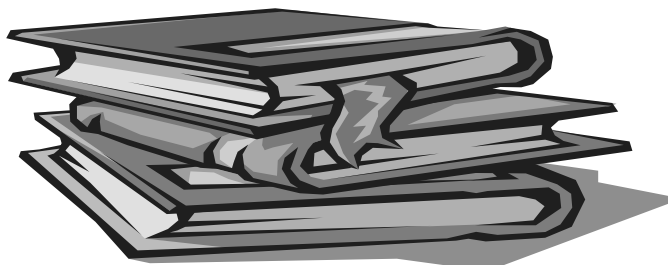


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ



Т. В. Авдєєва, Веригіна І. В.

ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ.
ЖОРДАНОВА ФОРМА МАТРИЦІ

Практикум

для студентів фізико-математичного факультету
денної форми навчання всіх напрямів підготовки

Київ
НТУУ «КПІ»
2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

Т. В. Авдєєва, Веригіна І. В.

**ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ.
ЖОРДАНОВА ФОРМА МАТРИЦІ**

Практикум

для студентів фізико-математичного факультету
денної форми навчання всіх напрямів підготовки

“ Рекомендовано ”

Методичною радою ФМФ НТУУ “ КПІ ”

Київ
НТУУ «КПІ»
2016

УДК 512.8
531.0
ББК 22.151+22.311

*Гриф надано методичною радою ФМФ НТУУ «КПІ»
(протокол № 6 від 24 червня 2016 р.)*

Рецензенти: **Ганюшкін Олександр Григорович**,
кандидат фіз.–мат. наук, доцент кафедри
алгебри та математичної логіки,
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
Ільєнко Андрій Борисович,
кандидат фіз.–мат. наук, доцент кафедри
математичного аналізу та теорії ймовірностей ФМФ,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Відповідальний
редактор: **Дудкін Микола Євгенович**, проф., доктор фіз.-мат. наук,
завідувач кафедри диференціальних рівнянь ФМФ,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Лінійні оператори. Жорданова форма матриці. Практикум
/Т.В. Авдєєва, І.В. Веригіна.- К.: НТУУ «КПІ», 2016. – 163 с. – Бібліогр.: с.
161. –100 пр.

У посібнику викладено короткі теоретичні відомості за темами: лінійні оператори, власні числа та власні вектори матриці, жорданова форма матриці, функції від матриць. Наведено приклади розв'язування задач із відповідних тем. Кожний розділ містить завдання для самостійного розв'язування із відповідями. У додатках містяться таблиці жорданових форм матриць третього та четвертого порядку, питання для самоперевірки та контролю засвоєння знань.

Практикум написаний відповідно до діючої програми курсу «Лінійна алгебра», тема «Лінійні оператори. Жорданова форма матриці», та призначений для студентів фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ», а також для студентів інших спеціальностей, де курс лінійної алгебри виділений в окрему дисципліну.

**УДК 512.8
531.0
ББК 22.151+22.311**

© Т.В. Авдєєва,
І.В. Веригіна, 2016

Вступ

Дана методична розробка пропонується студентам 1-го курсу фізико-математичного факультету (спеціальність математика, фізика) під час вивчення тем “Лінійні оператори” та “Жорданова форма матриці” в курсах “Лінійна алгебра”, “Основи векторного та тензорного аналізу”.

Практикум складається з двох розділів, які в свою чергу розбиті на параграфи. Кожний розділ містить короткі теоретичні відомості (без доведення) з достатньою кількістю розібраних прикладів, що дає змогу студентові застосувати наведений теоретичний матеріал та самостійно опрацювати відповідну тему. Наприкінці кожного підрозділу запропоновано задачі (із відповідями) для самостійного розв’язування. У додатки винесено зразок варіанту контрольної роботи з теми “Лінійні оператори” та питання для самоконтролю засвоєння знань.

Жорданова форма матриці (її частинний випадок діагональна форма) є найбільш простою формою матриці, що дозволяє легко виконувати дії з матрицями, зокрема, обчислювати значення функції від матриць, наприклад e^A , $\sin A$, $\cos A$ тощо. Жорданова форма матриці застосовується при дослідженні систем диференціальних рівнянь на стійкість, в теоретичній фізиці при зведенні тензорів до канонічної форми.

У даному посібнику наведено приклади зведення до жорданової форми матриць 2×2 , 3×3 , 4×4 . Метод такого зведення детально розбирається і пояснюється, тому може бути поширений на матриці більших порядків. У додатках також містяться таблиці жорданових форм матриць третього та четвертого порядку, питання для самоперевірки та контролю засвоєння знань.

Умовні позначення

$\mathbb{R}$ – поле дійсних чисел;

$\mathbb{R}^n$ – n – вимірний арифметичний векторний простір;

E_n – евклідов простір розмірності n ;

L^n – n – вимірний лінійний простір;

P_n – лінійний простір многочленів, степені яких не перевищують n (з дійсними коефіцієнтами);

$\dim L$ – розмірність лінійного простору;

$(\bar{x}, \bar{y})$ – скалярний добуток в евклідовому просторі;

E – одинична матриця;

$\mathcal{E}$ – тотожний оператор;

A – матриця оператора $\mathcal{A}$;

A_e – матриця оператора $\mathcal{A}$ в базисі $\bar{e}_i$;

A^T – матриця, транспонована до матриці A ;

A^{-1} – матриця, обернена до матриці A ;

$\text{def } \mathcal{A}$ – дефект оператора $\mathcal{A}$;

$\text{im } \mathcal{A}$ – образ оператора $\mathcal{A}$ (область значень оператора);

$\text{ker } \mathcal{A}$ – ядро оператора $\mathcal{A}$;

$\text{rang } \mathcal{A}$ – ранг оператора $\mathcal{A}$;

$M_n(\mathbb{R})$ – множина дійсних квадратних матриць порядку n ;

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$ – множина дійсних квадратних матриць порядку $m \times n$;

$C_{[a,b]}$ – множина дійсних функцій, неперервних на відрізку $[a,b]$;

$J_k(\lambda)$ – жорданова клітина розміру k , що відповідає власному числу λ ;

J_A – жорданова форма матриці A ;

$J_A = J_{k_1}(\lambda_1) \oplus J_{k_2}(\lambda_2) \oplus \dots \oplus J_{k_m}(\lambda_m)$ – блочно-діагональна матриця, що

складається з жорданових клітин.

Розділ 1. Лінійні оператори

§ 1. Означення лінійного оператора

У теорії лінійних просторів важливу роль відіграють лінійні відображення та лінійні оператори.

Нехай L, M деякі лінійні простори.

Означення 1.1. Відображення $\mathcal{A}$, що відображає L в M , вважається заданим, якщо вказано правило (закон або відповідність), за яким кожному елементу $\bar{x}$ простору L ставиться у відповідність деякий елемент $\bar{y}$ простору M . При цьому елемент $\bar{y}$ називають **образом** елемента $\bar{x}$ та пишуть $\bar{y} = \mathcal{A}(\bar{x})$ або $\mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{y}$ (елемент $\bar{x}$ називають **прообразом** елемента $\bar{y}$).

Відображення здебільше позначають літерами $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \dots, f, g, \dots, \varphi$ тощо.

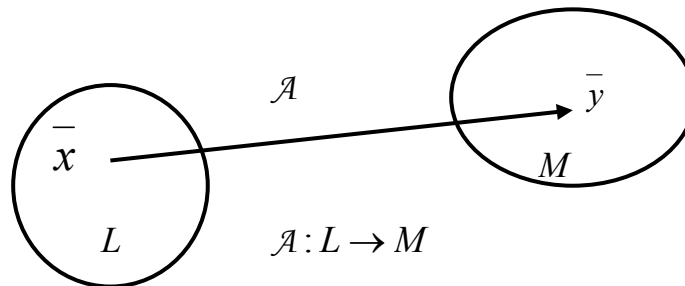


Рис. 1.1. Графічне завдання відображення

Означення 1.2. Відображення $\mathcal{A}: L \rightarrow M$ називається **лінійним**, якщо виконуються такі умови:

- 1) $\forall \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in L \quad \mathcal{A}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \mathcal{A}(\bar{x}_1) + \mathcal{A}(\bar{x}_2);$
- 2) $\forall \bar{x} \in L, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \mathcal{A}(\lambda \bar{x}) = \lambda \mathcal{A}(\bar{x}).$

Зауваження 1.1 Якщо хоча б одна з двох умов лінійності не виконується, то відображення не є лінійним.

Зауваження 1.2. Якщо $L \equiv M$, тобто $\mathcal{A}: L \rightarrow L$, то $\mathcal{A}$ називається також **лінійним оператором** або **лінійним перетворенням простору L** .

Розділ 1. Лінійні оператори.
§ 1. Означення лінійного оператора

Зауваження 1.3. Якщо $M \equiv \mathbb{R}$, то перетворення $\mathcal{A}: L \rightarrow \mathbb{R}$ називається **лінійним функціоналом**.

Наведемо приклади важливих лінійних відображень та лінійних операторів.

Нехай L, M – лінійні простори.

Приклад 1.1. Оператор $\mathcal{A}: \bar{x} \mapsto \bar{x}$ (кожному вектору $\bar{x} \in L$ ставиться у відповідність сам вектор), є лінійним. Такий оператор називається **тотожним** або **одиничним оператором** і позначається буквою E : $E(\bar{x}) = \bar{x}$.

Приклад 1.2. Оператор $\mathcal{A}$, який кожному вектору $\bar{x} \in L$ ставить у відповідність вектор $k\bar{x}$ (де k – деяке дійсне фіксоване число), тобто $\mathcal{A}(\bar{x}) = k\bar{x}$, називають **оператором подібності** або **оператором розтягу**. Легко довести, що цей оператор є лінійним. Якщо $L \equiv \mathbb{R}$, то оператор подібності $\mathcal{A}(\bar{x}) = k\bar{x}$ є звичайною лінійною функцією $y = kx$. (Поміркуйте: чи буде лінійним оператором функція $y = kx + b$?)

Якщо оператор подібності діє в $\mathbb{R}^2$ або в $\mathbb{R}^3$, то при $k > 1$ він **розтягує** вектори простору в k разів, при $0 < k < 1$ – **стискає** всі вектори, при $k < 0$ розтяг (стиск) усіх векторів супроводжується симетричним відображенням їх відносно початку координат.

Приклад 1.3. Розглянемо відображення $\mathcal{A}: L \rightarrow M$, $\mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{a}$ ($\bar{a}$ – фіксований вектор в M).

а) при $\bar{a} = \bar{0}$, тобто $\mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{0}$ – **нульове відображення**. Це відображення $\mathcal{A}$ є лінійним.

б) при $\bar{a} \neq \bar{0}$, відображення $\mathcal{A}$ не є лінійним, хоча б тому, що не виконується друга умова лінійності: $\mathcal{A}(\lambda\bar{a}) = \bar{a} \neq \lambda\bar{a}$ при певному значенні $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$.

Приклад 1.4. Оператор $\mathcal{A}$, що відображає вектори координатної площини OXY симетрично відносно осі OY , є лінійним. Закон дії такого оператора $\bar{x} = (x_1; x_2) \mapsto \bar{y} = (-x_1; x_2)$. Розглянемо дію цього оператора на вектор $\bar{x} = (4; 2)$ (рис. 1.2). Тоді $\mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{y} = (-4; 2)$.

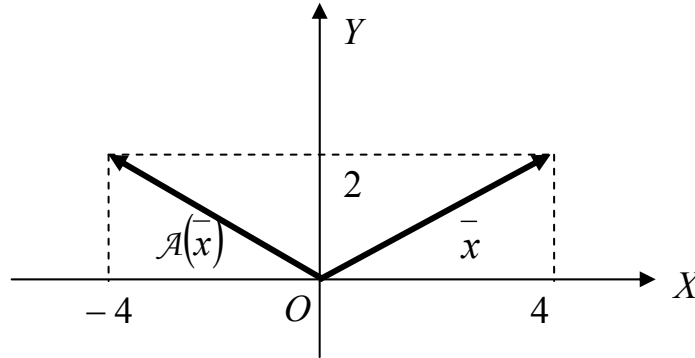


Рис. 1.2. Дія оператора симетричного відображення відносно осі OY на вектор $\bar{x} = (4; 2)$

Приклад 1.5. Оператор $\mathcal{A}$, що ортогонально проектує вектори координатної площини OXY на вісь OX , є лінійним, оскільки проекція суми векторів дорівнює сумі проєкцій доданків та проекція добутку вектора на число дорівнює добутку проєкції вектора на це число λ . Нехай $\bar{x} = (4; 2)$ (рис. 1.3).

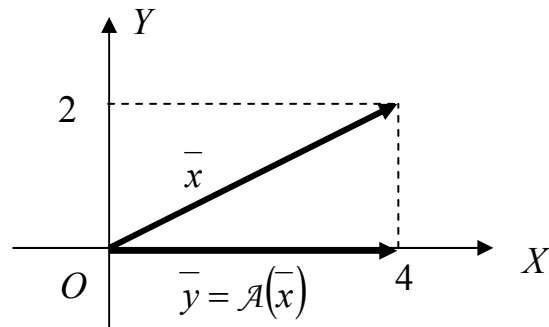


Рис. 1.3 Дія оператора ортогонального проектування векторів площини OXY на вісь OX на вектор $\bar{x} = (4; 2)$

Приклад 1.6. Оператор $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ діє за правилом $\mathcal{A}(\bar{x}) = (x_1, x_2, 0)$ для довільного $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Цей оператор називається **оператором проектування векторів простору на площину OXY** . Зрозуміло, що цей оператор є лінійним (див. міркування, які наведено в попередньому прикладі).

Приклад 1.7. Оператор $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ повороту векторів площини OXY навколо початку координат проти руху годинникової стрілки на деякий фі-

Розділ 1. Лінійні оператори.
§ 1. Означення лінійного оператора

ксований кут φ (рис. 1.4) є лінійним, оскільки на результат не впливає, чи спочатку додаємо вектори $\bar{x}$ та $\bar{y}$, а потім їх суму повертаємо на кут φ , чи

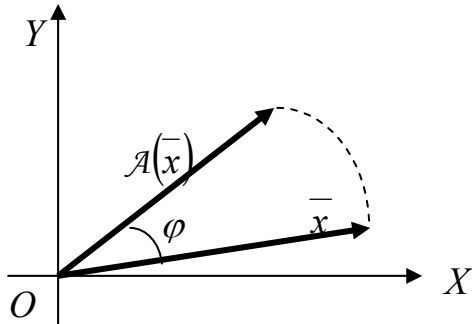


Рис. 1.4. Дія оператора повороту векторів площини OXY навколо початку координат проти годинникової стрілки на кут φ

спочатку повернемо ці вектори на кут φ , а потім додамо вектори. Так само не має значення, чи помножимо спочатку вектор $\bar{x}$ на число λ , а потім одержаний вектор повернемо на кут φ , чи спочатку повернемо вектор на кут φ , а потім уже помножимо вектор на число λ .

Приклад 1.8. Нехай $L = P_n$ (множина многочленів степеня $\leq n$ з дійсними коефіцієнтами). **Оператор диференціювання** $\mathcal{A}: f(x) \mapsto f'(x)$ кожному многочлену ставить у відповідність його похідну. Оскільки похідна від суми дорівнює сумі похідних та постійний множник можна виносити за знак похідної, тобто $\mathcal{A}(f + g) = (f + g)' = f' + g' = \mathcal{A}(f) + \mathcal{A}(g)$ та $\mathcal{A}(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda \mathcal{A}(f)$, то оператор диференціювання $\mathcal{A}$ є лінійним.

Приклад 1.9. Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ – базис простору E_2 . Довільний вектор $\bar{x} \in E_2$ можна однозначно подати у вигляді $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2$. Розглянемо перетворення $\mathcal{A}(\bar{x}) = 2x_1 \bar{e}_1 + 3x_2 \bar{e}_2$. Переконаємося, що таке перетворення є лінійним. Для цього розглянемо вектор $\bar{y} \in E_2$: $\bar{y} = y_1 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2$. Тоді $\mathcal{A}(\bar{y}) = 2y_1 \bar{e}_1 + 3y_2 \bar{e}_2$.

1. Подіємо оператором $\mathcal{A}$ на вектор $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1) \bar{e}_1 + (x_2 + y_2) \bar{e}_2$.

$$\mathcal{A}(\bar{x} + \bar{y}) = 2(x_1 + y_1) \bar{e}_1 + 3(x_2 + y_2) \bar{e}_2.$$

$$\text{З другого боку } \mathcal{A}(\bar{x}) + \mathcal{A}(\bar{y}) = (2x_1 + 2y_1) \bar{e}_1 + (3x_2 + 3y_2) \bar{e}_2.$$

Розділ 1. Лінійні оператори.
§ 1. Означення лінійного оператора

Отже, очевидно $\mathcal{A}(\bar{x} + \bar{y}) = \mathcal{A}(\bar{x}) + \mathcal{A}(\bar{y})$.

2. Розглянемо вектор $\lambda \bar{x} = \lambda x_1 \bar{e}_1 + \lambda x_2 \bar{e}_2 (\forall \lambda \in \mathbb{R})$.

Його образ $\mathcal{A}(\lambda \bar{x}) = 2\lambda x_1 \bar{e}_1 + 3\lambda x_2 \bar{e}_2 = \lambda(2x_1 \bar{e}_1 + 3x_2 \bar{e}_2) = \lambda \mathcal{A}(\bar{x})$. Отже, оператор $\mathcal{A}$ є лінійним.

Приклад 1.10. Нехай $C_{[a,b]}$ – простір функцій неперервних на відрізку $[a,b]$. Розглянемо оператор $\mathcal{A}: C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$ визначений правилом $\mathcal{A}(f(t)) = t \cdot f(t)$. Тоді

1. $\mathcal{A}(f(t) + g(t)) = t \cdot (f(t) + g(t)) = t \cdot f(t) + t \cdot g(t) = \mathcal{A}(f(t)) + \mathcal{A}(g(t))$.

2. $\mathcal{A}(\lambda f(t)) = t \cdot \lambda f(t) = \lambda(t \cdot f(t)) = \lambda \mathcal{A}(f(t))$.

Отже, $\mathcal{A}$ – лінійний оператор.

Розв’язування типових задач.

Задача 1.1. З’ясувати, чи буде лінійним оператор $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, якщо для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується умова $f(x) = 5^x$.

Розв’язування. Перевіримо умови лінійності оператора. Розглянемо два дійсних числа x_1 та x_2 . Тоді $f(x_1) = 5^{x_1}$, $f(x_2) = 5^{x_2}$, $f(x_1) + f(x_2) = 5^{x_1} + 5^{x_2} \neq 5^{x_1+x_2} = f(x_1 + x_2)$. Перша умова лінійності не виконується для всіх значень $x \in \mathbb{R}$. Наприклад, для числа $x_1 = 1$ та $x_2 = 2$ маємо $f(x_1) = 5^{x_1} = 5$, $f(x_2) = 5^{x_2} = 25$, $x_1 + x_2 = 3$ та $f(x_1) + f(x_2) = 5 + 25 \neq 125 = 5^{1+2} = f(x_1 + x_2)$. Отже, оператор не є лінійним (див. зауваження 1.1).

Задача 1.2. З’ясувати, чи буде лінійним оператор $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, якщо для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується умова $f(x) = x^2$.

Розв’язування. Перевіримо умови лінійності оператора. Розглянемо два дійсних числа x_1 та x_2 . Тоді $f(x_1) = x_1^2$, $f(x_2) = x_2^2$,

Розділ 1. Лінійні оператори.
§ 1. Означення лінійного оператора

$f(x_1) + f(x_2) = x_1^2 + x_2^2 \neq (x_1 + x_2)^2 = f(x_1 + x_2)$. Візьмемо $x_1 = 1, x_2 = 3$.
Тоді $f(1) = 1^2 = 1, f(3) = 3^2 = 9$ та $f(1) + f(3) = 1 + 9 = 10$. З іншого боку
 $f(1 + 3) = f(4) = 4^2 = 16$. Бачимо, що перша умова лінійності не виконується
для всіх дійсних чисел, тому оператор не є лінійним.

Задача 1.3. Нехай $M_n(\mathbb{R})$ – множина дійсних квадратних матриць порядку n . З'ясувати, чи буде лінійним оператор $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, якщо для будь-якого $A \in M_n(\mathbb{R})$ виконується умова $f(A) = A^T$.

Розв'язування. Перевіримо умови лінійності оператора f . Розглянемо дві матриці A і B порядку n . Тоді $f(A) = A^T, f(B) = B^T$ та

$$f(A) + f(B) = A^T + B^T = (A + B)^T = f(A + B).$$

Отже, перша умова лінійності виконується. Перевіримо другу умову лінійності: $f(\lambda A) = (\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda f(A)$, яка також виконується. Отже, такий оператор є лінійним.

Завдання для самостійного розв'язування

1. З'ясувати, які з перетворень $\mathcal{A}$ у просторі $\mathbb{R}^3$ будуть лінійними:
 - а) $\mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{a}$ ($\bar{a}$ – фіксований ненульовий вектор);
 - б) $\mathcal{A}(\bar{x}) = |\bar{x}| \bar{a}$ ($\bar{a}$ – фіксований ненульовий вектор);
 - в) $\mathcal{A}(\bar{x}) = (\bar{a}, \bar{x}) \bar{a}$ ($\bar{a}$ – фіксований ненульовий вектор);
 - г) $\mathcal{A}(\bar{x}) = (\bar{a}, \bar{x}) \bar{x}$ ($\bar{a}$ – фіксований ненульовий вектор);
 - е) $\mathcal{A}(\bar{x}) = (\sin x_1; \cos x_2; 0)$, де $\bar{x} = (x_1; x_2; x_3)$.
2. З'ясувати, які з перетворень $\mathcal{A}$ множини $C_{[a,b]}$ всіх неперервних на відрізьку $[a, b]$ функцій будуть лінійними:
 - а) $\mathcal{A}(f(t)) = \sin t \cdot f(t)$;
 - б) $\mathcal{A}(f(t)) = f(t) + 2$.

- Відповіді:**
1. всі, крім в) не є лінійними перетвореннями.
 2. а) лінійне; б) нелінійне.

§ 2. Матриця лінійного оператора

Задати лінійний оператор $\mathcal{A}$ у просторі L означає задати образи всіх векторів простору L при дії оператора $\mathcal{A}$, зокрема, й образи всіх векторів кожного базису цього простору (насправді **достатньо знати образи лише векторів одного з базисів простору L при дії оператора $\mathcal{A}$**). Для зручності будемо вважати, що L – скінченновимірний лінійний простір.

Нехай $\mathcal{A}: L \rightarrow L$. Зафіксуємо в просторі L деякий базис $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$.

Нехай $\mathcal{A}(\overline{e_1}) = f_1$, $\mathcal{A}(\overline{e_2}) = \overline{f_2}$, ..., $\mathcal{A}(\overline{e_n}) = \overline{f_n}$. Оскільки $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \dots, \overline{f_n}$ – вектори простору L , то їх можна розкласти в базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$:

$$\begin{aligned}\overline{f_1} &= \mathcal{A}(\overline{e_1}) = a_{11}\overline{e_1} + a_{21}\overline{e_2} + \dots + a_{n1}\overline{e_n} \ ; \\ \overline{f_2} &= \mathcal{A}(\overline{e_2}) = a_{12}\overline{e_1} + a_{22}\overline{e_2} + \dots + a_{n2}\overline{e_n} \ ; \\ &\dots \\ \overline{f_n} &= \mathcal{A}(\overline{e_n}) = a_{1n}\overline{e_1} + a_{2n}\overline{e_2} + \dots + a_{nn}\overline{e_n} \ .\end{aligned}$$

Означення 2.1. Матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, що утворена з ко-

ефіцієнтів розкладу векторів $\mathcal{A}(\overline{e_i})$ в базисі $\{\overline{e_i}\}$, називається **матрицею лінійного оператора (лінійного перетворення) $\mathcal{A}$** .

Зауважимо, що коефіцієнти a_{ij} в матрицю A вписуються по **стовпчикам**. Тобто коефіцієнти розкладу першого вектора $\mathcal{A}(\overline{e_1})$ утворюють перший стовпчик матриці A , і т.д.

Якщо ми знаємо матрицю A лінійного перетворення $\mathcal{A}$, то координати вектора $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n$ та його образа пов'язані співвідношеннями $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, у матричній формі запису це має вигляд $\bar{y} = A \cdot \bar{x}$.

Зауваження 2.1. В більш загальному випадку: $\mathcal{A}: L \rightarrow M$ для написання матриці лінійного відображення треба зафіксувати два базиси: один в просторі L , другий в просторі M . Матриця A буде мати розмір $m \times n$, де n – розмірність простору L , m – розмірність простору M .

Зауваження 2.2. Зрозуміло, що вигляд матриці A **залежить від вибору базису**. В різних базисах матриця A має різний вигляд. Якщо не вказано, про який базис йде мова в задачі, вибираємо стандартні базиси в лінійних просторах.

Отже, запам'ятаємо правило: **Щоб знайти матрицю лінійного оператора в деякому базисі, треба подіяти цим оператором на базисні вектори.**

Завдання лінійного оператора $\mathcal{A}$ в просторі L з фіксованим базисом $\{\bar{e}_i\}$ однозначно визначає матрицю A . І навпаки, будь-яка матриця A розміру $m \times n$ задає лінійне відображення простору L_m у простір L_n .

Приклад 2.1. Знайти матриці лінійних перетворень та лінійних відображень, наведених в прикладах 1.1–1.10.

1. Тотожний оператор $\bar{y} = \mathcal{E}(\bar{x}) = \bar{x}$ діє за правилом $\mathcal{E}(\bar{e}_i) = \bar{e}_i$. Тому в будь-якому базисі його матриця буде одиничною:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Для оператора подібності $\mathcal{A}(\bar{x}) = k\bar{x}$ ($k \in \mathbb{R}$) в будь-якому базисі $\{\bar{e}_i\}$ маємо $\mathcal{A}(\bar{e}_i) = k\bar{e}_i$ ($i = \overline{1, n}$). Тому його матрицею буде

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}.$$

3. Матрицею нульового оператора $\mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{0}$, в довільному базисі буде нульова матриця $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

4. Розглянемо $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – оператор симетричного відображення відносно осі OY . Якщо $\bar{i}, \bar{j}$ – стандартний базис $\mathbb{R}^2$, то

$$\mathcal{A}(\bar{i}) = -\bar{i} = -1\bar{i} + 0\bar{j}, \quad \mathcal{A}(\bar{j}) = \bar{j} = 0\bar{i} + 1\bar{j}.$$

Тоді $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Нехай $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – оператор проектування векторів площини OXY на вісь OX . $\bar{i}, \bar{j}$ – стандартний базис $\mathbb{R}^2$. Тоді $\mathcal{A}(\bar{i}) = \bar{i}$, $\mathcal{A}(\bar{j}) = \bar{0}$. Отже, в цій базі перетворення $\mathcal{A}$ матиме матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – оператор проектування простору $\mathbb{R}^3$ на площину OXY . $\mathcal{A}(x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_2; 0)$. Нехай $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – стандартний базис $\mathbb{R}^3$, то $\mathcal{A}(\bar{i}) = \bar{i}$, $\mathcal{A}(\bar{j}) = \bar{j}$, $\mathcal{A}(\bar{k}) = \bar{0}$. Отже, оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Оператор $\mathcal{A}$ повертає всі вектори площини XOY навколо початку координат на кут φ проти годинникової стрілки. Розглянемо дію такого оператора $\mathcal{A}$ на базисні вектори $\bar{i}, \bar{j}$ (див. рис. 2.1, 2.2).

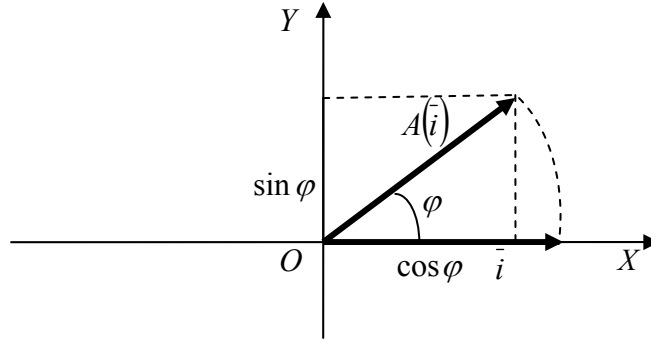


Рис. 2.1. Дія оператора повороту вектора площини на кут φ на базисний вектор $\bar{i}$: $\mathcal{A}(\bar{i}) = \cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}$

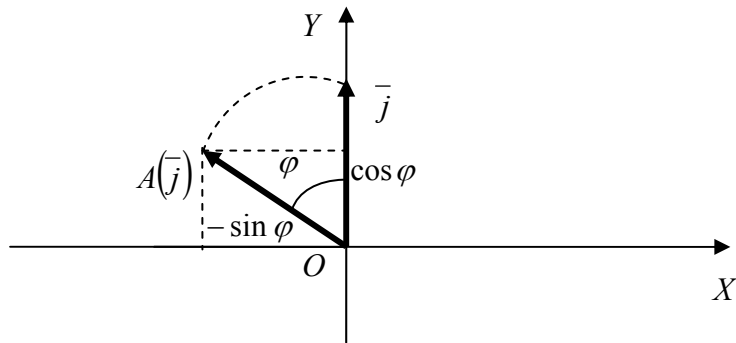


Рис. 2.2. Дія оператора повороту векторів площини на кут φ на базисний вектор $\bar{j}$: $\mathcal{A}(\bar{j}) = -\sin \varphi \bar{i} + \cos \varphi \bar{j}$

Отже, $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ – матриця оператора повороту.

8. В просторі P_n (множина всіх многочленів степеня $\leq n$ з дійсними коефіцієнтами) зафіксуємо стандартний базис:

$$p_1 = 1, \quad (p_1 = t^0)$$

$$p_2 = t,$$

$$p_3 = t^2,$$

.....

$$p_{n+1} = t^n.$$

Розглянемо дію оператора $\mathcal{D}$ – оператора диференціювання $\mathcal{D}(f) = f'$ на базисні вектори:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(p_1) &= 0, \\ \mathcal{D}(p_2) &= 1 = 1 \cdot p_1, \\ \mathcal{D}(p_3) &= 2t = 2p_2, \\ \mathcal{D}(p_4) &= 3t^2 = 3p_3, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{D}(p_{n+1}) &= nt^{n-1} = np_n.\end{aligned}$$

Матриця оператора диференціювання має вигляд:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

9. У просторі E_2 з базисом $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ оператор $\mathcal{A}$ переводить вектор

$\overline{x} = x_1 \overline{e_1} + x_2 \overline{e_2}$ у вектор $\mathcal{A}(\overline{x}) = 2x_1 \overline{e_1} + 3x_2 \overline{e_2}$. Маємо:

$$\begin{aligned}\overline{e_1} &= 1 \cdot \overline{e_1} + 0 \cdot \overline{e_2}, & \overline{e_2} &= 0 \cdot \overline{e_1} + 1 \cdot \overline{e_2}, \\ \mathcal{A}(\overline{e_1}) &= 2 \cdot \overline{e_1} + 0 \cdot \overline{e_2}, & \mathcal{A}(\overline{e_2}) &= 0 \cdot \overline{e_1} + 3 \cdot \overline{e_2}.\end{aligned}$$

Отже, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Простір $C_{[a,b]}$ не є скінчено вимірним. Для таких просторів поняття матриці лінійного перетворення не розглядається.

Приклад 2.2. Знайдемо образ вектора $\overline{x} = (4; 2)$ під дією оператора $\mathcal{A}$ симетричного відображення $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ відносно осі OY . Оскільки мат-

риця оператора $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (див. приклад 2.1 пункт 4), то

$$\bar{y} = \mathcal{A}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.3. Знайдемо образ вектора $\bar{x} = (4; 2)$ при дії оператора $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ проектування векторів площини OXY на вісь OX . Матриця оператора має вигляд $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отже, $\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Приклад 2.4. Нехай оператор $\mathcal{A}$ повертає всі вектори площини XOY навколо початку координат на кут φ проти годинникової стрілки, $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ – матриця оператора. Знайдемо образ вектора $\bar{x} = (2; 4)$ при повороті на кут $\varphi = 30^\circ$. Матриця перетворення при $\varphi = 30^\circ$ набуває

$$\text{вигляду } A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \text{ Тоді образ } \bar{y} = A\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 \\ 1 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.5. В просторі P_n в стандартному базисі: $1, t, t^2, \dots, t^n$ матриця оператора диференціювання має вигляд:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

За допомогою матриці оператора диференціювання знайдемо похідну многочлена: $P_n(t) = t^n + 5t^{n-1} + t^2 + 3 = 3p_1 + p_3 + 5p_n + 1 \cdot p_{n+1}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(P_n(t)) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \dots \\ 5(n-1) \\ n \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= 2p_2 + \dots + 5(n-1)p_{n-1} + np_n = 2t + 5(n-1)t^{n-2} + nt^{n-1}. \end{aligned}$$

Розв'язування типових задач

Задача 2.1. В арифметичному векторному просторі $\mathbb{R}^3$ задано оператор $\mathcal{A}(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_2; 2x_1 + x_3; x_1 + x_2 + 3x_3)$ та оператор $\mathcal{B}(x_1; x_2; x_3) = (x_1 + 1; 0; 2x_1 - 3x_2)$:

- а) перевірити, що оператор $\mathcal{A}$ є лінійним;
- б) написати матрицю оператора $\mathcal{A}$ в стандартному базисі простору $\mathbb{R}^3$;
- в) знайти образ вектора $\bar{a} = (1; 2; 3)$;
- г) переконатися, що оператор $\mathcal{B}$ не є лінійним.

Розв'язування.

а) Оператор $\mathcal{A}$ діє за правилом: для довільного вектора $\bar{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$ маємо $\mathcal{A}(\bar{x}) = (x_1 - x_2; 2x_1 + x_3; x_1 + x_2 + 3x_3)$. Розглянемо також вектор

$$\bar{y} = (y_1; y_2; y_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{A}(\bar{y}) = (y_1 - y_2; 2y_1 + y_3; y_1 + y_2 + 3y_3),$$

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3).$$

Тому $\mathcal{A}(\bar{x} + \bar{y}) =$

$$= ((x_1 + y_1) - (x_2 + y_2); 2(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3); (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3)).$$

З іншого боку: $\mathcal{A}(\bar{x}) + \mathcal{A}(\bar{y}) =$

$$= (x_1 - x_2 + y_1 - y_2; 2x_1 + x_3 + 2y_1 + y_3; x_1 + x_2 + 3x_3 + y_1 + y_2 + 3y_3).$$

$$\text{Очевидно, } \mathcal{A}(\bar{x} + \bar{y}) = \mathcal{A}(\bar{x}) + \mathcal{A}(\bar{y}). \quad (1)$$

Розглянемо вектор $\lambda \bar{x} = (\lambda x_1; \lambda x_2; \lambda x_3)$.

$$\mathcal{A}(\lambda \bar{x}) = (\lambda x_1 - \lambda x_2; 2\lambda x_1 + \lambda x_3; \lambda x_1 + \lambda x_2 + 3\lambda x_3).$$

З іншого боку:

$$\lambda \mathcal{A}(\bar{x}) = (\lambda(x_1 - x_2); \lambda(2x_1 + x_3); \lambda(x_1 + x_2 + 3x_3)).$$

$$\text{Отже, } \mathcal{A}(\lambda \bar{x}) = \lambda \mathcal{A}(\bar{x}). \quad (2)$$

Отже, з (1) та (2) випливає, що оператор $\mathcal{A}$ є лінійним.

б) Напишемо матрицю A оператора $\mathcal{A}$. Для цього подіємо оператором $\mathcal{A}$ на вектори стандартного базису $\mathbb{R}^3$: $\bar{e}_1 = (1; 0; 0)$, $\bar{e}_2 = (0; 1; 0)$, $\bar{e}_3 = (0; 0; 1)$.

Оскільки $\mathcal{A}(\bar{x}) = (x_1 - x_2; 2x_1 + x_3; x_1 + x_2 + 3x_3)$, то

$$\mathcal{A}(\bar{e}_1) = (1 - 0; 2 + 0; 1 + 0 + 0) = (1; 2; 1) = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3,$$

$$\mathcal{A}(\bar{e}_2) = (-1; 0; 1) = -\bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 + \bar{e}_3,$$

$$\mathcal{A}(\bar{e}_3) = (0; 1; 3) = \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3.$$

$$\text{Тоді } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

в) Знайдемо образ вектора $\bar{a} = (1; 2; 3)$ під дією оператора $\mathcal{A}$. Це можна зробити різними способами.

$$\text{І спосіб: } \mathcal{A}(\bar{a}) = (1 - 2; 2 + 3; 1 + 2 + 9) = (-1; 5; 12).$$

$$\text{ІІ спосіб: } A\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

г) Покажемо, що оператор $\mathcal{B}$ не є лінійним за допомогою контрприкладу.

Згідно умови $\mathcal{B}(\bar{x}) = (x_1 + 1; 0; 2x_1 - 3x_2)$, тому $\lambda \bar{x} = (\lambda x_1; \lambda x_2; \lambda x_3)$. Зафіксу-

ємо вектор $\bar{x} = (1; -2; 5)$ та $\lambda = 2$, тоді $\mathcal{B}(\bar{x}) = (1 + 1; 0; 2 + 6) = (2; 0; 8)$,

$$2\mathcal{B}(\bar{x}) = (4; 0; 16), \quad 2\bar{x} = (2; -4; 10), \quad \mathcal{B}(2\bar{x}) = (2 + 1; 0; 4 + 12) = (3; 0; 16).$$

Як бачимо, $\mathcal{B}(2\bar{x}) \neq 2\mathcal{B}(\bar{x})$, тому оператор $\mathcal{B}$ не є лінійним (див. зауваження 1.1). В цьому випадку матрицю оператора не складаємо. Також можна показати, що для оператора $\mathcal{B}$ не виконується перша умова лінійності, а саме: $\mathcal{B}(\bar{x} + \bar{y}) \neq \mathcal{B}(\bar{x}) + \mathcal{B}(\bar{y})$.

Задача 2.2. Нехай лінійний оператор $f: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ переводить довільну матрицю $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ у матрицю $f(A) = A \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю цього оператора у базисі $\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

Подіємо оператором на вектори базису. Отримаємо:

$$f(\overline{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2 + 0\overline{e}_3 + 0\overline{e}_4,$$

$$f(\overline{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2 + 0\overline{e}_3 + 0\overline{e}_4,$$

$$f(\overline{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 0\overline{e}_1 + 0\overline{e}_2 + -1\overline{e}_3 + 4\overline{e}_4,$$

$$f(\overline{e}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 0\overline{e}_1 + 0\overline{e}_2 + 2\overline{e}_3 + 3\overline{e}_4.$$

Тому матриця F оператора $f(A)$ буде мати вигляд

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного розв'язування

1. З'ясувати, які з перетворень $\mathcal{A}$ є лінійними. Для лінійних перетворень знайти їхні матриці в тому базисі, в якому задано координати векторів $\bar{x}$ та $\mathcal{A}(\bar{x})$:
 - а) $\mathcal{A}(\bar{x}) = (x_1 + x_2; x_2 + x_3; x_1 + x_2 - x_3)$;
 - б) $\mathcal{A}(\bar{x}) = (x_1; 3x_1 + x_2; x_3)$;
 - в) $\mathcal{A}(\bar{x}) = (x_1 + 1; x_2; x_3)$;
 - г) $\mathcal{A}(\bar{x}) = (x_1; x_3; x_2 - 2x_3)$;
 - д) $\mathcal{A}(\bar{x}) = (x_1; x_2^3; x_1 + x_2)$, де $\bar{x} = (x_1; x_2)$;
 - е) $\mathcal{A}(\bar{x}) = (x_3; x_2; x_1 + 3x_2 - x_3)$;
 - ж) $\mathcal{A}(\bar{x}) = (x_4 + x_3; x_2 + x_4; x_3 + x_1; 2x_1 + x_4)$.
2. Знайти матрицю оператора диференціювання, заданого в просторі P_n (простір многочленів степеня $\leq n$ від одного невідомого) в базисі $1, t - a, \frac{(t - a)^2}{2!}, \frac{(t - a)^3}{3!}, \dots, \frac{(t - a)^n}{n!}$, де a – фіксоване дійсне число.
3. Знайти матрицю ортогонального проектування тривимірного простору на вісь, яка утворює рівні кути з осями прямокутної системи координат.
4. Нехай $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ – множина квадратних матриць другого порядку, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, X – довільна матриця з $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Оператор $\mathcal{A}$ заданий таким чином: $\mathcal{A}(X) = PX$. Показати лінійність оператора $\mathcal{A}$. Написати матрицю цього оператора в стандартному базисі простору.

Відповіді:

1.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{е) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ж) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

в) перетворення не є лінійним.

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

д) перетворення не є лінійним.

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

§ 3. Матриця лінійного перетворення при переході до нового базису

Ми вже знаємо, що кожний лінійний оператор $\mathcal{A}$ простору L задається у вибраному базисі певною матрицею. При зміні базису матриця даного лінійного оператора, взагалі кажучи, також буде змінюватися.

Теорема 3.1. Нехай в просторі L зафіксовано два базиси: $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ та $\overline{e'_1}, \overline{e'_2}, \dots, \overline{e'_n}$. Нехай T – матриця переходу від базису $\{\overline{e_i}\}$ до базису $\{\overline{e'_i}\}$.

Тоді матриці A і A' оператора $\mathcal{A}$ у базисах $\{\overline{e_i}\}$ та $\{\overline{e'_i}\}$ пов'язані співвідношенням

$$A' = T^{-1} A T.$$

Задача 3.1. Знайти матрицю переходу від базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ до базису $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$, та матрицю переходу від базису $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$ до базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$, якщо відомо, що $\overline{f_1} = 2\overline{e_1} + \overline{e_2} + 3\overline{e_3}$, $\overline{f_2} = 3\overline{e_1} - \overline{e_3}$, $\overline{f_3} = \overline{e_1} - \overline{e_2} - 2\overline{e_3}$.

Розв'язування. Матриця переходу від базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}$ до базису $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$ буде мати такий вигляд

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу від базису $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}$ до базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ буде дорівнювати T^{-1} . Визначник цієї матриці дорівнює 3, отже,

$$T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.2. У базисі $1, t, t^2$ простору P_2 (простір многочленів степеня ≤ 2) оператор $\mathcal{A}$ задається матрицею $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю цього оператора в базисі $0 + 2t + 3t^2, \quad 1 + 3t + 5t^2, \quad 3 + 5t + 7t^2$.

Розв'язування. Матриця переходу від одного базису до другого має вигляд: $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Звідси можна знайти обернену матрицю:

$$T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A' = T^{-1}AT = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 1 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ 6 & -9 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -15 & -16 & -20 \\ 9 & 12 & 16 \end{pmatrix} -$$

матриця оператора $\mathcal{A}$ у новому базисі.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайти матрицю лінійного перетворення, коли в базисі $\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}$ поміняти місцями два вектори $\overline{e_1}$ та $\overline{e_3}$.

2. Лінійне перетворення $\mathcal{A}$ у базисі $\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}$ має матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю цього оператора в базисі:

а) $\overline{e_1}; \overline{e_3}; \overline{e_2}$;

§ 3. Матриця лінійного перетворення при переході до нового базису

$$\text{б) } \overline{f_1} = \overline{e_1}, \overline{f_2} = \overline{e_1} + \overline{e_2}, \overline{f_3} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}.$$

3. Лінійне перетворення φ в базисі

$$\overline{a_1} = (8; -6; 7); \quad \overline{a_2} = (-16; 7; -13); \quad \overline{a_3} = (9; -3; 7)$$

має матрицю $\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$. Знайти його матрицю в базисі

$$\overline{b_1} = (1; -2; 1), \quad \overline{b_2} = (3; -1; 2), \quad \overline{b_3} = (2; 1; 2).$$

Відповіді:

1. У матриці поміняються місцями 1-й і 3-й рядок та 1-й і 3-й стовпчик.
2. Матриця перетворення у новому базисі:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad A_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 4. Дії над лінійними операторами

Нехай $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ – два лінійних відображення (оператора), що діють з лінійного простору L в лінійний простір M (простір L).

Означення 4.1. Сумою відображень (операторів) $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ називається відображення (оператор) $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, що визначається рівністю $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\bar{x}) = \mathcal{A}(\bar{x}) + \mathcal{B}(\bar{x})$.

Означення 4.2. Добутком лінійного відображення (оператора) $\mathcal{A}$ на дійсне число λ називається відображення (оператор) $\lambda\mathcal{A}$, що визначається рівністю $(\lambda\mathcal{A})(\bar{x}) = \lambda(\mathcal{A}(\bar{x}))$.

Зауваження 4.1. Можна показати, що оператори $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ та $\lambda\mathcal{A}$ в свою чергу є лінійними.

Зауваження 4.2. Множина усіх лінійних операторів з введеними операціями суми та множення на число, утворює лінійний простір L^* . В цьому лінійному просторі L^* :

оператор $-\mathcal{A} = (-1)\mathcal{A}$ (протилежний оператор) є протилежним елементом $\mathcal{A}$, оператор $\mathcal{O}(\bar{x}) = \bar{0}$ – нульовий оператор, є нульовим елементом простору L^* .

Приклад 4.1. Нехай $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ оператор повороту векторів площини на кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\mathcal{B}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – оператор проектування на вісь OY .

На рис. 4.1 показано дію оператора $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ на деякий вектор $\bar{x}$:

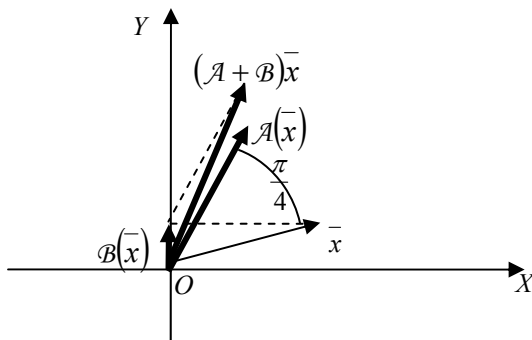


Рис. 4.1. Дія оператора $\mathcal{A} + \mathcal{B}$

На рис. 4.2 зображено дію операторів $2A$, $-3B$ відповідно

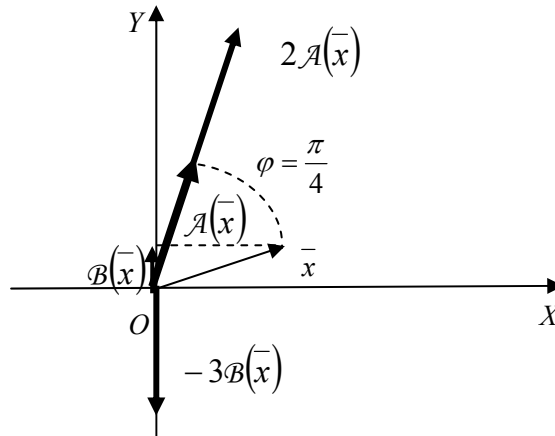


Рис. 4.2. Дія операторів $2A$, $-3B$

Означення 4.3. Добутком операторів A і B , що діють із L в L , називається лінійний оператор (AB) , який діє за правилом

$$(AB)(\bar{x}) = A(B(\bar{x})),$$

тобто спочатку на елемент $\bar{x}$ діє оператор B , а потім на результат $B(\bar{x})$ діє оператор A .

Приклад 4.2. Нехай A – оператор повороту векторів площини на кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$; B – оператор проектування на вісь OY . Покажемо на рис. 4.3 та 4.4 дію операторів AB та BA на деякий вектор $\bar{x}$.

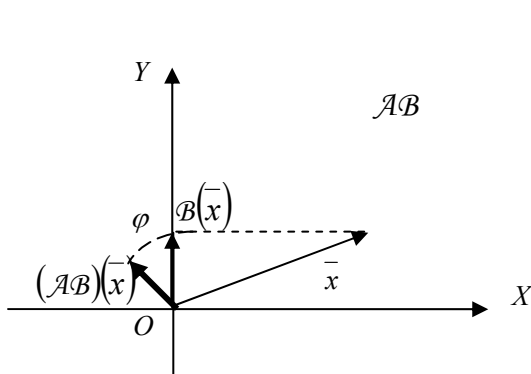


Рис. 4.3.

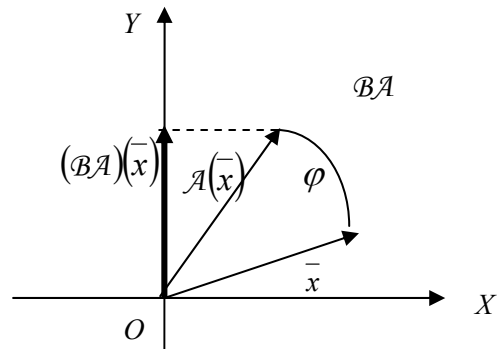


Рис. 4.4.

В загальному випадку: $AB \neq BA$, тобто оператори не комутують. Якщо для лінійних операторів A , B виконується рівність $AB = BA$, то оператори **комутують**.

Якщо в деяких базисах просторів L і M оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця A , оператору $\mathcal{B}$ відповідає матриця B , то сумі операторів $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ в цих базисах відповідає матриця $A + B$, оператору $\lambda\mathcal{A}$ – матриця λA , операторам $\mathcal{A}\mathcal{B}$ і $\mathcal{B}\mathcal{A}$ відповідно матриці AB та BA .

Задача 4.1. Нехай оператор $\mathcal{A}$ є симетрією площини відносно прямої $y = x$, оператор $\mathcal{B}$ розтягує вектори в три рази.

а) Зобразити на рисунках дію на вектор $\bar{x} = (1; 2)$ таких операторів

$$\mathcal{A}\mathcal{B}, \mathcal{B}\mathcal{A}, 2\mathcal{A} - \mathcal{B}, \mathcal{A}^2.$$

б) Знайти матриці операторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$.

в) Знайти матриці операторів $\mathcal{A}\mathcal{B}$, $\mathcal{B}\mathcal{A}$, $2\mathcal{A} - \mathcal{B}$, $\mathcal{A}^2$. Чи можна стверджувати, що оператори $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ комутують?

г) Знайти образи вектора $\bar{x} = (1; 2)$ під дією вказаних операторів за допомогою знайдених матриць.

Розв'язування. а) Зобразимо дії операторів на рисунках.

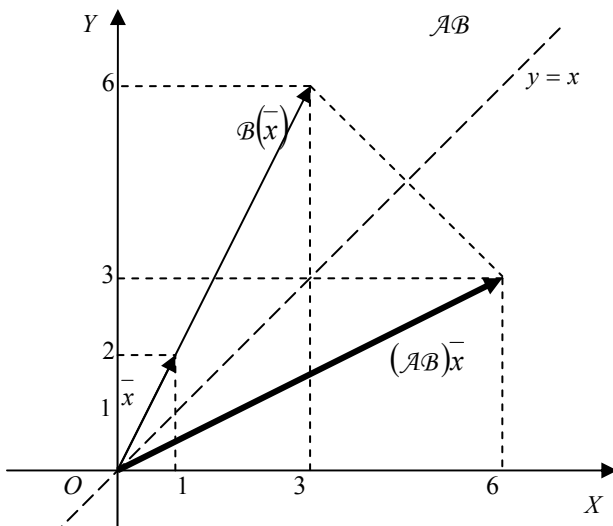


Рис. 4.5. Дія оператора $\mathcal{A}\mathcal{B}$ на вектор $\bar{x} = (1; 2)$

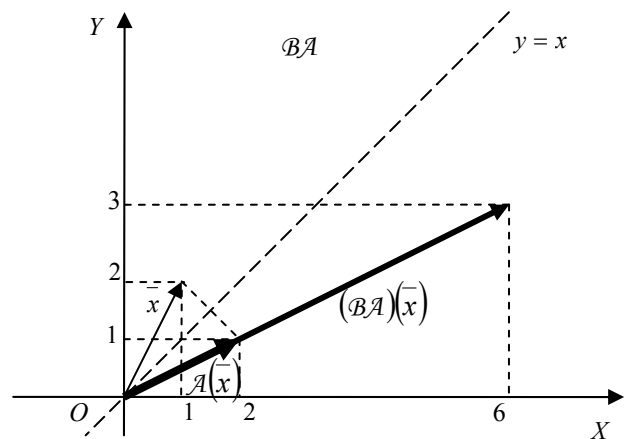


Рис. 4.6. Дія оператора $\mathcal{B}\mathcal{A}$ на вектор $\bar{x} = (1; 2)$

В координатному вигляді дії операторів:

$$\bar{x} = (1; 2), \mathcal{B}(x) = (3; 6), (\mathcal{A}\mathcal{B})(x) = (6; 3). \quad \bar{x} = (1; 2), \mathcal{A}(x) = (2; 1), (\mathcal{B}\mathcal{A})(x) = (6; 3).$$

Розділ 1. Лінійні оператори.
§ 4. Дії над лінійними операторами

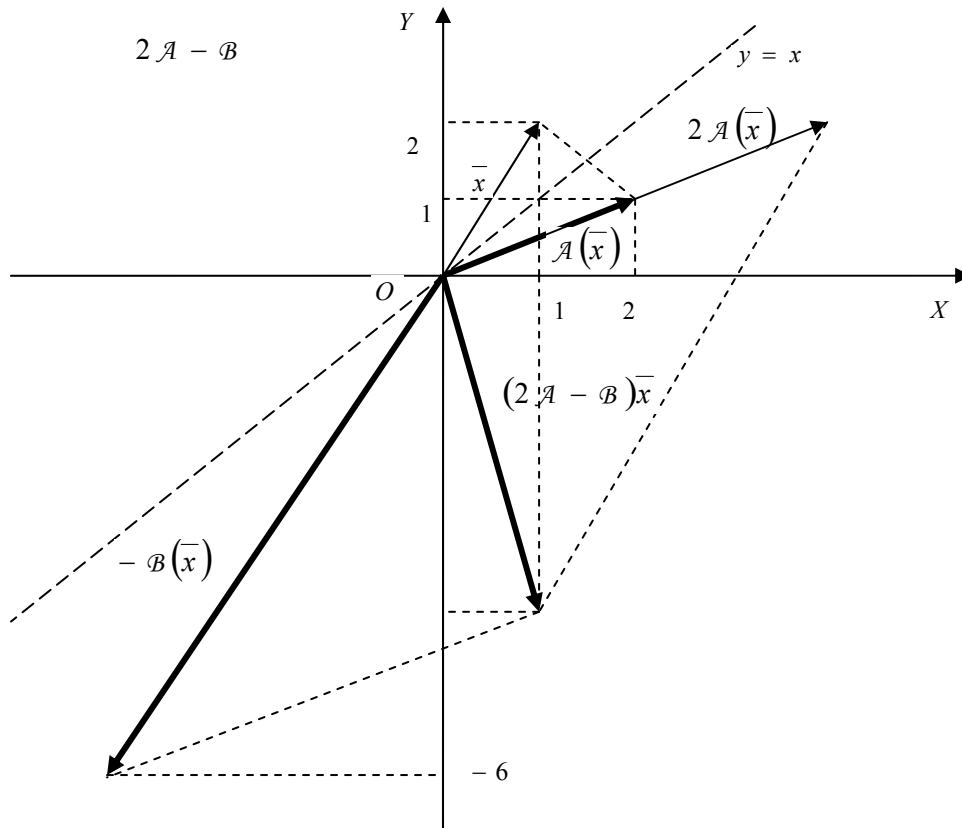


Рис. 4.7. Дія оператора $2A - B$ на вектор $\bar{x} = (1; 2)$

В координатному вигляді:

$$\bar{x} = (1; 2), \quad 2A(x) = (4; 2), \quad -B(x) = (-3; -6), \quad (2A - B)(x) = (1; -4).$$

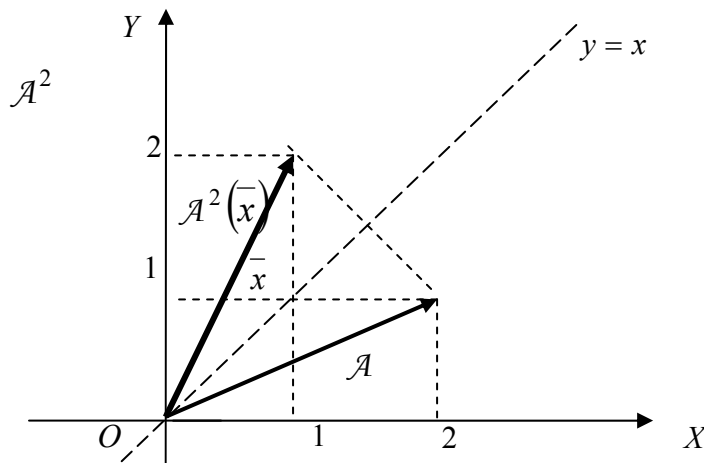


Рис. 4.8. Дія оператора A^2 на вектор $\bar{x} = (1; 2)$

В координатному вигляді: $\bar{x} = (1; 2)$, $A(x) = (2; 1)$, $(AA)(x) = (1; 2)$.

б) Для того, щоб написати матрицю A оператора $\mathcal{A}$, подіємо цим оператором на базисні вектори $\bar{i}$ та $\bar{j}$. Отримуємо

$$\mathcal{A}(\bar{i}) = \bar{j} = 0 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j},$$

$$\mathcal{A}(\bar{j}) = \bar{i} = 1 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j}.$$

Матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

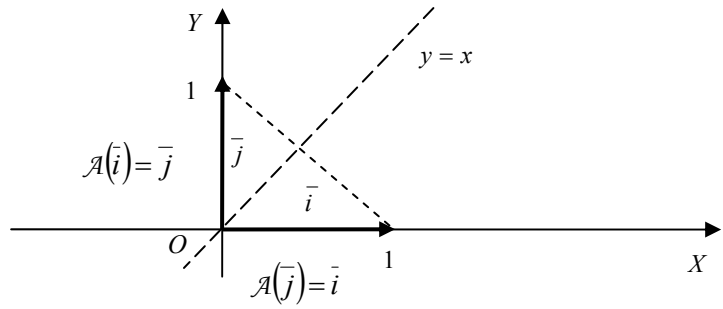


Рис. 4.9. Дія оператора $\mathcal{A}$ на базисні вектори $\bar{i}$ та $\bar{j}$

Для того, щоб написати матрицю лінійного оператора $\mathcal{B}$, подіємо цим оператором на базисні вектори $\bar{i}$ та $\bar{j}$ (рис. 4.10).

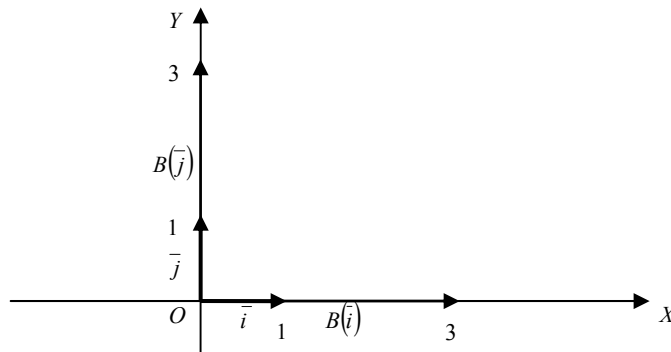


Рис. 4.10. Дія оператора $\mathcal{B}$ на базисні вектори $\bar{i}$ та $\bar{j}$

$$\text{Отримуємо } \mathcal{B}(\bar{i}) = 3\bar{i} = 3\bar{i} + 0\bar{j}, \mathcal{B}(\bar{j}) = 3\bar{j} = 0\bar{i} + 3\bar{j} \text{ та } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{в) Матриця оператора } \mathcal{AB} : AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Матриця оператора } \mathcal{BA} : BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, то ми можемо стверджувати, що оператори $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ **комутують**.

Матрицею оператора $2\mathcal{A} - \mathcal{B}$ буде

$$2A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Матриця оператора $\mathcal{A}^2$: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ –

одинична матриця. Тобто оператор $\mathcal{A}^2$ є тотожним оператором.

г) Розглянемо $\bar{x} = (1; 2)$. Тоді $(\mathcal{A}\mathcal{B})(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, тобто образом вектора $\bar{x}$ під дією оператора $\mathcal{A}\mathcal{B}$ є вектор $\bar{y} = (6; 3)$. Такий самий результат буде й для оператора $\mathcal{B}\mathcal{A}$, оскільки $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.

Знайдемо образ вектора $\bar{x}$ під дією оператора $2\mathcal{A} - \mathcal{B}$:

$$\bar{y} = (2\mathcal{A} - \mathcal{B})(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\bar{y} = (1; -4)$ – образ вектора $\bar{x}$ під дією оператора $2\mathcal{A} - \mathcal{B}$.

Оскільки $(\mathcal{A}^2)(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \bar{x}$, то образом $\bar{x}$ під дією оператора $\mathcal{A}^2$ є той самий вектор $\bar{x}$. Отримані результати відповідають геометричним перетворенням, які наведені на рисунках.

Означення 4.4. Нехай $\mathcal{A}: L \rightarrow L$, $\mathcal{E}$ – тотожний оператор простору L . Оператор $\mathcal{B}: L \rightarrow L$ називають **оберненим до оператора $\mathcal{A}$** , якщо $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{E}$ та $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{E}$. Оператор, обернений до оператора $\mathcal{A}$, позначають символом $\mathcal{A}^{-1}$.

Зауважимо, що не кожний лінійний оператор буде мати обернений оператор.

Теорема 4.1. Для того щоб існував оператор $\mathcal{A}^{-1}$, обернений до оператора $\mathcal{A}$, необхідно та достатньо, щоб матриця оператора $\mathcal{A}$ була не виродженою ($\det A \neq 0$).

Зауваження 4.3. Якщо оператор $\mathcal{A}$ має обернений, то його часто називають **невиродженим**; у противному випадку його називають **виродженим**. Матриця оберненого оператора буде оберненою до матриці A даного оператора $\mathcal{A}$.

Задача 4.2. У деякому базисі простору L задана матриця лінійного оператора f . З'ясувати, чи існує обернений оператор f^{-1} . Якщо так, то знайти матрицю оберненого оператора у цьому ж базисі, якщо

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. а) $\det A = 0$. Оберненого оператора не існує.

б) $\det A = -14$. Отже, обернений оператор існує. Матриця оберненого

оператора $A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -8 & 2 & 4 \\ -12 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$

Завдання для самостійного розв'язування

1. У просторі E_3 діють два лінійних оператора $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ за правилами: для

довільного вектора $\bar{x} = (x; y; z)$ маємо $\mathcal{A}(\bar{x}) = \begin{cases} x' = -x + 4y + 3z, \\ y' = 4x + 5y + z, \\ z' = 2x + 8y + 9z, \end{cases}$

$\mathcal{B}(\bar{x}) = \begin{cases} x' = -2x + 6y + 4.5z, \\ y' = 6x + 7y + 1.5z, \\ z' = 3x + 12y + 13z. \end{cases}$ Знайти оператор $3\mathcal{A} - 2\mathcal{B}$ та вказати його

матрицю.

2. У просторі E_3 діють два лінійних оператора $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ за правилами: для

довільного вектора $\bar{x} = (x; y; z)$ маємо $\mathcal{A}(\bar{x}) = \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y + z, \\ z' = x + z \end{cases}$

$\mathcal{B}(\bar{x}) = \begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y. \end{cases}$ Знайти оператори $\mathcal{AB}$ і $\mathcal{BA}$ (вказати матриці операторів).

3. Оператор $\mathcal{A}$ відображає всі вектори площини OXY симетрично відносно осі OY і розтягує їх у 2 рази. Накреслити рисунок. Записати матрицю цього оператора. Знайти $\mathcal{A}(\bar{x})$, якщо $\bar{x} = 3\bar{i} + 5\bar{j}$.
4. Оператор $\mathcal{A}$ проектує всі вектори площини OXY на пряму $y = -x$, а оператор $\mathcal{B}$ повертає їх навколо початку координат O проти руху годинникової стрілки на кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Як діють на вектор $\bar{x}$ оператори $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $2\mathcal{A}$, $2\mathcal{B}$, $2\mathcal{A} - \mathcal{B}$? Виконати рисунок. Знайти матриці цих операторів.
5. Під дією оператора $\mathcal{A}$ кожний вектор площини OXY повертається навколо початку координат O проти руху годинникової стрілки на кут φ . Знайти матрицю оператора $\mathcal{A}^2$.
6. Лінійне перетворення $\mathcal{A}$ простору $\mathbb{R}^2$ в базисі $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ має матрицю $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, лінійне перетворення $\mathcal{B}$ простору $\mathbb{R}^2$ в базисі $\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ має матрицю $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю перетворення $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ в базисі $\bar{f}_1, \bar{f}_2$.
7. (Задача Оболенського А. Ю.) В лінійному просторі усіх функцій вигляду $y_1 \cdot e^{\alpha t} \cos \beta t + y_2 \cdot e^{\alpha t} \sin \beta t$ діє оператор диференціювання D . Знайти:
 - а) матрицю оператора диференціювання D в базисі $f_1 = e^{\alpha t} \cos \beta t$, $f_2 = e^{\alpha t} \sin \beta t$;
 - б) матрицю оберненого оператора D^{-1} (оператора інтегрування);
 - в) за допомогою D^{-1} знайти інтеграли: $\int e^{\alpha t} \sin \beta t dt$, $\int e^{\alpha t} \cos \beta t dt$.

Відповіді:

1. E .

2. $x' = x + y + 2z$, $y' = 2x + y + z$, $z' = x + 2y + z$.

3. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}(\bar{x}) = -6\bar{i} + 10\bar{j}$.

4. $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}$, $2\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $2\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$,

$$2\mathcal{A} - \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

5. $\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29,5 & -25 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$,

$$\int e^{\alpha t} \sin \beta t dt = (f_1 \quad f_2) \cdot \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{-\beta e^{\alpha t} \cos \beta t + \alpha e^{\alpha t} \sin \beta t}{\alpha^2 + \beta^2} + C,$$

$$\int e^{\alpha t} \cos \beta t dt = (f_1 \quad f_2) \cdot \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha e^{\alpha t} \cos \beta t + \beta e^{\alpha t} \sin \beta t}{\alpha^2 + \beta^2} + C.$$

§ 5. Ядро та образ лінійного оператора

Нехай $\mathcal{A}$ – лінійний оператор, що діє з L в L .

Означення 5.1. Образом або областю значень лінійного оператора $\mathcal{A}$ називається множина всіх елементів $\bar{y}$ простору L , які можна подати у вигляді $\bar{y} = \mathcal{A}(\bar{x})$.

Образ лінійного оператора $\mathcal{A}$ позначають символом $\text{im } \mathcal{A}$.

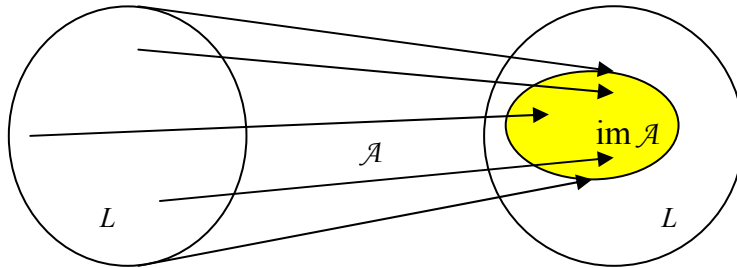


Рис. 5.1. Образ $\text{im } \mathcal{A}$ лінійного оператора $\mathcal{A}$

$$\text{im } \mathcal{A} = \{\bar{y} \in L \mid \exists \bar{x} \in L : \bar{y} = \mathcal{A}(\bar{x})\}$$

Означення 5.2. Ядром лінійного оператора $\mathcal{A}$ називається множина всіх елементів $\bar{x} \in L$, для яких $\mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{0}$.

Ядро лінійного оператора позначають символом $\ker \mathcal{A}$.

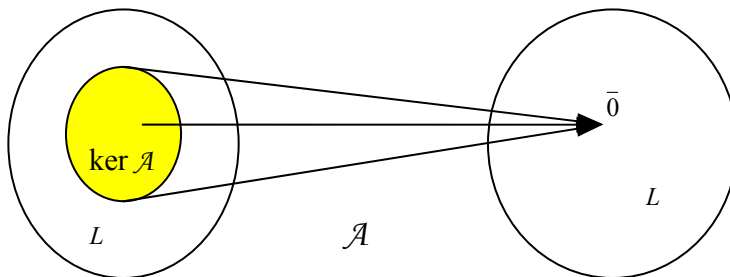


Рис. 5.2. Ядро $\ker \mathcal{A}$ лінійного оператора $\mathcal{A}$

$$\ker \mathcal{A} = \{\bar{x} \in L \mid \mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{0}\}.$$

Ядро $\ker \mathcal{A}$ та образ $\text{im } \mathcal{A}$ – лінійні підпростори L .

Якщо n – розмірність простору L , $\dim(L) = n$, то справедливо

$$\dim(\ker \mathcal{A}) + \dim(\operatorname{im} \mathcal{A}) = n.$$

Розмірність підпростору $\operatorname{im} \mathcal{A}$ називають **рангом оператора $\mathcal{A}$** ($\operatorname{rang} \mathcal{A}$), розмірність підпростору $\ker \mathcal{A}$ називають **дефектом оператора $\mathcal{A}$** ($\operatorname{def} \mathcal{A}$), причому $\operatorname{rang} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A} = n$. Якщо лінійний оператор задається матрицею A , то його ранг збігається з рангом матриці A .

Задача 5.1. Нехай $\mathcal{A}$ – оператор ортогонального проектування векторів простору $\mathbb{R}^3$ на площину XOY цього простору. Знайти область значень, ранг, ядро та дефект оператора $\mathcal{A}$.

Розв’язування: Оператор $\mathcal{A}$ переводить простір $\mathbb{R}^3$ у площину XOY . При цьому площина XOY є областю значення оператора $\mathcal{A}$. Отже, ранг оператора $\mathcal{A}$ дорівнює 2, тобто $\operatorname{rang} \mathcal{A} = 2$.

Ядро оператора $\mathcal{A}$ складається з векторів, які лежать на прямій, що проходить через початок координат перпендикулярно до площини XOY , оскільки ці і тільки ці вектори переводяться оператором $\mathcal{A}$ у $\vec{0}$. Отже, дефект оператора $\mathcal{A}$ дорівнює 1, тобто $\operatorname{def} \mathcal{A} = 1$.

Переконуємося, що $\operatorname{rang} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A} = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Задача 5.2. Дано $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Лінійний оператор $\mathcal{A}$ заданий своєю матрицею $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти: ядро, образ, ранг та дефект лінійного оператора $\mathcal{A}$.

Розв'язування: $\ker \mathcal{A} = \{\bar{x} \mid \mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{0}\}$. Нехай $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Тоді $\mathcal{A}\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ Розв'яжемо систему методом Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \end{array} \right).$$

Маємо тривіальний розв'язок $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0$, тобто $\bar{x} = \bar{0}$. Отже, ядро оператора $\mathcal{A}$ складається з одного нульового вектора $\ker \mathcal{A} = \{\bar{0}\} \Rightarrow \dim \mathcal{A} = 0$ (у цьому випадку кажуть, що **ядро тривіальне**).

У випадку тривіального ядра образом оператора $\mathcal{A}$ є весь простір $\mathbb{R}^3$: $\operatorname{im} \mathcal{A} = \mathbb{R}^3$, тому $\operatorname{rang} \mathcal{A} = 3$.

Задача 5.3. $\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Оператор $\mathcal{A}$ заданий своєю матрицею: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти $\ker \mathcal{A}$, $\operatorname{im} \mathcal{A}$, $\operatorname{rang} \mathcal{A}$, $\dim \mathcal{A}$.

Розв'язування: а) Знайдемо ядро оператора $\ker \mathcal{A} = \{\bar{x} \mid \mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{0}\}$. Нехай $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, тоді $\mathcal{A}\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$ Розв'язуємо систему методом

Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ – базисний мінор. Ранг основної матриці системи дорівнює 2.

Нехай $x_3 = C$, тоді $x_2 = \frac{7}{4}C$, $x_1 = x_2 - 2x_3 = -\frac{C}{4}$,

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -\frac{C}{4} \\ \frac{7}{4}C \\ C \end{pmatrix} = \frac{C}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Отже, $\ker A = \left\{ \bar{x} : \bar{x} = \frac{C}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, C \in \mathbb{R} \right\}$, $\dim(\ker A) = 1 \Rightarrow \operatorname{def} A = 1$.

б) $\operatorname{im} A = \{ \bar{y} \mid \exists \bar{x} : A\bar{x} = \bar{y} \}$. Розглянемо образи базисних векторів:

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{f}_1 = A\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = A\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_3 = A\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\dim(\operatorname{im} A) = \operatorname{rang} A = 3 - \operatorname{def} A = 3 - 1 = 2$, то базисом $\operatorname{im} A$ будуть будь-які два лінійно незалежні з цих векторів. Наприклад, вектори $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$. В підпросторі $\operatorname{im} A$ вони утворюють базис, а всі їх лінійні комбінації породжують цей простір:

$$\operatorname{im} A = \left\{ \bar{y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Таким чином, щоб утворити $\operatorname{im} A$, вибираємо вектори-стовпчики матриці A , що є лінійно незалежними (наприклад, ті, що відповідають базисному мінору), лінійна оболонка цих векторів і є образом лінійного оператора A .

Задача 5.4. Знайти ядро та образ оператора $\mathcal{A}$, що проектує вектори площини на пряму $y = x$.

Розв'язування: На рис. 5.3. зображено дію цього оператора на базисні вектори. Напишемо матрицю оператора $\mathcal{A}$.

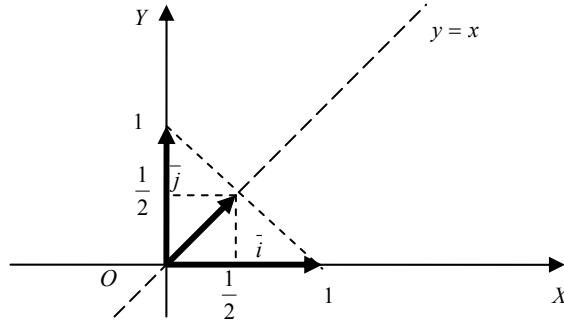


Рис. 5.3. Дія оператора проектування векторів площини на пряму $y = x$ на базисні вектори $\bar{i}$ та $\bar{j}$

Оскільки $\mathcal{A}(\bar{i}) = \frac{1}{2}\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j}$, $\mathcal{A}(\bar{j}) = \frac{1}{2}\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j}$, то $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

а) Шукаємо ядро оператора $\ker \mathcal{A} = \{\bar{x} \mid \mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{0}\}$. Нехай $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Тоді

$$A\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2.$$

$\ker \mathcal{A} = \left\{ \bar{x} \mid \bar{x} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}$ – множина векторів, що лежать на $y = -x$.

б) $\operatorname{im} \mathcal{A} = \left\{ \bar{x} \mid \bar{x} = c \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \right\}$ – множина векторів, що лежать на прямій

$y = x$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайти ядро, область значень, ранг і дефект лінійного оператора простору $\mathbb{R}^2$, який у стандартному базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ має матрицю $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Знайти ядро, область значень, ранг і дефект лінійного оператора простору $\mathbb{R}^3$, який у стандартному базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ простору має матрицю:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти ядро та область значень лінійних операторів простору $\mathbb{R}^4$,

який у базисі простору $\overline{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{e_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ має матри-

цю:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти ядро, область значень, дефект і ранг оператора симетрії відносно прямої $y = x$ простору $\mathbb{R}^2$.
5. Знайти ядро, область значень, дефект і ранг оператора ортогонального проектування на пряму $y = x$ в просторі $\mathbb{R}^2$.

Відповіді:

1. Ядро оператора – вектори, колінеарні $\overline{e_2}$, область значень – множина векторів $a\overline{e_1} + \overline{e_2}$, ранг дорівнює 1, дефект дорівнюють 1.
2. а) Ядро – вектори, колінеарні $\overline{e_2}$, область значень – вектори площини $\overline{e_1}, \overline{e_3}$, ранг дорівнює 2, дефект дорівнює 1.
б) Ядро оператора – вектори, колінеарні $\overline{e_2}$, область значень – вектори площини $\overline{e_2}, \overline{e_3}$, ранг дорівнює 2, дефект дорівнює 1.
3. а) Ядро оператора – вектори площини $\overline{e_2}, \overline{e_4}$, область значень – вектори площини $\overline{e_1}, \overline{e_3}$.
б) Ядро – вектори площини $\overline{e_3}, \overline{e_4}$, область значень – вектори площини $\overline{e_1}, \overline{e_2}$.
4. Ядро тривіальне, образ E_2 , дефект дорівнює 0, ранг дорівнює 2.
5. Ядро оператора – множина радіус-векторів, перпендикулярних прямої $y = x$, образ – множина радіус-векторів, що належать прямої $y = x$, дефект дорівнює 1, ранг дорівнює 1.

§ 6. Власні числа та власні вектори лінійного оператора

Означення 6.1. Число λ називається **власним числом** лінійного оператора (перетворення) $\mathcal{A}$, якщо існує ненульовий вектор $\bar{x}$ такий, що $\mathcal{A}(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$. У цьому випадку вектор $\bar{x}$ називається **власним вектором**, що відповідає власному числу λ . Геометрично, власний вектор $\bar{x}$ – такий вектор, що під дією оператора $\mathcal{A}$ переходить у колінеарний йому вектор.

Зауваження 6.1. Якщо $\bar{x}$ власний вектор лінійного оператора $\mathcal{A}$, що відповідає власному числу λ , то довільний вектор $k\bar{x}$ теж буде власним вектором з тим самим числом λ . Дійсно $\mathcal{A}(k\bar{x}) = k\mathcal{A}(\bar{x}) = k\lambda\bar{x} = \lambda(k\bar{x})$.

Зауваження 6.2. Якщо $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ власні вектори лінійного оператора $\mathcal{A}$, що відповідають тому ж самому власному числу λ , то вектор $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ теж є власним вектором з тим самим числом λ .

Додамо до множини всіх власних векторів, що відповідають числу λ також нульовий вектор $\bar{0}$. Отже, **множина всіх власних векторів, що відповідають певному власному числу λ , утворює лінійний підпростір в заданому просторі L .**

Приклад 6.1. Нехай $\mathcal{A}$ – тотожний оператор, $\mathcal{A}: L \rightarrow L$, $\mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{x}$. