

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ
ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ
для студентів технічних спеціальностей

Затверджено Методичною Радою ФМФ НТУУ «КПІ»

Київ
НТУУ «КПІ»
2015

Лінійна алгебра. Аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Метод. вказівки до виконання типового розрахунку / Уклад. : Л.В.Барановська, В.В.Листопадова. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 59 с.

Гриф надано Методичною радою ФМФ НТУУ «КПІ»

(Протокол № від)

Навчальне видання

**ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ
ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ
для студентів технічних спеціальностей**

Укладачі: *Барановська Леся Валеріївна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Листопадова Валентина Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *І.В.Бейко*, д.т.н., проф.

Рецензент *Н.О.Вірченко*, д-р фіз.-мат. наук, проф.

ВСТУП

На сьогоднішній день накопичено багаторічний досвід складання і використання типових індивідуальних робіт для студентів технічних спеціальностей. У результаті цього створено нову зручну для використання форму типового варіанта.

Запропонований збірник містить 30 варіантів індивідуальних завдань із таких тем: елементи лінійної алгебри, векторна алгебра, аналітична геометрія, границя числової послідовності, границя функції, нескінченно велика функція, нескінченно мала функція, знаходження границь функцій, перша визначна границя, друга визначна границя, порівняння нескінченно малих функцій, еквівалентні нескінченно малі функції, розкриття деяких невизначеностей, неперервність функції, точки розриву, похідна функції, диференціал та його застосування до наближених обчислень, правило Лопіталя, застосування диференціального числення до дослідження функцій.

Для виконання завдань варіанта розрахункової роботи укладачі пропонують студентам ознайомитися з теоретичним матеріалом за відповідними темами зі списку рекомендованої літератури, а також розібратися у наведених прикладах розв'язування деяких типових задач.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Формули для обчислення визначників:

1. $n=1$: $\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}$.

2. $n=2$: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

3. $n=3$. $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$
 $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається визначник $(n-1)$ -го порядку, який одержимо з даного визначника шляхом викреслення i -го рядка та j -го стовпця, на перетині яких стоїть цей елемент. Наприклад, для визначника Δ_3 мінор

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Матриця A^{-1} називається **оберненою** до квадратної матриці $A_{n \times n}$, якщо вона задовольняє умову:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n.$$

Обернена матриця обчислюється за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*. \quad (2)$$

Тут A^* – приєднана матриця, вона складена із алгебраїчних доповнень елементів транспонованої матриці.

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має такий загальний вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

де x_i – невідомі, $i = \overline{1, n}$, a_{ij} – коефіцієнти системи, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, b_i ($i = \overline{1, m}$) – вільні члени.

Цю систему можна записати скорочено у матричному

$$AX = B,$$

де $A_{m \times n}$ – матриця коефіцієнтів системи, B – стовбець вільних членів.

Якщо у $AX=B$ матриця $A_{n \times n}$ – квадратна і невинроджена, то система має єдиний розв'язок, який можна визначити за **формулами Крамера**:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де $\Delta = \det A$ – головний визначник системи, а визначники Δ_k дістаємо з Δ заміною k -го стовпця на стовбець вільних членів:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Рангом матриці $A_{m \times n}$ називається найвищий порядок відмінних від нуля мінорів матриці. Позначають $r = \text{rang } A$.

Якщо до матриці A у системі дописати праворуч стовбець вільних членів, то дістанемо так звану **розширену матрицю**:

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система (2) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи A дорівнював рангу розширеної матриці:

$$\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A}$$

Напрямлений відрізок $\overline{AB}$ називається **вектором**, A – початок, B – кінець вектора. Позначають також $\vec{a}$.

Якщо $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{b} = (y_1, y_2, y_3)$, то

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3, \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3), \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3).$$

Умова колінеарності: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$.

Якщо відомі координати точок $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, то:

□ координати $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$;

□ координати точки M , яка ділить відрізок AB у відношенні λ , тобто $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$, обчислюють за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \lambda \neq -1;$$

зокрема, при $\lambda = 1$ маємо формули поділу відрізка навпіл:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

У декартовій прямокутній системі координат (ДПСК) маємо: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – розклад вектора за ортонормованим базисом $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;

модуль вектора $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

напрямні косинуси вектора: $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$

для яких справджується тотожність $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$;

координати орта $\vec{a}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$;

відстань між точками $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Скалярним добутком ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$, де α – кут між ними.

Якщо у ДПСК $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то справджуються формули:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \quad \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

$$\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Критерій перпендикулярності векторів: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, що позначається $\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c}$, який задовольняє умови :

1. вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
2. довжина вектора $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$ – площі паралелограма, побудованого на цих векторах, φ – кут між ними;
3. вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку, тобто з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ здійснюється проти годинникової стрілки.

Якщо у ДПСК вектори задані координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то векторний добуток обчислюється за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Застосування векторного добутку:

Площа паралелограма зі сторонами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$, площа трикутника зі сторонами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$, зокрема, якщо на площині трикутник заданий координатами вершин $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Мішаним добутком векторів називається

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \text{обчислення через координати векторів.}$$

Застосування мішаного добутку:

1. об'єм паралелепіпеда з ребрами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ (Рис. 26),
2. об'єм піраміди з ребрами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює $V_{\text{пір.}} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$,
3. умова компланарності векторів: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$,
4. якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то трійка векторів права, якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то ліва.

Розглянемо різні види рівнянь прямої l на площині:

1. загальне рівняння $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 > 0$, вектор $\vec{n} = (A, B) \perp l$ – нормальний ;
2. канонічне рівняння $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$, $M_0(x_0, y_0) \in l$, $\vec{s} = (m, n) \parallel l$ – напрямний ;
3. параметричне $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $t \in R$;
4. $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$;
5. у відрізках на осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, a, b – величини відрізків, що їх пряма відтинає на осях;
6. рівняння з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$, $k = \tan \varphi$, φ – кут нахилу l до осі Ox ;
7. рівняння в'язки прямих $y - y_0 = k(x - x_0)$, що проходять через задану точку;
8. нормальне рівняння $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, $p > 0$ – довжина перпендикуляра, проведеного з початку координат на l , α – кут його нахилу до осі Ox (рис. 33).

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначається за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

якщо рівняння l нормальне, то $\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p$ – відхилення від M_0 до l , $d = |\delta|$.

Якщо $\delta > 0$, то точка M_0 і початок координат лежать по різні боки від l , якщо $\delta < 0$, то по один.

Кут φ між прямими, заданими рівняннями $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, визначається

формулою $\tan \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \Rightarrow l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, \quad l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$

Якщо прямі задані загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ і } A_2x + B_2y + C_2 = 0, \text{ то } \cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \Rightarrow l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + 0.$$

Розглянемо різні види рівнянь площини P у просторі:

- загальне рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$,
де $\vec{n} = (A, B, C) \perp P$ – нормальний вектор;
- $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – рівняння в'язки площин, з центром у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$;
- $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – рівняння P у відрізках на осях;
- рівняння P , що проходить через три точки, які не лежать на одній прямій

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

Відхилення від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до P дорівнює $\delta = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p$,
відстань $d = |\delta|$.

Кут φ між площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ визначається формулою $\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$,

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \quad P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Різні види рівнянь прямої L у просторі:

- векторне рівняння L , що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, паралельно напрямному вектору $\vec{s} = (m, n, l)$: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t, t \in R$;
- канонічне рівняння $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l}$;
- параметричне рівняння $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + lt, \end{cases} t \in R$;
- рівняння прямої, що проходить через дві точки $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$;
- загальне рівняння, як перетин двох непаралельних площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Кут між прямими L_1 і L_2 з напрямними векторами $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, l_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, l_2)$ (Рис. 38) визначається формулою

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + l_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + l_2^2}},$$

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{l_1}{l_2}, \quad L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + l_1 l_2 = 0.$$

Кут між прямою з напрямним вектором $\vec{s} = (m, n, l)$ і площиною з нормальним вектором $\vec{n} = (A, B, C)$ визначається за формулою

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|} = \frac{|Am + Bn + Cl|}{\sqrt{m^2 + n^2 + l^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Rightarrow$$

$$L \parallel P \Leftrightarrow Am + Bn + Cl = 0,$$

$$L \perp P \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{l}.$$

Криві другого порядку:

1. **Коло** з центром у точці $C(a, b)$ і радіусом R у ДПСК визначається рівнянням

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

і $x^2 + y^2 = R^2$, якщо центр збігається з початком координат. Це множина точок площини, рівновіддалених від точки C .

