і в напрямі осі Оy, і в напрямі осі Оx (рис. 8).

Отже, можна вибирати будь-який порядок інтегрування, але обчислити даний інтеграл можна лише при зовнішньому інтегруванні за x, в іншому випадку треба обчислювати інтеграл $\int e^{\frac{y}{x}}dx$, який в елементарних функціях не обчислюється.

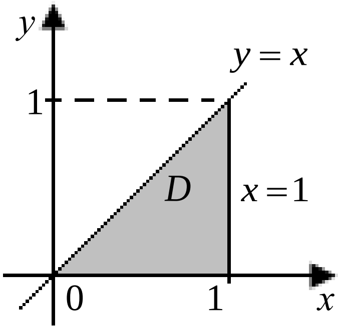


Рис. 8.

$$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}dxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x e^{\frac{y}{x}}dy = \int\limits_0^1 dx\left(xe^{\frac{y}{x}} \right)\Bigg|_0^x = \int\limits_0^1 x(e-1)dx = \frac{e-1}{2}.$$

Приклад 4. Поміняти порядок інтегрування в інтегралі $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy.$

Розв'язування. Область D знаходиться між прямими $x=0$ та $x=1,$ знизу обмежена параболою $y=x^2,$ а зверху прямою – $y=2-x$ (рис.9). Щоб змінити порядок інтегрування, розглянемо цю область як правильну в напрямі осі Оx. Вона обмежена прямими y=0 та y=2, але права частина межі області задана двома різними лініями. Рівняння цих ліній отримаємо, виразивши х через y: $x=\pm\sqrt{y}$ та $x=2-y$.Оскільки для даної області $x\geq 0,$ то рівняння правої гілки параболи $x=\sqrt{y}.$

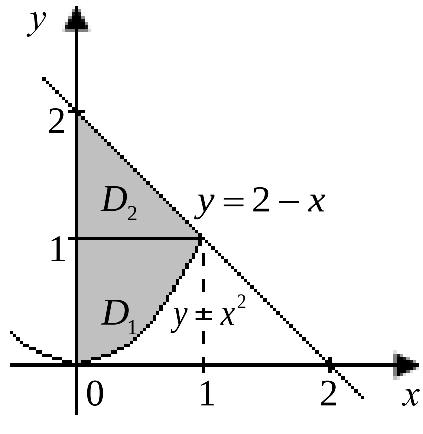


Рис. 9.

Розіб'ємо область D прямою y=1 на дві області:

$$D_1 = \{(x,y):\ 0\leq y\leq 1,\ 0\leq x\leq\sqrt{y}\}, \quad D_1 = \{(x,y):\ 1\leq y\leq 2,\ 0\leq x\leq 2-y\}.$$

Тоді

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx.$$

1.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай змінні x, y пов'язані зі змінними u та v співвідношеннями $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, де $x(u,v)$ та $y(u,v)$ неперервні разом з першими частинними похідними

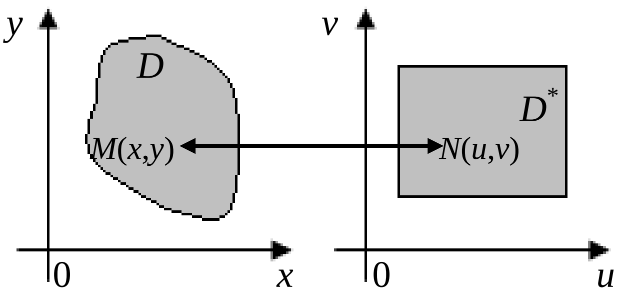


Рис. 10.

функції, що здійснюють взаємно однозначне відображення замкненої обмеженої області D^* площини Оuv на замкнену обмежену область D площини Оxy (рис. 10).

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області D, то справедлива *формула заміни змінних у подвійному інтегралі:*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D} f(x(u,v), y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv, \qquad (3)$$

де $J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ − визначник перетворення або визначник Якобі (якобіан).

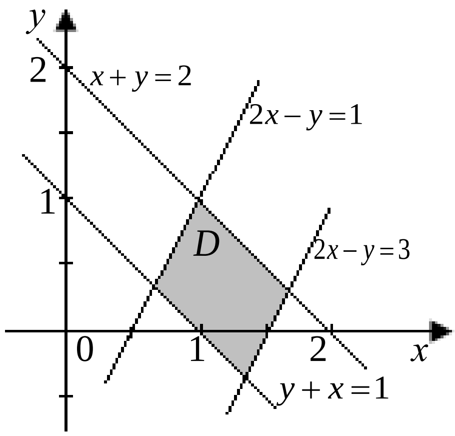
Виконуючи заміну змінних, потрібно елемент площі $dxdy$ в координатах x, y замінити елементом площі $\left|J(u,v)\right|dudv$ в координатах u, v, а стару область інтегрування D замінити відповідною їй областю D^*. Межі в новому інтегралі розставляються залежно від виду області D^*.

Заміну змінних в подвійному інтегралі рекомендується проводити таким чином, що спрощувались область інтегрування та підінтегральна функція.

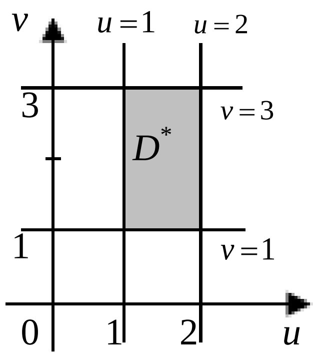
<u>Приклад 1.</u> Обчислити $\iint_D (6x - 3y)dxdy$, де область D обмежена лініями $y + x = 1$, $x + y = 2$, $2x - y = 1$, $2x - y = 3$.

Розв'язування.

Область D − паралелограм. Безпосереднє обчислення цього інтеграла досить громіздке, оскільки область D треба спочатку розбити на три області, а потім обчислити три інтеграли.



а)



б)

Рис. 11.

Виконаємо заміну змінних: $y + x = u, \;\; 2x - y = v.$

Тоді прямі $y + x = 1$ та $x + y = 2$ в системі Оxy переходять у прямі $u = 1$ та $u = 2$ у системі Оuv, а прямі $2x - y = 1$ та $2x - y = 3$ відповідно у прямі $v = 1$ та $v = 3$. Таким чином, область D (паралелограм) переходить у системі Оuv в прямокутник D^* (рис. 11).

Далі маємо:

$$\begin{cases} y + x = u; \\ 2x - y = v; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(u + v); \\ y = \dfrac{1}{3}(2u - v); \end{cases} \Rightarrow J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}; \Rightarrow \left|J(u,v)\right| = \frac{1}{3}.$$

Отже,

$$\iint\limits_D (6x - 3y)dxdy = \iint\limits_{D^*} \left(6 \cdot \frac{1}{3}(u + v) - 3 \cdot \frac{1}{3}(2u - v) \right) \cdot \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3} \int_1^2 du \int_1^3 3v dv = 4.$$

Полярні координати.

На практиці часто доводиться робити перехід до полярних координат ρ, φ, пов'язаних з декартових x та y співвідношеннями: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Знайдемо якобіан цього перетворення

$$J(\rho,\varphi) == \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho.$$

Тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi. \qquad (4)$$

Зображати окремо область D^* в системі О$\rho\varphi$ немає потреби. Потрібно зобразити область D в системі Оxy і мати на увазі, що:

1. Якщо область D обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути α та β $(\alpha < \beta)$, і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi))$, то полярні координати області D^* (рис. 12) змінюються в межах $\rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$. Тому можна розставити межі повторного інтеграла у вигляді

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$$

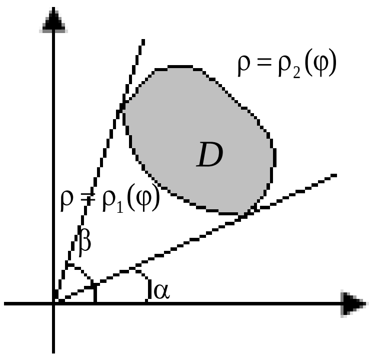


Рис. 12.

2. Якщо область D охоплює початок координат, а $\rho = \rho(\varphi)$ − полярне рівняння межі області D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho. \qquad (5)$$

Як правило, межі внутрішнього інтеграла (за ρ) залежать від φ; вони будуть сталими тільки в тому випадку, якщо область інтегрування є круговим сектором або різницею кругових секторів з центром в полюсі. Межі зовнішнього інтеграла (за φ) завжди сталі.

Приклад 2. Обчислити $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де область D – кругове кільце обмежене лініями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$.

Розв'язування.

Виконаємо заміну змінних: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тоді

$$x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2.$$

Область D (рис. 13) в полярних координатах запишеться

$$1\le\rho\le 2,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi.$$

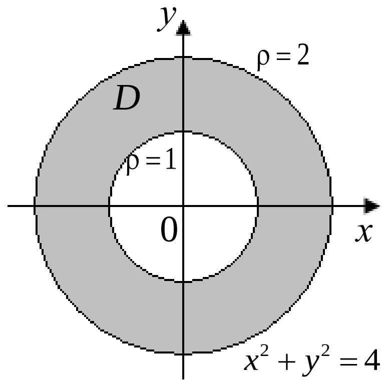


Рис. 13.

Отже,

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^2\frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\rho d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^2 d\rho=2\pi.$$

Приклад 3. Обчислити $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, де область D обмежена лініями $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$.

Розв'язування.

Виконаємо заміну змінних: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тоді

$$x^2+y^2=2x\Rightarrow\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=2\rho\cos\varphi\Rightarrow$$
$$\rho^2=\rho\cos\varphi\Rightarrow\rho=2\cos\varphi.$$

Аналогічно

$$x^2+y^2=4x\Rightarrow\rho=4\cos\varphi.$$

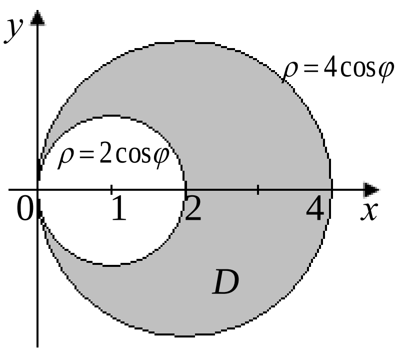


Рис. 14.

Область D (рис. 14) в полярних координатах запишеться

$$2\cos\varphi\le\rho\le 4\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

Отже,

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} = \frac{56}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{56}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi) = \frac{56}{3}(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3})\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{224}{9}.$$

Крім полярних координат часто використовуються узагальнені полярні координати, пов'язані з декартовими за формулами:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\rho^n \cos^m \varphi, \\ y = y_0 + b\rho^n \sin^m \varphi. \end{cases}$$

Числа $x_0,\ y_0,\ a,\ b,\ n,\ m$ підбираються в кожному окремому випадку з міркувань зручності. Якобіан такого перетворення $J(\rho,\varphi) = abnm\rho^{2n-1}\cos^{m-1}\varphi\sin^{m-1}\varphi.$

<u>Приклад 4.</u> Обчислити $\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, де область D обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Розв'язування.

Введемо узагальнені полярні координати:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Якобіан перетворення $J(\rho,\varphi) = ab\rho.$

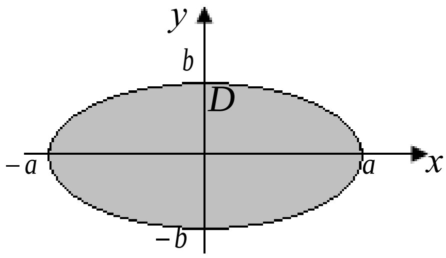


Рис. 15.

Тоді $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{a^2\rho^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^2\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=1 \Rightarrow \rho^2=1 \Rightarrow \rho=1.$

Область D (рис. 15) в полярних координатах запишеться $0\le\rho\le1,\ 0\le\varphi\le2\pi.$

Отже,

$$\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,ab\rho\, d\rho = ab\int_0^{2\pi} d\varphi\left(-\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-\rho^2\right)^3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{ab}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi ab}{3}.$$

1.4. Застосування подвійного інтеграла в задачах геометрії та механіки.

Геометрія.

1. Площа плоскої фігури, обмеженої областю D:

$$S = \iint\limits_D dxdy. \qquad (6)$$

2. Об'єм циліндричного тіла з твірними, паралельними осі O*z*, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy. \qquad (7)$$

Якщо таке циліндричне тіло обмежене знизу поверхнею $z = f_1(x, y)$, а зверху − $z = f_2(x, y)$, то його об'єм обчислюється за формулою

$$V = \iint\limits_D \left(f_2(x, y) - f_1(x, y) \right) dxdy. \qquad (8)$$

Якщо рівняння поверхонь, що обмежують дане циліндричне тіло, задано у вигляді $x = x(y, z)$ або $y = y(x, z)$, то об'єм знаходять за формулами типу (7) або (8), але інтеграли беруть зо проекціями тіла відповідно на площину O*yz* або O*xz* з відповідними змінними інтегрування.

3. Площа поверхні, яка задана рівнянням $z = f(x, y)$ і проектується на площину O*xy* в область D:

$$P = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^{\,2}(x, y) + f_y'^{\,2}(x, y)}\, dxdy. \qquad (9)$$

Площу поверхонь, рівняння яких задано у вигляді $x = x(y, z)$ або $y = y(x, z)$, знаходять за аналогічними формулами, де областю інтегрування буде проекція поверхні на відповідну координатну площину.

Приклад 1. Знайти площу фігури обмеженої лініями $y = x^2 - 2x$ та $y = x$.

Розв'язування.

Для цієї області $0 \le x \le 3$, $x^2 - 2x \le y \le x$ (рис. 16).

Тоді за формулою (6)

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-2x}^{x} dy = \int\limits_0^3 dx\left(y\Big|_{x^2-2x}^{x}\right) = \int\limits_0^3 (3x - x^2)dx =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}.$$

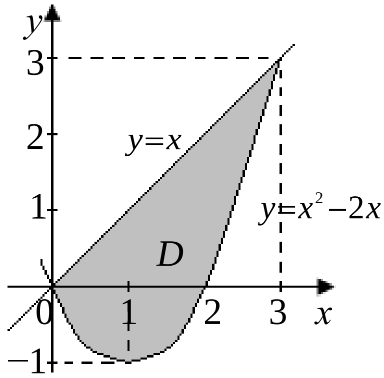


Рис. 16.

Приклад 2. Знайти площу фігури обмеженої лінією

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad a > 0.$$

Розв'язування.

Запишемо рівняння лінії в полярних координатах

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \Rightarrow \rho^4 = a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \Rightarrow$$
$$\rho^2 = a^2\cos 2\varphi \Rightarrow \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

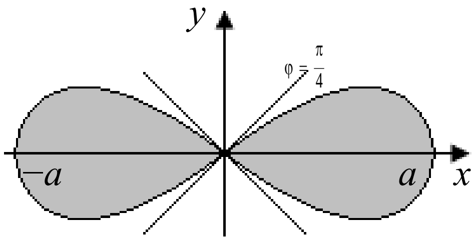


Рис. 17.

Це відоме рівняння лемніскати Бернуллі (рис. 17). Оскільки фігура симетрична відносно координатних осей, то її площа в чотири рази більша за площу частини, розташованої в першій чверті. Для цієї частини $0 \le \rho \le a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$.

Отже,

$$S = 4\iint\limits_D dxdy = 4\iint\limits_{D^*} \rho d\rho d\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} =$$

$$= 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

Приклад 3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Розв'язування.

Дане тіло обмежене координатними площинами, площиною $x + y = 1$, яка паралельна до осі Oz, та параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$.

Об'єм такого циліндричного тіла знаходимо за формулою (7), де його основою є трикутник D в площині Oxy, для якого $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x$ (рис. 18).

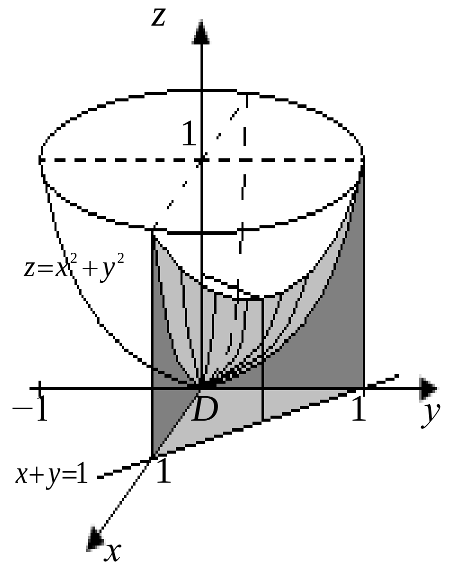


Рис. 18.

Отже,

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2)dy = \int_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Приклад 4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$y = 1 + x^2 + z^2, \quad y = 5.$$

Розв'язування.

Дане тіло обмежене параболоїдом обертання з віссю Oy і площиною y=5, яка перпендикулярна до осі Oy (рис. 19). Його проекція на площину Oxz − круг D, що визначається рівняннями $y = 0$ та $x^2 + z^2 \le 4$.

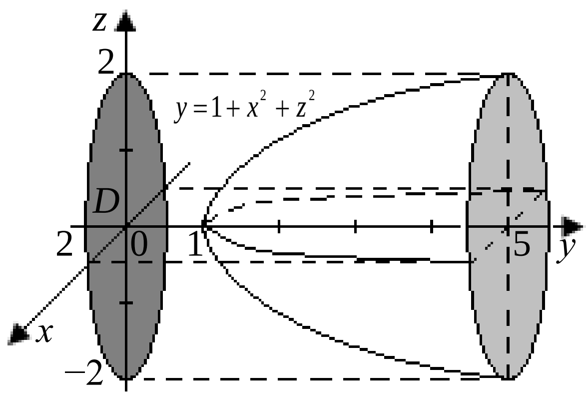


Рис. 19.

Об'єм тіла знаходимо за формулою типу (7)

$$V = \iint_D (5 - (1 + x^2 + z^2))dxdz = \iint_D (4 - x^2 - z^2)dxdz.$$

В отриманому інтегралі перейдемо до полярних координат $x = \rho\cos\varphi,\ \ z = \rho\sin\varphi.$ Тоді:

$$V = \iint_D (4 - \rho^2)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4\rho - \rho^3)d\rho = 2\pi \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right)\Bigg|_0^2 = 8\pi.$$

<u>Приклад 5.</u> Знайти площу частини конуса $y = 2\sqrt{x^2 + z^2}$, розміщеної всередині циліндра $x^2 + z^2 = 4x.$

Розв'язування.

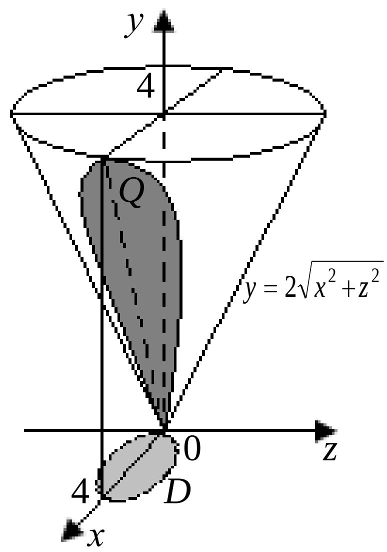


Рис. 20.

Оскільки поверхню задано рівнянням виду $y = y(x, z)$, то її площу зручно обчислювати за формулою

$$P = \iint\limits_D \sqrt{1 + y_x'^{\,2}(x,z) + y_z'^{\,2}(x,z)}\,dxdz\,,$$

де D − проекція даної поверхні на площину Oxz (рис. 20). Ця проекція є круг, обмежений колом $x^2 + z^2 = 4x$ ($(x-2)^2 + z^2 = 4$ після виділення повного квадрата).

Рівняння цього кола в полярних координатах $z = \rho\cos\varphi,\ \ x = \rho\sin\varphi$:

$$\rho = 4\sin\varphi.$$

Знайдемо

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2z}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

Тоді

$$P = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^2+z^2} + \frac{4z^2}{x^2+z^2}}\,dxdz = \sqrt{5}\iint\limits_D dxdz = \sqrt{5}\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \rho d\rho = 8\sqrt{5}\int\limits_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{5}\int\limits_0^{\pi}(1 - \cos 2\varphi)d\varphi = 4\sqrt{5}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = 4\pi\sqrt{5}.$$

Механіка.

1. Маса плоскої неоднорідної пластинки D, густина якої $\gamma = \gamma(x, y)$:

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y)dxdy. \tag{10}$$

2. Статичні моменти неоднорідної пластинки D, густина якої $\gamma = \gamma(x, y)$, відносно координатних осей Ox та Oy:

$$M_x = \iint\limits_D y\gamma(x, y)dxdy, \qquad M_y = \iint\limits_D x\gamma(x, y)dxdy. \tag{11}$$

3. Координати центра маси (x_c, y_c) неоднорідної пластинки D, густина якої $\gamma = \gamma(x, y)$:

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_D x\gamma(x,y)dxdy = \frac{M_y}{m}, \qquad y_c = \frac{1}{m}\iint_D y\gamma(x,y)dxdy = \frac{M_x}{m}. \qquad (12)$$

Якщо пластинка однорідна , то густина $\gamma(x,y) = const$. Тоді

$$x_c = \frac{1}{S}\iint_D xdxdy, \qquad y_c = \frac{1}{S}\iint_D ydxdy, \qquad (13)$$

де S − її площа.

4. Моменти інерції неоднорідної пластинки D, густина якої $\gamma = \gamma(x, y)$, відносно початку координат та відносно координатних осей Оx та Оy:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\gamma(x,y)dxdy, \qquad (14)$$

$$I_x = \iint_D y^2\gamma(x,y)dxdy, \qquad I_y = \iint_D x^2\gamma(x,y)dxdy. \qquad (15)$$

При обчисленні координат центра маси або моментів однорідної пластинки слід враховувати її симетричність. Так, якщо однорідна пластинка має вісь симетрії, то центр маси знаходиться на цій осі; якщо однорідна пластинка симетрична відносно бісектриси першого координатного кута, то її моменти відносно осей рівні і $x_c = y_c$.

<u>**Приклад 6.**</u> Знайти масу матеріальної пластинки, яка лежить у площині Оxy і обмежена лініями $x = (y-1)^2$, $y = x - 1$, якщо її густина $\gamma = y$.

Розв'язування.

Скористаємось формулою (10). Спосіб задання кривих та вигляд області D (рис. 21) підказують вибрати у повторному інтегралі зовнішнє інтегрування за y. Отже,

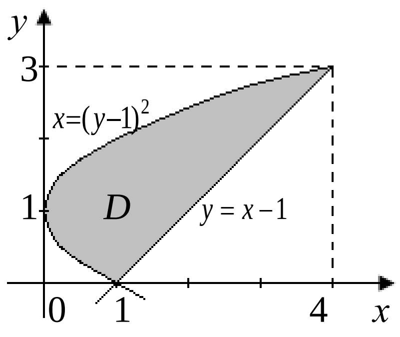


Рис. 21.

$$m = \iint_D ydxdy = \int_0^3 dy \int_{(y-1)^2}^{y+1} ydx = \int_0^3 y(y+1-(y-1)^2)dy =$$

$$= \int_0^3 (3y^2 - y^3)dy = \left(y^3 - \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{4}.$$

Приклад 7. Знайти координати центра маси пластинки, яка лежить у площині Оxy і обмежена лініями $y = x,\ \ y = 2x,\ \ x = 2,$ якщо її густина $\gamma = xy$ (рис. 22).

Розв’язування. Скористаємось формулами (12). Знайдемо спочатку масу

$$m = \iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^2 xdx \int\limits_x^{2x} ydy = \int\limits_0^2 xdx \left.\left(\frac{y^2}{2} \right)\right|_x^{2x} = \frac{3}{2}\int\limits_0^2 x^3 dx = 6.$$

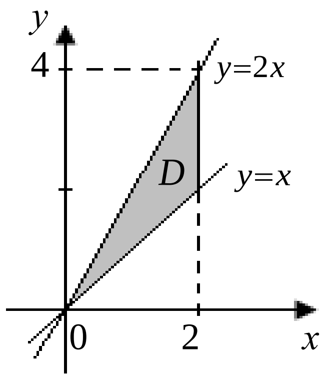


Рис. 22.

Тоді координати центра маси

$$x_c = \frac{1}{6}\iint\limits_D x^2 ydxdy = \frac{1}{6}\int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_x^{2x} ydy = \frac{1}{6}\int\limits_0^2 x^2 dx \left.\left(\frac{y^2}{2} \right)\right|_x^{2x} =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^2 x^4 dx = \left.\left(\frac{x^5}{20} \right)\right|_0^2 = \frac{8}{5},$$

$$y_c = \frac{1}{6}\iint\limits_D xy^2 dxdy = \frac{1}{6}\int\limits_0^2 xdx \int\limits_x^{2x} y^2 dy = \frac{1}{6}\int\limits_0^2 xdx \left.\left(\frac{y^3}{3} \right)\right|_x^{2x} = \frac{7}{18}\int\limits_0^2 x^4 dx = \frac{7}{18}\left.\left(\frac{x^5}{20} \right)\right|_0^2 = \frac{112}{45}.$$

Приклад 8. Знайти моменти інерції відносно координатних осей Оx та Оy пластини з густиною $\gamma = 1,$ обмеженої лініями $yx = 1,\ \ yx = 2,\ \ y = 2x,\ \ x = 2y$ і розміщеної в першій чверті (рис. 23).

Розв’язування. Оскільки пластина однорідна, з густиною $\gamma = 1,$ то її моменти інерції знайдемо за формулами

$$I_x = \iint\limits_D y^2 dxdy, \qquad I_y = \iint\limits_D x^2 dxdy.$$

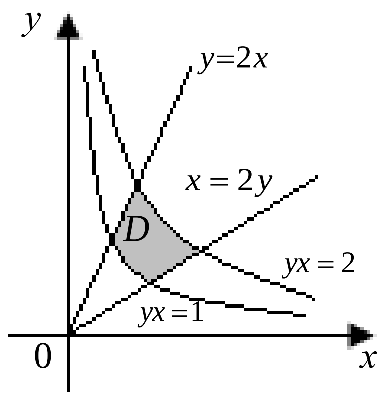


Рис.23.

Щоб кожен з цих інтегралів звести до повторного, необхідно область інтегрування розбити на три частини. Цього можна уникнути, зробивши заміну змінних:

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = xy \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{v}{u}}, \quad y = \sqrt{uv}.$$

Тоді прямі $y = 2x$ та $x = 2y$ перейдуть відповідно у прямі $u = 2$ та $u = 0{,}5,$ а гіперболи $yx = 1$ та $yx = 2$ − відповідно у прямі $v = 1$ та $v = 2.$

Область D відобразиться у прямокутник: $0{,}5 \le u \le 2,\quad 1 \le v \le 2.$

Знайдемо якобіан перетворення:

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2u}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2u} \quad \Rightarrow \quad |J(u,v)|=\frac{1}{2u}.$$

Отже,

$$I_x=\iint\limits_D y^2dxdy=\iint\limits_{D^*} uv\cdot\frac{1}{2u}dudv=\frac{1}{2}\int\limits_{0,5}^{2}du\int\limits_{1}^{2}vdv=\frac{3}{4}\int\limits_{0,5}^{2}du=\frac{9}{8};$$

$$I_y=\iint\limits_D x^2dxdy=\iint\limits_{D^*}\frac{v}{u}\cdot\frac{1}{2u}dudv=\frac{1}{2}\int\limits_{0,5}^{2}\frac{du}{u^2}\int\limits_{1}^{2}vdv=\frac{3}{4}\int\limits_{0,5}^{2}\frac{du}{u^2}=-\frac{3}{4u}\Bigg|_{0,5}^{2}=\frac{9}{8}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі:

$$a)\quad I=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy \qquad б)\quad I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx.$$

2. Обчислити подвійні інтеграли:

а) $\iint\limits_D (x+y^2)dxdy,$ якщо D обмежена лініями $y=x,\ y=x^2;$

б) $\iint\limits_D x\cos(x+y)dxdy,$ якщо D обмежена лініями $y=x,\ y=0,\ x=\pi;$

в) $\iint\limits_D x^2dxdy,$ якщо D обмежена лініями $y=x,\ y=\dfrac{1}{x},\ x=2.$

3. Обчислити подвійні інтеграли, використовуючи відповідну заміну:

а) $\iint\limits_D (x+y)dxdy,$ де D обмежена лініями $2x+y=1,\ 2x+y=3,\ x-y=-1,\ x-y=2;$

б) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy,$ якщо D обмежена колом $x^2+y^2=4x;$

в) $\iint\limits_D arctg\,\dfrac{y}{x}dxdy,$ якщо $D-$ частина кільця, обмеженого лініями

$$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x;$$

г) $\iint\limits_D xdxdy,$ якщо D обмежена астроїдою $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2};$

(вказівка: перейти до узагальнених полярних координат $x = a\rho^3\cos^3\varphi,\ y = a\rho^3\sin^3\varphi$).

4. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = 2 - x,\quad y^2 = 4x + 4;$

б) $xy = 1,\quad xy = 2,\quad x = y,\quad y = 2x,\ (x > 0,\ y > 0);$

в) $y = 0,\quad y = x,\quad x^2 + y^2 = 2x;$

г) $\sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{2},\quad x = 1,\quad y = -1;$

(вказівка: перейти до узагальнених полярних координат $x = 1 + 2a\rho^2\cos^2\varphi,\ y = -1 + 2a\rho^2\sin^2\varphi$).

5. Знайти об'єм тіла, обмеженого:

а) площинами $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ y = 4,\ x = 4$ і параболоїдом $z = 1 + x^2 + y^2;$

б) параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і площинами $y = 1,\ z = 0,\ y = 2x,\ y = 6 - x;$

в) циліндром $x^2 + y^2 = 4$ і площинами $z = 0,\ z = x + y + 10;$

6. Знайти площу частини площини $6x + 3y + 2z = 12$, що розміщена у першому октанті.

7. Знайти площу частини конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, розміщеної всередині циліндра $x^2 + y^2 = 4x.$

8. Знайти координати центра маси однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x + 4,\quad y^2 = -2x + 4.$

9. Знайти координати центра маси пластинки, обмеженої лініями $y = x^2,\quad y^2 = x,$ якщо її густина $\gamma = xy.$

10. Знайти координати центра маси однорідної плоскої фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos\varphi).$

11. Знайти момент інерції відносно початку координат однорідної пластинки ($\gamma = 1$), обмеженої лініями $x + y = 2,\ y = 2,\ x = 2.$

12. Знайти моменти інерції відносно початку координат та осей координат пластинки з густиною $\gamma = x^2y,$ якщо вона обмежена лініями $y = x^2,\ y = 1.$

13. Знайти момент інерції відносно полюса однорідної пластинки ($\gamma = 1$), обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 - \cos\varphi).$

2. Потрійний інтеграл

2.1. Означення, властивості та обчислення потрійного інтеграла

Схема побудови потрійного інтеграла така ж, як і для подвійного. Нехай функція трьох змінних $u = f(x, y, z)$ визначена в замкненій обмеженій області $G \subset \mathbf{R}^3$.

Розіб'ємо область G сіткою гладких поверхонь на n частин G_i, які не мають спільних внутрішніх точок і об'єми яких дорівнюють ΔV_i $(1, 2, \ldots, n)$. Позначимо через λ найбільший з діаметрів областей G_i : $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(G_i)$.

У кожній області G_i виберемо довільну точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, обчислимо значення функції $f(x, y, z)$ в цій точці, помножимо його на об'єм області G_i і утворимо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta V_i. \tag{1}$$

Суму (1) називають інтегральною сумою для функції $u = f(x, y, z)$ по області G.

<u>Означення.</u> Якщо існує скінчена границя інтегральної суми (1) при $\lambda \to 0$ така, що не залежить ні від способу розбиття області G на частини G_i, ні від вибору точок P_i в них, то така границя називається *потрійним інтегралом* функції $f(x, y, z)$ в області G і позначається

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dv \text{ або } \iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz.$$

В цьому випадку функція $f(x, y, z)$ називається *інтегровною в області* G, G − областю інтегрування, x, y, z − змінними інтегрування, dv ($dxdydz$) − елементом площі. Отже, за означенням

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta V_i. \tag{2}$$

<u>Теорема.</u> Довільна неперервна в замкненій обмеженій області функція інтегровна в цій області.

<u>Зауваження.</u> Надалі будемо мати справу лише з неперервними функціями, хоча існують і інші класи інтегровних функцій.

Всі властивості подвійних інтегралів справедливі і для потрійних інтегралів, тільки замість площі області S тут використовується об'єм тіла V.

1. Якщо $f(x,y,z)=1$ в області G, то $\iiint\limits_G dxdydz=V$, де V − об’єм області G.

2. Якщо функція $f(x,y,z)$ в області G має найменше m та найбільше M значення, то справедлива оцінка інтеграла по області: $m\cdot V\le\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz\le M\cdot V$.

3. (Теорема про середнє). Якщо $f(x,y,z)$ неперервна в області G, то в цій області існує така точка (x_0,y_0,z_0), що $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=f(x_0,y_0,z_0)\cdot V$.

Величину $f(x_0,y_0,z_0)$ називають середнім значенням функції в області G.

Обчислення потрійних інтегралів зводиться до обчислення подвійних, а отже, обчислення повторних інтегралів.

Нехай область G обмежена знизу і зверху поверхнями $z=z_1(x,y)$ та $z=z_2(x,y)$,

а з боків циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz (рис. 24). Позначимо проекцію області G на площину Oxy через D і вважатимемо, що функції $z_1(x,y)$ та $z_2(x,y)$ неперервні в D. Якщо при цьому область D є правильною, то область G називається правильною у напрямі осі Oz. Коротко таку область можна описати так:

$$G=\{(x,y,z):(x,y)\in D,\ \ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\}.$$

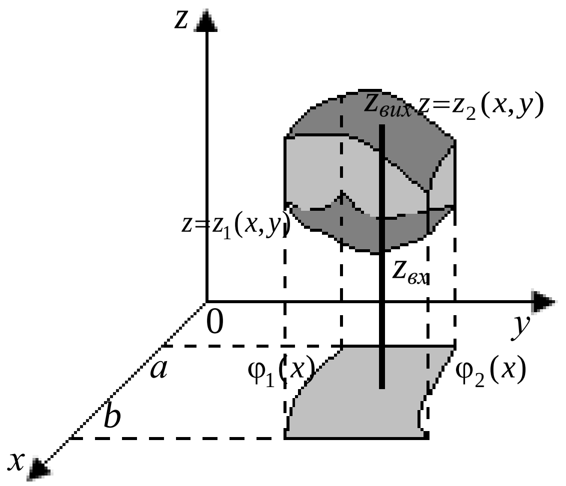


Рис. 24.

Припустимо, що кожна пряма, яка проходить через внутрішню точку області D паралельно осі Oz перетинає границю області G у двох точках − входу $z_{вх}=z_1(x,y)$ та виходу $z_{вих}=z_2(x,y)$.

Для будь якої неперервної в області G функції $f(x,y,z)$ має місце формула

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (2)$$

Зміст формули (2) такий: щоб обчислити потрійний інтеграл, спочатку обчислюють інтеграл $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz=I(x,y)$ за змінною z, вважаючи x та y сталими.

Нижньою межею інтеграла є апліката точки входу в область G, а верхньою − апліката точки виходу. Внаслідок інтегрування дістанемо функцію $I(x,y)$ від змінних x та y.

Подвійний інтеграл від цієї функції $\iint\limits_D I(x,y)dxdy$ обчислюється за допомогою повторних інтегралів залежно від виду області D. Якщо область D правильна у напрямі осі Оy і $D=\{(x,y): a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$, то формула (2) набуває вигляду:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz. \qquad (3)$$

Якщо область $D=\{(x,y): c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\}$, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}dx\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz. \qquad (4)$$

Таким чином, обчислення потрійних інтегралів зводиться до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів. При цьому розстановку меж інтегрування рекомендується проводити наступним чином:

1. Зобразити поверхні, що обмежують тіло G у просторі $\mathbf{R}^3$.

2. Спроектувати тіло G на площину Оxy. Нехай проекція − область D.

3. В області D зафіксувати довільну точку (x,y), через яку провести пряму, паралельну осі Оz, і відзначити у напрямі цієї осі точки входу в область та виходу. Значення аплікати z ($z_{вх}=z_1(x,y)$ та $z_{вих}=z_2(x,y)$) в цих точках є відповідно нижньою та верхньою межами внутрішнього інтеграла за змінною z.

4. Розставити межі у подвійному інтегралі по області D за формулами (3) або (4).

Зауваження. Якщо просторовий малюнок виконати важко, то можна зобразити лише проекцію D тіла G на площину Оxy і проаналізувати зміну z при фіксованих x та y.

Порядок інтегрування може бути іншим, залежно від виду області G. Наприклад, якщо область G правильна у напрямі осі Оx і D_{yz} − її проекція на площину Оyz ($G=\{(x,y,z):(y,z)\in D_{yz},\ x_1(y,z)\le x\le x_2(y,z)\}$), то справедлива формула для обчислення потрійного інтеграла:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{yz}} dydz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx. \tag{5}$$

Якщо $G = \{(x,y,z):(x,z)\in D_{xz},\ y_1(x,z) \le y \le y_2(x,z)\}$, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xz}} dxdz \int\limits_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy. \tag{6}$$

Далі подвійні інтеграли у цих формулах зводяться до повторних, залежно від вигляду проекції області G на відповідну площину за відомими правилами.

Якщо областю інтегрування є паралелепіпед $G = \{(x,y,z): a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ k \le z \le l\}$, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_k^l f(x,y,z)dz. \tag{7}$$

У цьому разі інтегрування можна виконувати у будь-якому порядку.

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G (x+y+z)dxdydz$ по області обмеженій площинами $x=1,\ \ y=1,\ \ z=1,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0.$

Розв'язування.

Оскільки область G − паралелепіпед, то за формулою (7) маємо

$$\iiint\limits_G (x+y+z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x+y+z)dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(x + y + \frac{1}{2} \right) dy = \int\limits_0^1 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right)\Bigg|_0^1 = \int\limits_0^1 (1+x)dx = \frac{3}{2}.$$

Приклад 2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G zdxdydz$ в області обмеженій площинами $x+y+z=1,\ \ x=0,$ $y=0,\ \ z=0.$

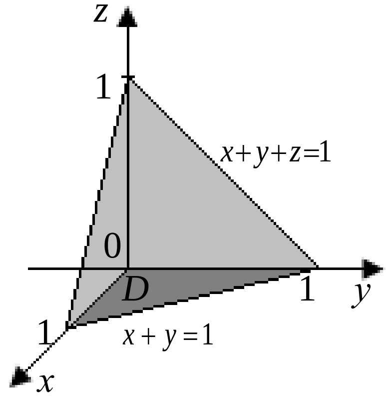


Рис. 25.

Розв'язування.

Область G проектується на площину Оxy в трикутник

$D = \{(x,y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$ (рис. 25).

Кожна пряма, проведена через точку (x,y) трикутника

D паралельно до осі Oz, входить в область G в точках площини $z=0,$ а виходить в точках площини $z=1-x-y.$ За формулою (2) маємо

$$\iiint\limits_G zdxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy =$$

$$= -\frac{1}{6}\int\limits_0^1 dx(1-x-y)^3\Big|_0^{1-x} = \frac{1}{6}\int\limits_0^1 (1-x)^3\,dx = -\frac{(1-x)^4}{24}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

Приклад 3. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G xy\sqrt{z}dxdydz,$ якщо область G обмежена поверхнями $y=x^2,\;\; z=y,\;\; y=1,\;\; z=0.$

Розв'язування.

Проекція області G на площину Oxy − область

$D=\{(x,y):-1\le x\le 1,\;\; x^2\le y\le 1\}$ (рис. 26).

Довільна пряма, паралельна до осі Oz, входить в область G в точках площини $z=0,$ а виходить в точках площини $z=y.$

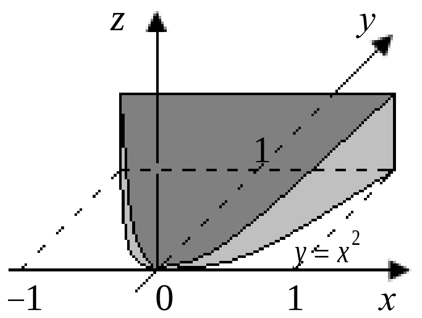


Рис. 26.

За формулою (2) маємо

$$\iiint\limits_G xy\sqrt{z}dxdydz = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 dy \int\limits_0^y xy\sqrt{z}dz = \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 xy^{\frac{5}{2}}dy = \frac{4}{21}\int\limits_{-1}^1 x\left(1-|x|^7\right)dx =$$

$$= \frac{4}{21}\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^1 + \int\limits_{-1}^0 x^8dx - \int\limits_0^1 x^8dx\right) = 0.$$

Приклад 4. Обчислити $\iiint\limits_G (2x+y)dxdydz,$ якщо область G обмежена поверхнями $y=x,\;\; x=1,\;\; y=0,$ $z=1,\;\; z=1+x^2+y^2.$

Розв'язування.

Область G проектується на площину Oxy в область

$D=\{(x,y):0\le x\le 1,\;\; 0\le y\le x\}$ (рис. 27).

Довільна пряма, проведена через внутрішню точку

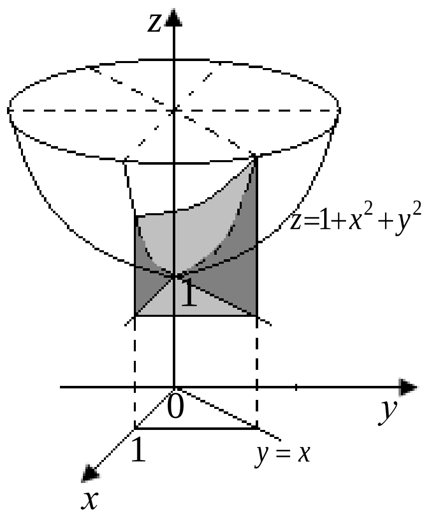


Рис. 27.

трикутника D паралельно до осі Oz, входить в область G в точках площини $z=1,$ а виходить в точках параболоїда $z=1+x^2+y^2.$

Отже,

$$\iiint\limits_G (2x+y)dxdydz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy \int\limits_1^{1+x^2+y^2}(2x+y)dz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x (2x+y)(x^2+y^2)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x (2x^3+y^3+2xy^2+yx^2)dy = \int\limits_0^1 dx\left(2x^3y+\frac{y^4}{4}+\frac{2}{3}xy^3+\frac{1}{2}y^2x^2\right)\Bigg|_0^x = \frac{41}{12}\int\limits_0^1 x^4dx = \frac{41}{60}.$$

2.2. Заміна змінних у потрійному інтегралі

Якщо обмежена замкнена область G взаємно однозначно відображається на область G^* за допомогою неперервно-диференційовних функцій $x=x(u,v,w),$ $y=y(u,v,w),$ $z=z(u,v,w),$ якобіан $J(u,v,w)$ в області G^* не дорівнює нулю:

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0,$$

а функція $f(x,y,z)$ неперервна в $G,$ то справедлива *формула заміни змінних у потрійному інтегралі*:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|J(u,v,w)\right|dudvdw. \qquad (8)$$

На практиці найуживанішими є циліндричні та сферичні координати.

При переході до **циліндричних координат** $\rho,$ $\varphi,$ z (рис. 28) маємо:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z,$$
$$0\le\rho\le+\infty,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ -\infty\le z\le+\infty.$$

Якобіан цього перетворення $J(\rho,\varphi,z)=-\rho.$ Тоді формула (8) набуває вигляду

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz.$$

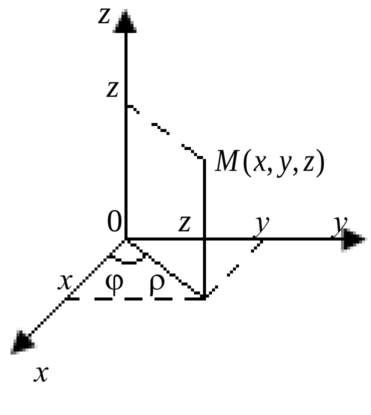


Рис. 28.

Розстановку меж інтегрування в циліндричних координатах можна виконати, не зображаючи G^*, а аналізуючи зміну циліндричних координат в G. Для ρ та φ залишаються справедливими всі поради попереднього розділу, оскільки це полярні координати проекції точки на площину Oxy. Зміну координати z аналізують, провівши через точку (ρ,φ) пряму паралельну до осі Oz, та відмітивши точки входу цієї прямої в область G та виходу з неї.

При переході до **сферичних координат** ρ, φ, θ (рис. 29) маємо:

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\theta,$$

$$0\le\rho\le+\infty,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\theta\le\pi.$$

Якобіан цього перетворення $J(\rho,\varphi,\theta)=\rho^2\sin\theta.$ Формула (8) набуває вигляду

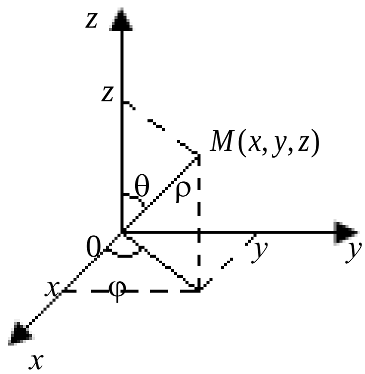


Рис.29.

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_{G^*} f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

Розстановку меж інтегрування в сферичних координатах також виконують, аналізуючи зміну сферичних координат в області G. Найчастіше зустрічаються області, для яких сталі межі зміни координат φ та θ можна оцінити по вигляду області G. Далі проводять довільний промінь $\varphi=const$, $\theta=const$ через початок координат і відмічають координату ρ точок входу в область та виходу з неї.

<u>Приклад 1.</u> Обчислити $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$ якщо область G обмежена площинами $y=0,\ z=0,\ z=2$ і циліндром $x^2+y^2=2x.$

Розв’язування.

Введемо циліндричні координати

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z.$$

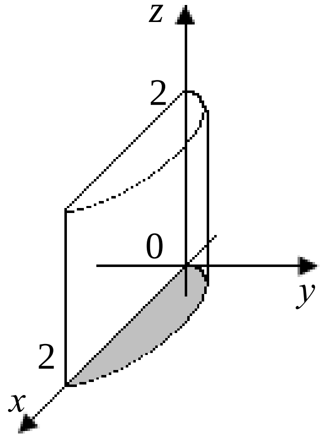


Рис. 30.

Рівняння кола $x^2+y^2=2x,$ яке лежить в основі циліндра, в циліндричних координатах має вигляд

$\rho = 2\cos\varphi.$

Отже, в області G^* (рис. 30) справедливі нерівності:

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ \ 0 \le \rho \le 2\cos\varphi,\ 0 \le z \le 2.$$

Тоді,

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2\,d\rho \int_0^2 zdz = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi} == \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi) = \frac{16}{3}\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{9}.$$

<u>Приклад 2.</u> Обчислити $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$ якщо область G обмежена поверхнями $x^2+y^2=4,\ z=1,\ z=2+x^2+y^2.$

Розв’язування.

Форма області та вигляд підінтегральної функції підказують, що варто ввести циліндричні координати $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi, z=z.$

Тоді рівняння циліндра $x^2+y^2=4$ має вигляд $\rho=2,$ а рівняння параболоїда $z=2+x^2+y^2$ буде $z=2+\rho^2.$

Отже, в області G^* (рис. 31) справедливі нерівності:

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le \rho \le 2,\ 1 \le z \le 2+\rho^2.$$

Далі

$$\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2\,d\rho \int_1^{2+\rho^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2\rho^2+\rho^4)\,d\rho =$$

$$= 2\pi\left(\frac{2\rho^3}{3}+\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{272}{15}\pi.$$

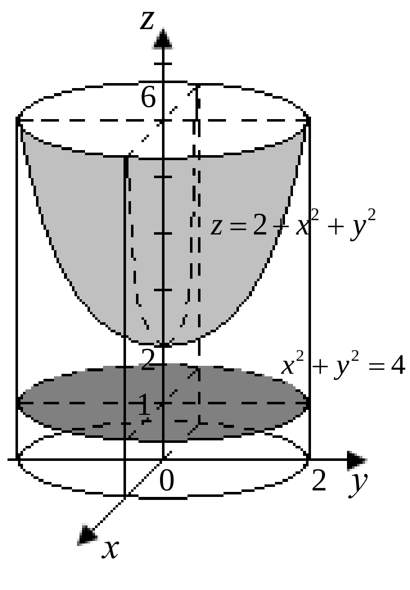


Рис. 31.

Приклад 3. Обчислити $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, де область G − куля $x^2+y^2+z^2=1$.

Розв'язування.

Перейдемо до сферичних координат

$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,\quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=\rho\cos\theta.$$

Оскільки підінтегральна функція $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\rho$ і в області G^* виконуються нерівності $0\le\rho\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le\theta\le\pi$, то

$$\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\rho^3\sin\theta\,d\rho=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi=\pi.$$

2.3. Застосування потрійних інтегралів в задачах геометрії та механіки

Геометрія.

1. Об'єм замкненої обмеженої області G:

$$V=\iiint\limits_G dxdydz\,. \tag{11}$$

Приклад 1. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x=0,\ y=0,\ z=0,$ $x+y=2,\ \ 2z=x^2+y^2.$

Розв'язування.

Дане тіло обмежене координатними площинами, площиною $x+y=2$ та параболоїдом обертання $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ (рис. 32). Об'єм тіла знаходимо за формулою (11):

$$V=\iiint\limits_G dxdydz=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}dy\int_0^{\frac{x^2+y^2}{2}}dz=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(x^2+y^2)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2-x}=\frac{1}{2}\int_0^2\left(2x^2-x^3+\frac{(2-x)^3}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{(2-x)^4}{12}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

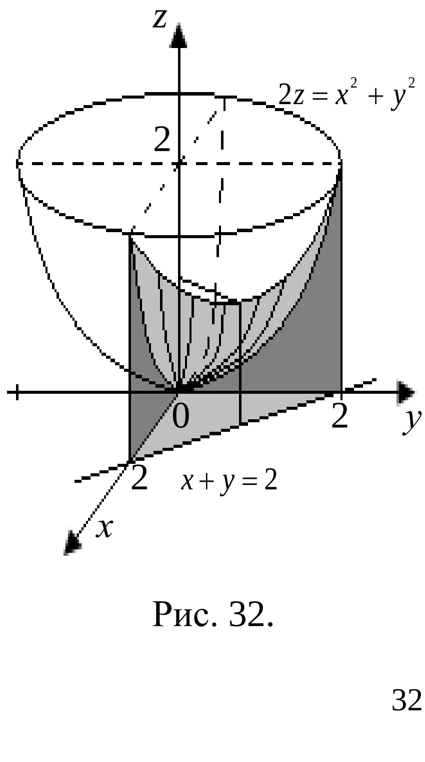


Рис. 32.

<u>Приклад 2.</u> Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 2,\ \ 2z = x^2 + y^2.$

Розв’язування.

Дане тіло обмежене знизу параболоїдом обертання $2z = x^2 + y^2$, зверху площиною $z = 2$ і проектується в круг $x^2 + y^2 \le 4$ площини Оxy (рис. 33).

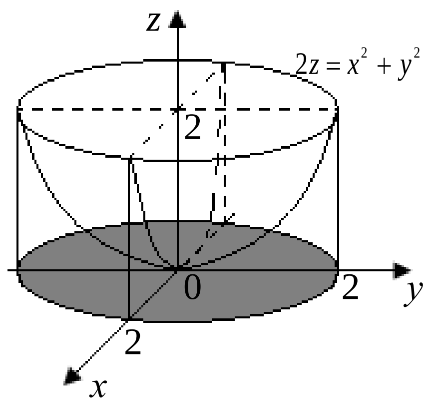


Рис. 33.

Використовуючи циліндричні координати, знаходимо рівняння параболоїда $z = \frac{\rho^2}{2}$. Отже,

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho\, d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{2}}^2 dz = 2\pi \int\limits_0^2 \rho \left(2 - \frac{\rho^2}{2} \right) d\rho = 2\pi.$$

<u>Приклад 3.</u> Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 2z,\ \ z^2 = x^2 + y^2.$

Розв’язування.

Дане тіло обмежене знизу конусом $z^2 = x^2 + y^2$, зверху сферою з центром в точці (0,0,1) і проектується в круг $x^2 + y^2 \le 1$ площини Оxy (рис. 34).

Використовуючи циліндричні координати, знаходимо рівняння сфери $z = 1 + \sqrt{1 - \rho^2}$ та рівняння конуса $z = \rho$.

Тоді

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho \int\limits_{\rho}^{1+\sqrt{1-\rho^2}} dz = 2\pi \int\limits_0^2 \rho \left(1 + \sqrt{1 - \rho^2} - \rho \right) d\rho =$$

$$= 2\pi \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\sqrt{(1-\rho^2)^3}}{3} - \frac{\rho^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \pi.$$

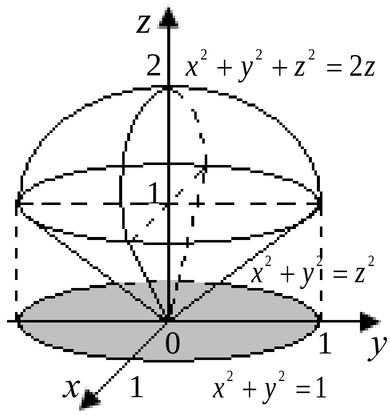


Рис. 34.

Приклад 4. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=2z,\ \ y+z=4.$

Розв'язування.

Дане тіло обмежене знизу параболоїдом обертання $2z=x^2+y^2$, зверху площиною $y+z=4$ і проектується в круг $x^2+(y+1)^2\le 9$ площини Оxy (рис. 35).

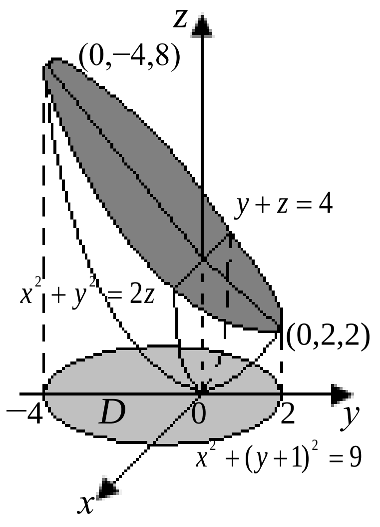


Рис. 35.

Тоді

$$V=\iiint_G dxdydz=\iint_D dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{4-y}dz=\iint_D\left(4-y-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\left(8-2y-x^2-y^2\right)dxdy=\frac{1}{2}\iint_D\left(9-x^2-(y+1)^2\right)dxdy$$

Щоб спростити обчислення подвійного інтеграла введемо узагальнені полярні координати $x=\rho\cos\varphi,\ \ y=-1+\rho\sin\varphi,\ \ z=z.$ Тоді $\rho=3$ рівняння кола $x^2+(y+1)^2=9$. Якобіан перетворення $J(\rho,\varphi)=\rho.$

Отже, в області D справедливі нерівності: $0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le\rho\le 3.$

$$V=\frac{1}{2}\iint_D\left(9-x^2-(y+1)^2\right)dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^3(9-\rho^2)\rho\,d\rho=$$

$$=\pi\int_0^2(9\rho-\rho^3)d\rho=\pi\left(\frac{9\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^3=\frac{81}{4}\pi.$$

Механіка.

1. Маса матеріального неоднорідного тіла G з густиною $\gamma=\gamma(x,y,z)$:

$$m=\iiint_G\gamma(x,y,z)dxdydz\,. \qquad (12)$$

2. Статичні моменти неоднорідного тіла G з густиною $\gamma=\gamma(x,y,z)$ відносно координатних площин Оxy, Оxz, Оyz:

$$M_{xy}=\iiint_G z\gamma(x,y,z)dxdydz,\qquad M_{xz}=\iiint_G y\gamma(x,y,z)dxdydz,$$

$$M_{yz}=\iiint_G x\gamma(x,y,z)dxdydz. \qquad (13)$$

3. Координати центра маси (x_c, y_c, z_c) неоднорідного тіла G з густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}. \tag{14}$$

Якщо тіло однорідне ($\gamma(x, y, z) = 1$), а V − його об'єм, то

$$x_c = \frac{1}{V}\iiint_G xdxdydz, \quad y_c = \frac{1}{V}\iiint_G ydxdydz, \quad z_c = \frac{1}{V}\iiint_G zdxdydz. \tag{15}$$

4. Моменти інерції неоднорідного тіла G з густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$ відносно початку координат та відносно координатних осей Оx, Оy, Оz,:

$$I_0 = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz, \tag{16}$$

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz, \qquad I_y = \iiint_G (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)dxdydz. \tag{17}$$

5. Моменти інерції неоднорідного тіла G з густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$ відносно координатних площин Оxy, Оxz, Оyz:

$$I_{xy} = \iiint_G z^2\gamma(x, y, z)dxdydz, \qquad I_{xz} = \iiint_G y^2\gamma(x, y, z)dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint_G x^2\gamma(x, y, z)dxdydz. \tag{18}$$

<u>**Приклад 5.**</u> Знайти масу тіла, обмеженого циліндричною поверхнею $2y = x^2$ та площинами $y + z = 1$, $2y + z = 2$, якщо в кожній точці його густина дорівнює ординаті цієї точки.

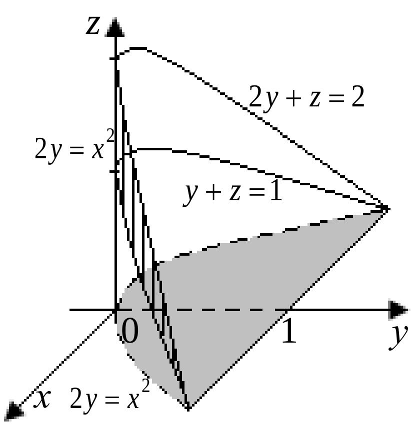


Рис. 36.

Розв'язування.

За умовою густина в кожній точці тіла $\gamma(x, y, z) = y$.

Дане тіло обмежене знизу площиною $y + z = 1$, зверху площиною $2y + z = 2$ та проектується в область обмежену параболою $2y = x^2$ та прямою $y = 1$ (рис. 36). Отже, за формулою (12)

$$m=\iiint\limits_G y\,dxdydz=\int\limits_0^1 y\,dy\int\limits_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}}dx\int\limits_{1-y}^{2(1-y)}dz=\int\limits_0^1 y(1-y)dy\int\limits_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}}dx=$$

$$=2\sqrt{2}\int\limits_0^1 y(1-y)\sqrt{y}dy=2\sqrt{2}\left(\frac{2\sqrt{y^5}}{5}-\frac{2\sqrt{y^7}}{7}\right)\Bigg|_0^1=\frac{8\sqrt{2}}{35}.$$

<u>Приклад 6.</u> Знайти масу тіла, обмеженого поверхнею конуса $(z-2)^2=x^2+y^2$ та площиною $z=0$, якщо густина тіла $\gamma(x,y,z)=z.$

Розв'язування.

Тіло проектується в область обмежену колом $x^2+y^2=4$ (рис. 37). Перейдемо до циліндричних координат. Тоді

$$0\le\rho\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ \ 0\le z\le 2-\rho.$$

Отже, за формулою (12)

$$m=\iiint\limits_G z\,dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho\,d\rho\int\limits_0^{2-\rho}z\,dz=2\pi\int\limits_0^2\rho\frac{(2-\rho)^2}{2}d\rho=$$

$$=\pi\int\limits_0^2(4\rho-4\rho^2+\rho^3)d\rho=\pi\left(2\rho^2-\frac{4}{3}\rho^3+\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}\pi.$$

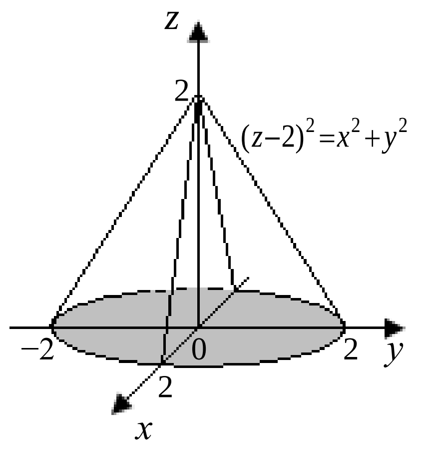


Рис. 37.

<u>Приклад 7.</u> Знайти центр маси однорідної півкулі, обмеженої поверхнею $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ та площиною $z=0.$

Розв'язування.

Оскільки півкуля симетрична відносно осі Oz, то координати $x_c=0,\ y_c=0.$ Координату z_c знаходимо за формулою (15), перейшовши у потрійному інтегралі до сферичних координат. Об'єм півкулі $V=\frac{2}{3}\pi R^3.$ Тому

$$z_c=\frac{3}{2\pi R^3}\iiint\limits_G z\,dxdydz=\frac{3}{2\pi R^3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int\limits_0^R\rho^3d\rho=\frac{3}{2\pi R^3}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{R^4}{4}=\frac{3}{8}R.$$

Центр маси півкулі знаходиться в точці $\left(0,0,\frac{3}{8}R\right).$

Приклад 8. Знайти центр маси однорідного тіла, обмеженого поверхнями $x = y^2 + z^2, \quad x = 4.$

Розв'язування.

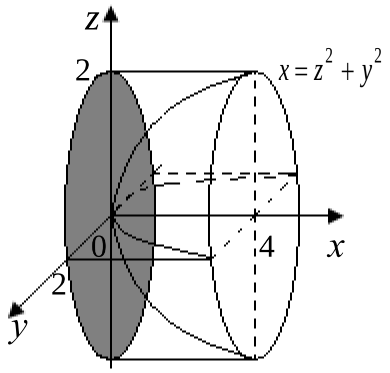


Рис. 38.

Оскільки тіло симетричне відносно осі Ox, то координати $z_c = 0, \; y_c = 0.$

Об'єм знаходимо за формулою (11). Для зручності перейдемо до циліндричних координат $x = x, \; y = \rho\cos\varphi,$ $z = \rho\sin\varphi$ (рис. 38). Тоді для області інтегрування $0 \le \rho \le 2, \; 0 \le \varphi \le 2\pi, \; \rho^2 \le x \le 4.$

Отже,

$$V = \iiint\limits_G dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_{\rho^2}^4 dx = 2\pi \int\limits_0^2 \rho(4-\rho^2)\, d\rho == \pi\left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 8\pi.$$

Координату x_c знаходимо за формулою (15)

$$x_c = \frac{1}{8\pi}\iiint\limits_G xdxdydz = \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_{\rho^2}^4 xdx = \frac{1}{8}\int\limits_0^2 \rho(16-\rho^4)\, d\rho = \frac{16}{5}.$$

Центр маси тіла знаходиться в точці $\left(\frac{16}{5}, 0{,}0\right).$

Приклад 9. Знайти моменти інерції відносно координатних площин однорідного тіла, обмеженого поверхнями $x^2 = 2pz, \quad y^2 = 2px, \quad x = \dfrac{p}{2}, \quad z = 0 \quad (p > 0).$

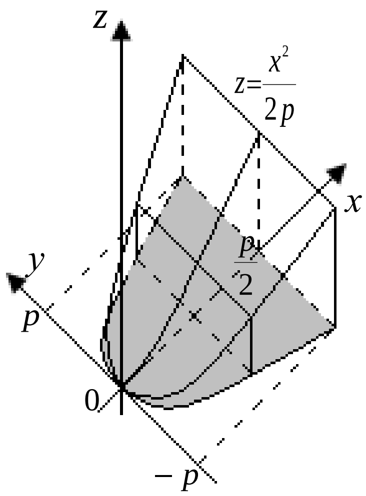


Рис. 39.

Розв'язування.

Тіло можна описати нерівностями

$$0 \le z \le \frac{x^2}{2p}, \quad -p \le y \le p, \quad \frac{y^2}{2p} \le x \le \frac{p}{2} \text{ (рис. 39).}$$

Знайдемо момент інерції відносно площини Ozx за формулою (18):

$$I_{xz}=\iiint\limits_G y^2dxdydz=\int\limits_{-p}^{p}dy\int\limits_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}dx\int\limits_0^{\frac{x^2}{2p}}y^2dz=\int\limits_{-p}^{p}dy\int\limits_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}\frac{x^2y^2}{2p}dx=$$

$$=\int\limits_{-p}^{p}\left(\frac{p^2y^2}{48}-\frac{y^8}{48p^4}\right)dy=\frac{p^5}{108}.$$

Аналогічно знаходимо

$$I_{yz}=\iiint\limits_G x^2dxdydz=\frac{p^5}{176},\qquad I_{yx}=\iiint\limits_G z^2dxdydz=\frac{p^5}{11520}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Розставити межі в потрійному інтегралі $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz,$ якщо область G обмежена поверхнями:

а) $x=1,\ y=x,\ z=0,\ z=y^2;$

б) $y=x,\ y=2x,\ z=0,\ z+x=2;$

в) $x^2=9(y^2+z^2),\ x=0,\ x=9;$

г) $z=x^2-y^2,\ z=0,\ x=3.$

2. Обчислити потрійні інтеграли:

а) $\iiint\limits_G (x+y+z)dxdydz,$ якщо G обмежена поверхнями $x+y+z=1,\ x=y=z=0;$

б) $\iint\limits_D x^3y^3zdxdy,$ якщо G визначається нерівностями $0\le x\le 1,\ 0\le y\le x,\ 0\le z\le xy.$

3. Обчислити потрійні інтеграли, використовуючи відповідну заміну:

а) $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz,$ якщо G обмежена поверхнями $z=x^2+y^2,\ z=1;$

б) $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz,$ якщо G обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=4;$

в) $\iiint\limits_G \left(\frac{8z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdydz,$ якщо G обмежена еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$

(вказівка: перейти до узагальнених сферичних координат

$x=a\rho\cos\varphi\sin\theta,\ y=b\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=c\rho\cos\theta$);

г) $\iiint\limits_G dxdydz,$ якщо G розташована в першому октанті, обмежена координатними площинами та поверхнею $\left(\frac{x}{5}+6y+\frac{z}{2}\right)^2=3z;$

(вказівка: перейти до узагальнених сферичних координат

$x=5\rho\cos^2\varphi\sin^2\theta,\ y=\frac{1}{6}\rho\sin^2\varphi\sin^2\theta,\ z=2\rho\cos^2\theta$).

4. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $y=x^2, \quad y+z=4, \quad z=0;$

б) $z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=x^2+y^2;$

в) $x^2+y^2+z^2=1, \quad x^2+y^2+z^2=16, \quad z^2=x^2+y^2;$

г) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=x;$

(вказівка: перейти до узагальнених сферичних координат

$x=a\rho\cos\varphi\sin\theta,\ y=b\rho\sin\varphi\sin\theta,\ z=c\rho\cos\theta$);

д) $\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{\sqrt{y}}{3}+\sqrt{\frac{z}{5}}=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0;$

(вказівка: перейти до узагальнених сферичних координат

$x=2\rho^2\cos^4\varphi\sin^4\theta,\ y=9\rho^2\sin^4\varphi\sin^4\theta,\ z=5\rho^2\cos^4\theta$).

5. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $2z=x^2+y^2, \quad x+y+z=1,$ якщо його густина $\gamma=1.$

6. Знайти масу тіла, обмеженого прямим круговим циліндром радіуса R і висотою H, якщо його густина в довільній точці дорівнює квадрату відстані від цієї точки до центра основи циліндра.

7. Знайти координати центра маси однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=4;$

б) $y=1,\ z=0,\ y=3,\ x+2z=3;$

в) $z=x^2+y^2,\ x+y+z=0.$

8. Знайти момент інерції відносно площини Oyz тіла, обмеженого поверхнями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+2y-z=2,$ якщо його густина $\gamma=x.$

9. Знайти момент інерції відносно осі Oz однорідної піраміди ($\gamma = 1$), обмеженої площинами $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + 2y + 3z = 6$;

10. Знайти момент інерції відносно осі однорідного кругового прямого конуса, який має вагу P, висоту H і радіус основи R.

11. Знайти момент інерції відносно початку координат однорідного тіла ($\gamma = 1$), обмеженого конусом $z^2 = x^2 - y^2$ і сферою $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

3. Криволінійні інтеграли першого та другого роду

3.1. Означення, властивості та обчислення криволінійних інтегралів першого роду

Нехай у площині Оxy задано гладку чи кусково-гладку криву AB, і на цій кривій визначено обмежену функцію $z = f(x, y)$. (Нагадаємо, що неперервна крива $x = x(t),\ y = y(t)$ називається гладкою на відрізку $t_0 \le t \le T$, якщо функції $x(t),\ y(t)$ мають на цьому відрізку неперервні похідні, які одночасно не дорівнюють нулю. Якщо неперервна крива складається із скінченого числа гладких кривих, її називають кусково-гладкою).

Розіб'ємо криву AB точками $A=A_0$, $A_1,\ldots, A_{n-1}$, $A_n=B$ на n довільних частин (рис. 40). Довжину i-ої частинки $A_{i-1}A_i$ позначимо Δl_i $(i = 1, 2,\ldots,n)$. Нехай $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$ − найбільша з довжин окремих дуг $A_{i-1}A_i$.

На кожній дузі $A_{i-1}A_i$ візьмемо довільну точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$, обчислимо значення функції $f(x, y)$ в цій точці, помножимо його на довжину i-ої частинки і утворимо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta l_i.$$

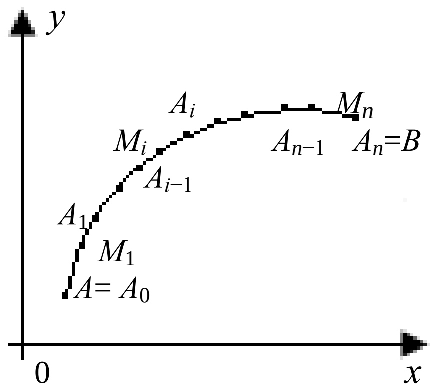


Рис.40.

Таку суму називають інтегральною сумою для функції $z = f(x, y)$ по кривій AB.

<u>Означення.</u> Якщо існує скінченна границя інтегральних сум при $\lambda \to 0$ така, що не залежить ні від способу розбиття кривої AB на частинки $A_{i-1}A_i$, ні від вибору точок M_i на них, то така границя називається *криволінійним інтегралом першого роду* (або інтегралом по довжині дуги) від функції $f(x, y)$ по кривій AB і позначається

$$\int\limits_{AB} f(x, y)d\ell$$

У цьому випадку функція $f(x, y)$ називається інтегровною на кривій AB, AB − кривою інтегрування, A − початковою, а B − кінцевою точками інтегрування.

Отже, за означенням $\int\limits_{AB} f(x,y)d\ell = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i$.

Справедливим є твердження, що довільна неперервна на гладкій або кусково-гладкій кривій функція інтегрована на цій кривій.

Криволінійний інтеграл першого роду має властивості визначеного інтеграла (лінійність, адитивність, теорема про середнє та інші). Наведемо ті властивості, що притаманні лише криволінійним інтегралам 1-го роду:

1. Якщо на кривій AB $f(x,y)=1$, то $\int\limits_{AB} f(x,y)d\ell = S_0$, де $S_0 -$ довжина дуги AB.

2. Криволінійний інтеграл 1-го роду не залежить від орієнтації дуги, або ж від напряму інтегрування

$$\int\limits_{AB} f(x,y)d\ell = \int\limits_{BA} f(x,y)d\ell.$$

Обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду зводиться до обчислення визначених інтегралів, залежно від способу задання кривої:

1. Якщо криву задано параметричними рівняннями $x=x(t),\ y=y(t)$, де $t_0 \le t \le T$, причому значення параметра t_0 відповідає точці A, а значення $T -$ точці B, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)d\ell = \int\limits_{t_0}^{T} f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt. \qquad (1)$$

2. Якщо криву задано рівняннями $y=y(x)$, де $a\le x\le b$, ($x=x(y)$, де $c\le y\le d$), то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)d\ell = \int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx. \qquad (2)$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)d\ell = \int\limits_{t_0}^{T} f(x(y),y)\sqrt{1+x'^2(y)}dy. \qquad (3)$$

3. Якщо криву задано полярним рівняннями $\rho=\rho(\varphi)$, де $\alpha\le\varphi\le\beta$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)d\ell = \int\limits_{a}^{b} f(\rho(\varphi)\cos\varphi,\rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi. \qquad (4)$$

Аналогічно вводиться поняття криволінійного інтеграла 1-го роду для неперервної функції трьох змінних $f(x,y,z)$ по просторовій кривій. Якщо криву задано параметричними рівняннями $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$, де $t_0\le t\le T$, і функції $x(t),\ y(t),\ z(t)$ неперервні разом з похідними на відрізку $[t_0,T]$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)d\ell = \int\limits_{t_0}^{T} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt. \qquad (5)$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB} xyd\ell,$ де AB − частина еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ що лежить у першому квадранті.

Розв'язування.

Рівняння заданої дуги еліпса краще записати у параметричній формі

$$x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Скористаємось формулою (1). Знайдемо $d\ell = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt.$

$$\int\limits_{AB} xyd\ell = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} ab\cos t\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt =$$

$$= \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}d(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t) =$$

$$= \frac{ab}{3(a^2-b^2)}\sqrt{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{3(a^2-b^2)}(a^3-b^3) = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB}(x-y)d\ell,$ де AB − відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0,0)$ та $B(4,3)$.

Розв'язування.

Рівняння прямої, що з'єднує задані точки $y=\frac{3}{4}x,$ причому $0 \le x \le 4$ (рис. 41). Тоді за формулою (2)

$$\int\limits_{AB}(x-y)d\ell = \int\limits_0^4\left(x-\frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}dx = \frac{5}{16}\int\limits_0^4 xdx = \frac{5}{2}.$$

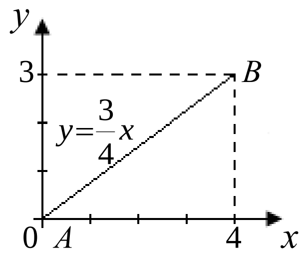


Рис. 41.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \frac{y^3}{x}d\ell,$ де L − дуга параболи $y^2 = 2x$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(4,\ 2\sqrt{2})$.

Розв'язування.

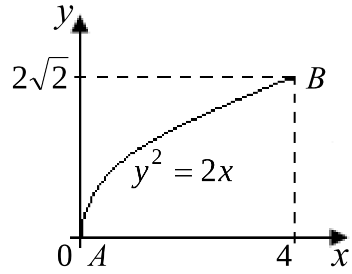


Рис. 42.

Тут зручно задати криву L у вигляді $x = \frac{y^2}{2}$, де $0 \le y \le 2\sqrt{2}$ (рис. 42). Тоді за формулою (3):

$$\int\limits_L \frac{y^3}{x}d\ell = 2\int\limits_0^{2\sqrt{2}} y\sqrt{1+y^2}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+y^2)^3}\Big|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{52}{3}.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}d\ell,$ де L − коло $x^2+y^2 = 2ax$ (рис. 43).

Розв'язування.

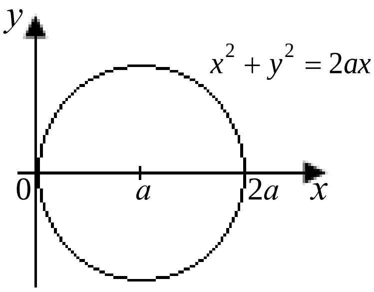


Рис. 43.

1-й спосіб. Скористаємось формулою (1). Для цього запишемо коло у параметричному вигляді. Оскільки центр кола зміщений ($(x-a)^2 + y^2 = a^2$), то

$$\begin{cases} x = a + a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Знайдемо диференціал дуги $d\ell = \sqrt{(a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}dt = adt.$ Тоді

$$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}d\ell = a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(a+a\cos t)^2 + (a\sin t)^2}dt = a^2\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos t)}dt = a^2\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt =$$

$$= 2a^2\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt = 4a^2\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a^2.$$

2-й спосіб. Скористаємось формулою (4). Запишемо рівняння кола у полярній системі координат: $\rho = 2a\cos\varphi.$ Полярний кут змінюється від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Тоді $x = 2a\cos^2\varphi,\quad y = 2a\cos\varphi\sin\varphi,$ а диференціал дуги

$$d\ell == \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi = \sqrt{(2a\cos\varphi)^2 + (2a\sin\varphi)^2}d\varphi = 2ad\varphi.$$

Отже,

$$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,d\ell = 2a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho\, d\varphi = 2a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = 2a^2 \sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4a^2.$$

<u>Приклад 5.</u> Обчислити $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,d\ell,$ де L – задана рівнянням $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} = a^2\left(x^2-y^2\right)$.

Розв'язування.

Перейдемо до полярних координат. Рівняння кривої набуде вигляду $\rho = a^2\cos 2\varphi,$ де $-\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$ та $\dfrac{3\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{5\pi}{4}$ (рис. 44).

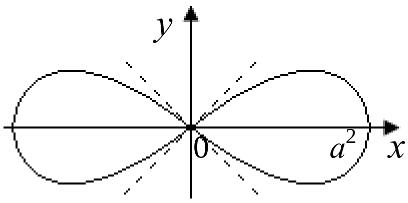


Рис. 44.

Знайдемо диференціал дуги

$$d\ell = \sqrt{(a^2\cos 2\varphi)^2 + (2a^2\sin 2\varphi)^2}\,d\varphi = a^2\sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}\,d\varphi.$$

Тоді, за формулою (4)

$$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,d\ell = 2a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}\,d\varphi = \frac{a^4}{\sqrt{3}}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}\,d(\sqrt{3}\sin 2\varphi) =$$

$$= 4a^4 + \frac{a^2}{\sqrt{3}}\ln(\sqrt{3}+2).$$

<u>Приклад 6.</u> Обчислити інтеграл $\int\limits_L (x+y)\,d\ell,$ де L – менша частина кола $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2, \\ y = x, \end{cases}$ обмежена точками $A(0,0,R)$ і $B\left(\dfrac{R}{2}, \dfrac{R}{2}, \dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)$ (рис. 45).

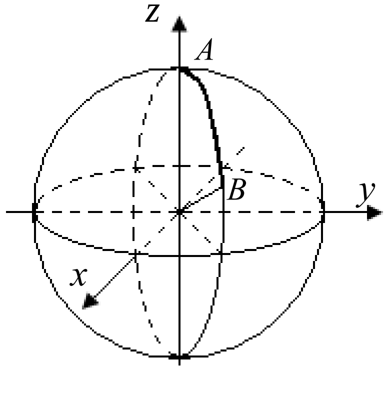


Рис. 45.

Розв'язування.

Оскільки крива просторова, то для обчислення скористаємось формулою (5). Для цього випишемо параметричні рівняння.

Нехай $x = t,$ тоді з рівняння кола маємо $y = t,$ $z = \sqrt{R^2 - 2t^2}.$ Точці A відповідає значення $t = 0,$ а точці B − $t = \dfrac{R}{2}.$ Знайдемо диференціал дуги

$$d\ell = \sqrt{1 + 1 + \frac{4t^2}{R^2 - 2t^2}}\,dt = \frac{2R}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}\,dt.$$

Тоді,

$$\int_L (x + y)d\ell = \int_0^{\frac{R}{2}} 2t\frac{2R}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}\,dt = \frac{R\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{R}{2}} \frac{d(R^2 - 2t^2)}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} = -R\sqrt{2}\sqrt{R^2 - 2t^2}\Big|_0^{\frac{R}{2}} = R^2(\sqrt{2} - 1).$$

3.2. Означення та обчислення криволінійних інтегралів другого роду

Нехай у площині Oxy задано гладку чи кусково-гладку криву AB, і на цій кривій визначено обмежену функцію $P(x, y)$. На відміну від інтегралів першого роду вважатимемо, що на кривій задано напрям від початкової точки A до кінцевої точки B.

Розіб'ємо криву AB точками $A{=}A_0$, $A_1, \ldots, A_{n-1}$, $A_n{=}B$ на n довільних частин (рис. 46). На кожній дузі $A_{i-1}A_i$ візьмемо довільну точку $M_i(\xi_i, \eta_i),$ $i = 1,2,\ldots,n$ обчислимо значення функції $P(x, y)$ в цій точці і складемо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i,$$

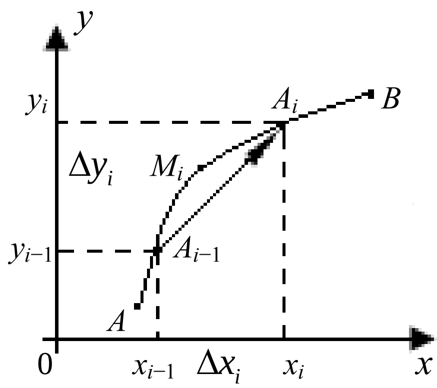


Рис.46.

де Δx_i − проекція вектора $\overline{A_{i-1}A_i}$ на вісь Ox. Нехай $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i.$

<u>Означення.</u> Якщо існує скінчена границя інтегральних сум при $\lambda \to 0$ така, що не залежить ні від способу розбиття кривої AB частинки $A_{i-1}A_i$, ні від вибору точок M_i на них, то така границя називається *криволінійним інтегралом по координаті x* від функції $P(x, y)$ по кривій AB і позначається

$$\int_{AB} P(x,y)dx$$

Отже, за означенням

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i.$$

Аналогічно вводиться поняття *криволінійного інтеграла по координаті y* від функції $Q(x,y)$ по кривій AB :

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i,$$

де Δy_i − проекція вектора $\overline{A_{i-1}A_i}$ на вісь Оy.

Суму $\int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy$ називають криволінійним інтегралом по координатах або *криволінійним інтегралом другого роду* від функцій $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ по кривій AB і позначають

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

На відміну від криволінійного інтеграла першого роду криволінійний інтеграл другого роду залежить від напряму шляху інтегрування і при зміні цього напряму змінює знак:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Це пов'язано з тим, що при зміні напряму руху по кривій, змінюються знаки проекцій Δx_i та Δy_i у відповідних інтегральних сумах. З основних властивостей інтеграла слід виділити ще одну: якщо відрізок інтегрування AB перпендикулярний до осі Оx, то для довільної функції $P(x,y)$ інтеграл по абсцисі дорівнює нулю $\int_{AB} P(x,y)dx = 0,$ оскільки всі проекції Δx_i в інтегральній сумі дорівнюють нулю. Аналогічно, якщо відрізок AB перпендикулярний до осі Оy, то для довільної функції $Q(x,y)$ інтеграл по ординаті дорівнює нулю $\int_{AB} Q(x,y)dy = 0.$

Криву без точок самоперетину, у якої початкова та кінцева точки збігаються, називають замкненим контуром. Задання початкової А та кінцевої В точок тут не задає напряму. Контур вважається додатно орієнтованим, якщо при його обході область, обмежена цим контуром, залишається зліва. Криволінійний інтеграл по додатно орієнтовному контуру записується таким чином:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Якщо функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні на гладкій чи кусково-гладкій кривій AB, то криволінійний інтеграл другого роду існує, і його обчислення можна звести до обчислення визначеного інтеграла, залежно від способу задання кривої:

1. Якщо криву задано параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t)$, де $t_0 \le t \le T$, а функції $x(t), y(t)$ на відрізку $[t_0, T]$ неперервні разом зі своїми похідними, причому значення параметра t_0 відповідає точці A, а значення T − точці B, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_0}^{T} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt. \qquad (6)$$

2. Якщо криву задано рівняннями $y = y(x), a \le x \le b,$ де функція $y(x)$ та її похідна $y'(x)$ неперервні на проміжку $[a,b]$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{a}^{b} [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]dx. \qquad (7)$$

3. Якщо криву задано рівняннями $x = x(y),\ c \le y \le d,$ де функція $x(y)$ та її похідна $x'(y)$ неперервні на проміжку $[c,d]$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{c}^{d} [P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y)]dy. \qquad (8)$$

Поняття криволінійного інтеграла другого роду можна поширити і на просторові криві. Нехай функції $P(x,y,z),\ Q(x,y,z)$ та $R(x,y,z)$ визначені та неперервні на просторовій кривій AB, яку задано параметричними рівняннями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t_0 \le t \le T,$ де функції $x(t),\ y(t),\ z(t)$ неперервні разом зі своїми похідними за t на відрізку $[t_0, T]$. Тоді

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{t_0}^{T} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt. \qquad (9)$$

Приклад 1. Обчислити $\int\limits_L (\sqrt[3]{x}+y)dx-(\sqrt[3]{y}+x)dy,$ де L − верхня дуга астроїди $x=8\cos^3 t,\ \ y=8\sin^3 t$ від точки (8,0) до (−8,0) (рис. 47).

Розв'язування.

Криву задано у параметричному вигляді, тому скористаємось формулою (6).

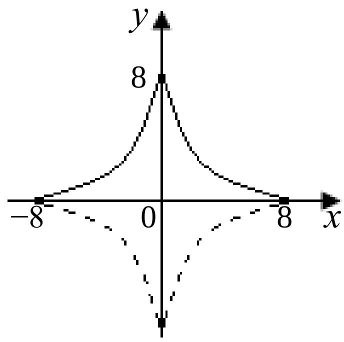


Рис. 47.

Точці (8,0) відповідає значення параметра $t=0,$ а точці (−8,0) − значення $t=\pi,$ отже, $0\le t\le\pi.$

Знайдемо диференціали dx та dy:

$$dx=-24\cos^2 t\sin t dt,$$
$$dy=24\sin^2 t\cos t dt.$$

Тоді,

$$\int\limits_L (\sqrt[3]{x}+y)dx-(\sqrt[3]{y}+x)dy=\int\limits_0^{\pi}[(2\cos t+8\sin^3 t)(-24\cos^2 t\sin t)-$$
$$-(2\sin t+8\cos^3 t)24\sin^2 t\cos t)]dt=\int\limits_0^{\pi}(-48\cos t\sin t-192\sin^2 t\cos^2 t)dt=$$
$$=\int\limits_0^{\pi}(-24\sin 2t-48\sin^2 2t)dt=-24\pi.$$

Приклад 2. Обчислити $\oint\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy,$ де L − коло $(x-1)^2+(y-1)^2=4.$

Розв'язування.

Запишемо параметричні рівняння даного кола

$x=1+2\cos t,\ \ y=1+2\sin t,\ \ 0\le t\le 2\pi$ (рис. 48).

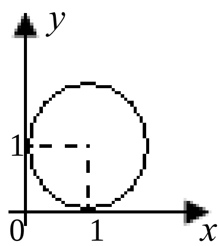


Рис. 48.

Знайдемо диференціали dx та dy:

$$dx=-2\sin t dt,$$
$$dy=2\cos t dt.$$

Тоді, за формулою (6)

$$\oint\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy=\int\limits_0^{2\pi}[(2+2\cos t+2\sin t)(-2\sin t)+(2\cos t+2\sin t)2\cos t)]dt=$$
$$=\int\limits_0^{2\pi}(-4\sin t-8\cos t\sin t+4\cos 2t)dt=0.$$

Приклад 3. Обчислити $\oint\limits_L xydx + dy,$ де L − замкнений контур, утворений лініями $y = x^2, \quad y = 1, \quad x = 0.$

Розв'язування.

Зробимо рисунок. Контур складається з трьох частин (рис. 49), тому застосуємо адитивність криволінійного інтеграла:

$$\oint\limits_L xydx + dy = \int\limits_{OA} xydx + dy + \int\limits_{AB} xydx + dy + \int\limits_{BO} xydx + dy.$$

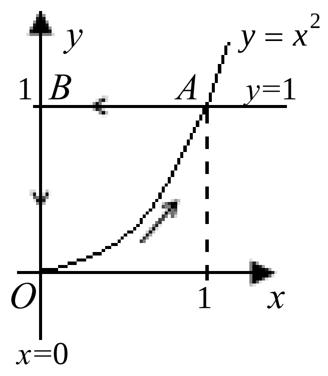


Рис. 49.

З рівняння $y = x^2$ лінії OA дістанемо $dy = 2xdx,$ тому

$$\int\limits_{OA} xydx + dy = \int\limits_0^1 (x^3 + 2x)dx = \frac{5}{4};$$

з рівняння $y = 1$ лінії AB дістанемо $dy = 0,$ тому

$$\int\limits_{AB} xydx + dy = \int\limits_1^0 xdx = -\frac{1}{2};$$

з рівняння $x = 0$ лінії BO дістанемо $dx = 0,$ тому

$$\int\limits_{BO} xydx + dy = \int\limits_1^0 dy = -1.$$

Остаточно маємо

$$\oint\limits_L xydx + dy = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

Приклад 4. Обчислити $\oint\limits_L ydx - x^2dy + (x + y)dz,$ де L − лінія перетину циліндра $x^2 + y^2 = 4$ з площиною $x + y - z = 0.$

Розв'язування.

Знайдемо параметричне рівняння кривої. Оскільки проекція на площину Оxy є коло $x^2 + y^2 = 4, \;\; z = 0,$ то можна покласти $x = 2\cos t, \;\; y = 2\sin t.$ Тоді з рівняння площини знаходимо, що $z = 2(\cos t + \sin t).$ Отже,

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 2(\cos t + \sin t), \; 0 \le t \le 2\pi, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = -2\sin t dt, \\ dy = 2\cos t dt, \\ dz = 2(\cos t - \sin t)dt. \end{cases}$$

Використовуючи формулу (9), матимемо:

$$\oint_L ydx - x^2dy + (x+y)dz = \int_0^{2\pi} (-4\sin^2 t - 8\cos^3 t + 4(\cos^2 t - \sin^2 t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2 + 2\cos 2t - 8\cos t + 4\cos 2t + 8\sin^2 t\cos t)dt = -4\pi,$$

Зауваження.

Якщо α та β − кути, які утворює з осями координат напрямна дотична до кривої у точці $M(x,y)$ (рис. 50), то з геометричного змісту диференціала дуги маємо:

$$dx = \cos\alpha d\ell, \quad dy = \cos\beta d\ell.$$

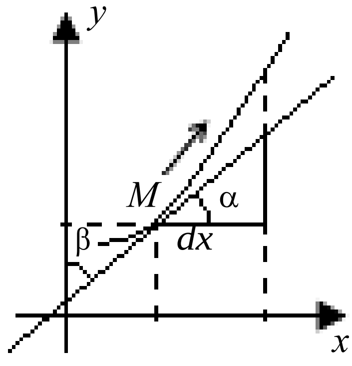


Рис. 50.

Замінюючи у криволінійному інтегралі dx та dy цими виразами, отримаємо формулу, яка пов'язує криволінійні інтеграли першого та другого роду:

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)d\ell.$$

3.3. Формула Гріна

Область називається *однозв'язною*, якщо для довільного замкненого контура, що лежить в цій області, обмежена ним частина площини цілком належить цій області.

Нехай замкнена однозв'язна область D, що лежить в площині Oxy, обмежена кусково-гладкою кривою L. Якщо функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в цій області, то справджується формула Гріна, яка пов'язує криволінійний інтеграл другого роду з подвійним інтегралом:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \tag{10}$$

(тут інтегрування за контуром L виконується у додатному напрямі).

Приклад 1. Обчислити $\oint\limits_L (x-2y)dx+(x+y)dy,$ де L − коло $x^2+y^2=R^2.$

Розв’язування.

Оскільки крива інтегрування замкнена, а функції $P=x-2y,\ Q=x+y$ та їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}=-2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1$ неперервні в крузі D $x^2+y^2\le R^2,$ то можна використати формулу Гріна:

$$\oint\limits_L (x-2y)dx+(x+y)dy=\iint\limits_D (1-(-2))dxdy=3\iint\limits_D dxdy=3\pi R^2.$$

Приклад 2. Обчислити $I=\int\limits_{AO}(e^x\sin y-y)dx+(e^x\cos y-1)dy,$ де AO − верхнє півколо $x^2+y^2=2ax,$ що обходиться від точки $A(2a,0)$ до точки $O(0,0)$ (рис. 51).

Розв’язування.

Оскільки крива не замкнена, то доповнимо її відрізком OA осі Оx до замкненого контура L. Тоді

$$I=\oint\limits_L Pdx+Qdy-\int\limits_{OA}Pdx+Qdy.$$

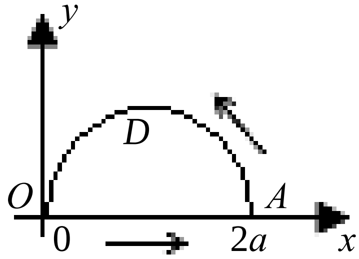


Рис. 51.

Перший інтеграл обчислимо за формулою Гріна, а другий безпосередньо. На відрізку ОА $y=0,\ dy=0,$ тому

$$\int\limits_{OA}Pdx+Qdy=0.$$

Знайдемо $\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y,\ \frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=1.$

Отже,

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy=\iint\limits_D dxdy=\frac{\pi a^2}{2}$$ (площа півкруга радіуса a).

Остаточно

$$I=\frac{\pi a^2}{2}.$$

3.4. Незалежність криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування

Значення криволінійних інтегралів другого роду може залежати від того, якою саме кривою сполучено крайні точки шляху інтегрування, а може не залежати. Розглянемо приклад, що ілюструє цю властивість.

Приклад 1. Обчислити $I_1 = \int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy$ та $I_2 = \int\limits_{AB} ydx + 2dy$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$ по лінії а) $y = x$, б) $y = x^2$, в) $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 52).

Розв'язування.

а) $y = x,\ dy = dx,$

$$I_1 = \int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x^2)dx = 1;$$

$$I_2 = \int\limits_{AB} ydx + 2dy = \int\limits_0^1 (x + 2)dx = \frac{5}{2};$$

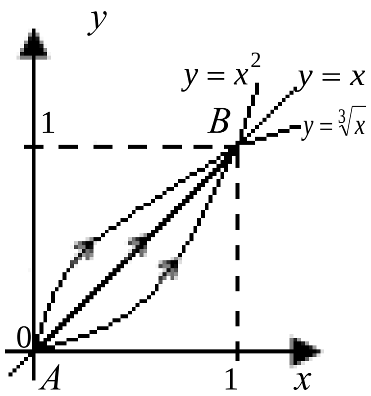


Рис. 52.

б) $y = x^2,\ dy = 2xdx,$

$$I_1 = \int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy = \int\limits_0^1 (x^4 + 2x \cdot x^2 \cdot 2x)dx = 1;$$

$$I_2 = \int\limits_{AB} ydx + 2dy = \int\limits_0^1 (x^2 + 2 \cdot 2x)dx = \frac{7}{3};$$

в) $y = \sqrt[3]{x},\ dy = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx,$

$$I_1 = \int\limits_{AB} y^2dx + 2xydy = \int\limits_0^1 (\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2})dx = 1;$$

$$I_2 = \int\limits_{AB} ydx + 2dy = \int\limits_0^1 (\sqrt[3]{x} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}})dx = \frac{11}{4}.$$

Якщо значення криволінійного інтеграла залишається однаковим по всіх можливих кривих, які сполучають кінцеві точки кривої інтегрування, то кажуть, що криволінійний інтеграл *не залежить від форми шляху інтегрування*.

Якщо в замкненій однозв’язній області D функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то еквівалентними є такі умови:

1) для довільної замкненої кусково-гладкої кривої K, що належить області D,

$$\oint_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0;$$

2) для довільних двох точок A та B області D значення інтеграла $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не залежить від форми шляху інтегрування, який лежить в області D;

3) існує така функція $u(x, y)$, визначена в області D, що вираз $Pdx + Qdy$ є її повним диференціалом: $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$;

4) в усіх точках області D виконується рівність: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

<u>*Зауваження 1.*</u> Хоча всі чотири умови еквівалентні, тобто виконання якої-небудь однієї з них тягне за собою виконання останніх трьох, проте для застосувань найбільш зручною необхідною і достатньою умовою, за якої криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування, є умова 4). Часто інтеграл, який не залежить від шляху інтегрування позначають

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

<u>*Зауваження 2.*</u> Функцію $u(x, y)$ з умови 3) можна знайти за формулою

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C, \tag{11}$$

де інтеграл береться по довільній кривій L, що лежить в області D і з’єднує деяку фіксовану точку (x_0, y_0) з “біжучою” точкою (x, y), C − довільна стала. В якості кривої інтегрування зручно вибирати ламану, яка складається з двох відрізків, паралельних до координатних осей, бо на кожному з них одна частина інтеграла дорівнює нулю (рис. 53).

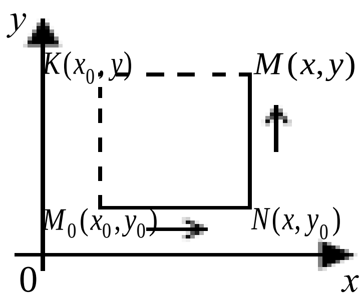


Рис. 53.

Наприклад, якщо інтегрувати по ламаній M_0NM, то

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C. \qquad (12)$$

Якщо ж інтегрувати по ламаній M_0KM, то

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C.$$

<u>*Зауваження 3.*</u> Умови

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x} \qquad (13)$$

є необхідними і достатніми для того, щоб:

а) інтеграл $\int\limits_{AB}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ по просторовій кривій *AB* не залежав від форми шляху інтегрування між точками *A* та *B*;

б) підінтегральний вираз $Pdx+Qdy+Rdz$ був повним диференціалом деякої функції трьох змінних $u(x,y,z)$, яку можна знайти за формулою:

$$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz+C. \qquad (14)$$

<u>**Приклад 2.**</u> Обчислити $\int\limits_{AB}(x^2-y^2)dx-2xydy$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

Розв’язування.

Тут $P(x,y)=x^2-y^2,\quad Q(x,y)=-2xy,\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-2y.$

Умова 4) виконується в усіх точках площини Оxy, тому інтеграл не залежить від форми кривої, що з’єднує точки $A(0,0)$ та $B(1,1)$ (рис. 54). Обчислимо його двома способами:

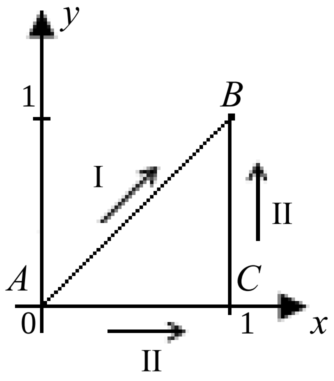


Рис. 54.

І спосіб.

На прямій $y=x$ маємо $dy=dx,\ 0\le x\le 1$. Тому

$$\int\limits_{AB}(x^2-y^2)dx-2xydy=\int_0^1(x^2-x^2-2x^2)dx=-\frac{2}{3}.$$

II спосіб.

Обчислимо інтеграл по ламаній ACB. На відрізку AC маємо $y=0,\ dy=0,\ 0\le x\le 1$; на відрізку CB: $x=1,\ dx=0,\ 0\le y\le 1.$

$$\int\limits_{AB}(x^2-y^2)dx-2xydy=\int\limits_{AC}(x^2-y^2)dx-2xydy+\int\limits_{CB}(x^2-y^2)dx-2xydy=$$

$$=\int\limits_0^1 x^2dx+\int\limits_0^1 -2ydy=-\frac{2}{3}.$$

<u>Приклад 3.</u> Обчислити $\oint\limits_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, де L − коло $x^2+y^2=1.$

Розв'язування.

Тут $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ визначені і неперервні при $x^2+y^2\ne 0$. Отже, умова 4) виконується в усіх точках $x^2+y^2\le 1$, за винятком точки (0,0). Круг з виколотим центром не буде однозв'язною областю, тому з умови 4) не випливає умова 2), тобто, інтеграл по замкненому контуру не дорівнює нулю. Обчислимо інтеграл безпосередньо:

$$\oint\limits_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t+\sin^2 t}dt=\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

<u>Приклад 4.</u> Впевнитись, що вираз $(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ та знайти цю функцію.

Розв'язування.

Розглянемо $P(x,y)=(2x-3y^2+1)$, $Q(x,y)=(2-6xy)$. Тоді $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-6y$.

Оскільки і функції, і частинні похідні визначені і неперервні, то вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$. Отже, за формулою (12) при $(x_0,y_0)=(0,0)$:

$$u(x,y)=\int\limits_0^x(2x+1)dx+\int\limits_0^y(2-6xy)dy+C=x^2+x+2y-3xy^2+C.$$

<u>Приклад 5.</u> Знайти функцію $u(x,y,z)$ за її повним диференціалом

$$du = (3x^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2y + z)dy + (y + 3z^2)dz.$$

Розв'язування.

Оскільки виконуються умови $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0,$ то даний вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x,y,z)$.

Тоді, за формулою (14) при $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$:

$$u(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (3x^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2y + z)dy + (y + 3z^2)dz + C =$$

$$= \int_0^x 3x^2 dx + \int_0^y (x^2 + 2y)dy + \int_0^z (y + 3z^2)dz = x^3 + x^2 y + y^2 + yz + z^3 + C.$$

3.5. Застосування криволінійних інтегралів в задачах геометрії та механіки

Геометрія.

1. Довжина дуги кривої *AB*:

$$L = \int_{AB} d\ell. \tag{15}$$

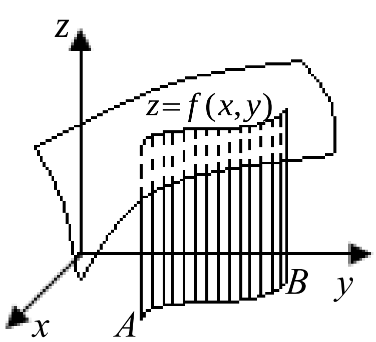


Рис. 55.

2. Площа циліндричної поверхні з твірними, паралельними до осі O*z*, яка знизу обмежена дугою *AB*, а зверху − лінією перетину циліндричної поверхні з поверхнею $z = f(x,y)$ (рис. 55):

$$P = \int_{AB} f(x,y)d\ell. \tag{16}$$

3. Площа плоскої області, обмеженої контуром L:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx. \tag{17}$$

Приклад 1. Знайти площу частини циліндричної поверхні $x^2+y^2=4$, що знаходиться між площиною Oxy та поверхнею $z=2+\dfrac{x^2}{2}$ (рис. 56).

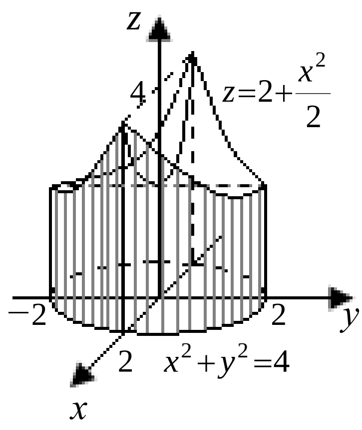


Рис. 56.

Розв’язування.

Скористаємось формулою (16):

$$P=\int_L\left(2+\frac{x^2}{2}\right)d\ell,$$

де L – коло в площині Oxy: $x^2+y^2=4,\ \ z=0$, параметричні рівняння якого $x=2\cos t,\ \ y=2\sin t,\ \ 0\le t\le 2\pi$.

Тоді $d\ell=2dt$ і

$$P=\int_L\left(2+\frac{x^2}{2}\right)d\ell=\int_0^{2\pi}(2+2\cos^2 t)2dt=\int_0^{2\pi}(6+2\cos 2t)dt=12\pi.$$

Приклад 2. Знайти площу фігури, обмеженої петлею $x^3+x^2-y^2=0$ (рис. 57).

Розв’язування.

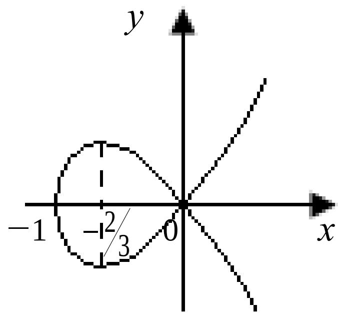


Рис. 57.

З рівняння кривої маємо $y=\pm x\sqrt{x+1}$, тобто крива симетрична відносно осі Ox і перетинає її у точках $x=0$ та $x=-1$. Обидві функції $y=\pm x\sqrt{x+1}$ визначені при $x\ge -1$, а при $x\to\infty$, $y\to\pm\infty$. Перейдемо до параметричних рівнянь кривої, поклавши $y=xt$. Тоді з рівняння кривої маємо $x^3+x^2=x^2t^2,\ \ x=t^2-1,\ \ y=t^3-t$, де для даної петлі $-1\le t\le 1$.

Отже, за формулою (17):

$$S=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[(t^2-1)(3t^2-1)-(t^3-t)2t]dt=\int_0^1(t^4-2t^2+1)dt=\frac{8}{15}.$$

Механіка.

1. Маса неоднорідної кривої L з лінійною густиною $\gamma(x, y)$:

$$m = \int_L \gamma(x, y) d\ell . \tag{18}$$

2. Статичні моменти неоднорідної кривої L відносно осей Оx та Оy:

$$M_x = \int_L y\gamma(x, y) d\ell, \quad M_y = \int_L x\gamma(x, y) d\ell. \tag{19}$$

3. Координати центра маси неоднорідної кривої L:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_L x\gamma(x, y) d\ell}{\int_L \gamma(x, y) d\ell}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_L y\gamma(x, y) d\ell}{\int_L \gamma(x, y) d\ell}. \tag{20}$$

4. Моменти інерції неоднорідної кривої L відносно координатних осей та початку координат:

$$I_x = \int_L y^2 \gamma(x, y) d\ell, \quad I_y = \int_L x^2 \gamma(x, y) d\ell, \quad I_0 = \int_L (x^2 + y^2) \gamma(x, y) d\ell. \tag{21}$$

Аналогічні до (18)−(21) формули можна записати і для просторової кривої, причому моменти інерції просторової кривої пов’язані співвідношеннями

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z, \quad I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz}. \tag{22}$$

5. Робота змінної сили $\overline{F}(x, y) = P(x, y) \cdot \bar{i} + Q(x, y) \cdot \bar{j}$ при переміщенні точки по криволінійному шляху AB:

$$A = \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \tag{23}$$

Якщо під дією сили $\overline{F} = P \cdot \bar{i} + Q \cdot \bar{j} + R \cdot \bar{k}$ точка переміщається по просторовій кривій АВ, то робота $A = \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$.

<u>**Приклад 3.**</u> Знайти масу і координати центра маси плоскої матеріальної дуги $y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$, $0 \le x \le 1$, лінійна густина якої $\gamma(x, y) = y\sqrt{x+1}$.

Розв’язування.

За формулою (18):

$$m=\int_0^1 \gamma(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx=\frac{2}{3}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\int_0^1\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}\right)dx=\frac{16}{35}.$$

За формулами (20):

$$x_c=\frac{35}{16}\int_0^1 x\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}\right)dx=\frac{10}{9},\quad y_c=\frac{35}{16}\int_0^1\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}\right)dx=\frac{35}{24}\int_0^1\left(x^3+x^4\right)dx=\frac{21}{32}.$$

Приклад 4. Знайти координати центра маси першого піввитка гвинтової лінії $x=a\cos t,\;\; y=a\sin t,\;\; z=bt,\;\; 0\le t\le\pi,$ якщо її густина γ стала.

Розв’язування.

Знайдемо масу кривої:

$$m=\int_0^\pi \gamma\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=\gamma\int_0^\pi\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\pi\gamma\sqrt{a^2+b^2}.$$

Для координат центра маси просторової однорідної кривої маємо формули:

$$x_c=\frac{\gamma}{m}\int_L x\,d\ell,\qquad y_c=\frac{\gamma}{m}\int_L y\,d\ell,\qquad z_c=\frac{\gamma}{m}\int_L z\,d\ell.$$

Отже,

$$x_c=\frac{\gamma}{m}\int_0^\pi a\cos t\sqrt{a^2+b^2}\,dt=0,\qquad y_c=\frac{\gamma}{m}\int_0^\pi a\sin t\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\frac{2a}{\pi},$$

$$z_c=\frac{\gamma}{m}\int_0^\pi bt\sqrt{a^2+b^2}\,dt=\frac{b\pi}{2}.$$

Приклад 5. Знайти моменти інерції відносно координатних осей однорідного ($\gamma=1$) відрізка прямої $4x+2y=3$, що лежить між точками $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ та $\left(2,-\frac{5}{2}\right)$.

Розв’язування.

Рівняння прямої $y=-2x+\frac{3}{2},\quad 0\le x\le 2.$ Знайдемо $d\ell=\sqrt{5}dx.$

Отже за формулами (21):

$$I_x = \int\limits_L y^2 d\ell = \sqrt{5}\int\limits_0^2 \left(-2x + \frac{3}{2}\right)^2 dx = -\frac{\sqrt{5}}{6}\left(-2x + \frac{3}{2}\right)^3\Bigg|_0^2 = \frac{49\sqrt{5}}{24},$$

$$I_y = \int\limits_L x^2 d\ell = \sqrt{5}\int\limits_0^2 x^2 dx = \frac{\sqrt{5}}{3}x^3\Bigg|_0^2 = \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

<u>Приклад 6.</u> Знайти момент інерції відносно діаметра однорідного ($\gamma = 1$) кола радіуса a.

Розв'язування.

Виберемо систему координат з початком у центрі кола. Тоді параметричні рівняння кола: $x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi.$ Оскільки коло однорідне, то момент відносно довільної з координатних осей можна вважати моментом відносно діаметра. Тому

$$I_x = I_y = \int\limits_L x^2 d\ell = \int\limits_0^{2\pi} a^2\cos^2 t \cdot a dt = \frac{a^3}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1 + \cos 2t)dt = \pi a^3.$$

<u>Приклад 7.</u> Знайти роботу сили $\overline{F} = xy \cdot \bar{i} + (x + y) \cdot \bar{j}$ при переміщенні точки по параболі $y = x^2$ із точки (0,0) у точку (1,1).

Розв'язування.

За формулою (23):

$$A = \int\limits_L xydx + (x + y)dy = \int\limits_0^1 [x^2 \cdot x + (x + x^2)\cdot 2x]dx = \int\limits_0^1 (3x^3 + 2x^2)dx = \frac{17}{12}.$$

<u>Приклад 8.</u> Знайти роботу сили $\overline{F} = yz \cdot \bar{i} + xz \cdot \bar{j} + xy \cdot \bar{k}$ вздовж відрізка прямої, що з'єднує точки (1,1,1) та (2,3,4).

Розв'язування.

Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-1}{4-1}$, або її параметричні рівняння $x = 1 + t,\quad y = 1 + 2t,\quad z = 1 + 3t,\quad 0 \le t \le 1.$ Тоді робота:

$$A=\int\limits_L yzdx+xzdy+xydz=\int\limits_0^1[(1+2t)(1+3t)+(1+t)(1+3t)\cdot 2+(1+t)(1+2t)\cdot 3]dt=$$

$$=\int\limits_0^1(18t^2+22t+6)dt=23.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити криволінійні інтеграли першого роду:

а) $\int\limits_L\left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)d\ell,$ де $L-$ астроїда $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}};$

б) $\int\limits_L\left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)d\ell,$ де L – перший виток конічної гвинтової лінії $x=t\cos t,\ \ y=t\sin t,\ \ z=t,\ 0\le t\le 2\pi;$

в) $\int\limits_L(x+y)d\ell,$ де L – правий листок лемніскати $\rho^2=a^2\cos^2 2\varphi;$

г) $\int\limits_{AB}\frac{1}{x+2y+5}d\ell,$ де AB – відрізок прямої, що з’єднує точки $A(0,-2)$ та $B(1,0)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли другого роду:

а) $\int\limits_{AB}(4x+y)dx+(x+4y)dy,$ де AB задана рівнянням $y=x^4$ від $A(1,1)$ та $B(-1,1)$;

б) $\int\limits_L(y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz,$ де L – крива $x=t,\ \ y=t^2,\ \ z=t^3,\ 0\le t\le 1,$ яка обходиться у напрямі зростання t;

в) $\oint\limits_L(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$ вздовж замкненого контура, який є границею частини сфери $x^2+y^2+z^2=1,$ розміщеної в першому октанті, причому напрям обходу такий, що рух у площині Оxy відбувається від точки $A(1,0,0)$ до $B(0,1,0)$;

г) $\int\limits_L(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy,$ де L – крива $y=1-|1-x|,\ 0\le x\le 2.$

3. Використовуючи формулу Гріна, обчислити інтеграли:

а) $\oint\limits_L y^2dx+(x+y)^2dy,$ де L – контур трикутника з вершинами (3,0), (3,3) та (0,3);

б) $\oint\limits_L e^{x^2+y^2}(\cos 2xydx+\sin 2xydy),$ де L − коло $x^2+y^2=R^2.$

4.Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)}(x+y)dx+(x-y)dy;$

б) $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{ydx-xdy}{x^2}$ (по кривій, що не перетинає вісь Оy).

5. Знайти функцію $u(x,y)$ за її повним диференціалом:

а) $du(x,y)=(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy;$

б) $du(x,y)=\left(\frac{y}{1+x^2y^2}-1\right)dx+\left(\frac{x}{1+x^2y^2}-10\right)dy;$

в) $du(x,y,z)=yz(2x+y+z)dx+xz(x+2y+z)dy+xy(x+y+2z)dz.$

6. Знайти довжину дуги конічної гвинтової лінії $x=ae^t\cos t,\ y=ae^t\sin t,\ z=ae^t$ від точки О(0,0,0) до точки $A(a,0,a)$.

7. Знайти площу частини циліндричної поверхні $x^2+y^2=R^2,$ що знаходиться між площиною Оxy і поверхнею $2Rz=xy.$

8. Знайти площу частини поверхні циліндра $x^2+y^2=Rx,$ що знаходиться всередині сфери $x^2+y^2+z^2=R^2.$

9. За допомогою криволінійного інтеграла другого роду знайти площу фігури, обмеженої:

а) астроїдою $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 \mathrm{t};$

б) гіперболою $yx=1,$ віссю Оx і прямими $x=1$ та $x=2;$

в) колом $x^2+y^2=4$ і параболою $x^2=2-y$ (область містить початок координат).

10. Знайти масу матеріальної кривої L з лінійною густиною $\gamma(x,y,z)$:

а) L: половина дуги еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,$ для якої $y<0,\ \ \gamma(x,y)=-y;$

б) L: дуга кривої $y=\ln x$ від точки $x_1=\sqrt{3}$ до точки $x_2=\sqrt{8},\ \ \gamma(x,y)=x^2;$

в) L: $x=\ln(1+t^2),\ y=2arctgt-t,\ 0\le t\le 1,\ \gamma(x,y)=ye^{-x}.$

11. Знайти координати центра маси

а) однорідної першої піварки циклоїди $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le \pi;$

б) однорідної меншої дуги кола $x^2 + y^2 = 4,$ що з'єднує точки $A(2,0)$ та $B(-1,\ \sqrt{3});$

в) контура однорідного сферичного трикутника $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x \ge 0,$ $y \ge 0,\ z \ge 0.$

г) однорідної кривої $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ \ 0 \le x \le a.$

12. Знайти статичні моменти M_x та M_y відносно координатних осей однорідної $(\gamma = 1)$ дуги астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ \ x \ge 0,\ y \ge 0.$

13. Знайти момент інерції відносно осі Oz першого витка однорідної $(\gamma = 1)$ лінії $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt.$

14. Знайти момент інерції відносно початку координат однорідного $(\gamma = 1)$ контура квадрата зі сторонами $x = \pm a,\ y = \pm a.$

15. Знайти статичний момент відносно осі Oy однорідної $(\gamma = 1)$ дуги першого витка лемніскати Бернуллі $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi.$

16. Знайти статичний момент відносно осі Ox однорідної $(\gamma = 1)$ дуги кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi).$

17. Знайти роботу сили $\overline{F} = (x - y)\cdot\overline{i} + 2y\cdot\overline{j}$ при переміщенні точки з початку координат у точку $(1,-3)$ по параболі $y = -3x^2.$

18. Знайти роботу сили $\overline{F} = \{z, -x, y\}$ вздовж витка гвинтової лінії $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ z = ct,\ 0 \le t \le 2\pi$ від точки $A(a,0,0)$ до точки $B(a,0,2\pi).$

Варіанти індивідуального завдання

1. Подати подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ у вигляді повторного з зовнішнім інтегруванням по x та по y, якщо область обмежена заданими лініями:

1.1. $D: y=\sqrt{4-x^2},\ y=\sqrt{3x},\ x\le 0.$

1.2. $D: x^2=2y,\ 5x-2y-6=0.$

1.3. $D: x=\sqrt{8-y^2},\ y=x,\ y\ge 0.$

1.4. $D: y\ge 0,\ x\ge 0,\ y\le 1,\ y=\ln x.$

1.5. $D: x^2=2-y,\ x+y=0.$

1.6. $D: y=\sqrt{2-x^2},\ y=x^2.$

1.7. $D: y=x^2-2,\ y=x.$

1.8. $D: y\ge 1,\ x\ge 0,\ y\le 3,\ y=x.$

1.9. $D: y^2=2x,\ x^2=2y,\ x\le 1.$

1.10. $D: y=\sqrt{9-x^2},\ y\ge x,\ x\ge 0.$

1.11. $D: y^2=2-x,\ x=y.$

1.12. $D: x=\sqrt{2-y^2},\ x=y^2,\ y\ge 0.$

1.13. $D: y\ge 0,\ x+2y-12=0,\ y=\lg x.$

1.14. $D: y\ge 1,\ x\le 0,\ y\le 3,\ y=-x.$

1.15. $D: y=-\sqrt{2-x^2},\ y\ge x,\ y=0.$

1.16 $D: y=\sqrt{8-x^2},\ x=\sqrt{y},\ y\ge 0.$

1.17. $D: y^2=3+x,\ y=-x.$

1.18. $D: y=\sqrt{4-x^2},\ y=\sqrt{3x},\ x\ge 0.$

1.19. $D: y=x^2,\ y\ge 0,\ x=-1,\ x=-2.$

1.20. $D: x=\sqrt{1-y^2},\ y=-x^2,\ y\le 0.$

1.21. $D: x = -\sqrt{4 - y^2},\ y = x,\ y \geq 0,\ y \leq 1.$

1.22. $D: y = 1,\ x \leq 0,\ y = 4,\ y = -x.$

1.23. $D: y = 3 - x^2,\ y = -x.$

1.24. $D: y = x^2 + 4,\ y \geq 0,\ x = 0,\ x = -2.$

1.25. $D: y = 0,\ x = 0,\ y = 1,\ (x-3)^2 + y^2 = 1.$

1.26. $D: x = \sqrt{9 - y^2},\ y = x,\ y \geq 0.$

1.27. $D: x + 2y - 6 = 0,\ y = x,\ y \geq 0.$

1.28. $D: y = 1,\ x \geq 0,\ y = -1,\ y = \log_{1/2} x.$

1.29. $D: y = -x,\ 3x + y = 3,\ y = 3.$

1.30. $D: x = \sqrt{4 - y^2},\ y = 1,\ y \geq 0,\ x \geq 0.$

2. Обчислити подвійні інтеграли:

2.1. $\iint\limits_{(D)} (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy,\ D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$

2.2. $\iint\limits_{(D)} (9x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy,\ D: x = 1, y = -x^2, y = \sqrt{x}.$

2.3. $\iint\limits_{(D)} y^2 \cos\frac{xy}{2} dxdy,\ D: x = 0, y = 2x, y = \sqrt{2\pi}.$

2.4. $\iint\limits_{(D)} (36x^2y^2 - 96x^3y^3)dxdy,\ D: x = 1, y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}.$

2.5 $\iint\limits_{(D)} y^2 e^{\frac{xy}{8}} dxdy,\ D: x = 0, y = 2x, y = 4.$

2.6. $\iint\limits_{(D)} e^y dxdy,\ D: x = 2, y = \ln x, y = 0.$

2.7. $\iint\limits_{(D)} y^2(1 + 2x)dxdy,\ D: x = 2 - y^2, x = 0.$

2.8. $\iint\limits_{(D)} y^2 \sin\frac{xy}{2} dxdy,\ D: x = 0, y = x, y = \sqrt{\pi}.$

2.9. $\iint\limits_{(D)} (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy,\ D: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x}.$

2.10. $\iint\limits_{(D)} 6ye^{\frac{xy}{3}}dxdy,\ D: x = 3, x = 6, y = \ln 2, y = \ln 3.$

2.11. $\iint\limits_{(D)} y^2 \cos xydxdy,\ D: x = 0, y = 2x, y = \sqrt{\pi}.$

2.12. $\iint\limits_{(D)} y^2e^{\frac{xy}{4}}dxdy,\ D: x = 0, y = x, y = 2.$

2.13. $\iint\limits_{(D)} (x^3 + 3y)dxdy,\ D: x + y = 1, y = x^2 - 1, x \geq 0.$

2.14. $\iint\limits_{(D)} (9x^2y^2 + 8xy)dxdy,\ D: x = 1, y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}.$

2.15. $\iint\limits_{(D)} (18x^2y^2 + 24xy)dxdy,\ D: x = 1, y = -x^3, y = -\sqrt[3]{x}.$

2.16. $\iint\limits_{(D)} 3y^2 \sin\frac{xy}{2}dxdy,\ D: x = 0, y = \frac{2}{3}x, y = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}.$

2.17. $\iint\limits_{(D)} y\cos xydxdy,\ D: x = 1, x = 2, y = \pi, y = \frac{\pi}{2}.$

2.18. $\iint\limits_{(D)} (3x^2y^2 + 4xy)dxdy,\ D: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}.$

2.19. $\iint\limits_{(D)} (6xy + 24x^3y^3)dxdy,\ D: x = 1, y = -x^2, y = \sqrt{x}.$

2.20. $\iint\limits_{(D)} (x^3 + y)dxdy,\ D: x + y = 1, x + y = 2, x \leq 1, x \geq 0.$

2.21. $\iint\limits_{(D)} x(5 + y)dxdy,\ D: x + y + 5 = 0, y = x + 5, x \leq 0.$

2.22. $\iint\limits_{(D)} xydxdy,\ D: y = \sqrt{x}, x + y = 2, y = 0.$

2.23. $\iint\limits_{(D)} \frac{y^2}{x^2}dxdy,\ D: y = x, xy = 1, y = 2.$

2.24. $\iint\limits_{(D)} (4xy + 176x^3y^3)dxdy,\ D: x = 1, y = -x^2, y = \sqrt[3]{x}.$

2.25. $\iint\limits_{(D)} (x^3 - 2y)dxdy,\ D: y = x^2 - 1, x \geq 0, y \leq 0.$

2.26. $\iint\limits_{(D)} (x+y)dxdy,\ D: y = x^2 - 1, y = -x^2 + 1.$

2.27. $\iint\limits_{(D)} y^2 e^{\frac{xy}{8}} dxdy,\ D: x = 0, y = 2, y = \frac{x}{2}.$

2.28. $\iint\limits_{(D)} y^2 \cos xy dxdy,\ D: x = 0, y = x, y = \sqrt{\pi}.$

2.29. $\iint\limits_{(D)} (x+y)dxdy,\ D: y = x^3, y = 8, y = 0, x = 3.$

2.30. $\iint\limits_{(D)} y(1-x)dxdy,\ D: y^3 = x, y = x.$

3. Знайти площу і масу пластини *D*, обмеженої заданими кривими при заданій густині μ.

3.1. $D: x = 1,\ y = 0,\ y^2 = 4x\ (y \geq 0);\ \mu = 7x^2 + y.$

3.2. $D: x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4,\ x = 0,\ y = 0\ (x \geq 0, y \geq 0);\ \mu = \frac{x+y}{x^2+y^2}.$

3.3. $D: x = 1,\ y = 0,\ y^2 = 4x\ (y \geq 0);\ \mu = \frac{7}{2}x^2 + 5y.$

3.4. $D: x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 16,\ x = 0,\ y = 0\ (x \geq 0, y \geq 0);\ \mu = \frac{2x+5y}{x^2+y^2}.$

3.5. $D: x = 2,\ y = 0,\ y^2 = 2x\ (y \geq 0);\ \mu = \frac{7}{8}x^2 + 2y.$

3.6. $D: x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 16,\ x = 0,\ y = 0\ (x \geq 0, y \geq 0);\ \mu = \frac{x+y}{x^2+y^2}.$

3.7. $D: x = 2,\ y = 0,\ y^2 = \frac{x}{2}\ (y \geq 0);\ \mu = \frac{7}{2}x^2 + 6y.$

3.8. $D: x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 25,\ x = 0,\ y = 0\ (x \geq 0, y \leq 0);\ \mu = \frac{2x-3y}{x^2+y^2}.$

3.9. $D: x = 1,\ y = 0,\ y^2 = 4x\ (y \geq 0);\ \mu = 3y^2 + x.$

3.10. $D: x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 9,\ x = 0,\ y = 0\ (x \geq 0, y \leq 0);\ \mu = \frac{x-y}{x^2+y^2}.$

3.11. $D: x = 1,\ y = 0,\ y^2 = x\ (y \geq 0);\ \mu = 3x + 6y^2.$

3.12. $D: x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=25,\ x=0,\ y=0\ (x\le 0, y\ge 0);\ \mu=\dfrac{2y-x}{x^2+y^2}.$

3.13. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=\dfrac{x}{2}\ (y\ge 0);\ \mu=2x+3y^2.$

3.14. $D: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0\ (x\le 0, y\ge 0);\ \mu=\dfrac{2y-3x}{x^2+y^2}.$

3.15. $D: x=\dfrac{1}{2},\ y=0,\ y^2=8x\ (y\ge 0);\ \mu=7x+3y^2.$

3.16. $D: x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0\ (x\le 0, y\ge 0);\ \mu=\dfrac{2y-5x}{x^2+y^2}.$

3.17. $D: x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\ge 0);\ \mu=7x^2+2y.$

3.18. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0, y\ge 0);\ \mu=\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}.$

3.19. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=2x\ (y\ge 0);\ \mu=\dfrac{7}{4}x^2+\dfrac{y}{2}.$

3.20. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0, y\ge 0);\ \mu=\dfrac{x+2y}{x^2+y^2}.$

3.21. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=2x\ (y\ge 0);\ \mu=\dfrac{7}{4}x^2+y.$

3.22. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0, y\le 0);\ \mu=\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}.$

3.23. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=\dfrac{x}{2}\ (y\ge 0);\ \mu=\dfrac{7}{2}x^2+8y.$

3.24. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=25,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0, y\le 0);\ \mu=\dfrac{x-4y}{x^2+y^2}.$

3.25. $D: x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\ge 0);\ \mu=6x+3y^2.$

3.26. $D: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0\ (x\ge 0, y\le 0);\ \mu=\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}.$

3.27. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=\dfrac{x}{2}\ (y\ge 0);\ \mu=4x+6y^2.$

3.28. $D: x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=0\ (x\le 0, y\ge 0);\ \mu=\dfrac{y-4x}{x^2+y^2}.$

3.29. $D: x=\frac{1}{2}, y=0, y^2=2x\,(y\geq 0); \mu=4x+9y^2.$

3.30. $D: x^2+y^2=4y; \mu=\sqrt{4-y}.$

4. За допомогою подвійного інтеграла обчислити в полярних координатах площу фігури, обмеженої заданими лініями:

4.1. $(x^2+y^2)^2=a^2(4x^2+y^2).$

4.2. $(x^2+y^2)^3=a^2x^2y^2.$

4.3. $(x^2+y^2)^3=a^2x^2(4x^2+3y^2).$

4.4. $(x^2+y^2)^2=a^2(3x^2+2y^2).$

4.5. $x^4-y^4=(x^2+y^2)^3.$

4.6. $\rho=a\sin^2 2\varphi.$

4.7. $\rho=2a\sin^2\varphi.$

4.8. $\rho=a(1-\cos\varphi).$

4.9. $(x^2+y^2)^2=a^2(2x^2+3y^2).$

4.10. $(x^2+y^2)^2=a^2(5x^2+3y^2).$

4.11. $(x^2+y^2)^2=a^2(7x^2+5y^2).$

4.12. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy.$

4.13. $(x^2+y^2)^3=4x^2y^2.$

4.14. $(x^2+y^2)^3=a^4y^2.$

4.15. $(x^2+y^2)^3=a^4x^2.$

4.16. $\rho=a\cos^2\varphi.$

4.17. $\rho^2=a^2(1+\sin^2\varphi).$

4.18. $(x^2+y^2)^3=a^4x^4.$

4.19. $(x^2+y^2)^2=4(3x^2+4y^2).$

4.20. $(x^2+y^2)^3=16x^2y^2.$

4.21. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^4+y^4)$.

4.22. $(x^2+y^2)^3=2ay^3$.

4.23. $(x^2+y^2)^3=4a^2xy(x^2-y^2)$.

4.24. $\rho=a\sin 2\varphi$.

4.25. $\rho=a\cos 5\varphi$.

4.26. $\rho=4(1+\cos\varphi)$.

4.27. $\rho=2a(1+\cos\varphi)$.

4.28. $\rho^2=a^2\cos 3\varphi$.

4.29. $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

4.30. $\rho=a\sin 3\varphi$.

5. Розставити межі інтегрування в потрійному інтегралі $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$, якщо область G обмежена вказаними поверхнями. Зробити рисунок.

5.1. $G: x=1,\ y=3x,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ z=2(x^2+y^2)$.

5.2. $G: x=1,\ y=4x,\ z=\sqrt{3y},\ z\ge 0$.

5.3. $G: x=3,\ y=x,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ z=3x^2+y^2$.

5.4. $G: x\ge 0,\ y=3x,\ y=3,\ x=3\sqrt{z},\ z\ge 0$.

5.5. $G: x=0,\ y=x,\ y=5,\ z\ge 0,\ z=2x^2+y^2$.

5.6. $G: x=2,\ y=4x,\ y=3\sqrt{x},\ z=4,\ z\ge 0$.

5.7. $G: x=5,\ y=\dfrac{x}{5},\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ z=x^2+5y^2$.

5.8. $G: x=2,\ y=4x,\ y=2\sqrt{z},\ z\ge 0$.

5.9. $G: x\ge 0,\ y=2x,\ y=1,\ z\ge 0,\ x+y+z=3$.

5.10. $G: y=2,\ y=2x,\ z=2\sqrt{x},\ z\ge 0$.

5.11. $G: x=3,\ y=\dfrac{x}{3},\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$.

5.12. $G: x=4,\ y=\dfrac{x}{4},\ z\geq 0,\ z=4y^2.$

5.13. $G: x\geq 0,\ y=3x,\ y=3,\ z\geq 0,\ z=2(x^2+y^2).$

5.14. $G: x=3,\ y=2x,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ z=4\sqrt{y}.$

5.15. $G: x\geq 0,\ y=4x,\ y=8,\ z\geq 0,\ z=3x^2+y^2.$

5.16. $G: x\geq 0,\ y=5x,\ y=10,\ z\geq 0,\ z=x^2+y^2.$

5.17. $G: y=-x,\ y=x,\ y=2,\ z\geq 0,\ z=3(x^2+y^2).$

5.18. $G: x=1,\ y=2x,\ y=3x,\ z\geq 0,\ z=2x^2+y^2.$

5.19. $G: y=x,\ y=-2x,\ y=1,\ z\geq 0,\ z=x^2+4y^2.$

5.20. $G: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y=1,\ z=3x^2+2y^2.$

5.21. $G: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0, 3x+2y=6,\ z=x^2+y^2.$

5.22. $G: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y=2,\ z=4-x^2-y^2.$

5.23. $G: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y=3,\ z=9-x^2-y^2.$

5.24. $G: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0, 3x+4y=12,\ z=6-x^2-y^2.$

5.25. $G: x\geq 0,\ z\geq 0,\ y=x, y=3,\ z=18-x^2-y^2.$

5.26. $G: x=2,\ y=3x,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ z=4(x^2+y^2).$

5.27. $G: x\geq 0,\ z\geq 0,\ y=2x, y=4,\ z=10-x^2-y^2.$

5.28. $G: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ 2x+3y=6,\ z=3+x^2+y^2.$

5.29. $G: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y=4,\ z=16-x^2-y^2.$

5.30. $G: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0, 5x+y=5,\ z=x^2+y^2.$

6. Обчислити потрійні інтеграли:

6.1. $\iiint\limits_V xdxdy,\ V: y=10x,\ y=0,\ x=1,\ z=xy,\ z=0.$

6.2. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\left(1+\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{8}\right)^4},\ V: \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{8}=1,\ y=0,\ x=0,\ z=0.$

6.3. $\iiint\limits_V 15(y^2+z^2)dxdydz,\ V: x+y=1,\ z=x+y,\ y=0,\ x=0,\ z=0.$

6.4. $\iiint\limits_V (3x+4y)dxdydz,\ V: y=x,\ z=5(x^2+y^2),\ y=0,\ x=1,\ z=0.$

6.5. $\iiint\limits_V (1+2x^3)dxdydz,\ V: y=9x,\ z=\sqrt{xy},\ y=0,\ x=1,\ z=0.$

6.6. $\iiint\limits_V (27+54y^3)dxdydz,\ V: y=x,\ z=\sqrt{xy},\ y=0,\ x=1,\ z=0.$

6.7. $\iiint\limits_V ydxdydz,\ V: y=15x,\ z=xy,\ y=0,\ x=1,\ z=0.$

6.8. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^5},\ V: \dfrac{x}{16}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}=1,\ y=0,\ x=0,\ z=0.$

6.9. $\iiint\limits_V (y^2+3x^2)dxdydz,\ V: x+y=1,\ z=10y,\ y=0,\ x=0,\ z=0.$

6.10. $\iiint\limits_V (15x+30z)dxdydz,\ V: y=x,\ z=x^2+3y^2,\ y=0,\ x=1,\ z=0.$

6.11. $\iiint\limits_V (4+8x^3)dxdydz,\ V: y=9x,\ z=\sqrt{xy},\ y=0,\ x=1,\ z=0.$

6.12. $\iiint\limits_V (1+2x^3)dxdydz,\ V: y=36x,\ z=\sqrt{xy},\ y=0,\ x=1,\ z=0.$

6.13. $\iiint\limits_V 21xzdxdz,\ V: y=x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0.$

6.14. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{10}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^6},\ V: \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{3}=1,\ y=0,\ x=0,\ z=0.$

6.15. $\iiint\limits_V (x^2+3y^2)dxdydz,\ V: x+y=1,\ z=10x,\ y=0,\ x=0,\ z=0.$

6.16. $\iiint\limits_V (60y+90z)dxdydz,\ V: y=x,\ z=x^2+y^2,\ y=0,\ x=1,\ z=0.$

6.17. $\iiint\limits_V (\frac{10}{3}x+\frac{5}{3})dxdydz,\ V: y=9x,\ z=\sqrt{xy},\ y=0,\ x=1,\ z=0.$

6.18. $\iiint\limits_V (9+18z)dxdydz,\ V: y=4x,\ z=\sqrt{xy},\ y=0,\ x=1,\ z=0.$

6.19. $\iiint\limits_V 3y^2dxdydz,\ V: y=2x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0.$

6.20. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}\right)^6}$, $V: \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1,\ y=0,\ x=0,\ z=0.$

6.21. $\iiint\limits_V x^2 dxdydz,\ V: x+y=1,\ z=10(x+3y), y=2x,\ y=0,\ x=0,\ z=0.$

6.22. $\iiint\limits_V (12z+8y)dxdydz,\ V: y=x,\ z=3x^2+2y^2,\ y=0,\ x=1,\ z=0.$

6.23. $\iiint\limits_V 63(1+2\sqrt{y})dxdydz,\ V: y=x,\ z=\sqrt{xy},\ y=0,\ x=1,\ z=0.$

6.24. $\iiint\limits_V (x+y)dxdydz,\ V: y=x,\ z=30x^2+60y^2,\ y=0,\ x=1,\ z=0.$

6.25. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}\right)^6}$, $V: \frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}=1,\ y=0,\ x=0,\ z=0.$

6.26. $\iiint\limits_V xyzdxdydz,\ V: y=x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0.$

6.27. $\iiint\limits_V y^2 dxdydz,\ V: x+y=1,\ z=10(3x+y),\ y=0,\ x=0,\ z=0.$

6.28. $\iiint\limits_V (5x+\frac{3z}{2})dxdydz,\ V: y=x,\ z=x^2+15y^2,\ y=0,\ x=1,\ z=0.$

6.29. $\iiint\limits_V (x^2+4y^2)dxdydz,\ V: x+y=1,\ z=20(2x+y),\ y=0,\ x=0,\ z=0.$

2.30. $\iiint\limits_V xdxdydz,\ V: z=\sqrt{18-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ x\geq 0.$

7. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

7.1. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}, \frac{9}{2}z=x^2+y^2.$

7.2. $x+y=4,\ y=\sqrt{2x},\ z=0,\ z=3y.$

7.3. $x^2+y^2=2,\ y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ z=15x.$

7.4. $x=7\sqrt{3y},\ x=2\sqrt{3y},\ z=0,\ z+y=3.$

7.5. $x^2+y^2=8,\ y=\sqrt{2x},\ y=0,\ z=0,\ z=\frac{15}{11}x.$

7.6. $z=\sqrt{144-x^2-y^2}, 18z=x^2+y^2.$

7.7. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, \frac{3}{2}z=x^2+y^2.$

7.8. $z=10(x^2+y^2)+1, z=1-20y.$

7.9. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}, z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{80}}.$

7.10. $z=\sqrt{\frac{16}{9}-x^2-y^2}, z=x^2+y^2.$

7.11. $z=24((x+1)^2+y^2)+1, z=48x+49.$

7.12. $z=2-12(x^2+y^2), z=24x+2.$

7.13 $z=\sqrt{64-x^2-y^2}, 12z=x^2+y^2.$

7.14. $z=\frac{17}{2}-x^2-y^2, z=15\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$

7.15. $z^2=4-x, x^2+y^2=4x.$

7.16. $z=x^2+y^2, x^2+y^2=4, z\geq 0.$

7.17. $x=3y^3-5, x=-2, z=2-\sqrt{x^2+16y^2}, z=8-\sqrt{x^2+16y^2}.$

7.18. $y=1-2x^2, y=-1, z=x^2+2y+y^2-2, z=x^2+2y+y^2+1.$

7.19. $x=3x^2+4, y=7, z=5-\sqrt{2x^2+3y^2}, z=1-\sqrt{2x^2+3y^2}.$

7.20. $y=x^2-7, y=-8x^2+2, z=5x^2-12y^2+3, z=5x^2-12y^2-2.$

7.21. $x=2-5y^2, x=-3, z=3x^2+y^2+1, z=3x^2+y^2-5.$

7.22. $y=6x^2-1, y=5, z=2x^2+x-y^2, z=2x^2+x-y^2+4.$

7.23. $y=5x^2-2, y=-4x^2+7, z=9x^2+5y^2+4, z=9x^2+5y^2-1.$

7.24. $y=7-2x^2, y=5, z=1-2x^2+3y^2, z=4-2x^2+3y^2.$

7.25. $y=2x^2-5, y=-3, z=2+\sqrt{x^2+4y^2}, z=-1+\sqrt{x^2+4y^2}.$

7.26. $x=3-4y^2, x=y^2-2, z=\sqrt{16-x^2-y^2}+2, z=\sqrt{16-x^2-y^2}-1.$

7.27. $x=2y^2+3, x=5, z=1+\sqrt{9x^2+4y^2}, z=4+\sqrt{9x^2+4y^2}.$

7.28. $y=-6x^2+8, y=2, z=x-x^2-y^2-1, z=x-x^2-y^2-5.$

7.29. $x=-2+3y^2, x=-4y^2+5, z=4-7x^2-9y^2, z=1-7x^2-9y^2.$

7.30. $y = 2x^2 - 3, y = -7x^2 + 6, z = -3 - 5x^2 - 6y^2, z = 1 - 5x^2 - 6y^2.$

8. Знайти координати центра маси однорідного тіла V, обмеженого поверхнями:

8.1. $V: x = 6(z^2 + y^2), y^2 + z^2 = 3, x = 0.$

8.2. $V: y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 = 36, y = 0.$

8.3. $V: x = 7(z^2 + y^2),\ x = 28.$

8.4. $V: z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8.$

8.5. $V: z = 5(x^2 + y^2), y^2 + x^2 = 2, z = 0.$

8.6. $V: x = 6\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 = 9, x = 0.$

8.7. $V: z = 8(x^2 + y^2), z = 32.$

8.8. $V: y = 3\sqrt{x^2 + z^2},\ y = 9.$

8.9. $V: 9y = x^2 + z^2, z^2 + x^2 = 4, y = 0.$

8.10. $V: 6y = x^2 + z^2,\ y = 8.$

8.11. $V: 8x = \sqrt{y^2 + z^2},\ x = \frac{1}{2}.$

8.12. $V: 2x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 4, x = 0.$

8.13. $V: 4y = \sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 = 16, y = 0.$

8.14. $V: 3z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$

8.15. $V: 8x = y^2 + z^2,\ x = 2.$

8.16. $V: z = 9\sqrt{x^2 + y^2},\ z = 36.$

8.17. $V: z = 3(x^2 + y^2), y^2 + x^2 = 9, z = 0.$

8.18. $V: x = 2\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 = 4, x = 0.$

8.19. $V: 4y = x^2 + z^2,\ y = 9.$

8.20. $V: x = 5\sqrt{y^2 + z^2},\ x = 20.$

8.21. $V: y = x^2 + z^2, z^2 + x^2 = 10, y = 0.$

8.22. $V: y = 3\sqrt{x^2 + z^2},\ x^2 + z^2 = 16,\ y = 0.$

8.23. $V: 3x = y^2 + z^2,\ \ x = 9.$

8.24. $V: y = \sqrt{x^2 + z^2},\ \ y = 4.$

8.25. $V: x = y^2 + z^2,\ y^2 + z^2 = 9,\ x = 0.$

8.26. $V: x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 3.$

8.27. $V: z = 2\sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 = 9,\ z = 0.$

8.28. $V: z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 4.$

8.29. $V: 2z = x^2 + y^2,\ z = 3.$

8.30. $V: z = x^2 + y^2,\ y^2 + x^2 = 4,\ z = 0.$

9. Знайти моменти інерції відносно вказаної осі координат однорідного тіла V, обмеженого даними поверхнями. Густину вважати рівною одиниці.

9.1. $V: y^2 = x^2 + z^2,\ \ y = 4,\ \ Oy.$

9.2. $V: 2y = x^2 + z^2,\ \ y = 2,\ \ Oy.$

9.3. $V: x = y^2 + z^2,\ \ x = 2,\ \ Ox.$

9.4. $V: x^2 = y^2 + z^2,\ \ x = 1,\ \ Ox.$

9.5. $V: y^2 = x^2 + z^2,\ \ y = 2,\ \ Oy.$

9.6. $V: 2z = x^2 + y^2,\ \ z = 2,\ \ Oz.$

9.7. $V: x = y^2 + z^2,\ \ x = 2,\ \ Ox.$

9.8. $V: x^2 = y^2 + z^2,\ \ y^2 + z^2 = 4, x = 0,\ \ Ox.$

9.9. $V: x^2 = y^2 + z^2,\ \ x = 2,\ \ Ox.$

9.10. $V: 2z = x^2 + y^2,\ \ x^2 + y^2 = 4,\ \ z = 0,\ \ Oz.$

9.11. $V: y = x^2 + z^2,\ \ y = 2,\ \ Oy.$

9.12. $V: z = 2(x^2 + y^2),\ \ z = 2,\ \ Oz.$

9.13. $V: x^2 = y^2 + z^2,\ \ x = 3,\ \ Ox.$

9.14. $V: x = 1 - y^2 - z^2,\ \ x = 0,\ \ Ox.$

9.15. $V: x = y^2 + z^2,\ x = 3,\ Ox.$

9.16. $V: y = 4 - x^2 - z^2,\ y = 0,\ Oy.$

9.17. $V: y = 2\sqrt{x^2 + z^2},\ y = 2,\ Oy.$

9.18. $V: x = 3(y^2 + z^2),\ x = 3,\ Ox.$

9.19. $V: y = x^2 + z^2,\ y = 3,\ Oy.$

9.20. $V: z = 9 - x^2 - y^2,\ z = 0,\ Oz.$

9.21. $V: x^2 = y^2 + z^2,\ y^2 + z^2 = 1,\ x = 0,\ Ox.$

9.22. $V: z = 4\sqrt{x^2 + y^2},\ z = 2,\ Oz.$

9.23. $V: x = y^2 + z^2,\ y^2 + z^2 = 1,\ x = 0,\ Ox.$

9.24. $V: z = 3(x^2 + y^2),\ z = 3,\ Oz.$

9.25. $V: z^2 = x^2 + y^2,\ z = 3,\ Oz.$

9.26. $V: x = 2\sqrt{y^2 + z^2},\ x = 2,\ Ox.$

9.27. $V: z = x^2 + y^2,\ z = 3,\ Oz.$

9.28. $V: y = 3(x^2 + z^2),\ y = 3,\ Oy.$

9.29. $V: y^2 = x^2 + z^2,\ x^2 + z^2 = 4,\ y = 0,\ Oy.$

9.30. $V: z = 3 - x^2 - y^2,\ z = 0,\ Oz.$

10. Обчислити криволінійний інтеграл:

10.1. а) $\int\limits_C (x - y)dl$, $C-$ відрізок прямої, що з’єднує точки $A(0;0)$, $B(4;3)$;

б) $\int\limits_L (xy - y^2)dx + xdy$, де $L-$ дуга параболи $y = 2x^2$ від точки $O(0;0)$ до $A(1;2)$.

10.2. а) $\int\limits_C x^2 ydy - y^2 xdx,\ x = \sqrt{\cos t}, y = \sqrt{\sin t}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

б) $\int\limits_L (x + y)dl$, де $L-$ контур трикутника з вершинами $A(1;0), B(0;1), O(0;0)$.

10.3. а) $\int\limits_{(2;3)}^{(1;2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$;

б) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де L – коло $x^2+y^2=2y$.

10.4. а) $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} ydx+xdy$;

б) $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, де L – коло $x^2+y^2=4x$.

10.5. а) $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$, де L – дуга кривої $x=t,\ y=\dfrac{t^2}{2},\ z=\dfrac{t^3}{3},\ t\in[0;1]$;

б) $\int\limits_L (x^2+y^2)dx+2xydy,$ де L –дуга кривої $y=x^3$ від точки $O(0;0)$ до $A(1;1)$.

10.6. а) $\int\limits_C xdl$, C – циклоїда $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ t\in[0;\pi]$;

б) $\int\limits_L 2yzdy-y^2dz,$ де L – ламана OBA: $O(0,0,0)$, $B(0,2,0)$, $A(0,2,1)$.

10.7. а) $\int\limits_L (x^2-y^2)dx+xydy,$ де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1;1)$, $B(3;4)$

;

б) $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, де L – коло $x=3\cos t, y=3\sin t$.

10.8. а) $\int\limits_L (x+y)dl$, де L – крива $x^2+y^2=R^2$;

б) $\int\limits_{(1;2)}^{(0;1)} (x^3-y^3)dx+3xy^2dy$.

10.9. а) $\int\limits_L (x-y)^2dx+(x+y)dy,$ де L – ламана OAB: $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;2)$;

б) $\int\limits_L \dfrac{z^2}{x^2+y^2}dl,$ де L – перший виток гвинтової лінії $x=9\cos t, y=9\sin t,\ z=9t$.

10.10. а) $\int\limits_L (x+y)dl$, де L – крива $x^2+y^2=16$;

б) $\int\limits_{(0;1)}^{(1;2)} xye^x dx+(x-1)e^x dy$.

10.11. а) $\int\limits_C \dfrac{y}{\sqrt{x}}dl$, C – дуга кривої $y^2=\dfrac{4}{9}x^3$ між точками $A(3;2\sqrt{3})$, $B(8;\dfrac{32\sqrt{2}}{3})$;

б) $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2dy,$ $L-$ дуга параболи $y^2 = 4-4x$ від точки $A(1;0)$ до $B(0;2)$.

10.12. а) $\int\limits_C ydx - (y+x^2)dy,$ де $C-$ дуга кривої $y = 2x - x^2$, що лежить над віссю Ox;

б) $\int\limits_L \sqrt{2y^2+z^2}dl$, де $L-$ коло $x^2+y^2+z^2=a^2,$ $x=y$.

10.13. а) $\int\limits_C \sqrt{y^2+x^2}dl$, де $C-$ крива $x^2+y^2=R^2$;

б) $\int\limits_L 2xzdy + y^2dz,$ де $L-$ дуга параболи $z=\dfrac{x^2}{4}$ від точки $A(0,0,0)$ до $B(2,0,1)$.

10.14. а) $\int\limits_C \dfrac{dy}{x} - \dfrac{dx}{y},$ де $C-$ частина кола $x^2+y^2=r^2$, що лежить в I чверті;

б) $\int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}dl$, де $L-$ крива $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),$ $x \ge 0$.

10.15. а) $\int\limits_C \sqrt{y^2+x^2}dl$, де $C-$ крива $x^2+y^2=ax$;

б) $\int\limits_L (xy-x)dx + \dfrac{x^2}{y}dy,$ $L-$ дуга параболи $y=2\sqrt{x}$ від точки $O(0;0)$ до $A(1;2)$.

10.16.а) $\int\limits_L 2xdy - 3ydx$, де $L-$ контур трикутника з вершинами $A(1;2)$, $B(3;1)$, $C(2;5)$

;

б) $\int\limits_L (x+y)dl$, де $L-$ перший виток лемніскати $\rho^2 = 7\cos 2\varphi$.

10.17. а) $\int\limits_C x^2ydx + x^3dy$, де $C-$ контур, утворений кривими $y=x^2$, $x=y^2$;

б) $\int\limits_L ydl$, де $L-$ дуга параболи $y^2=6x$, що відсікається параболою $6y=x^2$.

10.18. а) $\int\limits_C xdy$, $C-$ дуга синусоїди $y=\sin x$ від точки $(\pi,0)$ до точи $(0,0)$;

б) $\int\limits_L y^2dl$, де $L-$ перша арка циклоїди $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$.

10.19. а) $\int\limits_{(1;-1)}^{(1;1)} (x-y)(dx-dy)$;

б) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, де L – розгортка кола

$x = 6(\cos t + t\sin t),\ y = 6(\sin t - t\cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

10.20. а) $\int\limits_{(0;2)}^{(1;2)} xye^x dx + (x-1)e^x dy$;

б) $\int\limits_L yzdl$, де L – контур прямокутника з вершинами у точках $O(0,0,0)$, $A(0,4,0)$, $B(0,4,2),\ C(0,0,2)$ у додатному напрямі.

10.21. а) $\int\limits_C xydl$, C – дуга кривої $x = a\operatorname{ch}t,\ y = a\operatorname{sh}t,\ t \in [0;1]$;

б) $\int\limits_L \cos z dx - \sin x dz$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(2,0,-2)$, $B(-2,0,2)$.

10.22. а) $\int\limits_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, де C – крива $x^2+y^2=a^2$;

б) $\int\limits_L (x+y)dl$, де L – чверть кола $x^2+y^2+z^2=1,\ x=y$, що лежить у I октанті.

10.23. а) $\int\limits_C \left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)dl$, C – дуга циклоїди $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, що лежить у I чверті;

б) $\int\limits_L (x^2-y)dl$, де L – контур прямокутника, утвореного прямими $x=0,\ y=0,\ x=1,\ y=2$ при додатному напрямі обходу контура.

10.24. а) $\int\limits_L \frac{dl}{y^2}$, де L – дуга кривої $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, що відсікається прямою $y=2a$;

б) $\int\limits_C xdy$, C – контур трикутника, утвореного прямими $x=y,\ x=2, y=0$ при додатному напрямі обходу контура.

10.25. а) $\int\limits_C xdl$, C – частина спіралі $\rho = a^{\varphi}$, що знаходиться всередині круга $\rho \le a$;

б) $\int\limits_L (x - \frac{1}{y})dy,$ L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(1;1)$ до $B(2;4)$.

10.26. а) $\int\limits_C (x + y)dx + (x - y)dy,$ де C – крива $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1$;

б) $\int\limits_L \frac{dl}{x - y}$, L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(4;0)$, $B(6;1)$.

10.27. а) $\int\limits_{(0;-1)}^{(1;0)} \frac{xdy - ydx}{(x - y)^2}$, вздовж шляху, що не пеританає пряму $y = x$;

б) $\int\limits_L \frac{z^2}{x^2 + y^2} dl,$ де L – перший виток гвинтової лінії $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 2t$.

10.28. а) $\int\limits_C \frac{x}{y} dl$, C – дуга параболи $y^2 = 2x$ між точками $A(1;\sqrt{2})$, $B(2;2)$;

б) $\int\limits_C yzdx + z\sqrt{R^2 - y^2}dy + xydz,$ де L – дуга кривої $x = R\cos t,$ $y = R\sin t,$ $z = \frac{at}{2\pi}$, що обходиться від точки перетину її з площиною $z = 0$ до точки перетину її з площиною $z = a$.

10.29. а) $\int\limits_L (x + y)dl$, де L – перший виток лемніскати $\rho^2 = 7\cos 2\varphi$;

б) $\int\limits_L \frac{y}{x} dx + xdy,$ L – дуга лінії $y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до $B(e;1)$.

10.30. а) $\int\limits_C arctg\frac{y}{x} dl$, де C – частина дуги спіралі Архімеда $\rho = 2\varphi$, що знаходиться всередині круга радіуса R з центром у полюсі.

б) $\int\limits_L \cos zdx - \sin xdz,$ де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(2,0,-2)$ і $B(-2,0,2)$.

11. Розв'язати задачі:

11.1. Знайти довжину дуги ланцюгової лінії $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in [0,1]$.

11.2. Знайти моменти інерції відносно осей координат відрізка однорідної прямої $2x + y = 1$, що лежить між цими осями.

11.3. Знайти координати центра маси четверті однорідного кола $x^2 + y^2 = a^2$, що лежить у першому квадранті.

11.4. Знайти масу дуги кривої $y = \ln x$, що знаходиться між точками з абсцисами $x_1 = \sqrt{3}$ та $x_2 = \sqrt{8}$, якщо густина дуги в кожній точці дорівнює квадрату абсциси цієї точки.

11.5. Знайти моменти інерції відносно осі Oy дуги напівкубічної параболи $y^2 = x^3$, що знаходиться між точками з абсцисами $x_1 = 0$ та $x_2 = \frac{4}{3}$.

11.6. Знайти моменти інерції відносно початку координат однорідного контура квадрата зі сторонами $x = \pm a, y = \pm a$.

11.7. Знайти довжину дуги кривої $x = 2 - \frac{t^2}{4}, y = \frac{t^6}{6}$, обмеженого її точками перетину з осями координат.

11.8. Знайти координати центра маси однорідного півкола $x^2 + y^2 = 4$, симетричного відносно осі Ox.

11.9. Знайти координати центра маси однорідної дуги однієї арки циклоїди $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$.

11.10. Знайти моменти інерції відносно початку координат відрізка прямої, що знаходиться між точками $A(2;0)$ та $B(0;1)$, якщо густина в кожній точці пропорційна ординат цієї точки.

11.11. Знайти координати центра маси однорідного контура сферичного трикутника $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

11.12. Знайти статичні моменти відносно координатних осей дуги астроїди $x = 2\cos^3 t, x = 2\sin^3 t$, розміщеної в першому квадранті.

11.13. Знайти масу відрізка прямої $y = 2 - x$, який знаходиться між координатними осями, якщо лінійна густина в кожній його точці пропорційна квадрату абсциси цієї точки, а в точці $(2,0)$ дорівнює 4.

11.14. Знайти статичний момент відносно осі Oy однорідної дуги першого витка лемніскати Бернуллі $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$

11.15. Знайти роботу сили $\vec{F} = x\vec{j} + (x+y)\vec{j}$ при переміщенні точки масою m по дузі еліпса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

11.16. Знайти моменти інерції відносно осі Oz однорідної дуги першого витка гвинтової лінії $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = t$.

11.17. Знайти масу дуги кривої $\rho = 3\sin\varphi, \varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, якщо густина в кожній її точці пропорційна відстані до полюса і при $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ дорівнює 3.

11.18. Знайти координати центра маси однорідної дуги першого витка гвинтової лінії $x = \cos t, y = \sin t, z = 2t$.

11.19. Знайти моменти інерції відносно координатних осей чверті кола $x = 2\cos t, y = 2\sin t$, що лежить у першому квадранті.

11.20. Знайти координати центра маси першого витка гвинтової лінії $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = t$, якщо густина в кожній точці пропорційна аплікаті точки і при $t = \pi$ дорівнює 1.

11.21. Знайти масу дуги еліпса $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, яка лежить у першому квадранті, якщо густина в кожній точці дорівнює добутку координат цієї точки.

11.22. Знайти роботу сили $\vec{F} = xy\vec{j} + (x+y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по прямій $y = x$ від точки $(0,0)$ до точи $(1,1)$.

11.23. Знайти статичний момент відносно осі Ox однорідної дуги ланцюгової лінії $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

11.24. Знайти роботу сили $\vec{F}=(x-y)\vec{j}+x\vec{j}$ при переміщенні точки вздовж контура квадрата, утвореного прямими $x=\pm1,\ y=\pm1$.

11.25. Знайти статичний момент відносно осі Ox однорідної дуги кардіоїди $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

11.26. Знайти довжину дуги однієї арки циклоїди $x=3(t-\sin t),\ y=3(1-\cos t)$.

11.27. Знайти роботу сили $\vec{F}=(x+y)\vec{j}-x\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кола $x=2\cos t, y=2\sin t$ за годинниковою стрілкою.

11.28. Знайти роботу сили $\vec{F}=y\vec{j}+(x+y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки із початку координат у точку $(1,1)$ по параболі $y=x^2$.

11.29. Знайти роботу сили $\vec{F}=(x-y)\vec{j}+2y\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки із початку координат у точку $(1,3)$ по параболі $y=-3x^2$.

11.30. Знайти моменти інерції відносно координатних осей однорідного відрізка прямої, що знаходиться між точками $(1;2)$ та $(2;4)$.

12. Довести, що даний вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ та знайти цю функцію:

12.1. $(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy$.

12.2. $(y^2e^{xy^2}+3)dx+(2xye^{xy^2}-1)dy$.

12.3. $(\frac{y}{x}+\ln y+2x)dx+(\ln x+\frac{x}{y}+1)dy$.

12.4. $(e^{x+y}-\cos x)dx+(e^{x+y}+\sin y)dy$.

12.5. $\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+2x\right)dx+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}+6y\right)dy$.

12.6. $\left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}-3\right)dx+\left(\frac{2x^2y}{1+x^2y^2}\right)dy$.

12.7. $(e^{xy}+xye^{xy}+2)dx+(x^2e^{xy}+1)dy$.

12.8. $(ye^{xy}+y^2+2)dx+(xe^{xy}+2xy)dy$

12.9. $(5y+\cos x+6xy^2)dx+(5x+6x^2y)dy$

12.10. $(y^2e^{xy}-3)dx+e^{xy}(1+xy)dy$

12.11. $(1+\cos xy)ydx+(1+\cos xy)xdy$

12.12. $(y-\sin x)dx+(x-2y\cos y^2)dy$

12.13. $\left(\sin 2x-\dfrac{1}{x^2y}\right)-\dfrac{1}{x^2y}dy$

12.14. $\dfrac{x+y}{xy}dx+\dfrac{y-x}{y^2}dy$

12.15. $\left(x-\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)dx+\left(\dfrac{x}{x^2-y^2}-y\right)dy$

12.16. $\dfrac{x\ln y+y}{x}dx+\dfrac{y\ln x+x}{y}dy$

12.17. $\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+x^2\right)dx+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}+y\right)dy$

12.18. $\dfrac{1-y}{x^2y}dx+\dfrac{1-2x}{xy^2}dy$

12.19. $(ye^{xy}-2\sin x)dx+(xe^{xy}+\cos y)dy$

12.20. $y(e^{xy}+5)dx+x(e^{xy}+5)dy$

12.21. $(y\sin(x+y)+yx\cos(x+y)-9x^2)dx+(x\sin(x+y)+yx\cos(x+y)+2y)dy$

12.22. $\left(\dfrac{1}{y-1}+\dfrac{y}{(x-1)^2}-2\right)dx+\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x}{(y-1)^2}+2y\right)dy$

12.23. $(30x^3-21x^2y+2y)dx+(3+2x-7x^3)dy$

12.24. $-(\dfrac{1}{2}\cos 2y+y\sin 2x)dx+(x\sin 2y+\cos^2 x+1)dy$

12.25. $(\dfrac{1}{x+y}+\cos y\cos x-3x^2)dx+(\dfrac{1}{x+y}-\sin y\sin x+4y)dy$

12.26. $(y\cos xy+2x-3y)dx+(x\cos xy-3x+4y)dy$

12.27. $e^{x-y}(1+x+y)dx+e^{x-y}(1-x-y)dy$

12.28. $(3x^2-2xy+y)dx+(x-x^2-3y^2-4y)dy$

12.29. $(2xe^{x^2-y^2}-\sin x)dx+(\sin y-2ye^{x^2-y^2})dy$

12.30. $(3x^2-2xy+y^2)dx+(2yx-x^2-3y^2)dy$

Література

1. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1968.− Т.2.
2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А.Ф.Бермант, И. Г. Араманович − М.: Наука, 1967.
3. Шкіль М.І. Вища математика / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник – Либідь, 1994. − Кн.3.
4. Дубовик В.П. Вища математика / В.П. Дубовик, І.І. Юрик – К.: Вища шк., 1993.
5. Лісова Т.В. Інтегральне числення функцій багатьох змінних: Навч.-метод. посібник – Ніжин: Ред.-видав. Відділ НДПУ, 2000.
7. Вища математика. Основні розділи: підручник / За ред. Г.Л.Кулініча – К.: Либідь, 1995.-Кн.1.
8. Грималюк В.П. Вища математика, ч.2 / В.П. Грималюк, М.М. Кухарчук, В.В. Ясинський − К.: «Віпол», 2004.
9. Овчинников П.П. Вища математика, ч.1/ П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко – К.: «Техніка», 2000.
10. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу.− Москва: Высшая школа, 1966.
11. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. Г.И. Кручковича. – Москва: Высш. шк., 1973.
12. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.– Москва: Наука, 1985.