

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ТА ВАРІАНТИ ТИПОВО-РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ**

**«РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ»
МЕТОД ФУНКЦІЇ ГРІНА**

**Рекомендовано вченою радою
фізико-математичного факультету
протокол № 8 від 15 грудня 2014 року**

Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт «Рівняння математичної фізики». Метод функції Гріна / Уклад.: Г.В. Журавська, Н.В.Рева – К.: НТУУ «КПІ», 2014. - 84с.

Укладачі: Г.В. Журавська
Н.В.Рева

Відповідальний редактор С.Д.Івасишен

Рецензент:

Михайлець Володимир Андрійович
доктор фіз.-мат. наук, професор,
провідний науковий співробітник
відділу нелінійного аналізу
Інституту математики НАН України

Розділ 1

Функція Гріна крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь

§1. Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь

В курсі математичного аналізу вивчалися звичайні диференціальні рівняння та основні методи їх розв'язування. Особливу увагу приділяли задачі Коші, де значення невідомої функції та її похідних задаються в одній фіксованій точці. Але багато задач фізики та механіки приводять до математичних моделей, що описуються диференціальними рівняннями, для яких значення невідомої функції та її похідних задаються в двох або декількох точках. Такі задачі називаються *двоточковими* або *багатоточковими крайовими задачами*.

Далі будемо розглядати двоточкові крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Постановка задачі. Розглянемо неоднорідну крайову задачу

$$Lu := -(pu')' + qu = f(x), \quad x \in (0, l), \quad (1.1)$$

$$U_1(u) := \alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0) = 0, \quad U_2(u) := \alpha_2 u(l) + \beta_2 u'(l) = 0, \quad (1.2)$$

де $p \in C^1([0, l])$, $\{q, f\} \subset C([0, l])$, причому $p(x) \neq 0$ для $x \in [0, l]$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i \in \{1, 2\}$.

Позначимо M_L – область визначення оператора L , яка складається з функцій u з класу $C^2(0, l) \cap C^1([0, l])$, що задовольняють крайові умови (1.2).

Зауважимо, що при $\beta_i = 0$ із (1.2) одержуємо крайові умови першого роду, а при $\alpha_i = 0$ – другого роду, якщо ж коефіцієнти α_i та β_i відмінні від нуля одночасно – третього роду.

Розв'язок задачі (1.1), (1.2) в області визначення оператора L єдиний. Побудуємо його.

Припустимо, що відповідна лінійна однорідна крайова задача (1.1), (1.2) ($f \equiv 0$) має лише тривіальний розв'язок $u(x) = 0$.

Нехай v_1 і v_2 – ненульові (дійсні) розв'язки таких двох задач для однорідного рівняння з умовами в точках $x = 0$ і $x = l$:

$$\begin{cases} L(v_1) = 0, \\ \alpha_1 v_1(0) + \beta_1 v_1'(0) = 0; \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} L(v_2) = 0, \\ \alpha_2 v_2(l) + \beta_2 v_2'(l) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

При цьому будемо припускати також, що $\alpha_2 v_1(l) + \beta_2 v_1'(l) \neq 0$, оскільки в інакшому випадку, згідно з нашим припущенням, $v_1 \equiv 0$. Аналогічно $\alpha_1 v_2(0) + \beta_1 v_2'(0) \neq 0$, бо інакше $v_2 \equiv 0$. З теорії звичайних диференціальних рівнянь випливає, що такі розв'язки завжди існують і належать до класу $C^2([0, l])$ двічі неперервно диференційовних функцій на відрізку $[0, l]$.

Функції v_1 і v_2 лінійно незалежні на відрізку $[0, l]$. Дійсно, якщо б v_1 та v_2 були лінійно залежними, наприклад,

$$v_1(x) = C v_2(x), \quad x \in [0, l], \quad C - \text{const} \neq 0,$$

то, внаслідок крайових умов задач (1.3), $\alpha_2 v_1(l) + \beta_2 v_1'(l) = C(\alpha_2 v_2(l) + \beta_2 v_2'(l)) = 0$, що суперечить припущенню $\alpha_2 v_1(l) + \beta_2 v_1'(l) \neq 0$.

Розв'язок задачі (1.1), (1.2) будемо шукати методом варіації довільної сталої у вигляді

$$u(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x), \quad x \in [0, l]. \quad (1.4)$$

Згідно з цим методом похідні від функцій $C_1(x)$, $C_2(x)$ повинні задовольняти систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)v_1(x) + C_2'(x)v_2(x) = 0, \\ C_1'(x)v_1'(x) + C_2'(x)v_2'(x) = -\frac{f(x)}{p(x)}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Головним визначником даної системи рівнянь відносно невідомих $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ є визначник Вронського

$$W(x) := \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix}, \quad x \in [0, l].$$

Оскільки розв'язки v_1 і v_2 — лінійно незалежні, то визначник

$$W(x) = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x) \neq 0, \quad x \in [0, l].$$

Тому існує єдиний розв'язок системи (1.5), який можемо знайти за формулами Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} 0 & v_2 \\ f(x) & v_2' \end{vmatrix} = \frac{f(x)v_2(x)}{p(x)W(x)},$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ v_1' & -f(x) \end{vmatrix} = -\frac{f(x)v_1(x)}{p(x)W(x)}.$$

Користуючись тотожністю Остроградського-Ліувілля

$$p(x)W(x) = p(0)W(0), \quad x \in [0, l],$$

(див., наприклад, Л. С. Понтрягін [13]), одержуємо

$$C_1'(x) = \frac{f(x)v_2(x)}{p(0)W(0)}, \quad C_2'(x) = -\frac{f(x)v_1(x)}{p(0)W(0)}. \quad (1.6)$$

Щоб задовольнити крайові умови (1.2), покладемо $C_2(0) = 0$, $C_1(l) = 0$, оскільки

$$\begin{aligned} & \alpha_1[C_1(0)v_1(0) + C_2(0)v_2(0)] + \beta_1[C_1(0)v_1'(0) + C_2(0)v_2'(0)] = \\ & = C_1(0)[\alpha_1v_1(0) + \beta_1v_1'(0)] + C_2(0)[\alpha_1v_2(0) + \beta_1v_2'(0)] = 0, \end{aligned}$$

і аналогічно для кінця $x = l$. Інтегруючи (1.6) при умовах $C_1(l) = 0$, $C_2(0) = 0$, маємо

$$C_1(x) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \int_x^l f(\xi)v_2(\xi)d\xi,$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \int_0^x f(\xi)v_1(\xi)d\xi, \quad x \in [0, l].$$

Підставляючи отримані значення в (1.4), знаходимо шуканий розв'язок задачі (1.1), (1.2) у вигляді

$$u(x) = -\frac{1}{p(0)W(0)} \left[v_2(x) \int_0^x f(\xi)v_1(\xi)d\xi + v_1(x) \int_x^l f(\xi)v_2(\xi)d\xi \right], \quad x \in [0, l],$$

або

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in [0, l], \quad (1.7)$$

де

$$G(x, \xi) := -\frac{1}{p(0)W(0)} \begin{cases} v_1(x)v_2(\xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ v_2(x)v_1(\xi), & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad (1.8)$$

Функція G називається *функцією Гріна (функцією впливу)* крайової задачі (1.1), (1.2) або оператора L .

Отже, доведено наступний результат.

Теорема 1. Якщо відповідна лінійна однорідна крайова задача (1.1), (1.2) з $f \equiv 0$ має лише тривіальний розв'язок $u \equiv 0$, то існує єдиний розв'язок неоднорідної крайової задачі (1.1), (1.2), який можна зобразити в інтегральній формі (1.7).

Наведемо властивості функції Гріна G , які випливають безпосередньо з формули (1.8).

1. G визначена й неперервна на квадраті $\Pi := \{(x, \xi) \mid x \in [0, l], \xi \in (0, l)\}$ (рис.1.1) і має неперервні похідні за x в замкнених трикутниках $\{(x, \xi) \mid 0 \leq x \leq \xi \leq l\}$ та $\{(x, \xi) \mid 0 \leq \xi \leq x \leq l\}$.

2. Симетричність: $G(x, \xi) = G(\xi, x)$, $(x, \xi) \in \Pi$.

3. $G(x, \xi)$ як функція x задовольняє лінійне однорідне рівняння

$$L(G) = 0, \quad x \neq \xi, \quad x \in [0, l].$$

4. На бічних сторонах квадрата Π функція Гріна задовольняє однорідні крайові умови (1.2).

5. На діагоналі $x = \xi$ $G(x, \xi)$ як функція x неперервна, а її похідна $G'_x(x, \xi)$ має розрив першого роду

зі стрибком $-\frac{1}{p(x)}$, тобто

$$G(\xi + 0, \xi) = G(\xi - 0, \xi),$$

$$G'_x(\xi + 0, \xi) - G'_x(\xi - 0, \xi) = -\frac{1}{p(x)}, \quad \xi \in (0, l).$$

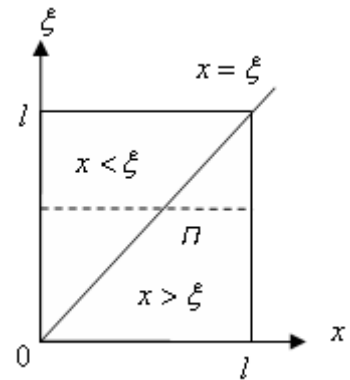


Рис.1.1

Фізичний зміст функції Гріна

Розглянемо крайову задачу

$$L(u) = \delta(x - x_0), \quad x \in (0, l),$$

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0,$$

де x_0 – фіксована точка з $(0, l)$, тобто задачу із зовнішнім джерелом, поміщеним у точку x_0 . Тут $\delta(x - x_0)$ – дельта-функція Дірака (див., наприклад, [11]), яка формально визначається такими умовами:

$$1) \delta(x - x_0) = 0 \text{ при } x \neq x_0;$$

$$2) \delta(x - x_0) \rightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow x_0;$$

$$3) \int_0^l \delta(x - x_0) dx = 1, \quad \forall x_0 \in (0, l).$$

На підставі теореми 1 розв'язок даної задачі визначається формулою

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi) \delta(\xi - x_0) d\xi = G(x, x_0), \quad x \in [0, l].$$

Тому $G(x, x_0)$ – це збурення в точці x , породжене точковим джерелом потужності 1, розміщеним у точці x_0 .

Приклад 1 (статична задача про профіль струни). Розв'язати задачу

$$u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

де f – довільна двічі неперервно диференційовна функція на відрізку $[0, 1]$.

◀ Дізнаємось спочатку, чи існує функція Гріна для даної крайової задачі. Для цього розглянемо відповідну однорідну крайову задачу

$$u''(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Загальним розв'язком однорідного рівняння буде $u(x) = C_1 x + C_2$, C_1, C_2 – довільні сталі. Крайові умови $u(0) = 0, u(1) = 0$ задовольняються тоді і тільки тоді, коли сталі $C_1 = C_2 = 0$, тобто $u \equiv 0$. А це означає, що для заданої задачі, на підставі теореми 1, можна побудувати функцію Гріна.

Виберемо два лінійно незалежних розв'язки, кожен з яких задовольняє одну з крайових умов. Розв'язок $u_1(x) = x$ задовольняє першу крайову умову $u(0) = 0$, а розв'язок $u_2(x) = x - 1$ – другу умову $u(1) = 0$. Тому функцію Гріна шукаємо у вигляді

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1(\xi)x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ C_2(\xi)(x-1), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

З властивості неперервності функції $G(x, \xi)$ та стрибка похідної $G'_x(x, \xi)$ при $x = \xi$, отримуємо умови для визначення невідомих функцій $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$:

$$\begin{cases} C_2(\xi)(\xi-1) - C_1(\xi)\xi = 0, \\ C_2(\xi) - C_1(\xi) = 1. \end{cases}$$

Визначником Вронського даної системи є

$$W = \begin{vmatrix} \xi-1 & -\xi \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отже, беручи до уваги, що $p(x) = -1$, згідно з формулою (1.8) знаходимо функцію Гріна даної задачі:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(\xi-1), & 0 \leq x \leq \xi, \\ (x-1)\xi, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Тепер розв'язок задачі запишемо у вигляді

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi = (x-1) \int_0^x \xi f(\xi) d\xi + x \int_x^1 (\xi-1) f(\xi) d\xi, \quad x \in [0, 1].$$

Фізичний зміст отриманого розв'язку – профіль струни при статичному навантаженні $f(x)$, $x \in [0, 1]$. ►

Приклад 2. Побудувати функцію Гріна крайової задачі

$$u''(x) - k^2 u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

◄ Розглянемо відповідну однорідну крайову задачу

$$u''(x) - k^2 u(x) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$u(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \quad x \in [0, 1].$$

Очевидно, що крайові умови задовольняються тоді і тільки тоді, коли $A = B = 0$, тобто коли однорідна задача має лише тривіальний розв'язок $u \equiv 0$. Отже, на підставі теореми 1 функція Гріна даної задачі існує.

Будуємо функцію Гріна. Виберемо два розв'язки, кожен з яких задовольняє одну з крайових умов, тобто розв'язки таких двох задач:

$$\begin{cases} u''(x) - k^2 u(x) = 0, \\ u(0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u''(x) - k^2 u(x) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці задачі, знаходимо $u_1(x) = \operatorname{sh} kx$, $u_2(x) = \operatorname{sh} k(x-1)$, причому вони є лінійно незалежними. Таким чином, функцію Гріна можна записати у вигляді

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1(\xi) \operatorname{sh} kx, & 0 \leq x \leq \xi, \\ C_2(\xi) \operatorname{sh} k(x-1), & \xi \leq x \leq 1, \end{cases}$$

де невідомі функції $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$ знаходимо з умов неперервності функції $G(x, \xi)$ та стрибка похідної $G'_x(x, \xi)$ при $x = \xi$:

$$\begin{cases} C_2(\xi) \operatorname{sh} k(\xi-1) - C_1(\xi) \operatorname{sh} k\xi = 0, \\ C_2(\xi) k \operatorname{ch} k(\xi-1) - C_1(\xi) k \operatorname{ch} k\xi = 1. \end{cases}$$

Значення визначника Вронського даної системи буде таке:

$$W = \begin{vmatrix} \operatorname{sh} k(\xi-1) & -\operatorname{sh} k\xi \\ k \operatorname{ch} k(\xi-1) & -k \operatorname{ch} k\xi \end{vmatrix} = k [\operatorname{sh} k\xi \cdot \operatorname{ch} k(\xi-1) - \operatorname{ch} k\xi \cdot \operatorname{sh} k(\xi-1)] = k \operatorname{sh} k.$$

Враховуючи, що $p(x) = -1$, згідно з формулою (1.8) знаходимо функцію Гріна даної задачі:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} k(\xi-1) \cdot \operatorname{sh} kx}{k \operatorname{sh} k}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\operatorname{sh} k\xi \cdot \operatorname{sh} k(x-1)}{k \operatorname{sh} k}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad \blacktriangleright$$

Приклад 3. Використовуючи функцію Гріна, розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} u''(x) - u(x) &= x, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0. \end{aligned}$$

◀ З'ясуємо спочатку, чи існує функція Гріна. Розглянемо відповідну однорідну крайову задачу

$$\begin{aligned} u''(x) - u(x) &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0. \end{aligned}$$

Загальним розв'язком однорідного рівняння є

$$u(x) = Ae^x + Be^{-x}, \quad x \in [0,1].$$

Крайові умови задовольняються тоді і тільки тоді, коли $A = B = 0$, тобто $u \equiv 0$. Отже, функція Гріна існує.

Легко переконатися (див. приклад 2), що

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\text{sh}(\xi - 1) \cdot \text{sh}x}{\text{sh}1}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\text{sh}\xi \cdot \text{sh}(x - 1)}{\text{sh}1}, & \xi \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (1.9)$$

є функцією Гріна заданої крайової задачі.

Розв'язок крайової задачі записуємо у вигляді

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) \xi d\xi, \quad x \in [0,1], \quad (1.10)$$

де функція G визначається формулою (1.9).

Розбиваючи проміжок інтегрування на два і підставляючи в (1.10) вираз для функції Гріна із (1.9), отримуємо

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \frac{\text{sh}\xi \cdot \text{sh}(x-1)}{\text{sh}1} \xi d\xi + \int_x^1 \frac{\text{sh}(\xi-1) \cdot \text{sh}x}{\text{sh}1} \xi d\xi = \\ &= \frac{\text{sh}(x-1)}{\text{sh}1} \int_0^x \xi \cdot \text{sh}\xi d\xi + \frac{\text{sh}x}{\text{sh}1} \int_x^1 \xi \cdot \text{sh}(\xi-1) d\xi. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_0^x \xi \cdot \text{sh}\xi d\xi = \left| \begin{array}{ll} u = \xi & du = d\xi \\ dv = \text{sh}\xi d\xi & v = \text{ch}\xi \end{array} \right| = \xi \text{ch}\xi \Big|_0^x - \int_0^x \text{ch}\xi d\xi = x \text{ch}x - \text{sh}x \Big|_0^x = x \text{ch}x - \text{sh}x,$$

$$\int_x^1 \xi \cdot \text{sh}(\xi-1) d\xi = \left| \begin{array}{ll} u = \xi & du = d\xi \\ dv = \text{sh}(\xi-1) d\xi & v = \text{ch}(\xi-1) \end{array} \right| = \xi \text{ch}(\xi-1) \Big|_x^1 - \int_x^1 \text{ch}(\xi-1) d\xi =$$

$$= 1 - x \text{ch}(x-1) - \text{sh}(\xi-1) \Big|_x^1 = 1 - x \text{ch}(x-1) + \text{sh}(x-1),$$

то, скориставшись формулою $\text{sh}(\alpha \pm \beta) = \text{sh}\alpha \cdot \text{ch}\beta \pm \text{ch}\alpha \cdot \text{sh}\beta$ та парністю функції $\text{sh}x$, отримуємо

$$u(x) = \frac{1}{\text{sh}1} [\text{sh}(x-1)(x \text{ch}x - \text{sh}x) + \text{sh}x(1 - x \text{ch}(x-1) + \text{sh}(x-1))] = \frac{\text{sh}x}{\text{sh}1} - x, \quad x \in [0,1]. \blacktriangleright$$

Приклад 4. За допомогою функції Гріна розв'язати крайову задачу

$$x^2 u'' + 2xu' = m(m+1)x^m, \quad x \in (0,1), m > 0, \quad (1.11)$$

$$u(1) = u'(1), \quad u \text{ обмежена на } (0,1). \quad (1.12)$$

◀ Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння та впевнимися, що умови (1.12) виконуються лише тоді, коли $u \equiv 0$. Дійсно, позначаючи

$$u' = z, \quad \text{отримаємо} \quad x^2 z' + 2xz = 0 \quad \text{або} \quad z' = -\frac{2z}{x}, \quad \text{звідки, відокремлюючи змінні та}$$

$$\text{інтегруючи, знаходимо} \quad \ln|z| = -2\ln|x| + \ln|C_1|, \quad \text{тобто} \quad z = \frac{C_1}{x^2}. \quad \text{Отже, загальним розв'язком}$$

відповідного однорідного рівняння буде

$$u(x) = -\frac{C_1}{x} + C_2, \quad (1.13)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Зрозуміло, що розв'язок u , який визначається формулою (1.13), задовольняє умови (1.12) лише при $C_1 = C_2 = 0$, а отже, функцію Гріна для задачі (1.11), (1.12) можна побудувати.

Із загального розв'язку (1.13) легко виділити частинний розв'язок $u_1(x) = 2 - \frac{1}{x}$, який задовольняє першу крайову умову, і розв'язок $u_2(x) = 1$, обмежений на $(0,1)$. Тому функцію G шукаємо у вигляді

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1(\xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ C_2(\xi) \left(2 - \frac{1}{x} \right), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Функції $C_1(\xi)$ та $C_2(\xi)$ знаходимо з умов

$$C_1(\xi) = C_2(\xi) \left(2 - \frac{1}{\xi} \right), \quad C_2(\xi) \frac{1}{\xi^2} = \frac{1}{\xi^2}.$$

Звідси $C_2(\xi) = 1$, $C_1(\xi) = 2 - \frac{1}{\xi}$. Таким чином,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{\xi}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ 2 - \frac{1}{x}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Шуканий розв'язок крайової задачі (1.11), (1.12) має вигляд

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G(x, \xi) m(m+1) \xi^m d\xi = m(m+1) \left(\int_0^x \left(2 - \frac{1}{\xi} \right) \xi^m d\xi + \int_x^1 \left(2 - \frac{1}{\xi} \right) \xi^m d\xi \right) = \\ &= m(m+1) \left(\left(2 - \frac{1}{x} \right) \frac{\xi^{m+1}}{m+1} \Big|_0^x + \left(\frac{2\xi^{m+1}}{m+1} - \frac{\xi^m}{m} \right) \Big|_x^1 \right) = x^m + m - 1, \quad x \in [0, 1]. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Побудувати функцію Гріна крайової задачі

$$u'' = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = u'(1), \quad u'(0) = u(1).$$

Відповідь:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \xi - 1 + (\xi - 2)x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ (\xi - 1)x - 1, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

2. Побудувати функцію Гріна крайової задачі

$$u''(x) + k^2 u(x) = f(x), \quad (k \neq 0), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Відповідь:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\sin k(\xi - 1) \cdot \sin kx}{k \sin k}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\sin k\xi \cdot \sin k(x - 1)}{k \sin k}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

3. Побудувати функцію Гріна крайової задачі

$$xu'' - u' = f(x), \quad 1 < x < 2,$$

$$u(2) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

Відповідь:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi^2 - 4}{2\xi^2}, & 1 \leq x \leq \xi, \\ \frac{x^2 - 4}{2\xi^2}, & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

4. Побудувати функцію Гріна крайової задачі

$$x^2 u'' + xu' - u = f(x),$$

$$u(1) = 0, \text{ } u \text{ обмежена на } (0,1).$$

Відповідь:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

§2. Функція Гріна задачі Штурма-Ліувілля

Якщо коефіцієнти рівняння (1.1) або крайових умов (1.2) залежать від деякого параметра λ , то ті значення λ , при яких крайова задача має нетривіальні розв'язки ($u \neq 0$) називаються *власними значеннями*, а ці нетривіальні розв'язки – відповідними *власними функціями*.

Теорема 2. *Крайова задача*

$$Lu = \lambda u + f, \quad u \in M_L, f \in C(0, l), \quad (1.14)$$

$$U_1(u) = 0, \quad U_2(u) = 0 \quad (1.15)$$

за умови, що $\lambda = 0$ не є власним значенням оператора L , еквівалентна інтегральному рівнянню Фредгольма

$$u(x) = \lambda \int_0^l G(x, \xi) u(\xi) d\xi + \int_0^l G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in (0, l), \quad (1.16)$$

$$u \in C([0, l]),$$

де G – функція Гріна оператора L .

Доведення. Якщо u – розв'язок крайової задачі (1.14), (1.15), то, застосовуючи теорему 1 із заміною f на $\lambda u + f$, отримаємо

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi) [\lambda u(\xi) + f(\xi)] d\xi,$$

тобто функція u задовольняє інтегральне рівняння (1.16).

Навпаки, нехай функція $u_0 \in C([0, l])$ задовольняє інтегральне рівняння (1.16).

Розглянемо крайову задачу

$$Lu = \lambda u_0 + f, \quad u \in M_L,$$

$$U_1(u) = 0, \quad U_2(u) = 0.$$

На підставі теореми 1 єдиний розв'язок цієї задачі можна подати у вигляді

$$u(x) = \int_0^l G(x, \xi) [\lambda u_0(\xi) + f(\xi)] d\xi = u_0,$$

звідки випливає, що $u_0 \in M_L$ і задовольняється рівняння

$$Lu_0 = \lambda u_0 + f,$$

тобто u_0 є розв'язком крайової задачі (1.14), (1.15). Теорема доведена.

Важливим випадком задач на власні значення є задача *Штурма-Ліувілля*:

$$(pu')' - qu + \lambda u = 0, \quad x \in (0, l), \quad (1.17)$$

$$\alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0) = 0, \quad \alpha_2 u(l) + \beta_2 u'(l) = 0, \quad (1.18)$$

де $p \in C^1([0, l])$, $q \in C([0, l])$, причому $p(x) \neq 0$ для $x \in [0, l]$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$, $i \in \{1, 2\}$.

Згідно з теоремою 2 крайова задача (1.14), (1.15) з $f \equiv 0$ перетворюється в задачу Штурма-Ліувілля і, відповідно, задача Штурма-Ліувілля (1.17), (1.18) еквівалентна задачі на власні значення однорідного інтегрального рівняння

$$u(x) = \lambda \int_0^l G(x, \xi) u(\xi) d\xi, \quad x \in [0, l],$$

за умови, що $\lambda = 0$ не є власним значенням оператора L .

Приклад 1. Звести крайову задачу

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

до інтегрального рівняння.

◀ Спочатку знайдемо функцію Гріна G задачі

$$\begin{cases} u''(x) = x, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Оскільки лінійно незалежними розв'язками однорідного рівняння $u''(x)=0$, які задовольняють крайові умови $u(0)=0$ і $u\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, відповідно є функції $u_1(x)=x$ і

$u(x)=x-\frac{\pi}{2}$, то функцію Гріна будемо у вигляді

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{W(\xi)}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{W(\xi)}, & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

де $W(\xi) = \begin{vmatrix} \xi & \xi - \frac{\pi}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2}.$

Отже,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\xi - 1\right)x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \left(\frac{2}{\pi}x - 1\right)\xi, & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Далі, отримуємо для розв'язку u даної задачі таке інтегральне рівняння

$$u(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, \xi) u(\xi) d\xi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, \xi) \xi d\xi, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

де інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, \xi) \xi d\xi = \int_0^x \left(\frac{2x}{\pi} - 1\right) \xi^2 d\xi + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2\xi}{\pi} - 1\right) x \xi d\xi = \frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi^2}{24}x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким чином, наша крайова задача звелась до інтегрального рівняння:

$$u(x) - \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, \xi) u(\xi) d\xi = \frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi^2}{24}x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \blacktriangleright$$

Задачі для самостійного розв'язування

Звести до інтегральних рівнянь наступні крайові задачі.

1. $u'' = \lambda u + x^2, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Відповідь:

$$u(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, \xi) u(\xi) d\xi + \frac{x^4}{12} - \frac{\pi^3}{96} x,$$
$$\text{де } G(x, \xi) = \begin{cases} \left(\frac{2\xi}{\pi} - 1\right)x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi \left(\frac{2x}{\pi} - 1\right), & x \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2. $u'' = \lambda u + e^x, x \in (0,1), u(0) = u(1) = 0.$

Відповідь:

$$u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) u(\xi) d\xi + e^x - ex + x - 1,$$
$$\text{де } G(x, \xi) = \begin{cases} (\xi - 1)x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ (x - 1)\xi, & x \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

3. $u'' + \lambda u = 2x + 1, x \in (0,1), u(0) = u'(1), u'(0) = u(1).$

Відповідь:

$$u(x) = -\lambda \int_0^1 G(x, \xi) u(\xi) d\xi + \frac{1}{6}(2x^3 + 3x^2 - 17x - 5),$$
$$\text{де } G(x, \xi) = \begin{cases} \xi - 1 + (\xi - 2)x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ (\xi - 1)x - 1, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

4. $u'' + \lambda u = e^x, x \in (0,1), u(0) = u'(0), u(1) = u'(1).$

Відповідь:

$$u(x) = e^x - \lambda \int_0^1 G(x, \xi) u(\xi) d\xi,$$
$$\text{де } G(x, \xi) = \begin{cases} (1+x)\xi, & 0 \leq x \leq \xi, \\ (1+\xi)x, & x \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Розділ 2

Функція Гріна задачі Коші для параболічних рівнянь

§1. Задача Коші для рівняння теплопровідності

Розглянемо задачу про розповсюдження тепла в тонкому однорідному довгому стрижні з теплоізовованою бічною поверхнею за відсутності внутрішніх джерел тепла. Якщо стрижень достатньо довгий, то процеси в середній частині стрижня, далекій від його кінців, будуть залежати лише від початкового розподілу температури, температурні режими на кінцях стрижня не будуть істотно впливати на розподіл температури в стрижні протягом деякого проміжку часу. Тому можна вважати, що стрижень є нескінченним, крайові умови не враховуються. Математичною моделлю поставленої задачі буде

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (2.2)$$

Така задача називається задачею з початковою умовою або задачею Коші.

Для розв'язування цієї задачі скористаємось спочатку методом відокремлення змінних.

Будемо шукати ненульові частинні розв'язки рівняння (2.1) у вигляді

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.3)$$

Підставимо (2.3) в (2.1)

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

і відокремимо змінні

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda,$$

де λ – деяка стала. Одержимо два рівняння

$$T'(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad X''(x) - \lambda X(x) = 0.$$

Загальний розв'язок першого рівняння $T(t) = C_1 e^{\lambda a^2 t}$.

Оскільки ні при якому фіксованому x температура $u(x,t) = X(x)T(t)$ не може необмежено зростати за абсолютною величиною при $t \rightarrow \infty$, то λ повинно бути від'ємним. Тоді $X(x) = C_2 \cos \sqrt{-\lambda}x + C_3 \sin \sqrt{-\lambda}x$.

Поклавши $\lambda = -k^2$, отримуємо

$$T(t) = C_1 e^{-k^2 a^2 t}, \quad X(x) = C_2 \cos kx + C_3 \sin kx,$$

і з (2.3)

$$u_k(x,t) = e^{-k^2 a^2 t} (A \cos kx + B \sin kx),$$

де $C_1 C_2 = A$, $C_1 C_3 = B$. Сталі A та B залежать від k , яке набуває будь-яких дійсних значень, оскільки відсутні крайові умови. Отже,

$$u_k(x,t) = e^{-k^2 a^2 t} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) \quad (2.4)$$

є частинним розв'язком рівняння (2.1) за довільних $A(k)$ та $B(k)$. Інтегруючи (2.4) за параметром k , отримуємо розв'язок рівняння (2.1):

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 a^2 t} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) dk. \quad (2.5)$$

Виберемо $A(k)$ та $B(k)$ таким чином, щоб виконувалась початкова умова (2.2), тобто

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) dk = \varphi(x). \quad (2.6)$$

Зобразимо функцію φ інтегралом Фур'є та порівняємо з інтегралом із формули (2.6):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos k(\xi - x) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos kx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos k\xi d\xi + \sin kx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin k\xi d\xi \right] dk, \end{aligned}$$

звідки дістанемо

$$A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos k\xi d\xi, \quad B(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin k\xi d\xi. \quad (2.7)$$

Підставляючи (2.7) в (2.5), отримуємо

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 a^2 t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos k \xi d\xi \cos kx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin k \xi d\xi \sin kx \right) dk = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-k^2 a^2 t} \cos k(\xi - x) d\xi.$$

Змінимо порядок інтегрування $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 a^2 t} \cos k(\xi - x) dk$ та обчислимо внутрішній інтеграл, використовуючи парність підінтегральної функції і формулу $\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-k^2 c^2} \cos \beta k dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2c} e^{-\frac{\beta^2}{c^2}}, \quad c \neq 0.$

Остаточно маємо

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0. \quad (2.8)$$

Отримана формула називається *формулою Пуассона* для розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності на прямій.

Теорема. Нехай функція φ із початкової умови (2.2) задовольняє умови:

- 1) функція φ неперервна на $\mathbf{R}$;
- 2) $\exists M > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}: |\varphi(x)| \leq M.$

Тоді функція u , що визначається формулою Пуассона (2.8), неперервна при $x \in \mathbf{R}, t > 0$, має неперервні частинні похідні u_t, u_{xx} при $x \in \mathbf{R}, t > 0$, задовольняє рівняння теплопровідності (2.1) при $x \in \mathbf{R}, t > 0$ і $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty): \lim_{\substack{t \rightarrow 0+ \\ x \rightarrow x_0}} u(x,t) = \varphi(x_0).$

Зауваження:

1. Доведення теореми, яке полягає в підстановці отриманого інтеграла в рівняння (2.1) та початкову умову (2.2) пропонуємо розглянути, наприклад, в [6, 7, 9, 11].

2. Зображення функції φ інтегралом Фур'є можливий, якщо функцію φ можна розкласти в ряд Фур'є на будь-якому обмеженому інтервалі та якщо інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx$ збіжний.

§ 2. Фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності та його властивості

Позначимо

$$G(x, \xi; t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}, \quad \{x, \xi\} \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \quad (2.9)$$

тоді формула (2.8) набуде вигляду

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi; t) \varphi(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$$

Функція $G(x, \xi; t)$ як функція x і t є розв'язком одновимірного рівняння теплопровідності і задовольняє однорідну початкову умову при $x \neq \xi$.

Виконання рівності $G_t = a^2 G_{xx}$ буде очевидним, якщо обчислити частинні похідні G_t та G_{xx} , вважаючи величини a та ξ сталими відносно змінних x, t :

$$\begin{aligned} G_t(x, \xi; t) &= -\frac{1}{4a\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t^2}; \\ G_x(x, \xi; t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{2(\xi-x)}{4a^2 t}; \\ G_{xx}(x, \xi; t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t^2} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{-2}{4a^2 t}. \end{aligned}$$

Виконання початкової умови перевіримо, перейшовши до границі при $t \rightarrow 0+$:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} G(x, \xi; t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} = 0, \quad \text{при } \xi \neq x.$$

Функція G називається *функцією Гріна задачі Коші або фундаментальним розв'язком* одновимірного рівняння теплопровідності і має важливий фізичний зміст, пов'язаний з поняттям теплового імпульсу.

Фізичним тепловим імпульсом прийнято називати початковий розподіл температур вигляду

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_0, & x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \\ 0, & x \in (-\infty, x_0 - \delta) \cup (x_0 + \delta, +\infty), \end{cases}$$

де u_0 – стала і $\delta > 0$ (рис.2.1).

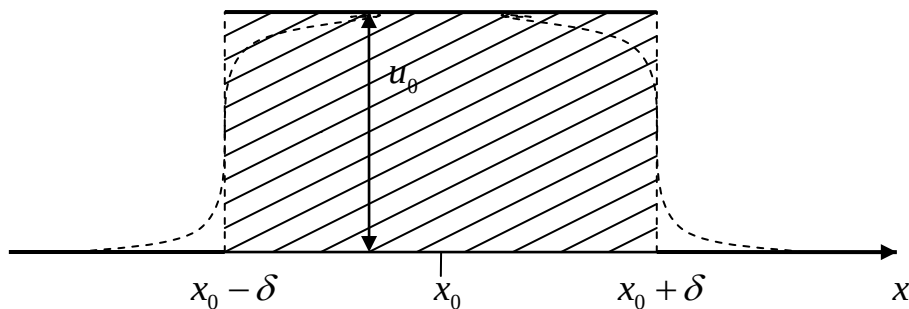


Рис. 2.1

Такий початковий розподіл температури виникає, якщо в стрижень з нульовою початковою температурою у момент часу $t=0$ на відрізок $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ раптово вводиться певна кількість тепла Q таким чином, що температура відрізка миттєво стає рівною u_0 . Якщо площа перерізу стрижня S , то $2\delta S$ – об'єм розглянутого відрізка, а $2\delta S\rho$ – його маса. Тоді при питомій теплоємності c матеріалу стрижня кількість тепла $Q = 2\delta S\rho c u_0$.

Потрібно відмітити, що температура практично не може бути представлена розривною функцією, але вона (пунктирна лінія на рис. 2.1) буде ближче до цієї функції φ , якщо підігрів стрижня буде різким та короткочасним. У точках $x_0 - \delta$ та $x_0 + \delta$ функція φ не визначена, але це не становить проблеми, оскільки розривну функцію φ можна зобразити інтегралом Фур'є і його значення в цих точках дорівнює $\frac{u_0}{2}$, тому вважаємо, що початкова температура в цих точках також дорівнює $\frac{u_0}{2}$.

Розв'язок задачі (2.1), (2.2) при такій початковій функції за формулою (2.8) буде мати вигляд

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$$

На підставі теореми про середнє значення з інтегрального числення маємо

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi = 2\delta e^{-\frac{(\tilde{\xi}-x)^2}{4a^2t}},$$

де $x_0 - \delta < \tilde{\xi} < x_0 + \delta$. Покладемо додатково $Q = \text{Sp}c$. Тоді розв'язок задачі про тепловий імпульс набуде вигляду

$$u(x,t) = \frac{2\delta u_0}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\tilde{\xi}-x)^2}{4a^2t}} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\tilde{\xi}-x)^2}{4a^2t}}.$$

Розглянемо тепер точковий тепловий імпульс, який отримаємо спрямувавши δ до нуля. Тоді $\tilde{\xi} \rightarrow x_0$, а розв'язок набуде вигляду

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}} = \varphi_0(x,t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0. \quad (2.10)$$

Точковий тепловий імпульс є ще більшою абстракцією, ніж фізичний тепловий імпульс, але він також може бути приблизно реалізований, якщо, наприклад, полум'я буде дуже вузьким.

Розглянемо тепер, як поширюється тепло в стрижні після точкового імпульсу. Побудуємо графіки фундаментального розв'язку з фіксованим x_0 в різні моменти часу $0 < t_1 < t_2 < t_3 \dots$. Такі криві називаються кривими Гауса.

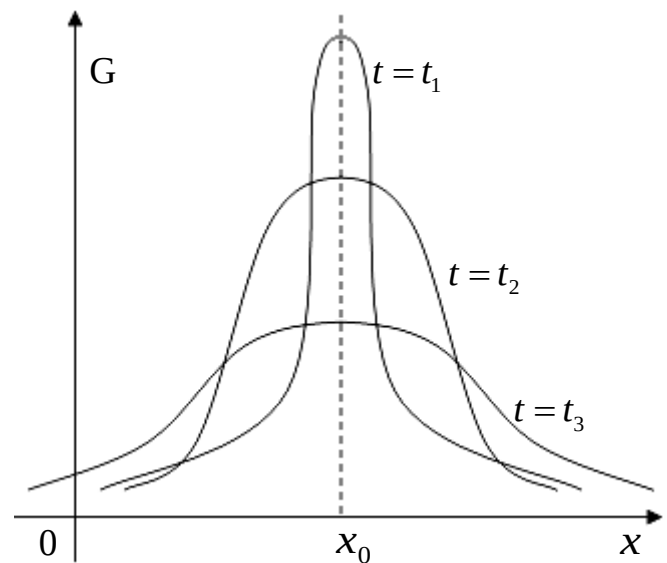


Рис. 2.2

На рисунку 2.2 видно, що при $t_1, t_2, t_3, \dots$ графіки симетричні відносно прямої $x = x_0$, причому максимуми досягаються при $x = x_0$ (в тій точці, де був прикладений імпульс) і дорівнюють $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t_i}}$. Площа під кожною кривою дорівнює

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x, t) dx = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1.$$

Отже, кількість тепла в стрижні залишається незмінною з плином часу. Для всіх значень $t > 0$ майже все тепло зосереджене в малому околі точки x_0 . З цього випливає, що при $t = 0$ вся кількість тепла знаходиться в точці $x = x_0$, що дає миттєве точкове джерело тепла. Функцію G часто називають функцією миттєвого точкового джерела.

При $t > 0$ в точках, відмінних від x_0 ($h = x - x_0$), функція $\varphi_0(x, t)$, як функція часу t , спочатку зростає від 0 до якогось максимального значення $\varphi_{\max}$, а потім монотонно спадає, прямуючи до нуля при $t \rightarrow \infty$. При $t = 0$ функція $\varphi_0(x, t)$ не визначена, а

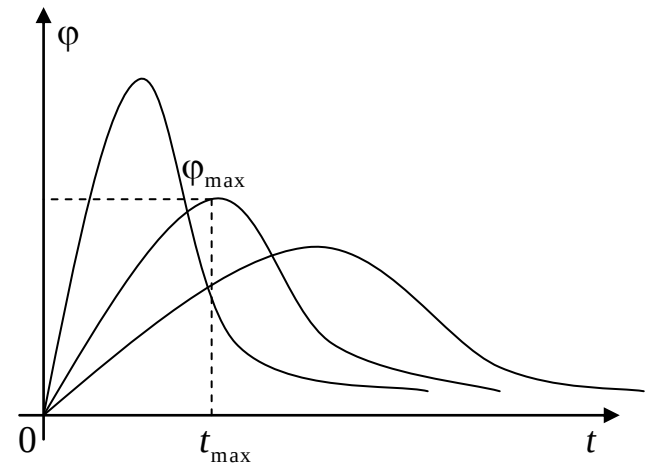


Рис. 2.3

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_0(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2 t}} = 0$$

(для обчислення скористалися правилом Лопіталя). Максимальне значення

набувається при $t_{\max} = \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}$ і дорівнює $\varphi_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} e^{|x-x_0|}}$, (рис.2.3).

Таким чином, температура в будь-якій точці $x \neq x_0$ спочатку підвищується до $\varphi_{\max}$, а потім спадає до нуля. Максимальна температура в точці $x \neq x_0$ обернено пропорційна відстані від цієї точки до точки прикладання імпульсу, а час, необхідний для досягнення цієї температури, прямо пропорційний квадрату вказаної відстані.

Якщо застосувати фізичний зміст фундаментального розв'язку (2.9) до (2.8), то розв'язок задачі теплопровідності на необмеженому стрижні при початковій умові (2.2) можна розглядати як результат накладання температур, що виникають в точці x в момент часу t внаслідок неперервно розподілених по стрижню теплових імпульсів «інтенсивності» $\varphi(\xi)$ в точці ξ , прикладених у момент $t = 0$.

Зауваження. У прикладних задачах при обчисленні інтеграла (2.8) часто використовується функція (рис. 2.4)

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi, \quad (2.11)$$

яка називається функцією помилок та займає важливе місце в теорії ймовірностей. Ця функція має такі властивості:

$$1. \quad \Phi(-\infty) = -1, \quad \Phi(+\infty) = 1,$$

$$2. \quad \Phi(0) = 0;$$

$$3. \quad \Phi(-z) = -\Phi(z);$$

$$4. \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1;$$

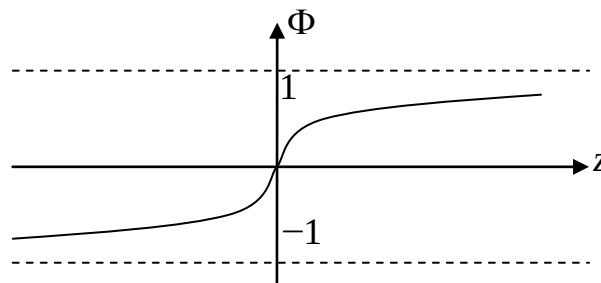


Рис. 2.4

Для значень функції помилок існують спеціальні таблиці.

Розглянемо неоднорідну задачу Коші на прямій

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Тоді

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \quad (2.12)$$

або

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi; t) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi; t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$$

Зауваження. Аналогічно можна шукати розв'язки задачі Коші для багатовимірного рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 \Delta u + f(\bar{x}, t), \quad \bar{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad t > 0,$$

$$u(\bar{x}, 0) = \varphi(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Тоді

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(\bar{\xi}) e^{-\frac{|\bar{\xi}-\bar{x}|^2}{4a^2 t}} d\bar{\xi} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(\bar{\xi}, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{|\bar{\xi}-\bar{x}|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\bar{\xi}, \quad \bar{x} \in \mathbf{R}^n, \quad t > 0,$$

де $|\bar{\xi} - \bar{x}| := \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + \dots + (\xi_n - x_n)^2}$.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності на прямій

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1, & x > 0, \\ T_2, & x < 0. \end{cases}$$

◀ Застосуємо формулу Пуассона (2.8):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{a^2 \pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4ta^2}} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a^2 \pi t}} \int_{-\infty}^0 T_2 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4ta^2}} d\xi + \frac{1}{2\sqrt{a^2 \pi t}} \int_0^{\infty} T_1 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4ta^2}} d\xi. \end{aligned}$$

Зробимо заміну змінних

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}} = z, \quad \xi = 2\sqrt{a^2 t}z + x, \quad d\xi = 2\sqrt{a^2 t}dz.$$

ξ	$-\infty$	$+\infty$	0
z	$-\infty$	$+\infty$	$-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}$

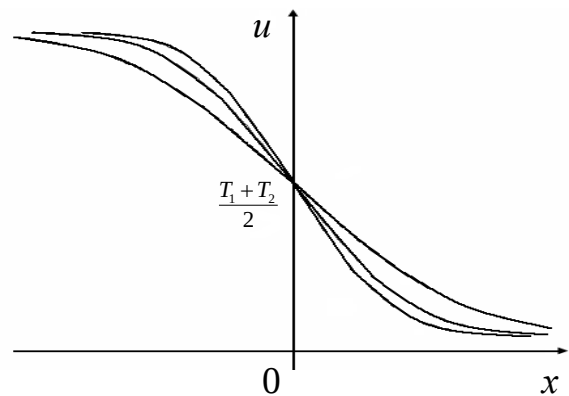


Рис. 2.5

Отримуємо

$$u(x,t) = \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-z^2} dz + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Розглянемо кожен інтеграл окремо і зведемо його до інтеграла помилок

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-z^2} dz - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} - \Phi\left(-\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}}^0 e^{-z^2} dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} + \Phi\left(-\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right).$$

Тоді

$$u(x,t) = T_2 \left(\frac{1}{2} - \Phi\left(-\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right) \right) + T_1 \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(-\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right) \right) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{2} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$$

Графіки розв'язків при $t > 0$ схематично подано на рисунку 2.5. ►

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності на прямій

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = e^{-x^2+x}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

◀ Застосуємо формулу Пуассона (2.8):

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2+\xi} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} d\xi.$$

Окремо розглянемо показник степеня

$$-\xi^2 + \xi - \frac{(\xi-x)^2}{4t} = -\frac{\xi^2 - 2\xi x + x^2 + 4t\xi^2 - 4t\xi}{4t} = -\frac{(1+4t)\xi^2 - 2(x+2t)\xi + x^2}{4t}.$$

Виділяємо повний квадрат для перших двох доданків (вони містять ξ)

$$\begin{aligned} & -\frac{(1+4t)\xi^2 - 2\frac{(x+2t)}{\sqrt{1+4t}}\sqrt{1+4t}\xi + \left(\frac{(x+2t)}{\sqrt{1+4t}}\right)^2 - \left(\frac{(x+2t)}{\sqrt{1+4t}}\right)^2 + x^2}{4t} = \\ & = -\frac{\left(\sqrt{1+4t}\xi - \frac{(x+2t)}{\sqrt{1+4t}}\right)^2 - \frac{(x+2t)^2}{1+4t} + x^2}{4t} = \\ & = -\frac{((1+4t)\xi - (x+2t))^2 - (x+2t)^2 + x^2(1+4t)}{4t(1+4t)} = -\frac{((1+4t)\xi - (x+2t))^2}{4t(1+4t)} - \frac{x^2 - x - t}{(1+4t)}. \end{aligned}$$

Отримаємо після підстановки в інтеграл

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{((1+4t)\xi - (x+2t))^2}{4t(1+4t)} - \frac{x^2 - x - t}{(1+4t)}} d\xi = e^{-\frac{x^2 - x - t}{(1+4t)}} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{((1+4t)\xi - (x+2t))^2}{4t(1+4t)}} d\xi.$$

Зробимо заміну змінних

$$\frac{(1+4t)\xi - (x+2t)}{2\sqrt{t(1+4t)}} = z, \quad \xi = \frac{2\sqrt{t(1+4t)}z + (x+2t)}{(1+4t)},$$

$$d\xi = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{1+4t}} dz.$$

ξ	$-\infty$	$+\infty$
z	$-\infty$	$+\infty$

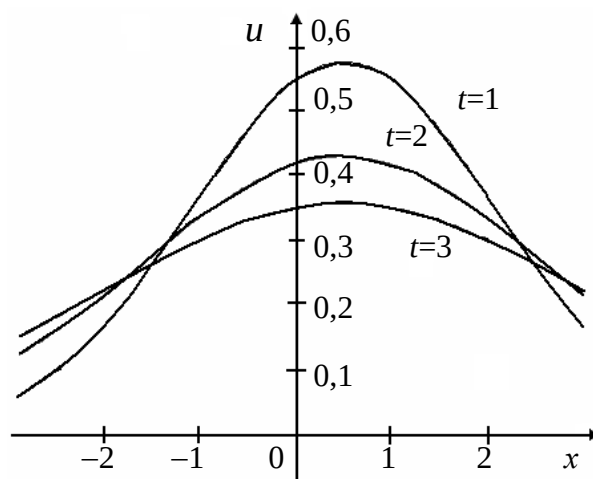


Рис. 2.6

Тоді

$$u(x,t) = e^{-\frac{x^2 - x - t}{(1+4t)}} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{1+4t}} dz = e^{-\frac{x^2 - x - t}{(1+4t)}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Остаточно маємо

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2 - x - t}{(1+4t)}}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$$

Графіки розв'язків при $t > 0$ подано на рисунку 2.6. ►

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності на прямій

$$u_t = 4u_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1), \\ 0, & x \in (-\infty,0) \cup (1,\infty). \end{cases}$$

◀ Застосуємо формулу Пуассона (2.8):

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{a^2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4ta^2}} d\xi = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_0^1 \xi e^{-\frac{(\xi-x)^2}{16t}} d\xi.$$

Зробимо заміну змінних

$$\frac{\xi - x}{4\sqrt{t}} = z, \quad \xi = 4\sqrt{t}z + x,$$

$$d\xi = 4\sqrt{t}dz.$$

Отримуємо

ξ	0	1
z	$-\frac{x}{4\sqrt{t}}$	$\frac{1-x}{4\sqrt{t}}$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{-\frac{x}{4\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{4\sqrt{t}}} (4\sqrt{t}z + x) e^{-z^2} 4\sqrt{t} dz = \\ &= \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{4\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{4\sqrt{t}}} z e^{-z^2} dz + \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{4\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{4\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz. \end{aligned}$$

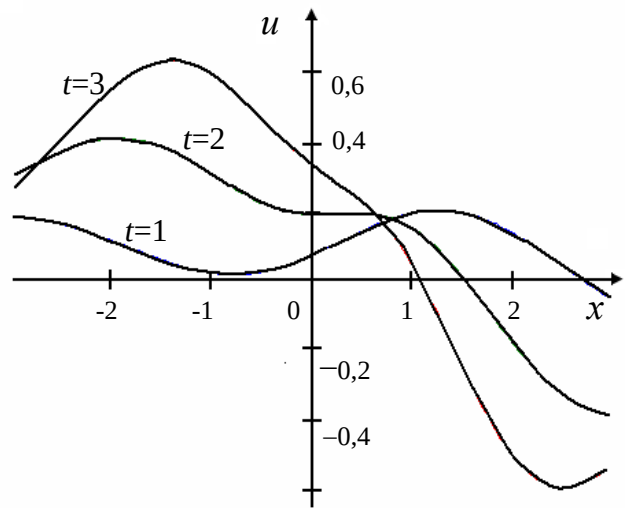


Рис. 2.7

Зробимо внесення під знак диференціала в першому інтегралі, а в другому – скористаємось властивостями функції (2.11). Тоді

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{4\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{4\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz^2 + x \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{4\sqrt{t}}}^0 e^{-z^2} dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1-x}{4\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz \right) = \\ &= -\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \Big|_{-\frac{x}{4\sqrt{t}}}^{\frac{1-x}{4\sqrt{t}}} + x \left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-\frac{x}{4\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1-x}{4\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz \right). \end{aligned}$$

Отже, розв'язок задачі визначається формулою

$$u(x,t) = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{16t}} - e^{-\frac{(1-x)^2}{16t}} \right) + \frac{x}{2} \left(\Phi\left(\frac{x}{4\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{1-x}{4\sqrt{t}}\right) \right), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$$

Графіки розв'язків при $t > 0$ зображено на рисунку 2.7. ►

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності на прямій

$$u_t = u_{xx} + xt, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = x^2 + x^3, \quad x \in \mathbf{R}.$$

◀ Застосуємо формулу (2.12):

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi^2 + \xi^3) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}} d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \cdot \tau}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(t-\tau)}} d\xi.$$

Розглянемо кожний інтеграл окремо, позначивши перший інтеграл через I_1 , а другий – I_2 .

Зробимо таку заміну змінних в інтегралі I_1 :

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{t}} = z, \quad \xi = 2\sqrt{t}z + x, \quad d\xi = 2\sqrt{t}dz.$$

ξ	$-\infty$	$+\infty$
z	$-\infty$	$+\infty$

Тоді після розкриття дужок і зведення подібних отримаємо

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} ((2\sqrt{t}z + x)^2 + (2\sqrt{t}z + x)^3) e^{-z^2} 2\sqrt{t}dz = (x^2 + x^3) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz + \\ + (3\sqrt{t}x^2 - 2\sqrt{t}x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2ze^{-z^2} dz + (2t - 6tx) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2z^2e^{-z^2} dz + 4\sqrt{t}^3 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2z^3e^{-z^2} dz.$$

Обчислимо інтеграли з останньої формули:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} 2ze^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz^2 = -\lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow -\infty}} e^{-z^2} \Big|_b^a = -\lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow -\infty}} \left(\frac{1}{e^{a^2}} - \frac{1}{e^{b^2}} \right) = 0;$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} 2z^2e^{-z^2} dz = \left| \begin{array}{ll} u = z & du = dz \\ dv = 2ze^{-z^2} dz & v = -e^{-z^2} \end{array} \right| = \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow -\infty}} \left(-ze^{-z^2} \Big|_b^a \right) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz - \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow -\infty}} \left(\frac{a}{e^{a^2}} - \frac{b}{e^{b^2}} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = -\lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow -\infty}} \left(\frac{1}{2ae^{a^2}} - \frac{1}{2be^{b^2}} \right) = \sqrt{\pi};$$

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} 2z^3e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} z^2e^{-z^2} dz^2 = \left| \begin{array}{ll} u = z^2 & du = dz^2 \\ dv = e^{-z^2} dz^2 & v = -e^{-z^2} \end{array} \right| = \\ = \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow -\infty}} \left(-z^2e^{-z^2} \Big|_b^a + \int_b^a e^{-z^2} dz^2 \right) = \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow -\infty}} \left(-z^2e^{-z^2} - e^{-z^2} \right) \Big|_b^a = \\ = -\lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow -\infty}} \left(\frac{a^2 + 1}{e^{a^2}} - \frac{b^2 + 1}{e^{b^2}} \right) = -\lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow -\infty}} \left(\frac{2a}{2ae^{a^2}} - \frac{2b}{2be^{b^2}} \right) = -\lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ b \rightarrow -\infty}} \left(\frac{1}{e^{a^2}} - \frac{1}{e^{b^2}} \right) = 0.$$

Отже,

$$I_1 = x^2 + x^3 + 2t - 6tx.$$

Зробимо заміну змінних в інтегралі I_2

за допомогою формул

$$\frac{\xi - x}{2\sqrt{t - \tau}} = z, \quad t - \tau = w, \quad \xi = 2\sqrt{wz} + x,$$

$$d\xi = 2\sqrt{w}dz, \quad d\tau = -dw.$$

ξ	$-\infty$	$+\infty$
z	$-\infty$	$+\infty$

τ	0	t
w	t	0

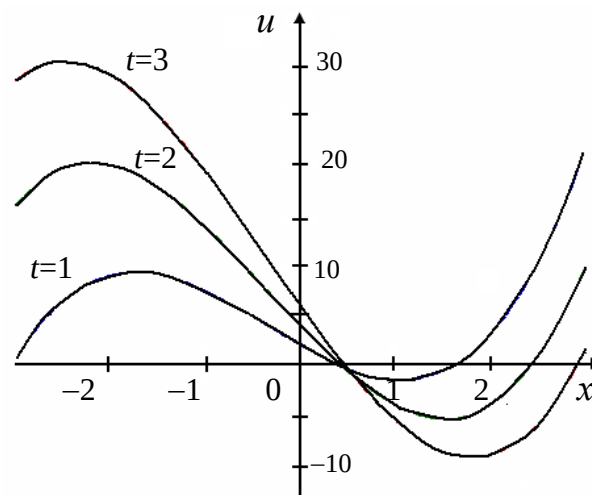


Рис. 2.8

Тоді

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_t^0 dw \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\sqrt{wz} + x) \cdot (t - w)}{\sqrt{w}} e^{-z^2} 2\sqrt{w} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t (t - w) dw \int_{-\infty}^{\infty} (2\sqrt{wz} + x) e^{-z^2} dz = \int_0^t (t - w) \left(\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2ze^{-z^2} dz + \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz \right) dw = \\ &= x \int_0^t (t - w) dw = x \left(tw - \frac{1}{2} w^2 \right) \Big|_0^t = \frac{xt^2}{2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$u(x, t) = x^2 + x^3 + 2t - 6tx + \frac{xt^2}{2}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$$

Графіки розв'язків при $t > 0$ представлено на рисунку 2.8. ►

Приклад 5. Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності на прямій

$$u_t = \frac{1}{4} u_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2} \cos x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

◀ Застосуємо формулу (2.12):

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{t}} e^{-\xi^2} \cos \xi d\xi.$$

Користуватимемося формулою Ейлера $e^{i\xi} = \cos \xi + i \sin \xi$, за допомогою якої маємо

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \operatorname{Re} I, \text{ де } I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{t} - \xi^2 + i\xi} d\xi.$$

Обчислимо інтеграл I . Окремо розглянемо показник степеня

$$-\frac{(\xi-x)^2}{t} - \xi^2 + i\xi = \left(\sqrt{\frac{1+t}{t}}\xi - \frac{2x+it}{2\sqrt{t^2+t}} \right)^2 + \frac{t^2+4x^2t-4xti}{4(t^2+t)}.$$

Проведемо заміну змінних в інтегралі I

за допомогою формули

$$\sqrt{\frac{1+t}{t}}\xi - \frac{2x+it}{2\sqrt{t^2+t}} = z, \quad \sqrt{\frac{1+t}{t}}d\xi = dz.$$

ξ	$-\infty$	$+\infty$
z	$-\infty$	$+\infty$

Тоді отримуємо

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{t}{1+t}} e^{-\frac{t^2+4x^2t-4xti}{4(t^2+t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \\ &= \sqrt{\frac{\pi t}{1+t}} e^{-\frac{t^2+4x^2t-4xti}{4(t^2+t)}}. \end{aligned}$$

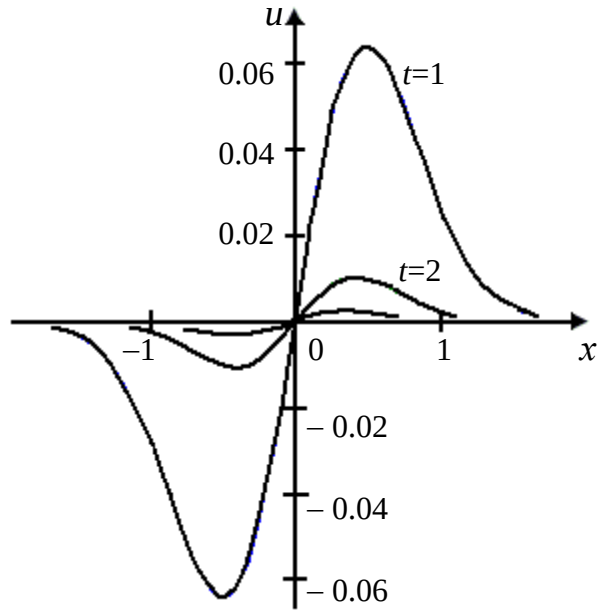


Рис. 2.9

Отже, розв'язок задачі визначається формулою

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \operatorname{Re} I = \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{-\frac{t+4x^2}{4(t+1)}} \cos \frac{x}{1+t}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$$

Графіки розв'язків при $t > 0$ подано на рисунку 2.9. ►

Задачі для самостійного розв'язування

Розв'язати задачу Коші для рівняння теплопровідності на прямій.

1.
$$u_t = 4u_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = e^{-3x^2-2x}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Відповідь: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-48t}} e^{\frac{4t(6x+2)^2}{(1-48t)} + 3x^2 - 2x}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$

2. $u_t = 15u_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$

$$u(x,0) = e^{4x^2 - 3x}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Відповідь: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+240t}} e^{\frac{15t(8x-3)^2}{(1+240t)} - 4x^2 + 3x}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$

3. $u_t = u_{xx} + 2xt^2, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$

$$u(x,0) = x^3 + x^4, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Відповідь: $u(x,t) = x^3 + x^4 + 6tx(1+2x) + 2t^2 + \frac{xt^3}{3}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$

4. $u_t = 4u_{xx} + \sin t, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$

$$u(x,0) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Відповідь: $u(x,t) = 1 - \cos t + \frac{1}{\sqrt{1+16t}} e^{-\frac{x^2}{(1+16t)}}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$

5. $u_t = u_{xx} + \sqrt{t}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$

$$u(x,0) = e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Відповідь: $u(x,t) = e^{t+x} + \frac{t\sqrt{t}}{3}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$

6. $u_t = \frac{1}{4}u_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$

$$u(x,0) = e^{-x^2} \cos x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Відповідь: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{-\frac{t+4x^2}{4(t+1)}} \sin \frac{x}{1+t}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$

§3. Властивості розв'язків задачі Коші для рівняння теплопровідності

Лема 1. Якщо функція φ є непарною функцією ($\varphi(-x) = -\varphi(x)$), то розв'язок задачі (2.1), (2.2) дорівнює нулю при $x=0$, тобто $u(0,t) = 0$ для всіх $t > 0$.

Доведення. Підставимо в формулу Пуассона (2.8) $x = 0$:

$$u(0,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Підінтегральна функція є непарною як функція змінної ξ , оскільки є добутком непарної функції φ та парної $e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}}$. Інтеграл від непарної функції по проміжку, симетричному відносно початку координат, дорівнює нулю.

Отже, $u(0,t) = 0$. Лема доведена.

Лема 2. Якщо функція φ є парною функцією ($\varphi(-x) = \varphi(x)$), то похідна за просторовою змінною розв'язку задачі (2.1), (2.2) дорівнює нулю при $x=0$, тобто $u_x(0,t) = 0$ для всіх $t > 0$.

Доведення. Продиференціюємо функцію u , задану формулою Пуассона (2.8), за x .

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{2a^3\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi-x)}{2\sqrt{t^3}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi.$$

У результат підставимо $x = 0$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{2a^3\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{2\sqrt{t^3}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi.$$

Підінтегральна функція є непарною функцією змінної ξ , оскільки вона є добутком непарної функції ξ та парних $\varphi(\xi)$ та $e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}}$. Інтеграл від непарної функції по проміжку, симетричному відносно початку координат, дорівнює нулю.

Отже, $u_x(0,t) = 0$. Лема доведена.

§4. Мішані задачі для рівняння теплопровідності в напівобмеженому інтервалі

Розглянемо задачу про розподіл тепла поблизу одного з кінців тонкого однорідного стрижня з теплоізовованою бічною поверхнею. У такому випадку температурний режим на іншому кінці не важливий. Тоді вважають, що цей кінець знаходиться на нескінченності і задача розглядається в напівобмеженому інтервалі $x \in (0, +\infty)$, тобто математично виникає мішана задача для рівняння теплопровідності.

I. Розв'яжемо мішану задачу за умови, що на кінці $x = 0$ стрижня задано нульову температуру

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (2.13)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (2.14)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.15)$$

Продовжимо функцію φ на від'ємну піввісь **непарним** способом

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Тоді функція

$$v(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0,$$

задовольняє рівняння $v_t = a^2 v_{xx}$, початкову умову $v(x, 0) = \varphi(x)$ при $0 \leq x < +\infty$ та крайову умову $v(0, t) = 0$ (на підставі леми 1).

Тоді

$$v(x, t) = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \varphi(-\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0.$$

Проведемо заміну змінної інтегрування в першому інтегралі $-\xi = z$, $-d\xi = dz$:

$$v(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\infty}^0 \varphi(z) e^{-\frac{(-z-x)^2}{4a^2 t}} dz + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(z) e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}} dz.$$

Отже, розв'язок задачі (2.13)–(2.15) зображується у вигляді

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(\xi) \left(e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}} \right) d\xi, \quad 0 \leq x < +\infty, \quad t > 0. \quad (2.16)$$

Приклад. Розв'язати мішану задачу для рівняння теплопровідності на півпрямій

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_1, \\ u_0, & x_1 < x < x_2, \\ 0, & x > x_2, \end{cases}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

◀ Застосуємо формулу (2.16):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} u_0 \left(e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}} \right) d\xi = \\ &= \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi - \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}} d\xi. \end{aligned}$$

Зробимо заміну змінних:

а) для першого інтеграла

$$\frac{\xi-x}{2\sqrt{a^2t}} = z, \quad \xi = 2\sqrt{a^2t}z + x, \quad d\xi = 2\sqrt{a^2t}dz.$$

ξ	x_1	x_2
z	$\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2t}}$	$\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2t}}$

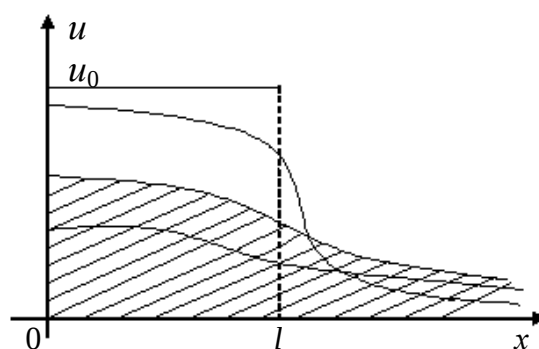


Рис. 2.10

б) для другого інтеграла

ξ	x_1	x_2
-------	-------	-------

$$\frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2 t}} = z, \quad \xi = 2\sqrt{a^2 t}z - x, \quad d\xi = 2\sqrt{a^2 t}dz.$$

z	$\frac{x_1 + x}{2\sqrt{a^2 t}}$	$\frac{x_2 + x}{2\sqrt{a^2 t}}$
-----	---------------------------------	---------------------------------

Отримаємо

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1 - x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\frac{x_2 - x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-z^2} dz - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1 + x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\frac{x_2 + x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-z^2} dz = \\ &= \frac{u_0}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-z^2} dz - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-z^2} dz - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x + x_2}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-z^2} dz + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x + x_1}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-z^2} dz \right) = \\ &= \frac{u_0}{2} \left(\Phi\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2 t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2 t}}\right) - \Phi\left(\frac{x + x_1}{2\sqrt{a^2 t}}\right) + \Phi\left(\frac{x + x_2}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Розглянемо частинний випадок цього прикладу:

- Нехай $x_1 = 0$, $x_2 = l$, тоді

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left(\Phi\left(\frac{x + l}{2\sqrt{a^2 t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - l}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad t > 0.$$

Графіки розв'язків при $t > 0$ представлені на рисунку 2.10. Оскільки відсутній теплообмін із зовнішнім середовищем, то площа під кожною кривою (заштрихована область) має одне й те саме значення lu_0 . ►

Задачі для самостійного розв'язування

Розв'язати мішані задачі для рівняння теплопровідності на півпрямій.

1. $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0,$

$$u(x, 0) = \begin{cases} T_1, & 0 \leq x < l, \\ T_2, & x > l, \end{cases}$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Відповідь: $u(x, t) = \frac{T_1 - T_2}{2} \left(\Phi\left(\frac{l - x}{2\sqrt{a^2 t}}\right) - \Phi\left(\frac{x + l}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \right), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0.$

$$2. \quad u_t = 4u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < l, \\ 0, & x > l, \end{cases}$$

$$u(0,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Відповідь:
$$u(x,t) = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{(l+x)^2}{16t}} - e^{-\frac{(l-x)^2}{16t}} \right) + \frac{x}{2} \left(\Phi\left(\frac{l-x}{4\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x+l}{4\sqrt{t}}\right) \right), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0.$$

II. Розв'яжемо мішану задачу за умови, що кінець теплоізолюваний

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (2.17)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (2.18)$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.19)$$

Продовжимо функцію φ на від'ємну піввісь **парним** способом

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Тоді функція

$$v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi, \quad 0 \leq x < +\infty, \quad t > 0,$$

задовольняє рівняння $v_t = a^2 v_{xx}$, початкову умову $v(x,0) = \varphi(x)$ при $0 \leq x < +\infty$ та крайову умову $v_x(0,t) = 0$ (на підставі леми 2).

Запишемо $v(x,t)$ у вигляді

$$v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \varphi(-\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Здійснимо заміну змінної інтегрування в першому інтегралі $-\xi = z, \quad -d\xi = dz$:

$$v(x,t) = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\infty}^0 \varphi(z) e^{-\frac{(-z-x)^2}{4a^2 t}} dz + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(z) e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2t}} dz.$$

Отже, розв'язок задачі (2.13)–(2.15) можна зобразити у вигляді

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(\xi) \left(e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}} \right) d\xi, \quad 0 \leq x < +\infty, \quad t > 0. \quad (2.20)$$

Задачі для самостійного розв'язування

Розв'язати мішану задачу для рівняння теплопровідності на півпрямій.

$$\begin{aligned} 1. \quad & u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ & u(x,0) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_1) \cup (x_2, +\infty), \\ u_0, & x \in (x_1, x_2), \end{cases} \\ & u_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Відповідь:
$$u(x,t) = \frac{u_0}{2} \left(\Phi\left(\frac{x-x_1}{2\sqrt{a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2\sqrt{a^2t}}\right) + \Phi\left(\frac{x+x_1}{2\sqrt{a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x+x_2}{2\sqrt{a^2t}}\right) \right), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ & u(x,0) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \cup (2, +\infty), \\ x, & x \in (1,2), \end{cases} \\ & u_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Відповідь:

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{(1+x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(2-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(2+x)^2}{4t}} + e^{-\frac{(1-x)^2}{4t}} \right) + \frac{x}{2} \left(\Phi\left(\frac{2-x}{2\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{1+x}{2\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{2+x}{2\sqrt{t}}\right) \right),$$

$$0 < x < +\infty, \quad t > 0.$$

III. Розв'яжемо мішану задачу за умови, що початкова температура стрижня дорівнює нулю, а на кінці $x=0$ стрижня задано закон зміни температури

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (2.21)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (2.22)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad t \geq 0. \quad (2.23)$$

Розв'язок цієї задачі будемо шукати у вигляді

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0. \quad (2.24)$$

Так задана функція задовольняє рівняння (2.21), в чому можна переконатися продиференціювавши u один раз за t і двічі за x та підставивши в (2.21):

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x^2}{a^3(t-\tau)^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau, \\ u_{xx}(x, t) &= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{3x}{a^3(t-\tau)^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau + \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x^3}{a^5(t-\tau)^{\frac{7}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau, \\ u_{tt}(x, t) &= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{3x}{a(t-\tau)^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau + \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x^3}{a^3(t-\tau)^{\frac{7}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Доведемо, що u задовольняє умови задачі. Для зручності проведемо заміну змінних за допомогою формул

$$z = \frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}, \quad \tau = t - \frac{x^2}{(2az)^2}, \quad dz = \frac{x}{4a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau.$$

τ	0	t
z	$\frac{x}{2a\sqrt{t}}$	$+\infty$

Тоді

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-z^2} \mu\left(t - \frac{x^2}{(2az)^2}\right) dz, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0.$$

Задовольнимо початкову умову (2.22):

$$u(x,0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-z^2} \mu\left(t - \frac{x^2}{(2az)^2}\right) dz \bigg|_{t=0} = \left| \frac{\frac{x}{2a\sqrt{t}} \rightarrow +\infty}{t \rightarrow 0} \right| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{+\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \mu\left(\frac{x^2}{(2az)^2}\right) dz = 0.$$

Задовольнимо крайову умову (2.23):

$$u(0,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} \mu(t) dz = \mu(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \mu(t) \Phi(+\infty) = \mu(t).$$

Отже, функція (2.24) є розв'язком задачі (2.21)–(2.23).

Приклад. Розв'язати мішану задачу для рівняння теплопровідності на півпрямій

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < +\infty,$$

$$u(0,t) = T, \quad t \geq 0.$$

◀ Застосуємо формулу (2.24):

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{T x}{a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Проведемо заміну змінних за формулами

$$z = \frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}, \quad \tau = t - \frac{x^2}{(2az)^2}, \quad dz = \frac{x}{4a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau.$$

τ	0	t
z	$\frac{x}{2a\sqrt{t}}$	$+\infty$

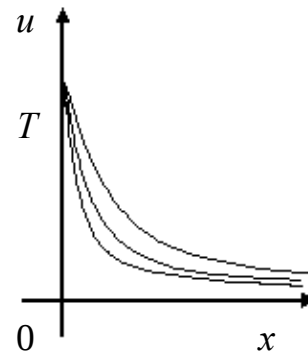


Рис. 2.11

Тоді

$$u(x,t) = T \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-z^2} dz = T \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz \right) = T \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right),$$

$$0 \leq x < +\infty, \quad t > 0.$$

Графіки розв'язків при $t > 0$ схематично подано на рисунку 2.11.▶

IV. Розв'яжемо мішану задачу за умови, що початкова температура стрижня дорівнює нулю, а на кінець $x = 0$ стрижня подається тепловий потік

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (2.25)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (2.26)$$

$$u_x(0, t) = v(t), \quad t \geq 0. \quad (2.27)$$

Перевіримо, що розв'язок цієї задачі можна подати у вигляді

$$u(x, t) = \frac{-a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} v(\tau) d\tau, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0. \quad (2.28)$$

Продиференціюємо функцію u один раз за t та двічі за x та результати підставимо в (2.25) для того, щоб переконатися, що вона задовольняє рівняння (2.25). Маємо

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} v(\tau) d\tau,$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} v(\tau) d\tau + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x^2}{a^3(t-\tau)^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} v(\tau) d\tau,$$

$$u_t(x, t) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} v(\tau) d\tau + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x^2}{a(t-\tau)^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} v(\tau) d\tau.$$

Звідси очевидно випливає, що $u_t = a^2 u_{xx}$.

Тепер доведемо, що u задовольняє умови задачі. Проведемо заміну змінних

$$z = \frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}, \quad \tau = t - \frac{x^2}{(2az)^2}, \quad dz = \frac{x}{4a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau.$$

τ	0	t
z	$\frac{x}{2a\sqrt{t}}$	$+\infty$

Тоді

$$u_x(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-z^2} v\left(t - \frac{x^2}{(2az)^2}\right) dz.$$

Задовольнимо початкову умову (2.26):

$$u(x,0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-z^2} v\left(t - \frac{x^2}{(2az)^2}\right) dz \bigg|_{t=0} = \left| \frac{x}{2a\sqrt{t}} \rightarrow +\infty \right|_{t \rightarrow 0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{+\infty}^{+\infty} e^{-z^2} v\left(\frac{x^2}{(2az)^2}\right) dz = 0.$$

Задовольнимо крайову умову (2.27):

$$u_x(0,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} v(t) dz = v(t) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = v(t) \Phi(+\infty) = v(t).$$

Отже, функція (2.28) є розв'язком задачі (2.25)–(2.27).

V. Розв'яжемо мішану задачу за умови, що відома початкова температура стрижня, а на кінці $x=0$ стрижня задано закон зміни температури

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < +\infty,$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad t \geq 0.$$

Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \quad 0 \leq x < +\infty, \quad t > 0,$$

де функції v та w є розв'язками таких задач:

$$\left. \begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ v(x,0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x < +\infty, \\ v(0,t) &= 0, \quad t \geq 0; \end{aligned} \right\} \begin{aligned} w_t &= a^2 w_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ w(x,0) &= 0, \quad 0 \leq x < +\infty, \\ w(0,t) &= \mu(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Використовуючи результати пунктів I і III, отримуємо

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(\xi) \left(e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2 t}} \right) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left(e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau, \\ &0 \leq x < +\infty, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Розв'язати мішану задачу для рівняння теплопровідності на півпрямій

$$u_t = a^2 u_{xx} - b^2 e^{-kx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty,$$

$$u(0, t) = T, \quad t \geq 0.$$

Відповідь:

$$u(x, t) = \left(T - \frac{b^2}{a^2 k^2} \right) \left(1 - \Phi \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right) + \frac{b^2}{a^2 k^2} e^{-kx} - \frac{b^2 e^{a^2 k^2 t}}{a^2 k^2} \left(e^{-kx} \left(1 + \Phi \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) \right) - e^{kx} \left(1 - \Phi \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ak\sqrt{t} \right) \right) \right),$$
$$0 \leq x < +\infty, \quad t > 0.$$

Розділ 3

Функція Гріна крайових задач для рівнянь еліптичного типу

§ 1. Формули Гріна

Перш ніж перейти до власне розв'язування крайових задач для рівнянь еліптичного типу пригадаємо деякі факти з курсу математичного аналізу.

Розглянемо відому формулу Остроградського-Гаусса

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) ds = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma, \quad (3.1)$$

де V – деяка область, обмежена достатньо гладкою замкненою поверхнею S , $ds = dxdydz$ – елемент об'єму, $d\sigma$ – елемент площі поверхні, α, β, γ – кути, що утворює зовнішня нормаль $\vec{n}$ до поверхні S з додатними напрямками координатних осей, а P, Q, R – довільні диференційовні функції аргументів x, y, z .

Нехай $u = u(x, y, z)$ та $v = v(x, y, z)$ – функції, неперервні разом зі своїми першими похідними в $V \cup S$ та мають неперервні другі похідні всередині V .

Покладемо

$$P = u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = u \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R = u \frac{\partial v}{\partial z}$$

та скористаємось формулою Остроградського-Гаусса. Оскільки

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

то

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) ds = \\ = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + u \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + u \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Далі перепишемо інтеграл з лівої частини останньої рівності у вигляді

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) ds + \iiint_V u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) ds = \\ & = \iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) ds + \iiint_V u \Delta v ds, \end{aligned}$$

а з правої частини – у вигляді

$$\iint_S u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right) d\sigma = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} d\sigma,$$

де $\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}$ – похідна функції $v(x, y, z)$ за напрямом зовнішньої нормалі $\vec{n}$.

Тоді формула (3.2) набуде вигляду

$$\iiint_V u \Delta v ds = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} d\sigma - \iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) ds.$$

Якщо поміняти місцями функції u та v , то матимемо

$$\iiint_V v \Delta u ds = \iint_S v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\sigma - \iiint_V \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) ds.$$

Узявши різниці лівих і правих частин останніх двох рівностей, отримаємо другу формулу Гріна

$$\iiint_V (u \Delta v - v \Delta u) ds = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma.$$

Формулу Гріна можна застосувати й у випадку, коли область V обмежена декількома поверхнями. При цьому поверхневі інтеграли в правій частині беруться по всіх поверхнях, що обмежують область V . Наприклад,

$$\iiint_V (u \Delta v - v \Delta u) ds = \iint_{s_1} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}_1} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_1} \right) d\sigma + \iint_{s_2} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}_2} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_2} \right) d\sigma. \quad (3.3)$$

Для двовимірного випадку існує аналогічна формула.

Нехай $u = u(x, y)$ та $v = v(x, y)$ – функції, неперервні разом зі своїми першими похідними в $D \cup \Gamma$ та мають неперервні другі похідні всередині D , де D – плоска область, а $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ – її межа. Тоді

$$\iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \oint_{\Gamma_1} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}_1} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_1} \right) d\ell + \oint_{\Gamma_2} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}_2} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_2} \right) d\ell, \quad (3.4)$$

де $d\ell$ – елемент довжини дуги кривої, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_l}$ – похідна за напрямом зовнішньої до кривої Γ_l нормалі $l \in \{1, 2\}$.

§ 2. Задача Діріхле для рівняння Лапласа на площині

I. Будемо шукати таку функцію, що задовольняє рівняння Лапласа всередині деякої області $D \subset \mathbf{R}^2$ обмеженої замкненою кривою $C = \partial D$, та набуває заданих значень на самій кривій (межі), тобто розглянемо задачу

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } D, \quad (3.5)$$

$$u|_C = g. \quad (3.6)$$

Фізичною інтерпретацією такої задачі може слугувати задача про потенціал електростатичного поля всередині області, якщо відомий потенціал на контурі.

Виберемо всередині області довільно фіксовану точку $M_0(x_0, y_0)$. Навколо точки побудуємо коло C_ε радіуса ε з центром у точці M_0 , яка повністю лежить всередині області D . Між двома контурами C та C_ε розташована область, яку позначимо через T (рис. 3.1). Нехай тепер точка $P(x, y)$ області D відмінна від M_0 . Відстань між цими точками

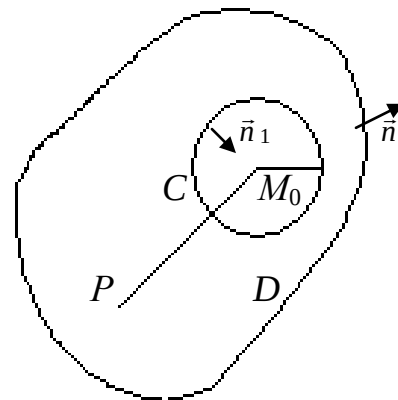


Рис. 3.1

$$r_{PM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Позначимо через $\vec{n}$ зовнішню нормаль до контуру C , а через $\vec{n}_1$ – до кола C_ε (цей вектор напрямлений всередину, оскільки внутрішня частина кола не належить тілу T , тобто є зовнішньою областю).

Розглянемо функцію

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PM_0}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = -\frac{1}{4\pi} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2).$$

Ця функція є гармонічною (задовольняє рівняння Лапласа) в усіх точках області D крім точки M_0 . Перевірити цей факт можна простою підстановкою функції у рівняння $\Delta\omega=0$:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{2(x-x_0)^2}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y-y_0)^2 - (x-x_0)^2}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2}.$$

Тоді

$$\Delta\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{(y-y_0)^2 - (x-x_0)^2}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2} = 0.$$

Отже, функція ω є гармонічною.

Зауваження. При $(x_0, y_0) = (0, 0)$ функція $\omega(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ називається фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа на площині. Функція $\varepsilon(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ називається ньютонівським потенціалом. Якщо в початку координат зосередити заряд q , то потенціал поля утвореного цим зарядом буде $q \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Введемо ще одну функцію ω_1 , гармонічну в D і таку, що вона збігається з функцією ω **лише** на межі C : $\omega_1|_C = \omega|_C$.

Різницю функцій $\omega_1 - \omega$ називають функцією Гріна для області D і позначають

$$G(x, y; x_0, y_0) = \omega - \omega_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PM_0}} - \omega_1. \quad (3.7)$$

Властивості функції Гріна:

1. Функція Гріна є розв'язком однорідної задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\Delta G = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y_0^2} = 0, \quad (x_0, y_0) \neq (x, y) \in D, \quad (3.8)$$

$$G|_C = 0. \quad (3.9)$$

2. $G(x, y; x_0, y_0) > 0$, при $(x_0, y_0) \neq (x, y) \in D$.

3. Симетричність $G(x, y; x_0, y_0) = G(x_0, y_0; x, y)$, $(x_0, y_0) \neq (x, y) \in D$.

Знайдемо тепер інтегральне зображення розв'язку задачі (3.5), (3.6). Розглянемо формулу (3.4) для області D (див. рис. 3.1), де $u = u(x, y)$ – розв'язок задачі (3.5),

(3.6), а замість v підставимо функцію Гріна $G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PM_0}} - \omega_1$:

$$\iint_D (u \Delta G - G \Delta u) dx dy = \oint_{C_\varepsilon} \left(u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_1} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_1} \right) d\ell + \oint_C \left(u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\ell.$$

Оскільки $\Delta u = 0$ та $\Delta G = 0$, то

$$\oint_{C_\varepsilon} \left(u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_1} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_1} \right) d\ell + \oint_C \left(u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\ell = 0.$$

Розглянемо кожен інтеграл окремо.

На підставі умов (3.6) і (3.9) другий інтеграл дорівнює

$$\oint_C \left(u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\ell = \oint_C \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \Big|_C g d\ell.$$

Для обчислення першого інтеграла введемо полярні координати, взявши за центр точку M_0 . Тоді на C_ε :

$$x = \rho \cos \varphi = \varepsilon \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi = \varepsilon \sin \varphi, \quad d\ell = \varepsilon d\varphi, \quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}_1} = -\frac{\partial}{\partial \rho}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} -\oint_C \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \Big|_C g d\ell &= \varepsilon \int_0^{2\pi} \left(-u \frac{\partial G}{\partial \rho} + G \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon} d\varphi = \\ &= \varepsilon \int_0^{2\pi} \left(u \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} - \omega_1 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon} d\varphi + \varepsilon \int_0^{2\pi} \left(-u \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon} d\varphi. \end{aligned}$$

Спрямуємо ε до нуля та знайдемо границі інтегралів з правої частини. Оскільки функції u та ω_1 гармонічні, то на підставі властивостей гармонічних функцій вони разом зі своїми похідними обмежені. Тоді

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \left(u \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} - \omega_1 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \bigg|_{\rho=\varepsilon} d\varphi = 0.$$

Границя другого інтеграла дорівнює

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \left(-u \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \bigg|_{\rho=\varepsilon} d\varphi &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \left(u \frac{1}{\rho} - \ln \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \bigg|_{\rho=\varepsilon} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} u \bigg|_{\rho=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} d\varphi - \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \rho} \bigg|_{\rho=\varepsilon} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi u \bigg|_{\rho=\varepsilon} - \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^{-1}} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \rho} \bigg|_{\rho=\varepsilon} d\varphi = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u \bigg|_{\rho=\varepsilon} - \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{-2}} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \rho} \bigg|_{\rho=\varepsilon} d\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u \bigg|_{\rho=\varepsilon} - \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \rho} \bigg|_{\rho=\varepsilon} d\varphi = \\ &= u \bigg|_{\rho=0} = u(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Отже, для розв'язку задачі Діріхле (3.5), (3.6) маємо

$$u(x_0, y_0) = - \oint_C \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \bigg|_C g d\ell. \quad (3.10)$$

Формула (3.10) дає розв'язок у будь-якій точці M_0 області D за умови, що відома функція Гріна для відповідної області.

Задача Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta u = f \quad \text{в } D,$$

$$u|_C = g$$

розв'язується аналогічним чином. Її розв'язок може бути зображений у вигляді

$$u(x_0, y_0) = - \oint_C \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \bigg|_C g d\ell - \iint_D G(x, y; x_0, y_0) f(x, y) dx dy. \quad (3.11)$$

Зауваження. Функція Гріна є функцією двох точок (x, y) та (x_0, y_0) , причому x_0 і y_0 є основними змінними, а x, y – параметричними змінними. Інтегрування іде саме за (x, y) .

II. Побудова функції Гріна в деяких випадках проводиться методом симетричних (дзеркальних) або електростатичних відображень. Ідея полягає в застосуванні фізичного змісту фундаментального розв'язку рівняння Лапласа (ньютонівського потенціалу).

Навколо одиничного заряду в точці $M_0(x_0, y_0)$ утворюється електростатичне поле, потенціал якого в точці $P(x, y)$ дорівнює $\ln \frac{1}{r_{PM_0}}$. Функція Гріна

$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PM_0}} - \omega_1$, після множення на 2π , є сумою потенціалу в точці (x, y) поля, утвореного зарядом в точці M_0 , і потенціалу поля, утвореного зарядами (електростатичними зображеннями), що розташовані поза областю D та компенсують поле заряду в точці M_0 на межі ∂D .

Алгоритм пошуку:

- 1) вибираємо всередині області довільно фіксовану точку $M_0(x_0, y_0)$ та помістимо в неї одиничний додатний електричний заряд;
- 2) будуємо точку M_1 , симетричну відносно межі області, та помістимо в неї від'ємний заряд $(-q)$ (у випадку, коли межа складається з кількох частин, побудова проводиться відносно кожної частини, а на отримані точки знову проводиться операція відображення з використанням протилежних зарядів);
- 3) виписуємо функцію Гріна, причому $\omega_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{q}{r_{PM_1}}$, та перевіряємо умову рівності нулю G на межі.

Для певних областей реалізувати цей алгоритм достатньо легко. Крім того, якщо відома функція Гріна для певної області D , то за формулою (3.11) можна отримати розв'язки **всіх** задач Діріхле в цій області.

Приклад 1. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Пуассона на півплощині:

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0, x \in \mathbf{R}\},$$

$$u|_{y=0} = g(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

◀ Скористаємось формулою (3.11)

$$u(x_0, y_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \Big|_{y=0} g(x) dx - \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y; x_0, y_0) f(x, y) dx.$$

Знайдемо функцію Гріна методом електростатичних відображень.

Виберемо довільно всередині області D точку $M_0(x_0, y_0)$ і помістимо в неї додатний одиничний електричний заряд. Потенціал поля цього заряду в точці $P(x, y)$ дорівнює $\ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$. Побудуємо точку $M_1(x_0, -y_0)$ симетричну точці M_0 відносно осі OX – межі області D (рис. 3.2). Помістимо в цю точку одиничний від’ємний заряд. Його поле має

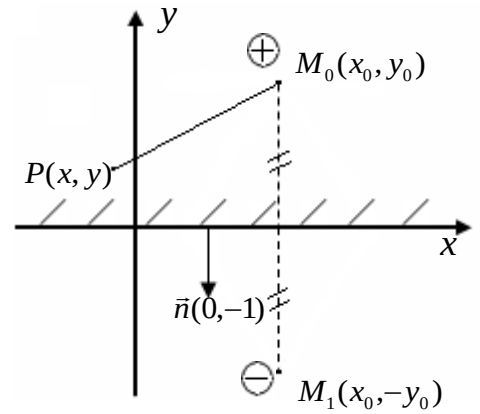


Рис. 3.2

потенціал

$\ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}}$ та компенсує поле точки M_0 при $y = 0$.

Отже,

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}},$$

причому $G|_{y=0} = G(x, 0; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (-y_0)^2}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y_0^2}} = 0$.

Перепишемо функцію Гріна у більш зручному вигляді, використовуючи властивості логарифмів

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi} \left[\ln((x-x_0)^2 + (y+y_0)^2) - \ln((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) \right] = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Знайдемо похідну функції G за напрямом зовнішньої до межі області D нормалі $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, де α, β – кути з додатними напрямками координатних осей OX та OY відповідно. Тобто $\vec{n} = (\cos 90^\circ, \cos 180^\circ) = (0, -1)$.

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \Big|_{y=0} &= \left(\frac{\partial G}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial G}{\partial y} \cos\beta \right) \Big|_{y=0} = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot (-1) \right) \Big|_{y=0} = \left(-\frac{\partial G}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2(y+y_0)}{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2} - \frac{2(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right) \Big|_{y=0} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2} - \frac{-y_0}{(x-x_0)^2 + (-y_0)^2} \right) = -\frac{1}{2\pi} \frac{2y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2} = -\frac{1}{\pi} \frac{y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2}. \end{aligned}$$

Отже, розв'язком заданої задачі є

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2} g(x) dx - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} f(x, y) dx,$$

$$(x_0, y_0) \in D. \blacktriangleright$$

Приклад 2.

Знайти стаціонарний розподіл температури на верхній півплощині, якщо на її межі – осі ОХ – підтримується нульова температура при $x \in (-\infty, 0)$, а при $x \in (0, +\infty)$ – стала температура T .

◀ Маємо задачу

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0, x \in \mathbf{R}\},$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ T, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Скористаємось результатом попередньої задачі

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2} u(x, 0) dx = \frac{y_0 T}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(x-x_0)^2 + y_0^2} dx =$$

$$= \frac{y_0 T}{\pi} \frac{1}{y_0} \arctg \frac{x-x_0}{y_0} \Big|_0^{\infty} = \frac{T}{\pi} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg \frac{x-x_0}{y_0} - \arctg \frac{-x_0}{y_0} \right) = \frac{T}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{x_0}{y_0} \right),$$

$$(x_0, y_0) \in D. \blacktriangleright$$

Приклад 3.

Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Пуассона:

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0, x > 0\},$$

$$u|_{y=0} = g(x), \quad x > 0,$$

$$u|_{x=0} = h(y), \quad y > 0.$$

◀ Скористаємось формулою (3.11)

$$u(x_0, y_0) = - \int_0^{\infty} \frac{\partial G}{\partial \bar{n}_1} \Big|_{y=0} g(x) dx - \int_0^{\infty} \frac{\partial G}{\partial \bar{n}_2} \Big|_{x=0} h(y) dy - \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} G(x, y; x_0, y_0) f(x, y) dx.$$

Знайдемо функцію Гріна методом електростатичних відображень.

Виберемо всередині області точку $M_0(x_0, y_0)$ та помістимо в неї додатний одиничний електричний заряд.

Побудуємо точку $M_1(x_0, -y_0)$, симетричну точці M_0 відносно осі OX та точку $M_2(-x_0, y_0)$ – симетричну точці M_0 відносно осі OY . Помістимо в ці точки одиничні від’ємні заряди (рис. 3.3).

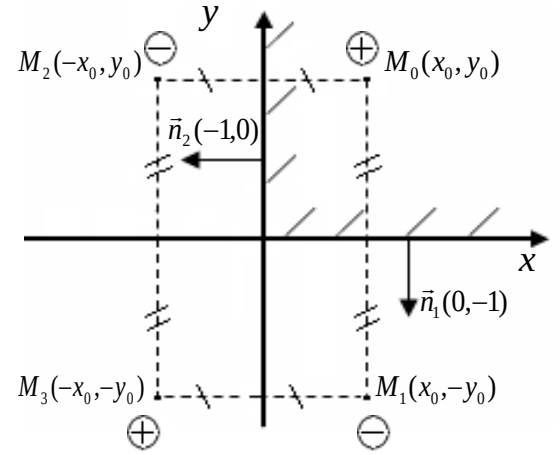


Рис. 3.3

Нехай $M_3(-x_0, -y_0)$ – точка симетрична точкам M_1 та M_2 відносно осі OY та OX відповідно. В цій точці розташуємо додатний одиничний заряд. Кількість точок зумовлена тим, що межа складається з двох частин. Отже,

$$\begin{aligned} G(x, y; x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2}} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \frac{((x-x_0)^2 + (y+y_0)^2) \cdot ((x+x_0)^2 + (y-y_0)^2)}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) \cdot ((x+x_0)^2 + (y+y_0)^2)}, \end{aligned}$$

причому

$$\begin{aligned} G|_{y=0} &= G(x, 0; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (-y_0)^2}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y_0^2}} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2 + (-y_0)^2}} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2 + y_0^2}} = 0, \\ G|_{x=0} &= G(0, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(-x_0)^2 + (y+y_0)^2}} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + (y-y_0)^2}} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + (y+y_0)^2}} = 0. \end{aligned}$$

Оскільки межа області D складається з двох частин, то знайдемо похідні від функції G за напрямками $\vec{n}_1(0, -1)$ та $\vec{n}_2(-1, 0)$ зовнішніх до меж області (осей OX та OY відповідно) нормалей.

Тоді

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_1} \right|_{y=0} &= \left(\frac{\partial G}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot (-1) \right) \bigg|_{y=0} = \left(-\frac{\partial G}{\partial y} \right) \bigg|_{y=0} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2(y+y_0)}{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2} - \frac{2(y-y_0)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{2(y-y_0)}{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2} - \frac{2(y+y_0)}{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2} \right) \bigg|_{y=0} = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2} - \frac{-y_0}{(x-x_0)^2 + (-y_0)^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{-y_0}{(x+x_0)^2 + y_0^2} - \frac{y_0}{(x+x_0)^2 + (-y_0)^2} \right) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2} - \frac{y_0}{(x+x_0)^2 + y_0^2} \right), \end{aligned}$$

аналогічно

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_2} \right|_{x=0} = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \cdot (-1) + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot 0 \right) \bigg|_{x=0} = \left(-\frac{\partial G}{\partial x} \right) \bigg|_{x=0} = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{x_0}{x_0^2 + (y-y_0)^2} - \frac{x_0}{x_0^2 + (y+y_0)^2} \right).$$

Отже, розв'язок задачі

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2} - \frac{y_0}{(x+x_0)^2 + y_0^2} \right) g(x) dx + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{x_0}{x_0^2 + (y-y_0)^2} - \frac{x_0}{x_0^2 + (y+y_0)^2} \right) h(y) dy - \\ &- \int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{1}{4\pi} \ln \frac{((x-x_0)^2 + (y+y_0)^2) \cdot ((x+x_0)^2 + (y-y_0)^2)}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) \cdot ((x+x_0)^2 + (y+y_0)^2)} f(x, y) dx. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Зауваження. З наведених прикладів видно, що формула (3.11) часто приводить до невластних інтегралів, для їх збіжності крайові умови для u повинні достатньо добре поводитись на межі, зокрема, бути обмеженими.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайти стаціонарний розподіл температури у верхній півплощині

$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0, x \in \mathbf{R}\}$, якщо на межі області задано температуру

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty), \\ T, & x \in (-a, a). \end{cases}$$

Відповідь:

$$u(x_0, y_0) = \frac{T}{\pi} \left(\arctg \frac{a-x_0}{y_0} + \arctg \frac{a+x_0}{y_0} \right).$$

2. Знайти стаціонарний розподіл температури в області

$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0, x > 0\}$, якщо на межі області задано температуру:

$$u(x, 0) = T_1, \quad x \in (0, +\infty), \text{ а } u(0, y) = T_2, \quad y \in (0, +\infty).$$

Відповідь:

$$u(x_0, y_0) = \frac{2}{\pi} \left(T_1 \arctg \frac{y_0}{x_0} + T_2 \arctg \frac{x_0}{y_0} \right).$$

3. Знайти функцію Гріна задачі Діріхле в смугі:

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < y < h, x \in \mathbf{R}\},$$

$$u|_{\partial D} = g(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Відповідь:

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\ln \frac{1}{r_n} - \ln \frac{1}{r_n^*} \right),$$

$$\text{де } r_n = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - (2nh + y_0))^2}, \quad r_n^* = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - (2nh - y_0))^2}.$$

§ 3. Задача Діріхле для рівняння Лапласа в крузі

Будемо шукати функцію, що задовольняє рівняння Лапласа в крузі $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < R^2\}$ радіуса R та набуває заданих значень на колі $\partial D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R^2\}$, тобто розв'язуватимемо задачу

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } D, \tag{3.12}$$

$$u|_{\partial D} = g. \tag{3.13}$$

Застосуємо метод електростатичних відображень для побудови функції Гріна. На відміну від попередніх прикладів, для кола замість симетричних точок потрібно будувати **спряжені**. Точки називаються **спряженими** відносно кола (сфери), якщо добуток відстаней від центра кола (сфери) до цих точок дорівнює квадрату радіуса. При побудові доцільно використовувати полярні координати.

Візьмемо всередині круга D довільну точку $M(x_0, y_0)$. Побудуємо точку, спряжену до точки M відносно кола ∂D . Для цього проведемо через точку M хорду перпендикулярно до радіуса, що проходить через цю точку. Через кінці хорди проведемо дотичні до кола. Спряженою точкою буде точка M^* перетину цих дотичних з променем, на якому лежить відрізок OM (рис. 3.4).

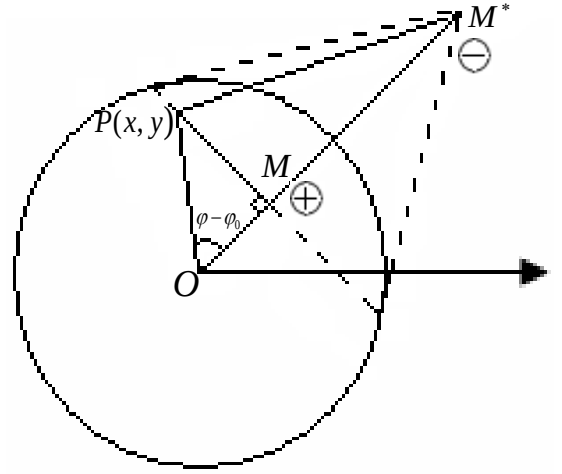


Рис. 3.4

Позначимо полярний кут точки P через φ , а точки M через φ_0 . Тоді $\angle POM = \varphi - \varphi_0 = \psi$.

Знайдемо координати точки $M^*(x_0^*, y_0^*)$. Позначимо $\rho_0 = |OM| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ і $\rho_0^* = |OM^*| = \sqrt{x_0^{*2} + y_0^{*2}}$. Тоді $|OM| \cdot |OM^*| = \rho_0 \cdot \rho_0^* = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cdot \sqrt{x_0^{*2} + y_0^{*2}} = R^2$. Оскільки точки M та M^* лежать на одному промені, що виходить з початку координат, то $\frac{x_0}{x_0^*} = \frac{y_0}{y_0^*} = \frac{\rho_0}{\rho_0^*} = \frac{\rho_0}{R^2/\rho_0} = \frac{\rho_0^2}{R^2}$, звідки $x_0^* = \frac{R^2}{\rho_0^2} x_0$, $y_0^* = \frac{R^2}{\rho_0^2} y_0$. Отже, $M^*\left(\frac{R^2}{\rho_0^2} x_0, \frac{R^2}{\rho_0^2} y_0\right)$.

Зауваження. Якщо M лежить всередині круга, то спряжена до неї точка лежить зовні. Точка, що лежить на колі, збігається зі своєю спряженою точкою. Для центра кола спряженої точки не існує.

Функція Гріна для круга має вигляд

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho_0 \sqrt{(x-x_0^*)^2 + (y-y_0^*)^2}} = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{PM}} - \ln \frac{R}{\rho_0 r_{PM^*}} \right).$$

Легко переконатися безпосереднім диференціюванням, що ця функція задовольняє рівняння Лапласа. Доведемо, що $G|_{\partial D} = 0$.

З трикутників OPM та OPM^* за теоремою косинусів маємо

$$r_{PM} = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\psi}, \quad r_{PM^*} = \sqrt{\rho^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} - 2\rho \frac{R}{\rho_0} \cos\psi}, \quad \text{де } \rho = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Якщо точка P потрапляє на коло ∂D ($\rho = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2} = R$), то

$$\begin{aligned}
G|_{\partial D} &= \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \psi}} - \ln \frac{R}{\rho_0 \sqrt{\rho^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} - 2\rho \frac{R}{\rho_0} \cos \psi}} \right) \Bigg|_{\rho=R} = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \left(\ln \sqrt{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \psi} - \ln \frac{\rho_0}{R} \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} - 2R \frac{R}{\rho_0} \cos \psi} \right) = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \left(\ln \sqrt{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \psi} - \ln \frac{\rho_0}{R} \sqrt{\frac{R^2}{\rho_0^2} (\rho_0^2 + R^2 - 2R\rho_0 \cos \psi)} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Отже,

$$G(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{PM}} - \ln \frac{R}{\rho_0 r_{PM^*}} \right) = -\frac{1}{2\pi} \left(\ln r_{PM} - \ln r_{PM^*} - \ln \frac{R}{\rho_0} \right).$$

Скористаємось формулою (3.11). Для цього перейдемо в цій формулі до полярних координат і знайдемо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial D} &= \frac{\partial G}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{r_{PM}} \frac{\partial r_{PM}}{\partial \rho} - \frac{1}{r_{PM^*}} \frac{\partial r_{PM^*}}{\partial \rho} \right) \Bigg|_{\rho=R} = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho - \rho_0 \cos \psi}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \psi} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\rho - \frac{R}{\rho_0} \cos \psi}{\rho^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} - 2\rho \frac{R}{\rho_0} \cos \psi} \right) \Bigg|_{\rho=R} = \left(\frac{\rho - \rho_0 \cos \psi}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \psi} - \frac{\rho - \frac{R}{\rho_0} \cos \psi}{\rho^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} - 2\rho \frac{R}{\rho_0} \cos \psi} \right) \Bigg|_{\rho=R} = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{R - \rho_0 \cos \psi}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \psi} - \frac{R - \frac{R}{\rho_0} \cos \psi}{R^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} - 2 \frac{R^2}{\rho_0} \cos \psi} \right) = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{R - \rho_0 \cos \psi}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \psi} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{R - \frac{R}{\rho_0} \cos \psi}{\frac{R^2}{\rho_0^2} (R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \psi)} \right) = -\frac{1}{2\pi} \frac{R - \rho_0 \cos \psi - \frac{\rho_0^2}{R^2} \left(R - \frac{R}{\rho_0} \cos \psi \right)}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \psi} = \\
&= -\frac{1}{2\pi} \frac{R - \frac{\rho_0^2}{R}}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \psi} = -\frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0))}.
\end{aligned}$$

Врахувавши, що в формулі (3.11) $d\ell = R d\varphi$, одержимо розв'язок задачі (3.12), (3.13) у вигляді

$$u(\rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2)g(\varphi)}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0))} d\varphi, \quad 0 < \rho_0 < R, 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (3.14)$$

Формула (3.14) називається *формулою Пуассона*, інтеграл із неї – *інтегралом Пуассона*, а функція $\frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0))}$ – *ядром Пуассона* задачі Діріхле в крузі.

Зауваження. Розглянемо задачу Діріхле зовні круга D , тобто задачу

$$\Delta u = 0 \quad \text{зовні } D,$$

$$u|_{\partial D} = g.$$

Розв'язок цієї задачі визначається формулою

$$u(\rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\rho_0^2 - R^2)g(\varphi)}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0))} d\varphi, \quad \rho_0 > R, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Приклад 1.

Розв'язати таку задачу Діріхле в крузі

$$\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} = 0, \quad (\rho, \varphi) \in \{\rho < 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\},$$

$$u(1, \varphi) = \begin{cases} T, & 0 < \varphi < \pi, \\ 0, & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

◀ Фізичною інтерпретацією поставленої задачі є задача про стаціонарний розподіл температури в тонкій однорідній круглій пластинці одиничного радіуса, якщо верхня половина межі підтримується за температури T , а нижня – за нульової температури.

Застосуємо формулу (3.14):

$$u(\rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \rho_0^2)u(1, \varphi)}{(1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0))} d\varphi = \frac{T}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(1 - \rho_0^2)}{(1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0))} d\varphi.$$

Зауваження. Для обчислення інтегралів такого типу зазвичай використовується універсальна тригонометрична підстановка. Але з курсу математичного аналізу відомо,

що іноді вона приводить до невласних інтегралів, тому до обчислення таких інтегралів необхідно підходити дуже обережно.

Якщо точка M розташована у верхньому півкрузі, тобто $0 < \varphi_0 < \pi$, то можна інтегрувати за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} = t, \quad \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad d\varphi = \frac{2dt}{1 + t^2}, \quad 0 < \varphi < \pi \Rightarrow -\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} < t < \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2}.$$

Оскільки кут $-\varphi_0 < \varphi - \varphi_0 < \pi - \varphi_0$, причому $\varphi - \varphi_0 \neq \pi$, то $\operatorname{tg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2}$ існує в усіх точках проміжку інтегрування. Маємо

$$\begin{aligned} u(\rho_0, \varphi_0) &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}^{\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2}} \frac{(1 - \rho_0^2)}{\left(1 + \rho_0^2 - 2\rho_0 \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)} \cdot \frac{2dt}{1 + t^2} = \frac{T}{\pi} \int_{-\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}^{\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2}} \frac{(1 - \rho_0^2)dt}{((1 + \rho_0^2)(1 + t^2) - 2\rho_0(1 - t^2))} = \\ &= \frac{T}{\pi} \int_{-\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}^{\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2}} \frac{(1 - \rho_0^2)dt}{(1 + 2\rho_0 + \rho_0^2)t^2 + (1 - 2\rho_0 + \rho_0^2)} = \frac{T}{\pi} \int_{-\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}^{\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2}} \frac{(1 - \rho_0^2)dt}{(1 + \rho_0)^2 t^2 + (1 - \rho_0)^2} = \\ &= \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0} t \Big|_{-\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}}^{\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2}} = \frac{T}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Спростимо вираз, скориставшись формулою

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}, & xy < 1, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}, & x > 0, \quad xy > 1. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned} u(\rho_0, \varphi_0) &= \frac{T}{\pi} \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{\frac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0} \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right)}{1 - \left(\frac{1 + \rho_0}{1 - \rho_0} \right)^2} \right) = \frac{T}{\pi} \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{(1 - \rho_0^2) \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right)}{(1 - \rho_0)^2 - (1 + \rho_0)^2} \right) = \\ &= T + \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \rho_0^2) \left(\cos \frac{\varphi_0}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2} \right)^{-1}}{(1 - 2\rho_0 + \rho_0^2 - 1 - 2\rho_0 - \rho_0^2)} = T + \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \rho_0^2)}{-2\rho_0 \sin \varphi_0} = T - \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(1 - \rho_0^2)}{2\rho_0 \sin \varphi_0}. \end{aligned}$$

Якщо точка M розташована в нижньому півкрузі, тобто $\pi < \varphi_0 < 2\pi$, то можна інтегрувати за допомогою підстановки

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2} = t, \quad \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad d\varphi = -\frac{2dt}{1+t^2}, \quad 0 < \varphi < \pi \Rightarrow -\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} < t < \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}.$$

Оскільки кут $-\varphi_0 < \varphi - \varphi_0 < \pi - \varphi_0$, причому $\varphi - \varphi_0 \neq 0$, то $\operatorname{ctg} \frac{\varphi - \varphi_0}{2}$ існує в усіх точках проміжку інтегрування. Маємо

$$\begin{aligned} u(\rho_0, \varphi_0) &= -\frac{T}{2\pi} \int_{-\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} \frac{(1-\rho_0^2)}{\left(1+\rho_0^2-2\rho_0 \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = -\frac{T}{\pi} \int_{-\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} \frac{(1-\rho_0^2)dt}{(1+\rho_0)^2 t^2 + (1-\rho_0)^2} = \\ &= -\frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} t \Big|_{-\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}} = -\frac{T}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} \right) \right) = \\ &= -\frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi_0}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right)}{1 - \left(\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} \right)^2} = \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(1-\rho_0^2)}{2\rho_0 \sin \varphi_0}. \end{aligned}$$

Отже, розв'язок задачі визначається формулою

$$u(\rho_0, \varphi_0) = \begin{cases} T - \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(1-\rho_0^2)}{2\rho_0 \sin \varphi_0}, & 0 < \varphi_0 < \pi, \\ \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(1-\rho_0^2)}{2\rho_0 \sin \varphi_0}, & \pi < \varphi_0 < 2\pi. \end{cases} \quad \blacktriangleright$$

Приклад 2.

Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле у верхньому півкрузі $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < R^2, y > 0\}$

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } D,$$

$$u|_C = g,$$

$$u|_{y=0} = h,$$

де $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R^2, y > 0\}$.

◀ Застосуємо метод електростатичних відображень.

Виберемо всередині півкруга D точку $M_0(x_0, y_0)$ та помістимо в неї додатний одиничний електричний заряд. Спряженою до неї точкою буде точка $M_0^*\left(\frac{R^2}{\rho_0^2} x_0, \frac{R^2}{\rho_0^2} y_0\right)$.

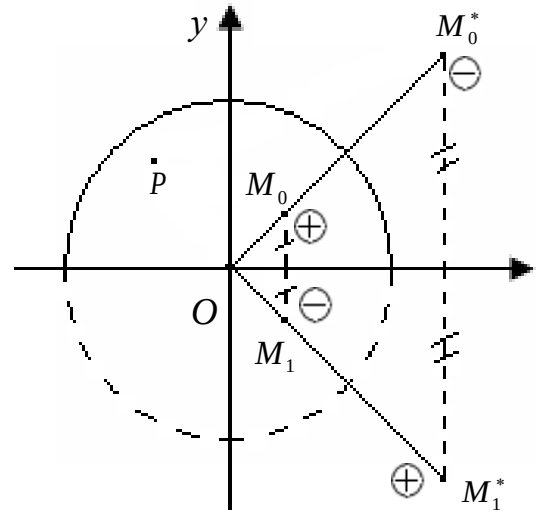


Рис. 3.5

Побудуємо точки $M_1(x_0, -y_0)$ та $M_1^*\left(\frac{R^2}{\rho_0^2} x_0, -\frac{R^2}{\rho_0^2} y_0\right)$, симетричні точкам M_0 та M_0^* відносно осі OX (рис. 3.5).

Випишемо функцію Гріна

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho_0 \sqrt{\left(x - \frac{R^2}{\rho_0^2} x_0\right)^2 + \left(y - \frac{R^2}{\rho_0^2} y_0\right)^2}} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho_0 \sqrt{\left(x - \frac{R^2}{\rho_0^2} x_0\right)^2 + \left(y + \frac{R^2}{\rho_0^2} y_0\right)^2}}.$$

Перевіримо, чи дорівнює вона нулю на межі півкруга D :

$$G|_{y=0} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y_0^2}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (-y_0)^2}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho_0 \sqrt{\left(x - \frac{R^2}{\rho_0^2} x_0\right)^2 + \left(-\frac{R^2}{\rho_0^2} y_0\right)^2}} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho_0 \sqrt{\left(x - \frac{R^2}{\rho_0^2} x_0\right)^2 + \left(\frac{R^2}{\rho_0^2} y_0\right)^2}} = 0,$$

$$G|_{\rho=R} = -\frac{1}{2\pi} \left(\ln \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\psi} - \ln \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 + 2\rho\rho_0 \cos\psi} - \ln \frac{R}{\rho_0} \sqrt{\rho^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} + 2\rho \frac{R}{\rho_0} \cos\psi} + \ln \frac{R}{\rho_0} \sqrt{\rho^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} - 2\rho \frac{R}{\rho_0} \cos\psi} \right) \Big|_{\rho=R} = 0.$$

Отже, функцію Гріна виписано правильно. ▶

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайти функцію Гріна задачі Діріхле в чверті круга.

Відповідь:

$$G(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{PM_0}} - \ln \frac{R}{\rho_0 r_{PM_0^*}} - \ln \frac{1}{r_{PM_1}} + \ln \frac{R}{\rho_0 r_{PM_1^*}} - \ln \frac{1}{r_{PM_2}} + \ln \frac{R}{\rho_0 r_{PM_2^*}} + \ln \frac{1}{r_{PM_3}} - \ln \frac{R}{\rho_0 r_{PM_3^*}} \right)$$

де $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_0, -y_0)$, $M_2(-x_0, -y_0)$, $M_3(-x_0, y_0)$,
 $M_0^*(x_0^*, y_0^*)$, $M_1^*(x_0^*, -y_0^*)$, $M_2^*(-x_0^*, -y_0^*)$, $M_3^*(-x_0^*, y_0^*)$, $x_0^* = \frac{R^2}{\rho_0^2} x_0$, $y_0^* = \frac{R^2}{\rho_0^2} y_0$.

2. Розв'язати задачу Діріхле в півкрузі

$$\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} = 0, \quad (\rho, \varphi) \in \{\rho < 1, 0 \leq \varphi \leq \pi\},$$
$$u(1, \varphi) = 0,$$
$$u(\rho, 0) = 1, \quad u(\rho, \pi) = 1.$$

Відповідь:

$$u(\rho_0, \varphi_0) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\rho_0 \sin \varphi_0}{\rho_0^2 - 1}.$$

3. Розв'язати задачу Діріхле в півкрузі

$$\Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} = 0, \quad (\rho, \varphi) \in \{\rho < 1, 0 \leq \varphi \leq \pi\},$$
$$u(1, \varphi) = \cos \frac{\varphi}{2},$$
$$u(\rho, 0) = \sqrt{\rho}, \quad u(\rho, \pi) = 0.$$

Відповідь:

$$u(\rho_0, \varphi_0) = \sqrt{\rho_0} \cos \frac{\varphi_0}{2}.$$

§ 4. Задача Діріхле для рівняння Лапласа в просторових областях

Будемо шукати функцію, що задовольняє рівняння Лапласа всередині замкненої поверхні $S = \partial V$, яка обмежує область V , і набуває заданих значень на самій поверхні (межі області V), тобто розв'язуватимемо задачу

$$\Delta u = 0 \quad \text{у } V, \quad (3.15)$$

$$u|_S = g. \quad (3.16)$$

Фізичною інтерпретацією такої задачі може слугувати задача про потенціал електростатичного поля всередині тіла, якщо відомий потенціал на поверхні, або про стаціонарний розподіл температури всередині тіла при заданій температурі на поверхні.

Візьмемо всередині області V довільну, але фіксовану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Навколо точки побудуємо сферу S_ϵ радіуса ϵ з центром у точці M_0 , яка повністю лежить всередині області V . Між двома поверхнями S та S_ϵ розташована область, яку позначимо через T (рис. 3.6). Розглянемо тепер точку $P(x, y, z)$ області V , відмінну від M_0 , і відстань між цими точками

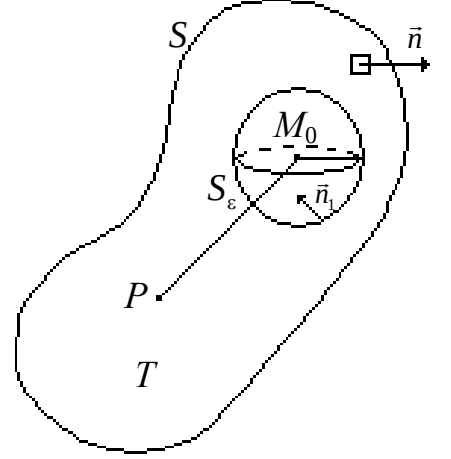


Рис. 3.6

Позначимо через $\vec{n}$ зовнішню нормаль до поверхні S , а через $\vec{n}_1$ – до поверхні S_ϵ (цей вектор напрямлений всередину, оскільки внутрішня частина кулі, що обмежена S_ϵ , не належить області T , тобто є зовнішньою областю щодо T). Розглянемо функцію

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{PM_0}} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}.$$

Ця функція задовольняє рівняння Лапласа (є гармонічною) в усіх точках області V , крім точки M_0 . Перевірити цей факт можна простою підстановкою функції у рівняння $\Delta\omega = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{(x-x_0)}{\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^3}}, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4\pi \sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^3}} + \frac{3(x-x_0)^2}{4\pi \sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^5}} = \\ &= \frac{-(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 - (z-z_0)^2 + 3(x-x_0)^2}{4\pi \sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^5}} = \frac{2(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 - (z-z_0)^2}{4\pi \sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^5}}. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{2(y-y_0)^2 - (x-x_0)^2 - (z-z_0)^2}{4\pi\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^5}},$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \frac{2(z-z_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{4\pi\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^5}}.$$

Тоді

$$\Delta\omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \frac{2(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 - (z-z_0)^2}{4\pi\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^5}} +$$

$$+ \frac{2(y-y_0)^2 - (x-x_0)^2 - (z-z_0)^2}{4\pi\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^5}} + \frac{2(z-z_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}{4\pi\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^5}} = 0.$$

Отже, функція ω є гармонічною.

Введемо ще одну гармонічну в V функцію ω_1 таку, що вона дорівнює функції ω **лише** на межі S : $\omega_1|_S = \omega|_S$.

Різницю функцій $\omega_1 - \omega$ називають функцією Гріна для області V і позначають

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \omega - \omega_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{PM_0}} - \omega_1. \quad (3.17)$$

Функція Гріна є розв'язком однорідної задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\Delta G = 0 \quad \text{у } V, \quad (3.18)$$

$$G|_S = 0. \quad (3.19)$$

Приступимо тепер до одержання інтегрального зображення розв'язку задачі (3.15)–(3.16). Розглянемо формулу (3.3) для області T (див. рис. 3.6), де $u = u(x, y, z)$ – розв'язок задачі (3.15), (3.16), а замість v підставимо функцію Гріна

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{PM_0}} - \omega_1;$$

$$\iiint_T (u\Delta G - G\Delta u) ds = \iint_{S_\varepsilon} \left(u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_1} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_1} \right) d\sigma + \iint_S \left(u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma.$$

Оскільки $\Delta u = 0$ і $\Delta G = 0$, то

$$\iint_{S_\varepsilon} \left(u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}_1} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_1} \right) d\sigma + \iint_S \left(u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma = 0.$$

Розглянемо кожен інтеграл окремо.

На підставі умов (3.16) та (3.19) другий інтеграл дорівнює

$$\oint_S \left(u \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} - G \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma = \oint_S \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \Big|_S g d\sigma.$$

Для обчислення першого інтеграла введемо сферичну систему координат з центром у точці M_0 . Тоді на S_ε :

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi = \varepsilon \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi = \varepsilon \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta = \varepsilon \cos \theta$$

$$d\sigma = \varepsilon^2 \sin \theta d\varphi d\theta, \quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}_1} = -\frac{\partial}{\partial \rho}.$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned} -\oint_S \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \Big|_S g d\sigma &= \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left(-u \frac{\partial G}{\partial \rho} + G \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon} \sin \theta d\theta = \\ &= \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left(u \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} - \omega_1 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon} \sin \theta d\theta + \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left(-u \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon} \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Спрямуємо ε до нуля та знайдемо границі інтегралів у правій частині. Оскільки функції u та ω_1 гармонічні, то на підставі властивостей гармонічних функцій вони разом зі своїми похідними обмежені. Тоді

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left(u \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} - \omega_1 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon} \sin \theta d\theta = 0.$$

А границя другого доданка дорівнює

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left(-u \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon} \sin \theta d\theta &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi u \Big|_{\rho=\varepsilon} \frac{1}{\rho^2} \Big|_{\rho=\varepsilon} \sin \theta d\theta + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\varepsilon} \sin \theta d\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi u \Big|_{\rho=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin \theta d\theta + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\varepsilon} \sin \theta d\theta = \frac{1}{4\pi} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u \Big|_{\rho=\varepsilon} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\varepsilon} \sin \theta d\theta \right) = \\ &= u \Big|_{\rho=0} = u(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Отже, розв'язок задачі Діріхле (3.15), (3.16) визначається формулою

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\oint_S \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \Big|_S g d\sigma. \quad (3.20)$$

Формула (3.20) дає розв'язок у будь-якій точці області V (точка M_0 вибирається довільним чином) за умови, що відома функція Гріна для відповідної області.

Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона розв'язується аналогічним чином.

$$\Delta u = f \quad \text{в } V,$$

$$u|_S = g$$

зображується у вигляді

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\oint_S \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \Big|_S g d\sigma - \iiint_V G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) f(x, y, z) dx dy dz, \quad (x_0, y_0, z_0) \in V. \quad (3.21)$$

Зауваження. Побудова функції Гріна проводиться аналогічно до використаного для двовимірного випадку методу електростатичних відображень, відмінність полягає у вигляді фундаментального розв'язку рівняння Лапласа.

Приклад 1.

Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Пуассона в півпросторі $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, z > 0\}$, тобто задачу

$$\Delta u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D,$$

$$u(x, y, 0) = g(x, y).$$

◀ Скористаємось формулою (3.21), тоді

$$u(x_0, y_0, z_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \Big|_{z=0} g(x, y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) f(x, y, z) dz.$$

Знайдемо функцію Гріна для півпростору методом електростатичних відображень.

Візьмемо в півпросторі D довільну точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та помістимо в неї додатний одиничний заряд. Потенціал поля цього заряду в точці $P(x, y, z)$ дорівнює

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}.$$

Побудуємо точку $M_1(x_0, y_0, -z_0)$ симетричну точці M_0 відносно площини XOY – межі області D (рис. 3.7).

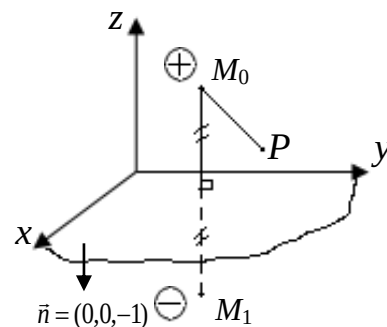


Рис. 3.7

Помістимо в цю

точку одиничний від'ємний заряд. Його поле має потенціал

$-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}$ та компенсує поле точки M_0 при $z=0$.

Отже,

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}},$$

причому $G|_{z=0} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(-z_0)^2}} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}} = 0$.

Знайдемо похідну функції G за напрямом зовнішньої щодо області D нормалі до межі цієї області $\vec{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, де α, β, γ – кути з додатними напрямками координатних осей. Тоді $\vec{n}=(0,0,-1)$.

Очевидно, що

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \right|_{z=0} &= \left(\frac{\partial G}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial G}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial G}{\partial z} \cos\gamma \right) \Big|_{z=0} = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot (-1) \right) \Big|_{z=0} = - \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{(z-z_0)}{\sqrt{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)^3}} - \frac{(z+z_0)}{\sqrt{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2)^3}} \right) \Big|_{z=0} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{-2z_0}{\sqrt{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2)^3}} = - \frac{z_0}{2\pi \sqrt{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2)^3}}. \end{aligned}$$

Отже, розв'язок вихідної задачі визначається формулою

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0}{\sqrt{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2)^3}} g(x, y) dy - \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}} \right) f(x, y, z) dz, \end{aligned}$$

$$(x_0, y_0, z_0) \in D. \blacktriangleright$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайти функцію Гріна задачі Діріхле в чверті простору.

Відповідь:

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} - \frac{1}{r_{PM_1}} + \frac{1}{r_{PM_2}} - \frac{1}{r_{PM_3}} \right)$$

де $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_0, -y_0, z_0)$, $M_2(-x_0, -y_0, z_0)$, $M_3(-x_0, y_0, z_0)$.

2. Знайти функцію Гріна задачі Діріхле у восьмій частині простору.

Відповідь:

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} - \frac{1}{r_{PM_1}} + \frac{1}{r_{PM_2}} - \frac{1}{r_{PM_3}} + \frac{1}{r_{PM_4}} - \frac{1}{r_{PM_5}} + \frac{1}{r_{PM_6}} - \frac{1}{r_{PM_7}} \right)$$

де $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_0, -y_0, z_0)$, $M_2(-x_0, -y_0, z_0)$, $M_3(-x_0, y_0, z_0)$,
 $M_4(-x_0, y_0, -z_0)$, $M_5(-x_0, -y_0, -z_0)$, $M_6(x_0, -y_0, -z_0)$, $M_7(x_0, y_0, -z_0)$.

3. Знайти стаціонарний розподіл температури в півпросторі $z > 0$, якщо на його межі $z = 0$ температура дорівнює нулю при $x < 0$, та одиниці при $x > 0$.

Відповідь:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_0}{z_0}.$$

4. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Пуассона в півпросторі $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, z > 0\}$.

$$\Delta u(x, y, z) = 2(x^2 + y^2 + (z+1)^2)^{-2}, \quad (x, y, z) \in D,$$

$$u(x, y, 0) = (1 + x^2 + y^2)^{-1}.$$

Відповідь:

$$u(x_0, y_0, z_0) = (x^2 + y^2 + (z+1)^2)^{-1}.$$

§ 5. Задача Діріхле для рівняння Лапласа в кулі

Будемо шукати функцію, що задовольняє рівняння Лапласа всередині кулі $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$ радіуса R і набуває заданих значень на сфері $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$, тобто розв'язуватимемо задачу

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } D, \quad (3.23)$$

$$u|_S = g. \quad (3.24)$$

Методом електростатичних відображень побудуємо функцію Гріна. При цьому будемо використовувати сферичну систему координат з центром у початку координат.

У точці $M(x_0, y_0, z_0)$ кулі D помістимо додатний одиничний електричний заряд (рис 3.8).

Побудуємо точку $M^* \left(\frac{R^2}{\rho_0^2} x_0, \frac{R^2}{\rho_0^2} y_0, \frac{R^2}{\rho_0^2} z_0 \right)$, спряжену до точки M відносно сфери S .

Позначимо $\angle POM = \psi$,

$$\rho = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\rho_0 = |OM| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

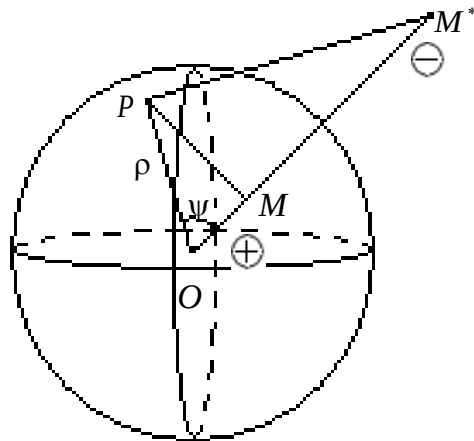


Рис. 3.8

З трикутників OPM та OPM^* за теоремою косинусів маємо

$$r_{PM} = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \psi}, \quad r_{PM^*} = \sqrt{\rho^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} - 2\rho \frac{R}{\rho_0} \cos \psi}.$$

Функція Гріна для кулі має вигляд

$$\begin{aligned} G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{R}{\rho_0 \sqrt{(x-x_0^*)^2 + (y-y_0^*)^2 + (z-z_0^*)^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{PM}} - \frac{R}{\rho_0 r_{PM^*}} \right) = \frac{1}{4\pi \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \psi}} - \frac{R}{4\pi \rho_0 \sqrt{\rho^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} - 2\rho \frac{R}{\rho_0} \cos \psi}}. \end{aligned}$$

Перевіримо виконання умови $G|_S = 0$. Маємо

$$\begin{aligned}
G|_s &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \psi}} - \frac{R}{\rho_0 \sqrt{\rho^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} - 2\rho \frac{R}{\rho_0} \cos \psi}} \right) \bigg|_{\rho=R} = \\
&= \frac{1}{4\pi \sqrt{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \psi}} - \frac{R}{4\pi \rho_0 \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} - 2R \frac{R}{\rho_0} \cos \psi}} = \\
&= \frac{1}{4\pi \sqrt{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \psi}} - \frac{R}{4\pi \rho_0 \sqrt{\frac{R^2}{\rho_0^2} (\rho_0^2 + R^2 - 2R\rho_0 \cos \psi)}} = 0.
\end{aligned}$$

Скористаємось формулою (3.21). Для цього перейдемо до сферичних координат $x = \rho \cos \varphi \sin \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$, $z = \rho \cos \theta$ і знайдемо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \bigg|_s &= \frac{\partial G}{\partial \rho} \bigg|_{\rho=R} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{PM}^2} \frac{\partial r_{PM}}{\partial \rho} - \frac{1}{r_{PM^*}^2} \frac{\partial r_{PM^*}}{\partial \rho} \right) \bigg|_{\rho=R} = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{R - \rho_0 \cos \psi}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \psi)^{3/2}} - \frac{R}{\rho_0} \frac{R - \frac{R^2}{\rho_0} \cos \psi}{\left(R^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} - 2 \frac{R^2}{\rho_0} \cos \psi \right)^{3/2}} \right) = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{(R - \rho_0 \cos \psi) - \frac{\rho_0^2}{R^2} \left(R - \frac{R^2}{\rho_0} \cos \psi \right)}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \psi)^{3/2}} \right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \psi)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Обчислимо $\cos \psi$. Оскільки

$$\vec{OM} = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k} = \rho_0 \cos \varphi_0 \sin \theta_0 \mathbf{i} + \rho_0 \sin \varphi_0 \sin \theta_0 \mathbf{j} + \rho_0 \cos \theta_0 \mathbf{k},$$

$$\vec{OP} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} = \rho \cos \varphi \sin \theta \mathbf{i} + \rho \sin \varphi \sin \theta \mathbf{j} + \rho \cos \theta \mathbf{k},$$

То за допомогою скалярного добутку отримуємо

$$\begin{aligned}
\cos \psi &= \frac{\vec{OM} \cdot \vec{OP}}{|\vec{OM}| \cdot |\vec{OP}|} = \cos \varphi_0 \cos \varphi \sin \theta_0 \sin \theta + \sin \varphi_0 \sin \varphi \sin \theta_0 \sin \theta + \cos \theta_0 \cos \theta = \\
&= \sin \theta_0 \sin \theta (\cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi) + \cos \theta_0 \cos \theta = \sin \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta_0 \cos \theta.
\end{aligned}$$

Тоді, враховуючи те, що $d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, за формулою (3.21) одержуємо таке зображення розв'язку задачі (3.23), (3.24):

$$u(\rho_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi g(\varphi, \theta) \frac{R(R^2 - \rho_0^2)}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \psi)^{3/2}} \sin \theta d\theta, \quad (3.25)$$

де $\cos \psi = \sin \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta_0 \cos \theta$.

Формула (3.25) називається *формулою Пуассона*, а інтеграл з неї – *інтегралом Пуассона* задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі.

Зауваження. Формула Пуассона для задачі Діріхле зовні кулі D :

$$\Delta u = 0 \text{ зовні } D,$$

$$u|_S = g$$

має вигляд

$$u(\rho_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi g(\varphi, \theta) \frac{R(\rho_0^2 - R^2)}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos \psi)^{3/2}} \sin \theta d\theta,$$

де $\cos \psi = \sin \theta_0 \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos \theta_0 \cos \theta$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в точках діаметра SN , що з'єднує полюси $(S(0,0,-1), N(0,0,1))$ кулі радіуса R , якщо верхня частина сфери підтримується при одиничній температурі, а нижня – при нульовій.

Відповідь:

$$u(\rho_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\rho_0} \left(R - \frac{R^2 - \rho_0^2}{\sqrt{R^2 + \rho_0^2}} \right).$$

2. Знайти функцію Гріна задачі Діріхле в половині кулі радіуса R .

Відповідь:

$$G(\rho, \varphi, \theta; \rho_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} - \frac{R}{\rho_0 r_{PM_0^*}} - \frac{1}{r_{PM_1}} + \frac{R}{\rho_0 r_{PM_1^*}} \right), \quad \text{де } M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_0, y_0, -z_0),$$

$$M_0^*(x_0^*, y_0^*, z_0^*), M_1^*(x_0^*, y_0^*, -z_0^*), x_0^* = \frac{R^2}{\rho_0^2} x_0, y_0^* = \frac{R^2}{\rho_0^2} y_0, z_0^* = \frac{R^2}{\rho_0^2} z_0.$$

3. Знайти функцію Гріна задачі Діріхле в чверті кулі радіуса R .

Відповідь:

$$G(\rho, \varphi, \theta; \rho_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} - \frac{R}{\rho_0 r_{PM_0^*}} - \frac{1}{r_{PM_1}} + \frac{R}{\rho_0 r_{PM_1^*}} + \frac{1}{r_{PM_2}} - \frac{R}{\rho_0 r_{PM_2^*}} - \frac{1}{r_{PM_3}} + \frac{R}{\rho_0 r_{PM_3^*}} \right),$$

$$\text{де } M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_0, y_0, -z_0), M_2(-x_0, y_0, -z_0), M_3(-x_0, y_0, z_0),$$

$$M_0^*(x_0^*, y_0^*, z_0^*), M_1^*(x_0^*, y_0^*, -z_0^*), M_2^*(-x_0^*, y_0^*, -z_0^*), M_3^*(-x_0^*, y_0^*, z_0^*),$$

$$x_0^* = \frac{R^2}{\rho_0^2} x_0, y_0^* = \frac{R^2}{\rho_0^2} y_0, z_0^* = \frac{R^2}{\rho_0^2} z_0.$$

§ 5. Задача Неймана для рівнянь Лапласа та Пуассона

Будемо розглядати другу крайову задачу (задачу Неймана) для рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad \bar{x} \in D, \quad (3.26)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_{\partial D} = g. \quad (3.27)$$

Тут $\bar{x} = (x, y, z)$ для тривимірного і $\bar{x} = (x, y)$ для двовимірного простору (площини),

а $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}$ — похідна за напрямом зовнішньої до межі ∂D нормалі.

Розглянемо другу формулу Гріна з першого параграфу цього розділу

$$\iiint_V (u \Delta v - v \Delta u) ds = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial \bar{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right) d\sigma.$$

Покладемо в ній $v = 1$, тоді $\Delta v = 0$, $\frac{\partial v}{\partial \bar{n}} = 0$ і

$$\iiint_D \Delta u ds = \iint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} d\sigma.$$

Звідси, оскільки функція u гармонічна в області D , то

$$\iint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} d\sigma = \iint_{\partial D} g d\sigma = 0. \quad (3.28)$$

Аналогічна рівність виникає і в двовимірному випадку $\oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\ell = \oint_{\partial D} g d\ell = 0$.

При виконанні умови (3.28) задача Неймана має розв'язок, причому різниця двох будь-яких розв'язків стала (якщо u_1, u_2 – розв'язки задачі Неймана, то $u_1 - u_2 = \text{const}$).

Метод функції Гріна можна застосовувати і до розв'язування задачі Неймана.

Якщо функція Гріна існує, то розв'язок задачі (3.26), (3.27) матиме вигляд

$$u(\bar{x}_0) = \iint_{\partial D} G(\bar{x}; \bar{x}_0) g(\bar{x}) ds. \quad (3.29)$$

Функцією Гріна задачі Неймана в областях, межі яких містять нескінченно віддалену точку (півплощина, півпростір тощо), називається така функція $G(\bar{x}; \bar{x}_0)$, яка є розв'язком крайової задачі

$$\Delta G = 0, \quad \bar{x} \in D \setminus \{\bar{x}_0\}, \quad (3.30)$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial D} = 0. \quad (3.31)$$

У випадку обмежених областей (круг, куля) не виконується умова (3.31), тому щоб уникнути цієї проблеми вводиться поняття *узагальненої* функції Гріна.

Узагальненою функцією Гріна називається функція $G(\bar{x}; \bar{x}_0) = \omega(\bar{x}; \bar{x}_0) + \omega_1(\bar{x}; \bar{x}_0)$, де

$$\omega(\bar{x}; \bar{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \quad \text{для простору та}$$

$$\omega(\bar{x}; \bar{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \quad \text{для площини, а функція } \omega_1(\bar{x}; \bar{x}_0) \text{ повинна бути}$$

розв'язком задачі

$$\Delta \omega_1 = 0, \quad \bar{x} \in D,$$

$$\left. \frac{\partial \omega_1}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial D} = - \left. \frac{\partial \omega}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial D} - K,$$

причому $K = \frac{1}{S}$, де S – площа поверхні ∂D в тривимірному випадку, та $K = \frac{1}{\ell}$, де ℓ – довжина кривої ∂D в двовимірному випадку.

Розглянемо задачу Неймана для рівняння Пуассона

$$\Delta u = f \quad \text{в } D,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial D} = g.$$

Розв'язок такої задачі має вигляд

$$u(\bar{x}_0) = \oint_{\partial D} G(\bar{x}; \bar{x}_0) g(\bar{x}) ds - \iiint_D G(\bar{x}; \bar{x}_0) f(\bar{x}) d\bar{x}, \quad \bar{x}_0 \in D. \quad (3.32)$$

Приклад 1.

Розв'язати задачу Неймана для рівняння Пуассона в півпросторі $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, z > 0\}$:

$$\Delta u(x, y, z) = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{z=0} = g(x, y), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

◀ Скористаємось формулою (3.32)

$$u(x_0, y_0, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, 0; x_0, y_0, z_0) g(x, y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) f(x, y, z) dz, \\ (x_0, y_0, z_0) \in D.$$

Знайдемо функцію Гріна.

Виберемо у верхньому півпросторі довільну точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Побудуємо точку $M_1(x_0, y_0, -z_0)$, симетричну точці M_0 відносно площини XOY – межі області D (рис. 3.9).

Тоді

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} + \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}},$$

причому

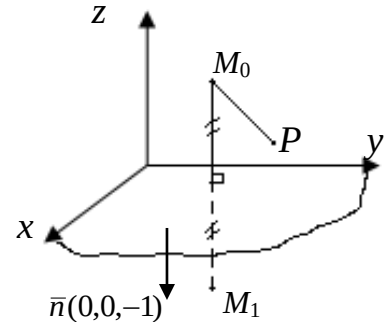


Рис. 3.9

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \right|_{z=0} &= \left(\frac{\partial G}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot (-1) \right) \bigg|_{z=0} = - \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} = \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{(z-z_0)}{\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^3}} + \frac{(z+z_0)}{\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2)^3}} \right) \bigg|_{z=0} = \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{-z_0}{\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (-z_0)^2)^3}} + \frac{z_0}{\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2)^3}} \right) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G|_{z=0} &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (-z_0)^2}} + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}}.
\end{aligned}$$

Отже, розв'язком задачі є функція

$$\begin{aligned}
u(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x, y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}} dy - \\
&- \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} \right) f(x, y, z) dz, \\
&(x, y, z) \in D. \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Приклад 2.

Розв'язати внутрішню задачу Неймана для рівняння Лапласа в кулі $D \in \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$ радіуса R :

$$\Delta u = 0 \text{ в } D,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_S = g,$$

де $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$.

◀ Знайдемо узагальнену функцію Гріна.

Виберемо точку M_0 всередині кулі D та введемо сферичні координати таким чином, щоб центр системи координат збігався з центром кулі, а вісь OZ проходила через саму

точку M_0 . Тоді $M_0(\rho_0, 0, 0)$. Точкою, спряженою до M_0 відносно сфери ∂D , є $M_0^*(\rho_0^*, 0, 0)$,

де $\rho_0^* = \frac{R^2}{\rho_0}$. Змінною точкою є $P(\rho, \varphi, \theta)$.

Функцію Гріна будемо шукати у вигляді

$$G(\rho, \varphi, \theta; \rho_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{1}{4\pi r_{PM_0}} + \omega_1,$$

де ω_1 – розв’язок крайової задачі

$$\Delta \omega_1 = 0, \quad (\rho, \varphi, \theta) \in D,$$

$$\left. \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{r_{PM_0}} \Big|_{\rho=R} - \frac{1}{4\pi R^2}.$$

Розв’язок не залежить від φ і за методом Фур’є може бути знайдений у вигляді ряду за функціями Лежандра

$$\omega_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\rho^n}{nR^{n-1}} P_n(\cos \theta) + A_0,$$

Тоді підставимо в крайову умову

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \omega_1}{\partial \bar{n}} \right|_{\rho=R} &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{r_{PM_0}} \Big|_{\rho=R} - \frac{1}{4\pi R^2} = \\ &= - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \theta}} \Big|_{\rho=R} - \frac{1}{4\pi R^2} = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_0^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \theta) \Big|_{\rho=R} - \frac{1}{4\pi R^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\rho_0^n}{\rho^{n+2}} P_n(\cos \theta) \Big|_{\rho=R} - \frac{1}{4\pi R^2} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\rho_0^n}{R^{n+2}} P_n(\cos \theta) - \frac{1}{4\pi R^2}. \end{aligned}$$

Звідси, порівнюючи коефіцієнти, отримуємо

$$A_n = \frac{1}{4\pi} \frac{(n+1)\rho_0^n}{R^{n+2}} = \frac{1}{4\pi R^2} (n+1) \left(\frac{\rho_0}{R} \right)^n, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi R} \frac{(n+1)}{n} \left(\frac{\rho\rho_0}{R^2} \right)^n P_n(\cos \theta) + A_0 = \\ &= \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho\rho_0}{R^2} \right)^n P_n(\cos \theta) + \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho\rho_0}{R^2} \right)^n P_n(\cos \theta) + A_0 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi R} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\rho_0}{\rho_0^*} \cos\theta + \left(\frac{\rho_0}{\rho_0^*}\right)^2}} - \frac{1}{4\pi R} - \frac{1}{4\pi R} \ln \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_0^*} \cos\theta + \sqrt{1 - 2\frac{\rho_0}{\rho_0^*} \cos\theta + \left(\frac{\rho_0}{\rho_0^*}\right)^2} \right),$$

Отже,

$$\omega_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r_{PM_0^*}} + \frac{1}{4\pi R} \ln \frac{2R^2}{R^2 - \rho\rho_0 \cos\theta + \rho_0 r_{PM_0^*}} + \text{const.}$$

Узагальнена функція Гріна

$$G(\rho, \varphi, \theta; \rho_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} + \frac{R}{\rho_0} \frac{1}{r_{PM_0^*}} + \frac{1}{R} \ln \frac{2R^2}{R^2 - \rho\rho_0 \cos\theta + \rho_0 r_{PM_0^*}} \right) + \text{const.}$$

На межі області D

$$G(R, \varphi, \theta; \rho_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2}{r_{PM_0}} + \frac{\ln R}{R} - \frac{1}{R} \ln(R - \rho_0 \cos\theta + r_{PM_0}) \right) + \text{const.}$$

Тоді, використавши (3.78) і врахувавши, що $\oint_{\partial D} g d\sigma = 0$, одержимо розв'язок задачі

Неймана для рівняння Лапласа в кулі

$$u(\rho_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{2}{r_{PM_0}} - \frac{1}{R} \ln(R - \rho_0 \cos\psi + r_{PM_0}) \right) g(\varphi, \theta) d\sigma,$$

де $r_{PM_0} = \sqrt{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos\psi}$, $\cos\psi = \cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$.

Отримана формула має назву формули Неймана. ►

Задачі для самостійного розв'язування

1. Розв'язати задачу Неймана для рівняння Пуассона в області $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0, x \in \mathbf{R}\}$.

Відповідь:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y_0^2}} g(x) dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} \left(\ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} + \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}} \right) f(x, y) dy.$$

2. Знайти функцію Гріна задачі Неймана в чверті простору.

Відповідь:

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} + \frac{1}{r_{PM_1}} + \frac{1}{r_{PM_2}} + \frac{1}{r_{PM_3}} \right)$$

де $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_0, -y_0, z_0)$, $M_2(-x_0, -y_0, z_0)$, $M_3(-x_0, y_0, z_0)$.

3. Знайти функцію Гріна задачі Неймана в крузі радіуса R .

Відповідь:

$$G(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{PM_0}} + \ln \frac{R}{\rho_0 r_{PM_0^*}} + 2 \ln R \right),$$

де $M_0(x_0, y_0)$, $M_0^*(x_0^*, y_0^*)$, $P(x, y)$, $x_0^* = \frac{R^2}{\rho_0^2} x_0$, $y_0^* = \frac{R^2}{\rho_0^2} y_0$.

Завдання до розрахункової роботи

Задача 1. За допомогою функції Гріна розв'язати крайові задачі:

1.1 $u'' + u = f(x), u(\pi) = 0, u'(0) = 0.$

1.2 $u'' + u' = f(x), u(0) = 0, u(1) = 0.$

1.3 $u'' = f(x), u(0) + u(1) = 0, u'(0) + u'(1) = 0.$

1.4 $x^2 u'' + 2xu' = f(x), u(1) = 0, u'(3) = 0.$

1.5 $xu'' - u' = f(x), u(2) = 0, u'(4) = 0.$

1.6 $u'' - u = f(x), u'(0) = 0, u'(2) + u(2) = 0.$

1.7 $u'' + u' = f(x), u(0) = u(1), u'(0) = u'(1).$

1.8 $u'' + u = f(x), u(0) = u(1), u'(0) = u'(1).$

1.9 $u'' = f(x), u(0) - u(\pi) = 0, u'(0) - u'(\pi) = 0.$

1.10 $u'' = f(x), u(\pi) = 0, u'(0) = 0.$

1.11 $x^2 u'' + 2u' = f(x), u(1) = 0, u(2) + 2u'(2) = 0.$

1.12 $x^2 u'' + xu' - u = f(x), u(1) = 2u(2), u'(1) + u'(2) = 0.$

1.13 $xu'' + 2u' = f(x), u'(1) = 0, u(3) = 0.$

1.14 $x^2 u'' + xu' - 4u = f(x), u(1) = 0, u(3) = 0.$

1.15 $u'' + u = x, u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

1.16 $xu'' + u' = x, u(e) = u(1) = 0.$

1.17 $u'' - u = -2e^x, u(0) = u'(0), u(l) + u'(l) = 0.$

1.18 $u'' + u = x^2, u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

1.19 $u'' - u = 2sh1, u(0) = u(1) = 0.$

1.20 $u'' + u = \cos x, u(0) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

1.21 $u'' + \pi^2 u = \cos \pi x, u(0) = u(1), u'(0) = u'(1).$

$$1.22 \quad u'' = e^x, \quad u(0) = u'(0), \quad u(1) = u'(1).$$

$$1.23 \quad u'' = 2x + 1, \quad u(0) = u'(1), \quad u'(0) = u(1).$$

$$1.24 \quad u'' + u = 2x - \pi, \quad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0.$$

$$1.25 \quad u'' + u = 1, \quad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0.$$

$$1.26 \quad xu'' - u' = f(x), \quad u(1) - u'(1) = 0, \quad 3u(2) - 2u'(2) = 0.$$

Задача 2. Розв'язати задачу Коші для однорідного рівняння теплопровідності на прямій:

$$(t \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty):$$

$$2.1 \quad u_t = 2u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{2x^2 - 4x}.$$

$$2.8 \quad u_t = 4u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{6x^2 - 2x}.$$

$$2.2 \quad u_t = 3u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{-3x^2 - x}.$$

$$2.9 \quad u_t = 5u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{-5x^2 + x}.$$

$$2.3 \quad u_t = 4u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{5x^2 - 2x}.$$

$$2.10 \quad u_t = 6u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{5x^2 - 7x}.$$

$$2.4 \quad u_t = 5u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{3x^2 + 2x}.$$

$$2.11 \quad u_t = 2u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{9x^2 - x}.$$

$$2.5 \quad u_t = 6u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{-3x^2 + x}.$$

$$2.12 \quad u_t = 3u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{8x^2 - 3x}.$$

$$2.6 \quad u_t = 2u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{2x^2 - 5x}.$$

$$2.13 \quad u_t = 4u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{-3x^2 - 7x}.$$

$$2.7 \quad u_t = 3u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{-x^2 + 5x}.$$

$$2.14 \quad u_t = 5u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{-7x^2 + 3x}.$$

$$2.15 \quad u_t = 6u_{xx},$$

$$u(x,0) = e^{-5x^2-9x}.$$

$$2.21 \quad u_t = 2u_{xx},$$

$$u(x,0) = e^{-9x^2+2x}.$$

$$2.16 \quad u_t = 2u_{xx},$$

$$u(x,0) = e^{-8x^2+x}.$$

$$2.22 \quad u_t = 3u_{xx},$$

$$u(x,0) = e^{4x^2+9x}.$$

$$2.17 \quad u_t = 3u_{xx},$$

$$u(x,0) = e^{-2x^2-3x}.$$

$$2.23 \quad u_t = 4u_{xx},$$

$$u(x,0) = e^{5x^2+9x}.$$

$$2.18 \quad u_t = 4u_{xx},$$

$$u(x,0) = e^{7x^2-4x}.$$

$$2.24 \quad u_t = 5u_{xx},$$

$$u(x,0) = e^{5x^2-6x}.$$

$$2.19 \quad u_t = 5u_{xx},$$

$$u(x,0) = e^{-6x^2+5x}.$$

$$2.25 \quad u_t = 6u_{xx},$$

$$u(x,0) = e^{9x^2+x}.$$

$$2.20 \quad u_t = 6u_{xx},$$

$$u(x,0) = e^{-8x^2-7x}.$$

$$2.26 \quad u_t = 7u_{xx},$$

$$u(x,0) = e^{8x^2+5x}.$$

Задача 3. Розв'язати задачу Коші для не однорідного рівняння теплопровідності на прямій
($t \geq 0$, $-\infty < x < +\infty$):

$$3.1 \quad u_t = 4u_{xx} + 3xt^2 - 2t,$$

$$u(x,0) = -7x^2 + 3x.$$

$$3.4 \quad u_t = 25u_{xx} + 2xt^2 - 7t,$$

$$u(x,0) = -2x^2 - 3x.$$

$$3.2 \quad u_t = 9u_{xx} + 4xt^2 - 5t,$$

$$u(x,0) = -5x^2 - 9x.$$

$$3.5 \quad u_t = 4u_{xx} + 3xt^2 + 5t,$$

$$u(x,0) = 7x^2 - 4x.$$

$$3.3 \quad u_t = 16u_{xx} + 3xt^2 + 2t,$$

$$u(x,0) = -8x^2 + x.$$

$$3.6 \quad u_t = 9u_{xx} + 6xt^2 + 3t,$$

$$u(x,0) = -6x^2 + 5x.$$

$$\begin{aligned} 3.7 \quad u_t &= 16u_{xx} + 4xt^2 + 9t, \\ u(x,0) &= -8x^2 - 7x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.8 \quad u_t &= 25u_{xx} - 8xt^2 - 3t, \\ u(x,0) &= -9x^2 + 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.9 \quad u_t &= 4u_{xx} - 5xt^2 + 7t, \\ u(x,0) &= 4x^2 + 9x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.10 \quad u_t &= 9u_{xx} + 9xt^2 - 4t, \\ u(x,0) &= 5x^2 + 9x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.11 \quad u_t &= 16u_{xx} + 2xt^2 + 8t, \\ u(x,0) &= 5x^2 - 6x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.12 \quad u_t &= 25u_{xx} - 7xt^2 - 3t, \\ u(x,0) &= 9x^2 + x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.13 \quad u_t &= 4u_{xx} - 6xt^2 + 5t, \\ u(x,0) &= 8x^2 + 5x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.14 \quad u_t &= 9u_{xx} - 2xt^2 + 9t, \\ u(x,0) &= 2x^2 - 4x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.15 \quad u_t &= 16u_{xx} + 5xt^2 - 9t, \\ u(x,0) &= -3x^2 - x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.16 \quad u_t &= 25u_{xx} + 2xt^2 - 3t, \\ u(x,0) &= 5x^2 - 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.17 \quad u_t &= 4u_{xx} - 7xt^2 + 6t, \\ u(x,0) &= 3x^2 + 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.18 \quad u_t &= 4u_{xx} - 5xt^2 + 3t, \\ u(x,0) &= -3x^2 + x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.19 \quad u_t &= 9u_{xx} + 3xt^2 - 6t, \\ u(x,0) &= 2x^2 - 5x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.20 \quad u_t &= 16u_{xx} + 9xt^2 - 8t, \\ u(x,0) &= -x^2 + 5x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.21 \quad u_t &= 25u_{xx} + 3xt^2 + 8t, \\ u(x,0) &= 6x^2 - 2x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.22 \quad u_t &= 4u_{xx} + 7xt^2 + 5t, \\ u(x,0) &= -5x^2 + x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.23 \quad u_t &= 9u_{xx} + 7xt^2 - 9t, \\ u(x,0) &= 5x^2 - 7x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.24 \quad u_t &= 16u_{xx} + 8xt^2 + 4t, \\ u(x,0) &= 9x^2 - x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.25 \quad u_t &= 25u_{xx} + 3xt^2 - 7t, \\ u(x,0) &= 8x^2 - 3x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.26 \quad u_t &= 4u_{xx} + 5xt^2 + 6t, \\ u(x,0) &= -3x^2 - 7x. \end{aligned}$$

Задача 4. Записати розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона в інтегральній формі за допомогою функції Гріна в області $D \subset \mathbf{R}^3$.

$$4.1 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y > 2, z \in \mathbf{R}\}.$$

$$4.2 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x < -1, y > 0, z \in \mathbf{R}\}.$$

$$4.3 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 1, y < 0, z \in \mathbf{R}\}.$$

$$4.4 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 2, y > 0, z \in \mathbf{R}\}.$$

$$4.5 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y < -2, z \in \mathbf{R}\}.$$

$$4.6 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x < -3, y < 0, z \in \mathbf{R}\}.$$

$$4.7 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y \in \mathbf{R}, z > -2\}.$$

$$4.8 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 1, y \in \mathbf{R}, z > 0\}.$$

$$4.9 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y \in \mathbf{R}, z < 1\}.$$

$$4.10 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x < 0, y \in \mathbf{R}, z < -1\}.$$

$$4.11 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 3, y \in \mathbf{R}, z > 0\}.$$

$$4.12 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > -2, y \in \mathbf{R}, z < 0\}.$$

$$4.13 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \in \mathbf{R}, y > 0, z > 1\}.$$

$$4.14 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \in \mathbf{R}, y > -1, z < 0\}.$$

$$4.15 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \in \mathbf{R}, y < 0, z > 3\}.$$

$$4.16 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \in \mathbf{R}, y < -2, z > 0\}.$$

$$4.17 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y > -4, z \in \mathbf{R}\}.$$

$$4.18 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 4, y < 0, z \in \mathbf{R}\}.$$

$$4.19 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 4, y \in \mathbf{R}, z > 0\}.$$

$$4.20 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x < 0, y \in \mathbf{R}, z < -4\}.$$

$$4.21 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y \in \mathbf{R}, z > -3\}.$$

$$4.22 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > -4, y \in \mathbf{R}, z < 0\}.$$

$$4.23 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > -4, y \in \mathbf{R}, z < 0\}.$$

$$4.24 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 4, y > 0, z \in \mathbf{R}\}.$$

$$4.25 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y \in \mathbf{R}, z < 4\}.$$

$$4.26 \ D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \in \mathbf{R}, y > 0, z < 5\}.$$

Задача 5. Записати розв'язок задачі Неймана для рівняння Пуассона в інтегральній формі за допомогою функції Гріна в області $D \subset \mathbf{R}^2$.

$$5.1 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > -1, y > 3\}.$$

$$5.2 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 2, y > -2\}.$$

$$5.3 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 3, y > 1\}.$$

$$5.4 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > -2, y > 1\}.$$

$$5.5 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < 2, y > 1\}.$$

$$5.6 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < -2, y > -3\}.$$

$$5.7 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < 4, y > 1\}.$$

$$5.8 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < 2, y > -1\}.$$

$$5.9 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > -1, y < 2\}.$$

$$5.10 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 3, y < 1\}.$$

$$5.11 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > -4, y < -1\}.$$

$$5.12 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 2, y < -2\}.$$

$$5.13 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < 3, y < 1\}.$$

$$5.14 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < -1, y < -3\}.$$

$$5.15 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < -1, y < 4\}.$$

$$5.16 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < 4, y < -3\}.$$

$$5.17 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > -2, y > 5\}.$$

$$5.18 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 5, y > 2\}.$$

$$5.19 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > -5, y < 3\}.$$

$$5.20 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < -4, y < 2\}.$$

$$5.21 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < -3, y < -2\}.$$

$$5.22 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < 4, y > 5\}.$$

$$5.23 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < 4, y < -3\}.$$

$$5.24 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > -4, y > 3\}.$$

$$5.25 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > -5, y < -2\}.$$

$$5.26 \ D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < -6, y < 3\}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Араманович И.Г. Уравнения математической физики / И.Г.Араманович, В.И. Левин – Москва: Наука, 1969. – 288 с.
2. Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С.Владимиров, В.В. Михайлов и др. – Москва: Наука, 1983. – 256 с.
3. Будаков Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будаков, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – М.: Физматлит, 2003.–688 с.
4. Бицадзе А.В. Сборник задач по уравнениям математической физики / А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калинин. – М.: Наука, 1977.– 224 с.
5. Вірченко Н. О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики: Навч.посіб. / Н. О. Вірченко. – К.:Воля, 2006. – 332 с.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. –М.: Наука, 1981. – 512 с.
7. Годунов С. К. Уравнения математической физики / С. К. Годунов. – М.: Наука, 1979. – 392 с.
8. Лавренчук В.П. Диференціальні рівняння математичної фізики / В.П. Лавренчук, С.Д. Івасишен, В.С. Дронь, Т.І. Готинчан. – Чернівці: Рута, 2008. – 192 с.
9. Перестюк М.О. Теорія рівнянь математичної фізики : навч. посібник для студ. фіз.-мат. спец. вищих закл. освіти / М.О. Перестюк, В.В. Маринець.– К. : Либідь, 2001. - 332 с.
10. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1975. – 128 с.
11. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
12. Гадионенко А.Я. Методические указания к выполнению самостоятельной работы по курсу «Математическая физика» для студентов специальности 13.09. ч.2 / А.Я. Гадионенко, В.Н. Касперов – Київ: КПИ, 1989. – 60 с.
13. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учеб. для гос. ун-тов. 3-е изд., стереотип./ Л.С. Понтрягин— М.: Наука, 1970. — 331 с.