2. **Еліпс** – це множина точок площини, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є сталою величиною, рівною $2a$.

У ДПСК еліпс має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $a \geq b > 0$, a – велика піввісь, b – мала піввісь, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокуси еліпса,

$a > c$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ – ексцентриситет еліпса, $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ – директриси, $r_{1,2} = a \pm \varepsilon x$ –

фокальні радіуси, $r_1 + r_2 = 2a$, директоріальна властивість еліпса: $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$, де d_k –

відстань від точки еліпса до відповідної директриси. Якщо $a = b = R$, то дістанемо

коло $x^2 + y^2 = R^2$, його $\varepsilon = 0$.

Параметричне рівняння еліпса: $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi).$

Оптична властивість еліпса: якщо джерело світла помістити в один із фокусів еліпса, то відбиті від нього промені зберуться в другому його фокусі.

Рівняння дотичної до еліпса у точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

3. **Гіпербола** – це множина точок площини, модуль різниці відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є сталою величиною, рівною $2a$, меншою за відстань між фокусами $2c$.

У ДПСК гіпербола має канонічне рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a – дійсна піввісь, b – уявна піввісь, $F_{1,2}(\mp c, 0)$ – фокуси гіперболи, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $c > a$,

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ – ексцентриситет, $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ – директриси, $y = \pm \frac{b}{a}x$ – асимптоти, $r_{1,2} = \pm a + \varepsilon x$ –

фокальні радіуси правої гілки гіперболи, $r_{1,2} = \mp a - \varepsilon x$ – лівої гілки, $|r_1 - r_2| = 2a$,

директоріальна властивість гіперболи: $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon > 1$.

Оптична властивість гіперболи: якщо джерело світла помістити в один із фокусів гіперболи, то відбиті від неї промені йдуть у напрямі, якби вони виходили з другого його фокуса.

Рівняння дотичної до гіперболи у точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Гіпербола $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ називається спряженою до даної, її фокуси лежать на осі Oy .

4. **Парабола** – це множина точок площини, рівновіддалених від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

У ДПСК парабола з вершиною у початку координат і віссю симетрії Ox має **канонічне** рівняння

$$y^2 = 2px, \quad p > 0,$$

параметр p – відстань від фокуса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ до директриси $x = -\frac{p}{2}$, фокальний радіус

$r = x + \frac{p}{2}$, директоріальна властивість: $r = d$, d – відстань від точки параболі до

директриси, $\varepsilon = 1$.

Рівняння дотичної до параболі у точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд $yy_0 = p(x + x_0)$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАВДАНЬ

1. Знайдемо границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - n + 5}{n^3 + 1}$.

При $n \rightarrow \infty$ чисельник та знаменник даного дробу прямують до нескінченності. Для розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ поділимо чисельник та знаменник дробу на n^3 (3 – максимальний степінь n чисельника та знаменника):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - n + 5}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^3}} = 3.$$

Тут врахували те, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$, та використали властивість границі послідовності.

2. Знайдемо границю $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3n - 1} - 2n)$.

Перетворимо формулу для загального члена послідовності:

$$\begin{aligned} \sqrt{4n^2 + 3n - 1} - 2n &= \frac{(\sqrt{4n^2 + 3n - 1} - 2n)(\sqrt{4n^2 + 3n - 1} + 2n)}{\sqrt{4n^2 + 3n - 1} + 2n} = \\ &= \frac{4n^2 + 3n - 1 - (2n)^2}{\sqrt{4n^2 + 3n - 1} + 2n} = \frac{3n - 1}{\sqrt{4n^2 + 3n - 1} + 2n} = \frac{3 - \frac{1}{n}}{\sqrt{4 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}} + 2}. \end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3n - 1} - 2n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{\sqrt{4 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}} + 2} = \frac{3}{\sqrt{4 + 2}} = \frac{3}{4}.$$

3. Знайдемо границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 + 4n - 1}{4n^2 + 2n + 3} \right)^{2n-1}$.

Використаємо другу визначну границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)} \right)^{f(n)} = e$. Маємо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 + 4n - 1}{4n^2 + 2n + 3} \right)^{2n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 + 2n + 3 + (2n - 4)}{4n^2 + 2n + 3} \right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n - 4}{4n^2 + 2n + 3} \right)^{2n-1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2n - 4}{4n^2 + 2n + 3} \right)^{\frac{4n^2 + 2n + 3}{2n - 4}} \right]^{\frac{2n - 4}{4n^2 + 2n + 3} (2n - 1)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 10n + 4}{4n^2 + 2n + 3}} = e. \end{aligned}$$

4. Знайдемо границю $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$.

Тут чисельник та знаменник прямують до нуля при $x \rightarrow 3$. Для розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0} \right]$ поділимо чисельник та знаменник дробу на $(x - 3)$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2}{x + 1} = \frac{5}{4}.$$

5. Знайдемо границю $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2} - 4}$.

Для розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0} \right]$ помножимо і поділимо дріб на спряжені

вирази:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)}{(\sqrt[3]{x^2}-4)(\sqrt{9+2x}+5)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{9+2x-25}{(\sqrt[3]{x^2}-4)(\sqrt{9+2x}+5)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2x-16}{(\sqrt[3]{x^2}-4)(\sqrt{9+2x}+5)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(2x-16)\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+4\sqrt[3]{x^2}+4^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}-4\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+4\sqrt[3]{x^2}+4^2\right)(\sqrt{9+2x}+5)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(2x-16)\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+4\sqrt[3]{x^2}+4^2\right)}{(x^2-4^3)(\sqrt{9+2x}+5)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2(x-8)\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+4\sqrt[3]{x^2}+4^2\right)}{(x-8)(x+8)(\sqrt{9+2x}+5)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+4\sqrt[3]{x^2}+4^2\right)}{(x+8)(\sqrt{9+2x}+5)} = \frac{2(2^4+4 \cdot 2^2+4^2)}{16 \cdot 10} = \frac{96}{160} = \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

6. Знайдемо границю $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

При $x \rightarrow \pi$ маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. Для знаходження границі перейдемо до нової змінної t :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \frac{t = x - \pi}{t \rightarrow 0} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(3t + 3\pi) - \cos(t + \pi)}{\operatorname{tg}^2(2t + 2\pi)} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\cos 3t + \cos t}{\operatorname{tg}^2(2t + 2\pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2t \sin t}{\operatorname{tg}^2(2t + 2\pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2t \sin t}{\frac{\sin^2 2t}{\cos^2 2t}} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t \cos^2 2t}{\sin 2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin t}{\sin 2t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \cos^2 2t = 1 \cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

Тут використали формулу $\cos t - \cos 3t = 2 \sin 2t \sin t$, а також наслідок з першої визначної границі $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$.

7. Знайдемо границю $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/\operatorname{tg} 3x}$.

Для розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0} \right]$ застосуємо другу визначну границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + f(x))^{1/f(x)} = e:$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \sin x)^{1/\sin x} \right]^{\frac{\sin x}{\operatorname{tg} 3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sin x}{\operatorname{tg} 3x}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.$$

Тут також використали наслідок з першої визначної границі $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$.

8. Знайдемо границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{5x}}{\sin 7x - 2x}$.

Тут при $x \rightarrow 0$ маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. У чисельнику додамо й віднімемо 1; весь дріб поділимо і помножимо на x ($x \neq 0$). Тоді, використовуючи границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0, \text{ одержуємо}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{5x}}{\sin 7x - 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^{3x} - 1) - (3^{5x} - 1)}{\sin 7x - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(2^{3x} - 1)}{x} - \frac{(3^{5x} - 1)}{x}}{\frac{\sin 7x}{x} - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \frac{(2^{3x} - 1)}{3x} - 5 \frac{(3^{5x} - 1)}{5x}}{7 \frac{\sin 7x}{7x} - 2} = \frac{3 \ln 2 - 5 \ln 3}{7 - 2} = \frac{1}{5} \ln \frac{2^3}{3^5} = \ln \frac{\sqrt[5]{8}}{3}. \end{aligned}$$

9. Знайдемо границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sin(x^2 - 1)}$.

При $x \rightarrow 1$ чисельник та знаменник даного дробу є нескінченно малими функціями. Зробимо заміну $t = x - 1$, $t \rightarrow 0$. Беручи до уваги, що при $t \rightarrow 0$ $e^t - 1 \sim t$, $\sin[t(t+2)] \sim t(t+2)$, одержуємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sin(x^2 - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{\sin[(x-1)(x+1)]} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e(e^t - 1)}{\sin[t(t+2)]} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{et}{t(t+2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e}{t+2} = \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

10. Дослідимо на неперервність функцію $y = \frac{e^x - e^{3x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}$.

Задана функція розривна в точці $x=0$, тому що в цій точці вона не визначена. Оскільки

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{e^x - e^{3x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x} &= \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{e^x - e^{3x}}{\frac{\sin 3x}{3x} - \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{e^x - e^{3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{(e^x - 1) - (e^{3x} - 1)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{e^{kx} - 1}{kx} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{x - 3x}{x} = -2, \end{aligned}$$

то $x=0$ – точка усувного розриву. Якщо до визначити функцію y у нулі, поклавши $y = -2$, коли $x=0$, то одержимо неперервну всюди функцію.

11. Дослідимо на неперервність функцію $y = 2^{\frac{1}{x+1}}$.

Задана функція не визначена в точці $x = -1$, тому в цій точці вона розривна. Щоб визначити характер розриву, знайдемо границі зліва і справа:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} 2^{\frac{1}{x+1}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} 2^{\frac{1}{x+1}} = +\infty.$$

Отже, точка $x = -1$ є точкою розриву другого роду.

12. Знайдемо похідну функції $y = \ln(\sqrt{x} + 1)^3$.

Оскільки $(\ln u)' = \frac{1}{u} u'$, $(u^n)' = nu^{n-1} u'$, то маємо

$$y' = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^3} \cdot \left((\sqrt{x} + 1)^3 \right)' = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^3} \cdot 3(\sqrt{x} + 1)^2 \cdot (\sqrt{x} + 1)' = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^3} \cdot 3(\sqrt{x} + 1)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

13. Знайдемо похідну функції $y = x^2 \cdot \operatorname{tg} 3x$.

Використовуючи правило диференціювання добутку функцій $(uv)' = u'v + uv'$, одержимо

$$y' = (x^2)' \cdot \operatorname{tg} 3x + x^2 \cdot (\operatorname{tg} 3x)' = 2x \operatorname{tg} 3x + x^2 \cdot \frac{3}{\cos^2 3x}.$$

14. Знайдемо похідну функції $y = \frac{e^{3x}}{x^2 + \ln x}$.

Використовуючи правило диференціювання частки $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, одержимо

$$y' = \frac{(e^{3x})' (x^2 + \ln x) - e^{3x} (x^2 + \ln x)'}{(x^2 + \ln x)^2} = \frac{3e^{3x} (x^2 + \ln x) - e^{3x} \left(2x + \frac{1}{x}\right)}{(x^2 + \ln x)^2}.$$

15. Знайдемо похідну функції $y = (1 - \cos x)^x$.

Маємо степенево-показникову функцію. Прологарифмуємо функцію y , а потім продиференціюємо одержану рівність:

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln(1 - \cos x)^x = x \cdot \ln(1 - \cos x), \\ \frac{y'}{y} &= x' \cdot \ln(1 - \cos x) + x \cdot (\ln(1 - \cos x))', \\ \frac{y'}{y} &= \ln(1 - \cos x) + x \cdot \frac{\sin x}{(1 - \cos x)}.\end{aligned}$$

Отже, $y' = (1 - \cos x)^x \left[\ln(1 - \cos x) + x \cdot \frac{\sin x}{(1 - \cos x)} \right]$.

16. Знайдемо похідну функції $y^3 - 2\sqrt{y}e^x + 2x \ln y = 0$.

Функція y задана неявно. Продиференціюємо дану рівність за правилами диференціювання складної функції:

$$3y^2 y' - \frac{1}{\sqrt{y}} y' e^x - 2\sqrt{y} e^x + 2 \ln y + \frac{2x}{y} y' = 0.$$

Звідси виразимо y' :

$$\begin{aligned}y' \left(3y^2 - \frac{1}{\sqrt{y}} e^x + \frac{2x}{y} \right) &= 2(\sqrt{y} e^x - \ln y), \\ y' &= \frac{2(\sqrt{y} e^x - \ln y)}{3y^2 - \frac{1}{\sqrt{y}} e^x + \frac{2x}{y}}.\end{aligned}$$

17. Знайдемо похідні y'_x , y''_{xx} функції, яка задана параметрично рівняннями:

$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

За правилами диференціювання функції, яка задана параметричними рівняннями, маємо

$$\begin{aligned}y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t}{1+t^2}, \\ y''_{xx} &= \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.\end{aligned}$$

18. Проведемо повне дослідження функції $y = \frac{x^3}{1-x^2}$ і побудуємо її графік.

1) Область існування – вся числова вісь, крім точок $x = \pm 1$.

2) Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік перетинає осі координат у точці $O(0; 0)$.

3) Функція не періодична. Оскільки $f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = -\frac{x^3}{1-x^2} = -f(x)$, то функція непарна, тому будемо досліджувати її лише для $x \geq 0$.

4) Функція в точці $x=1$ має розрив другого роду і

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} f(x) = \mp \infty.$$

5) Похідна

$$y' = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

дорівнює нулю при $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$ і не існує у точках $x = \pm 1$, але останні не входять до області визначення функції, тому критичними точками є точки

$$x = -\sqrt{3}, \quad x = 0, \quad x = \sqrt{3}.$$

На інтервалі $(0; \infty)$ маємо

x	$(0; 1)$	1	$(1; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; \infty)$
$f'(x)$	+	не існує	+	0	–
$f(x)$	$\square$	не існує	$\square$	$y_{\max} \approx -2,6$	$\square$

6) Знайдемо другу похідну:

$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1-x^2)^3}.$$

Похідна $y'' = 0$ при $x=0$ і не існує при $x = \pm 1$. Оскільки точки $x = \pm 1$ не входять до області визначення заданої функції, то $x=0$ – єдина критична точка другого роду.

Маємо

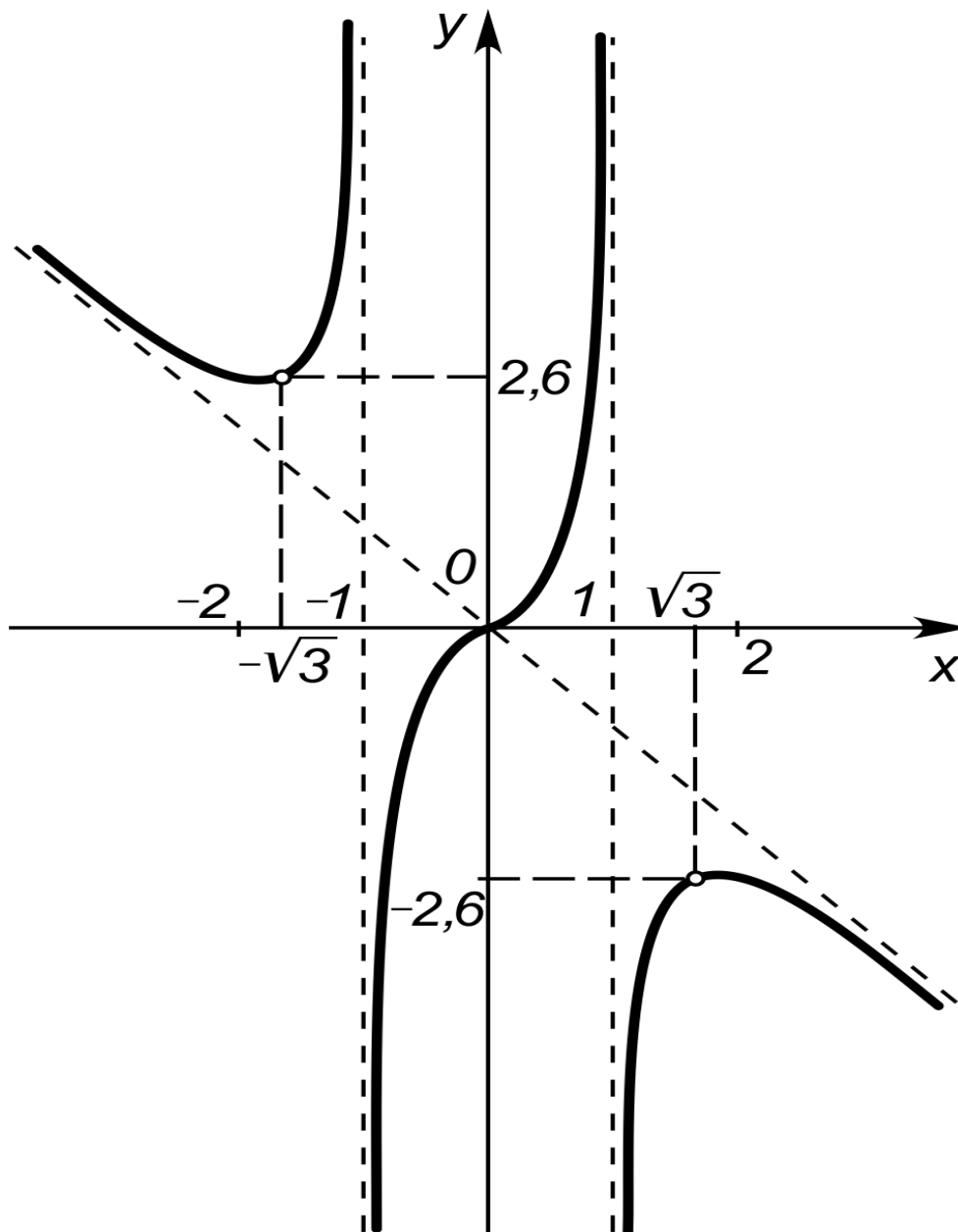
x	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	не існує	$-$
$f(x)$	$\cap$	Точка перегину	$\cup$	не існує	$\cap$

7) З п. 4 випливає, що $x=1$ – вертикальна асимптота кривої. Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{(1-x^2)x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} - (-1)x \right) = 0,$$

то при $x \rightarrow \pm\infty$ задана крива має похилу асимптоту $y = -x$.

8) Враховуючи проведені дослідження і непарність функції, будуємо графік.



ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Варіант №1

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 5 \\ 3x - 2y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + 5z = 1 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(1;3;6)$, $M_2(2;2;1)$, $M_3(-1;0;1)$, $M_4(-4;6;-3)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;
 - 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
 - 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
 - 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
 - 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
 - 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
 - 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.
4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо мала піввісь в -15 та один з фокусів $F(-10;0)$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 - (3+n)^2}{(3-n)^2 + (3+n)^2}; \quad & 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 3} \right)^{n^2}; \quad & 3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}; \\ 4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}; \quad & 5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x + \cos 4x}{\sin^2 x}; \quad & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{3x} - 2^{2x}}{x^2 + \operatorname{tg} 3x}. \end{aligned}$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases} \quad 2) y = 3^{\frac{1}{4-x}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$\begin{aligned} 1) y = x - \ln(e^x + 2\sqrt{e^{3x} + e^x}); \quad & 2) y = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}; \quad & 3) y = x^{\sqrt{x^2-1}}; \\ 4) \ln y = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad & 5) \begin{cases} x = \frac{\ln t}{t} \\ y = t^3 \ln t \end{cases} \quad y'_x = ? \quad y''_{xx} = ? \end{aligned}$$

8. Привести повне дослідження функції та побудувати її графік: $y = \frac{17-x^2}{4x-5}$.

Варіант №2

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за методом Гаусса;
- 3) матричним методом.

$$\begin{cases} 4x + 5z = 7 \\ y - 6z = 11 \\ 3x + 4z = -2 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(-4;2;6)$, $M_2(2;-3;0)$, $M_3(-10;5;8)$, $M_4(-5;2;-1)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;
 - 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
 - 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
 - 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
 - 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
 - 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
 - 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.
4. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо дійснв піввісь $a=13$,
ексцентриситет $\varepsilon = \frac{14}{13}$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3+n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^3 + (1+n)^3};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^{2n^2};$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}; 4) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{8}}{x^2 + 2x + 8};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\operatorname{tg}^2 x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 5^x}{6x + \arcsin 4x}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ (x+1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ 4-x, & x > 2. \end{cases} \quad 2) y = 5^{\frac{1}{x-2}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = e^{2x} - \frac{1}{8}(2 - \sin 2x + e^{-3x});$$

$$2) y = 3^{\frac{x}{\ln x}};$$

$$3) y = (\ln x)^{x^2}; \quad 4) y - x = x \operatorname{tg} y;$$

$$5) \begin{cases} x = 2 \cos^2 t \\ y = 3 \sin^2 t \end{cases} y'_x = ?$$

$$y''_{xx} = ?.$$

8. Привести повне дослідження функції та побудувати її графік: $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$.

Варіант №3

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad E - \text{одинична матриця}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} 4x + 5z = 1 \\ y - 6z = 4 \\ 3x + 4z = 11. \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(7;2;4)$, $M_2(7;-1;2)$, $M_3(-7;-3;2)$, $M_4(-4;2;1)$.

Знайти:

1) довжину та напрямні косинуси вектор $\overline{M_1M_2}$;

2) кут $\angle M_2M_1M_3$;

3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

7) рівняння сторони M_1M_4 ;

8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо її директриса $D: x = -4$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3+n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^4 - (1+n)^4};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - 3}{n^3 + 3} \right)^{n+2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{7}}{2x^2 - x - 21};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{4x} - 5^{-x}}{\sin 2x - \operatorname{tg} 3x^3}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$$

$$2) y = 10^{\frac{1}{x+2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{4x} - 5^{-x}}{\sin 2x - \operatorname{tg} 3x^3}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = 2\sqrt{e^x} + 1 + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1};$$

$$2) y = \sqrt{x} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x};$$

$$3) y = (\sin x)^{x^2}; \quad 4) y + x = 2e^y;$$

5)

$$\begin{cases} x = 6 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}, y'_x = ? \quad y''_{xx} = ?.$$

8. Привести повне дослідження функції та побудувати її графік: $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}.$

Варіант №4

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за методом Гаусса;
- 3) матричним методом.

$$\begin{cases} 4x + 5z = 0 \\ 2x + y + z = 11 \\ 3x + 4z = 1 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(2;1;4)$, $M_2(-1;5;2)$, $M_3(-7;3;2)$, $M_4(-6;3;6)$.

Знайти:

1) довжину та напрямні косинуси вектор $\overline{M_1 M_2}$;

- 2) кут $\angle M_2 M_1 M_3$;
 - 3) площу $\Delta M_1 M_2 M_3$;
 - 4) об'єм піраміди $M_1 M_2 M_3 M_4$;
 - 5) рівняння площини $M_1 M_2 M_3$;
 - 6) довжину висоти піраміди $A_4 H$, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1 M_2 M_3$;
 - 7) рівняння сторони $M_1 M_4$;
 - 8) кут між прямою та площиною $M_1 M_2 M_3$.
4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо мала піввісь $b = 2$ та один з фокусів $F(4\sqrt{2}; 0)$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$\begin{aligned}
 &1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^2 + (n+4)^2}{(n+3)^3 - (n-2)^3}; & 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n-1} \right)^{n+4}; & 3) \\
 &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x + x^5}; & 4) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - 2}{x^2 - x - 6}; & 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \pi x + \cos 3\pi x}{x^2}; \\
 &6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^{2x}}{\arctg 4x - \sin x}.
 \end{aligned}$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases} \quad 2) y = 3^{\frac{2x}{3x+1}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$\begin{aligned}
 &1) y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + tge^x; & 2) y = \frac{\arccos \sqrt{x}}{x}; \\
 &3) y = (x^3 - x^2)^x; & 4) x tgy - y tgx = 2; & 5) \\
 &\begin{cases} x = \frac{1}{t+2} \\ y = \frac{t^2}{(t+2)^2} \end{cases}, y'_x = ? y''_{xx} = ?.
 \end{aligned}$$

8. Привести повне дослідження функції та побудувати її графік: $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$.

Варіант №5

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} y - 6z = 5 \\ x + 2z = 15 \\ 3x + y + 2z = 14 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(1;-5;2)$, $M_2(-6;0;-3)$, $M_3(3;6;-8)$, $M_4(-10;6;7)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектор $\overline{M_1M_2}$;
 - 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
 - 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
 - 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
 - 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
 - 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
 - 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.
4. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо дійснв піввісь $a=7$,
ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{85}}{7}$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 5n}{(n+1)^4 - (n-1)^4};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+2}{5n-3} \right)^{2n-n^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{5}}{3x^2 - 4x + 1};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arcsin x}{7x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 3^{3x}}{\sin x - \sin x^2}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & x \leq -1, \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = 2(x-2)\sqrt{1+e^x} + \ln x^4;$$

$$2) y = \operatorname{arccctg}^2(\ln x);$$

$$3) y = (\operatorname{ctgx})^{\sqrt{x}}; 4) \sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = \sqrt{a^2};$$

5)

$$\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{4t} \end{cases}, y'_x = ? y''_{xx} = ?.$$

8. Привести повне дослідження функції та побудувати її графік: $y = \frac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4}$.

Варіант №6

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за методом Гаусса;
- 3) матричним методом.

$$\begin{cases} 2x + y + 1z = 2 \\ x + 2z = 1 \\ 3x + y + 2z = -4 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(0;-1;-1)$, $M_2(-2;3;5)$, $M_3(1;-5;-9)$, $M_4(-1;-6;3)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектор $\overline{M_1M_2}$;
 - 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
 - 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
 - 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
 - 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
 - 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
 - 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.
4. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо її директриса $D: x=5$.
Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.
5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+6} \right)^{\frac{n}{6}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{3}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \operatorname{tg} 2x}{2^{4x} - 5^x}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

$$2) y = 3^{\frac{2}{x+2}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = \frac{1}{\ln x} + \ln \frac{1+2^x}{1-2^x};$$

$$2) y = (x-1) \arccos \sqrt{x};$$

$$3) y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}; \quad 4) ye^x = e^{y-x};$$

$$5) \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases}, y'_x = ? y''_{xx} = ?.$$

8. Привести повне дослідження функції та побудувати її графік: $y = \frac{4x^2}{x^2 + 3}$.

Варіант №7

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad E - \text{одинична матриця}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} 2x + y + z = -3 \\ x + 2z = 1 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(5;2;0)$, $M_2(2;5;0)$, $M_3(12;4)$, $M_4(-1;1;1)$.

Знайти:

1) довжину та напрямні косинуси вектор $\overline{M_1M_2}$;

2) кут $\angle M_2M_1M_3$;

- 3) площу $\Delta M_1 M_2 M_3$;
 - 4) об'єм піраміди $M_1 M_2 M_3 M_4$;
 - 5) рівняння площини $M_1 M_2 M_3$;
 - 6) довжину висоти піраміди $A_4 H$, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1 M_2 M_3$;
 - 7) рівняння сторони $M_1 M_4$;
 - 8) кут між прямою та площиною $M_1 M_2 M_3$.
4. Скласти канонічне рівняння еліпса E , якщо $A(3;0), B(2; \frac{\sqrt{5}}{3}) \in E$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)^2 + (2n+5)^3}{(2n-7)^3 - (n-3)^2}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + n + 1}{n^3 + 2} \right)^{2n}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} 3x \operatorname{ctg} \pi x;$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - \sin 3x}{2^x - 3^{5x}}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0 \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4; \\ 3+\sqrt{x}, & x > 4. \end{cases} \quad 2) y = 6^{\frac{1}{x-3}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = \ln(e^x + 1) + \frac{18e^x - 7}{6(e^x + 1)}; \quad 2) y = \frac{\operatorname{arccctg} x}{x^2};$$

$$3) y = \left(\operatorname{tg} \frac{x}{3} \right)^{2x};$$

$$4) \sqrt{x^3 y} = \frac{y-4}{x}; \quad 5) \begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}, y'_x = ? y''_{xx} = ?.$$

8. Привести повне дослідження функції та побудувати її графік: $y = \frac{4x^2 + 9}{4x + 8}$.

Варіант №8

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за методом Гаусса;
- 3) матричним методом.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 2z = -1 \\ 3x + y + 2z = 12 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(2;-1;-2)$, $M_2(1;2;1)$, $M_3(5;0;-6)$, $M_4(-10;9;-7)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектор $\overline{M_1M_2}$;
- 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
- 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
- 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
- 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
- 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
- 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння гіперболи Γ , якщо рівняння її асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$;

$$A(-8;0) \in \tilde{A}.$$

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 + (n+1)^2 - (n+2)^2}{(4-n)^3};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n+1}; \quad 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - 1}; \quad 5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{\sin 3\pi x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \arcsin x^3}{5^{2x} - 2^{5x}}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4, \\ x+3, & x > 4. \end{cases} \quad 2) y = 3^{\frac{3x}{x-4}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = 2(\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x});$$

$$2) y = (a)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$3) y = \sqrt[3]{\sin x}; \quad 4) \ln y + e^{-\frac{y}{x}} = c;$$

5)

$$\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 5t^3 - 3t^2 \end{cases}, y'_x = ? y''_{xx} = ?.$$

8. Привести повне дослідження функції та побудувати її графік: $y = \frac{x^3 + 4}{x^2 + 1}$.

Варіант №9

1. Знайти матрицю:

$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} 4x + 5y = 1 \\ 4x + 3z = 10 \\ 2x + 3y + 4z = 7 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(-2;0;-4)$, $M_2(-1;7;1)$, $M_3(4;-8;-4)$, $M_4(1;-4;6)$.

Знайти:

1) довжину та напрямні косинуси вектор $\overline{M_1M_2}$;

2) кут $\angle M_2M_1M_3$;

3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

7) рівняння сторони M_1M_4 ;

8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо її директриса $D: y = -2$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^4 - (1+n)^4}{(n+1)^3 + (1-n)^3};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3n - 2}{2n^2 + 7n - 1} \right)^{-n^2}; \quad 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{11}}{2x^2 - 7x - 15};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 2x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 9x}{2^x - 3^{5x}}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, x \leq 0, \\ 0, 0 < x \leq 2, \\ x-2, x > 2. \end{cases} \quad 2) y = e^{\frac{2}{x}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = \frac{1}{2} e^{-2x} \left(\frac{\cos 2x + \sin 2x}{4+x} + e^{2x} \right);$$

$$2) y = \sqrt[3]{x} \ln x \sin 2x;$$

$$3) y = (\sin x)^{4^x}; \quad 4) xy = e^{\frac{y}{x}} - 4;$$

5)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \\ y = \frac{t+1}{\sqrt{t^2-1}} \end{cases}, y'_x = ? \quad y''_{xx} = ?.$$

8. Привести повне дослідження функції та побудувати її графік: $y = x^3 e^{\frac{1}{x}}$.

Варіант №10

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за методом Гаусса;
- 3) матричним методом.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = -4 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(14;4;5)$, $M_2(-5;-3;2)$, $M_3(-2;-6;-3)$, $M_4(-2;2;-1)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектор $\overline{M_1M_2}$;
- 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
- 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
- 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
- 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
- 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
- 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння еліпса E , якщо ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $A(-5;0) \in E$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-3)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3};$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n+3} \right)^{n+1};$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1};$ 4) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2}}{x^2 + 8x + 15};$

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\cos 7x - \cos x};$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^{2x} - 6^{-2x}}{\sin 3x - 2x}.$

6. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1; \\ 2+x, & x > 1. \end{cases}$

2) $y = 3^{\frac{x+3}{x-2}}.$

7. Знайти похідні функції:

1) $y = \frac{x+1}{1-e^x} - \ln(1+e^x);$

2) $y = \frac{2x^2}{\sqrt{1-2x^2}};$

3) $y = (\arctg x)^{2x};$ 4) $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = x\sqrt{y};$

5)

$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, y'_x = ? y''_{xx} = ?.$

8. Привести повне дослідження функції та побудувати її графік: $y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}.$

Варіант №11

1. Знайти матрицю:

$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E$, якщо

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, E$ - одинична матриця.

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 10 \\ -3x + 8y - 10z = -25 \\ 4x - 3y + z = 1 \end{cases}$

3. Дано координати точок $M_1(1;2;0)$, $M_2(3;0;-3)$, $M_3(5;2;6)$, $M_4(8;4;-9)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектор $\overline{M_1M_2}$;
- 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
- 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
- 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
- 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
- 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
- 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння гіперболи Γ , якщо $A(\sqrt{80};3)$, $B(4\sqrt{6};3\sqrt{2}) \in \tilde{A}$.
Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.
5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(6+n^2) - (1-n)^2}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 2}{n^2} \right)^{3n^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \operatorname{arctg} x}{5^{3x} - 3^x}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases} \quad 2) y = 1 / (2 + 2^{\frac{1}{x-3}}).$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = \ln^3(e^x + \sqrt{\sin e^{-x}}); \quad 2) y = \operatorname{ctg} \sqrt{1+x^2};$$

$$3) y = (2x)^{\ln x}; \quad 4) yx^2 = 2 - e^{y/x}; \quad 5) \begin{cases} x = \ln t & y''_x = ? \\ y = t \ln t & y''_{xx} = ? \end{cases}$$

8. Привести повне дослідження функції та побудувати її графік: $y = \frac{4x^3}{x^3 - 1}$.

Варіант №12

1. Знайти матрицю:

$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за методом Гаусса;
- 3) матричним методом.

$$\begin{cases} -3x - 7y + 2z = 4 \\ -2x - 2y - z = 1 \\ x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(2;-1;2)$, $M_2(1;2;-1)$, $M_3(3;2;1)$, $M_4(-4;2;5)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектор $\overline{M_1M_2}$;
 - 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
 - 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2 - 1} \right)^{n^3}$;
 - 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
 - 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
 - 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
 - 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.
4. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо її директриса $D: y=1$.
Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.
5. Обчислити границі:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n-3)^3}{(n+1)^2 + (n+1)^2}$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2 - 1} \right)^{n^3}$;

3)

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7}}{\sqrt{7}x}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x}{\sin 13x}$;

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{4x} - 7^{2x}}{\arctg 4x - 2x}$.

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$$

2) $y = e^{\frac{1}{x+2}}$.

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = 3e^{\sqrt{x}}(x - e^{\sin x - \sqrt{x}}); \quad 2) y = 4\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$3) y = (\cos x)^{\sqrt{x}}; \quad 4) x - y + e^y \operatorname{arctg} x = 1;$$

$$5) \begin{cases} x = t^4, & y_x'' = ? \\ y = \ln t, & y_{xx}'' = ? \end{cases}$$

8. Привести повне дослідження функції та побудувати її графік: $y = \frac{x^3 - 5x}{5 - 3x^2}$.

Варіант №13

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ 2x - y + z = 2 \\ 3x - 5y + 2z = -7 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(1;1;2)$, $M_2(-1;1;2)$, $M_3(2;-2;4)$, $M_4(-1;0;-2)$.

Знайти:

1) довжину та напрямні косинуси вектор $\overline{M_1M_2}$;

2) кут $\angle M_2M_1M_3$;

3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

7) рівняння сторони M_1M_4 ;

8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо мала піввісь $a = 11$ та ексцентриситет

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{57}}{11}.$$

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 3n - 2};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3n + 2}{2n^2 + n + 2} \right)^{3n^3 - 6};$$

3)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x}-1};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 2x}{3x^2};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{11^x - 5^{-3x}}{\arcsin 3x - x}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$2) y = 5^{(2x+5)/(2x+1)}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = \frac{\sin^2 x}{2 + \cos^2 x};$$

$$2) y = x^2 e^{1-\sin x};$$

$$3) y = (\ln x)^{\arctan x}; \quad 4) x - y = 3 \sin y + 2;$$

$$5) \begin{cases} x = 5 \cos t & y'_x = ? \\ y = 4 \sin t & y''_{xx} = ? \end{cases}$$

8. Привести повне дослідження функції та побудувати її графік: $y = \frac{2x+1}{x^2}$.

Варіант №14

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 2z = 10 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(2;3;1)$, $M_2(4;1;2)$, $M_3(6;3;7)$, $M_4(7;5;-3)$.

Знайти:

1) довжину та напрямні косинуси вектор $\overline{M_1 M_2}$;

2) кут $\angle M_2 M_1 M_3$;

3) площу $\Delta M_1 M_2 M_3$;

4) об'єм піраміди $M_1 M_2 M_3 M_4$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-2}{5n+1} \right)^{n+3}$;

5) рівняння площини $M_1 M_2 M_3$;

- 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm \frac{2}{3}x$; і фокусна відстань.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-2}{5n+1} \right)^{n+3}$;

3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x(\cos 3x - 1)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$;

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 2^{7x}}{\operatorname{tg} 4x - 2x}$.

6. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x^2+1, & 0 \leq x < 1, \\ -x, & x \geq 1. \end{cases}$

2) $y = 2^{2x/(x+3)}$.

7. Знайти похідні функції:

1) $y = \frac{e^{x^3}}{(1+x^3)^2} + \ln(1+x^3)$;

2) $y = \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x - \operatorname{tg} x + 2x$;

3) $y = (x^2 + x)^{\sin x}$; 4) $y^x = x^y - 4$;

5) $\begin{cases} x = 5 \cos^2 t \\ y = 3 \sin^2 t \end{cases}$,

$y'_x = ?$

$y''_{xx} = ?$.

8. Привести повне дослідження функції та побудувати її графік: $y = \frac{x^2 - 6x + 4}{3x - 2}$.

Варіант №15

1. Знайти матрицю:

$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за методом Гаусса;
- 3) матричним методом.

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 2 \\ -2y + z = 6 \\ 5x + 3z = 0 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(1;1;-1)$, $M_2(2;3;1)$, $M_3(2;3;1)$, $M_4(5;9;-8)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектор $\overline{M_1M_2}$;
- 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
- 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
- 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
- 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
- 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
- 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння параболи Π , якщо вісь симетрична Ox , $A(27;9) \in \Pi$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - n!}{2(n+1)!}; & \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1} \right)^{1+n}; & 3) \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}; & & \\ 4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{\sqrt{8-x} - 3}; & \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \sin 3x}{7 \cos x - 7}; & \\ 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} 3x}{10^{2x} - 9^{-x}}. & & \end{aligned}$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 1, \\ x + 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad 2) y = 11^{\frac{-1}{x+2}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$\begin{aligned} 1) y &= x - 3 \ln \sqrt{1 + e^x}; & 2) y &= \sqrt{1 - 3x^2} \arcsin x; \\ 3) y &= e^{x+2}; & 4) x + y &= \operatorname{arctg} y; & 5) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t & y'_x = ? \\ y = \ln(1 + t^2) & y''_{xx} = ? \end{cases} \end{aligned}$$

8. Привести повне дослідження функції та побудувати її графік: $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$.

Варіант №16

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = -4 \\ x - y - z = 4 \\ 2x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(1;5;-7)$, $M_2(-3;6;3)$, $M_3(-2;7;3)$, $M_4(-4;8;-12)$.

Знайти:

1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;

2) кут $\angle M_2M_1M_3$;

3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

7) рівняння сторони M_1M_4 ;

8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо мала піввісь в $\sqrt{15}$ та ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{10}}{25}$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+n+5n^4}{n^4+2n-13} & \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2-3}{2n^2+3n-1} \right)^{\frac{n^2}{3}}; & 3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-3x-2}{x+x^2}; \\ 4) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}; & 5) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x-16}{\sin \pi x}; & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-e^{-4x}}{\sin x-2\operatorname{tg} x}. \end{aligned}$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0, \\ 4-x, & 0 < x \leq 2, \\ x^2-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$2) y = \frac{5-5^{1/x}}{5+5^{1/x}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = \arctg^2(e^x - e^{-x}) + th^2 x;$$

$$2) y = (2 + x \arctg x) / \sqrt{1+x^2};$$

$$3) y = \left(\frac{x}{1+x} \right)^{\sin x};$$

$$4) 2^{2x} + 2^y = 2^{x+y};$$

$$5) \begin{cases} x = \arcsin t & y'_x = ? \\ y = \sqrt{1-t^2} & y''_{xx} = ? \end{cases}$$

8. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Варіант №17

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = -2 \\ 3x + 5y + z = 6 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(-3;4;-7)$, $M_2(1;5;-4)$, $M_3(-5;-2;0)$, $M_4(2;5;4)$.

Знайти:

1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;

2) кут $\angle M_2M_1M_3$;

3) площу $\Delta M_1M_2M_3$

4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

7) рівняння сторони M_1M_4 ;

8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ і

дійсна піввісь $a=8$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^4};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n-6}{7n+3} \right)^{2n+1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 3\pi x}{x^2 - 1};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{2 \sin x - \operatorname{tg} x}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x \leq 4, \\ 3-x, & x > 4. \end{cases}$$

$$2) y = 2^{\frac{1}{4x+1}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = \ln(e^x(x^2 - 1) \cos 6x);$$

$$2) y = \arcsin(\operatorname{ctg} x);$$

$$3) y = (\cos 2x)^{x^3};$$

$$4) y - x = \operatorname{arccctg} \frac{x}{y};$$

$$5) \begin{cases} x = 3(t - \sin t) & y'_x = ? \\ y = 3(1 - \cos t) & y''_{xx} = ? \end{cases}.$$

8. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}.$

Варіант №18

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$$

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за методом Гаусса;
- 3) матричним методом.

3. Дано координати точок $M_1(-1;2;-3)$, $M_2(4;-1;0)$, $M_3(2;1;-2)$, $M_4(3;4;5)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;
- 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
- 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
- 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
- 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
- 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
- 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння параболи Π , якщо її вісь симетрії Oy , $A(4;-8) \in \Pi$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-5)(3-5n)^2}{4n^3+3};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2n^2}{3-2n^2} \right)^{n^2+3n};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{2x}}{\sin 3x - 2\operatorname{tg} 2x}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 1, \\ x^2-1, & -1 < x \leq 2, \\ -x+5, & x > 2. \end{cases}$$

$$2) y = 3^{\frac{1}{x+1}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = e^{-x} \arcsin \ln(1+e^{-x});$$
$$y = (\sin 2x)^{\cos x};$$

$$2) y = e^{\cos^2 x}; \quad 3)$$

$$4) \cos(xy) = x - y;$$

$$5) \begin{cases} x = \sin t - t \cos t & y'_x = ? \\ y = \cos t + t \sin t & y''_{xx} = ? \end{cases}$$

8. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{12-3x^2}{x^2+12}.$

Варіант №19

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за методом Гаусса;
- 3) матричним методом.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y - z = 2 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(4;-1;3)$, $M_2(-2;1;0)$, $M_3(0;-5;1)$, $M_4(3;2;6)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;
- 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
- 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
- 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

- 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
- 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
- 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо , якщо велика піввісь $a=4$ та один з фокусів $F(3;0)$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$\begin{aligned}
 &1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n^3 - 1)(4 - n^2)}{n^2(2n - 1)^3}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 - 3n + 7}{5n^2 + 6n + 1} \right)^{1+n}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}; \\
 &4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x - \sin 2x}{e^x - e^{-3x}}.
 \end{aligned}$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -2, \\ x^2, & -2 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases} \quad 2) y = 3^{2/(5-x)}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$\begin{aligned}
 &1) y = e^{\sin x} \left(x - \frac{1}{\cos x} \right)^2; \quad 2) y = 2 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 3) y = (\sin x)^{\sqrt{x+1}}; \\
 &4) \cos(x+y) = xy; \quad 5) \begin{cases} x = \sin 2t & y'_x = ? \\ y = \cos^2 t & y''_{xx} = ? \end{cases}.
 \end{aligned}$$

8. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = -\frac{8x}{x^2 + 4}$.

Варіант №20

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

- 2) за методом Гаусса;
3) матричним методом.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + y - 3z = 0 \\ x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;0;3)$, $M_3(2;1;-1)$, $M_4(2;-2;-4)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;
 - 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
 - 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
 - 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
 - 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
 - 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
 - 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.
4. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо уявна піввісь $b = 2\sqrt{10}$ і один з фокусів $F(-11;0)$.
5. Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^4 - 3n^2 - 2}{(3n - 1)^2}$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n-1} \right)^n$;

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2}$;

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x}$;

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x + \sin x^2}$.

6. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x \leq 3, \\ -x+6, & x > 3. \end{cases}$

2) $y = \frac{5^{1/x} - 1}{5^{1/x} + 1}$.

7. Знайти похідні функції:

1) $y = x - \frac{1}{3} \left(\ln \sqrt{1 + e^{3x}} \right)^3$;

2) $y = 2^{x^2} e^{-2x}$;

3) $y = (\ln x)^{\cos x}$;

4) $x^3 - y^3 = 3xy$;

5) $\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = 3t + e^{3t} \end{cases}, \quad \begin{matrix} y_x'' = ? \\ y_{xx}'' = ? \end{matrix}$.

8. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{x^3}{9 - x^2}$.

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ -x + 2y - 2z = -1 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(1;2;0)$, $M_2(1;-1;2)$, $M_3(0;1;-1)$, $M_4(-3;0;1)$.

Знайти:

1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;

2) кут $\angle M_2M_1M_3$;

3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

7) рівняння сторони M_1M_4 ;

8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо її директриса $D: x = -2$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)(7n^3-6)}{(2n^2-6n+2)^2};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{3n+2} \right)^{\frac{n+1}{3}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos 3x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-e^{-x}}{\sin 2x-\sin x}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, & \frac{\pi}{4} < x < 3, \\ 2x-5, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$2) y = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{x-4}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = \ln(e^x + \sqrt{\sin e^{-x}});$$

$$2) y = \frac{(e^{2x}+1)}{e^x};$$

$$3) y = (\arctg x)^{\frac{1}{x}};$$

$$4) \sqrt{\frac{x}{y}} = x^2 - y^2;$$

$$5) \begin{cases} x = t^3 \ln t & y''_x = ? \\ y = t^2 \ln t & y''_{xx} = ? \end{cases}$$

8. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}$.

Варіант №22

1. Знайти матрицю:

$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за методом Гаусса;
- 3) матричним методом.

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x - y - 3z = -14 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(1;0;2)$, $M_2(1;2;-1)$, $M_3(2;-2;1)$, $M_4(2;1;0)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;
 - 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
 - 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
 - 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
 - 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
 - 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
 - 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.
4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо мала піввісь $b=4$ і один з фокусів $F(3;0)$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n+3)^3}{(2n+1)^2 + (2n+3)^2};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 4n + 2} \right)^n;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^{2x}}{\operatorname{tg} x + x}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 2, \\ x+4, & x > 2. \end{cases} \quad 2) y = 7^{\frac{x+3}{x-2}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = (\sin 2x + x + 3) \frac{1}{\cos x};$$

$$2) y = \frac{1-x^2}{\sqrt[3]{x}};$$

$$3) y = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{x}{2}};$$

$$4) e^{xy} = x + y + 2;$$

$$5) \begin{cases} x = \arccos t & y'_x = ? \\ y = \sqrt{1-t^2} & y''_{xx} = ? \end{cases}$$

8. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{4x^3}{x^3 - 1}$.

Варіант №23

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -16 \\ x + 2y + z = 6 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(1;2;-3)$, $M_2(1;0;1)$, $M_3(-2;-1;6)$, $M_4(0;-5;-4)$.

Знайти:

1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;

2) кут $\angle M_2M_1M_3$;

3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

7) рівняння сторони M_1M_4 ;

8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо дійсна піввісь

$$a=4, \text{ексцентриситет } \varepsilon = \frac{7}{5}.$$

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^4 - (n+2)^3}{(3n+2)^2 + (4n+1)^2};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1} \right)^{n^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{3 - \sqrt{x}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\pi - 4x}{\sqrt{2} - 2 \cos x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x - \sin x}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ 1-x, & -1 < x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

$$2) y = 2^{\frac{x-1}{x+1}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = \frac{x+1}{1-e^x} - \ln(1+e^x);$$

$$2) y = (x\sqrt{x} - 5)\sqrt[3]{x};$$

$$3) y = (\sin 3x)^{5x};$$

$$4) e^{\frac{x}{y}} = x\sqrt{y};$$

$$5) \begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \left(\frac{t}{t+1} \right)^2 \end{cases}, \quad y'_x = ?, \quad y''_{xx} = ?.$$

8. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

Варіант №24

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3 \\ 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(3;10;-1)$, $M_2(-2;3;-5)$, $M_3(-6;0;-3)$, $M_4(1;-1;2)$.

Знайти:

1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;

2) кут $\angle M_2M_1M_3$;

3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

- 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
 - 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
 - 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.
4. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо її директриса $D: x=6$.
Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$\begin{array}{lll}
 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^4}{(n+1)^3 - (n-1)^4}; & 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-2} \right)^{2n-1}; & 3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12}; \\
 4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}; & 5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x; & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^x}{\arcsin x + x^3}.
 \end{array}$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1-x, & x > \pi. \end{cases} \quad 2) y = \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x}}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$\begin{array}{lll}
 1) y = (x-1)e^{\frac{1}{2}x^2}; & 2) y = x \arcsin \frac{1}{x}; & 3) y = \sqrt[3]{1-e^x}; \\
 4) \sqrt{xy} = \ln(y+x); & 5) \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin^4 \frac{t}{2} \end{cases}, \quad \begin{matrix} y''_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix} &
 \end{array}$$

8. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{x^2 - 11}{4x - 3}$.

Варіант №25

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} x - y + z = 7 \\ 2x - 3y - 5z = -8 \\ 4x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(-1;2;4)$, $M_2(-1;-2;-4)$, $M_3(3;0;-1)$, $M_4(7;-3;1)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;
- 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
- 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
- 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
- 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
- 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
- 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння еліпса E , якщо $A(0;\sqrt{3})$, $B(\sqrt{\frac{14}{3}};1)$, $\in E$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n-2)^3}{n^3 + 1}; & \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 7n + 1}{2 - 5n + 6n^2} \right)^{n^2}; & \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}; \\ 4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - x}; & \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos^3 3x}{x} \right); & \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 5x}{e^x - e^{2x}}. \end{aligned}$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ x^2 - 1, & -1 < x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases} \quad 2) y = 8^{\frac{2}{7-x}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$\begin{aligned} 1) y = \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \arctg x; & \quad 2) y = \left(\frac{4}{\cos x} \right) (1 + \cos x); & \quad 3) y = \sqrt[3]{4-x^2}; \\ 4) \ln(1-y^2) = y\sqrt{x}; & \quad 5) \begin{cases} x = e^{-3t} & y_x'' = ? \\ y = \ln(1+e^t) & y_{xx}'' = ? \end{cases} \end{aligned}$$

8. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$.

Варіант №26

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за методом Гаусса;
- 3) матричним методом.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 11 \\ x + y - 2z = 2 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(0;-3;1)$, $M_2(-4;1;2)$, $M_3(2;-1;5)$, $M_4(3;1;-4)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;
- 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
- 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
- 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
- 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
- 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
- 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння гіперболи Γ , якщо ексцентриситет $\varepsilon = \frac{8}{7}$.

$A(8;0) \in \Gamma$. Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-2)^3}{n^3 + 3n^2 + 8n - 7}; & \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{6n+1} \right)^{n^2}; & \quad 3) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}; \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^3 + x^2}; & \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}; & \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{-5x}}{x - \sin 2x}. \end{aligned}$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq -2, \\ 1-x, & -2 < x \leq 1, \\ x^2 - 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad 2) y = 10^{\frac{1}{x-5}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = \ln(2x - 3 + \sqrt{4x^2 - 12x + 10});$$

$$2) y = \frac{x\sqrt{x}}{1-x^2};$$

$$3) y = (\sin^2 x)^{\ln x};$$

$$4) \sqrt{\frac{y}{x}} = x^2 + y^2;$$

$$5) \begin{cases} x = \sqrt[3]{t} - 1 & y'_x = ? \\ y = \sqrt[3]{t} - 1 & y''_{xx} = ? \end{cases}$$

$$8. \text{ Дослідити функцію та побудувати її графік: } y = \frac{4}{3 + 2x - x^2}.$$

Варіант №27

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 19 \\ 2x + 7y + 4z = 30 \\ 3x - y + 6z = -1 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(1;3;0)$, $M_2(4;-1;2)$, $M_3(3;0;1)$, $M_4(-4;3;5)$.

Знайти:

1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;

2) кут $\angle M_2M_1M_3$;

3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

7) рівняння сторони M_1M_4 ;

8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо її директриса $D: y = -4$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 2n^2 + 4}{3 + 6n^3};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 5n - 5}{n^2 - 5n + 5} \right)^{2n+1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 64};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctgx} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{-2x}}{\operatorname{arctgx} - x}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases} \quad 2) y = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 2}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = (2x-1)^4 \arcsin \frac{1}{2x-1}; \quad 2) y = x^2 \operatorname{arccotg} 2x^2; \quad 3) y = (\cos 2x)^{\sqrt{x}};$$

$$4) \sqrt{x^2 + y^2} = y^3 x^2; \quad 5) \begin{cases} x = 2(t - \sin t) & y'_x = ? \\ y = 4(2 + \cos t) & y''_{xx} = ? \end{cases}$$

8. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Варіант №28

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

- 1) за формулами Крамера;
- 2) за методом Гаусса;
- 3) матричним методом.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 1 \\ x + y - 2z = -4 \\ 3x - y - z = -2 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(-2;-1;-1)$, $M_2(0;3;2)$, $M_3(3;1;-4)$, $M_4(-4;7;3)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;
- 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
- 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
- 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
- 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
- 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
- 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
- 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.

4. Скласти канонічне рівняння еліпса E , якщо ексцентриситет $\varepsilon = \frac{7}{8}$ $A(8;0) \in E$.

Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^5 - 5n^4 + 3}{(2n^2 + 3)(n^3 - 6)};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{3n+2} \right)^{2n};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + x^5};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{\sqrt{8+x} - 3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 7x}{5 \sin^2 x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{3x}}{x^2 - \arctg x}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x \leq 2, \\ x+3, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$2) y = 3^{\frac{2-3x}{1+5x}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = (5x + \sqrt{25x^2 + 1})^3;$$

$$2) y = \sqrt[3]{x^2} \ln(1+x^2);$$

$$3) y = (\operatorname{ctg} x)^{\frac{2}{x}};$$

$$4) xy = \operatorname{arcctg} \frac{y}{x};$$

$$5) \begin{cases} x = e^t & y'_x = ? \\ y = te^{-t} & y''_{xx} = ? \end{cases}$$

8. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{x^3}{x^4 - 1}$.

Варіант №29

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x - y + z = 6 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(-3;-5;6)$, $M_2(2;1;-4)$, $M_3(0;-3;-1)$, $M_4(-5;2;-8)$.

Знайти:

1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;

2) кут $\angle M_2M_1M_3$;

3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

- 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.
4. Скласти канонічне рівняння гіперболи Γ , якщо $A(3; -\sqrt{\frac{15}{2}})$, $B(\sqrt{\frac{28}{3}}; 2) \in \Gamma$.
 Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.
5. Обчислити границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3}{(3-5n)^4}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 2n - 3}{3n^2 + 2n + 1} \right)^{3n^2 - 7}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{x \sin 5x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sqrt{1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq 0, \\ x^2 - 2, & -1 < x \leq 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases} \quad 2) y = 2^{\frac{2x}{x-3}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$1) y = \sqrt{49x^2 + 1} \arctg 7x; \quad 2) y = (\arctg x)^{\sqrt{x}}; \quad 3) \ln(x+y) = \sqrt{1+xy};$$

$$4) y = x^2 \sqrt[3]{1+x^2}; \quad 5) \begin{cases} x = 6t^2 - 4 \\ y = 3t^5 \end{cases}, \quad \begin{matrix} y'_x = ? \\ y''_{xx} = ? \end{matrix}.$$

8. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 3}$.

Варіант №30

1. Знайти матрицю:

$$D = 2A^2 - 3B \cdot C + 5E, \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad E - \text{одинична матриця.}$$

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) за формулами Крамера;

2) за методом Гаусса;

3) матричним методом.

$$\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$$

3. Дано координати точок $M_1(2;-4;-3)$, $M_2(5;-6;0)$, $M_3(-1;3;-3)$, $M_4(-10;-8;7)$.

Знайти:

- 1) довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{M_1M_2}$;
 - 2) кут $\angle M_2M_1M_3$;
 - 3) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
 - 4) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
 - 5) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
 - 6) довжину висоти піраміди A_4H , застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;
 - 7) рівняння сторони M_1M_4 ;
 - 8) кут між прямою та площиною $M_1M_2M_3$.
4. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо її директриса $D: y = 4$.
Визначити всі характеристики даної кривої та побудувати її.

5. Обчислити границі:

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}; & 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+7} \right)^{n+1}; & 3) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}; \\ 4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}; & 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}}; & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - e^{2x}}{\tg x + \arctg x}. \end{array}$$

6. Дослідити функцію на неперервність:

$$1) f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1, \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & x > 1. \end{cases} \quad 2) y = 5^{\frac{1-x}{1+2x}}.$$

7. Знайти похідні функції:

$$\begin{array}{lll} 1) y = \frac{2}{3x-2} \sqrt{-3+12x-9x^2}; & 2) y = \frac{\arccos x}{\sqrt[3]{x^2}}; & 3) y = x^{\cos 2^x}; \\ 4) \sqrt{xy^3} = \ln(x^2 + y); & 5) \begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad y'_x = ? \quad y''_{xx} = ? \end{array}$$

8. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = (1-x^3)^{\frac{1}{3}}$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2005. – 648 с.
2. Вища математика. Збірник задач : навч. посіб. / [В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін.] ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2004. – 480 с.
3. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии: учеб. пособ. для вузов. – СПб.: Специальная литература, 1998. – 200 с.
4. Грималюк В. П. Вища математика : навч. посіб. Ч. 1 / Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. – К. : Віпол, 2004. – 376 с.
5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. – [Изд. 22-е, перераб.]. – СПб. : Профессия, 2005. – 432 с.
6. Сборник задач по математике для вузов Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа / [Болгов В. А., Ефимов А. В., Каракулин А. Ф. и др.] ; под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – [2-е изд.]. – М. : Наука, 1986. – 432 с.
7. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студентов вузов. Ч. 1 / Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. – М. : Высш. школа, 1986. – 304 с.
8. Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Высшая математика / Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. – К. : Вища шк., 1987. – 552 с.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
Короткі теоретичні відомості.....	4
Приклади розв’язування деяких типових завдань.....	12
Завдання для типової розрахункової роботи.....	20
Рекомендована література.....	58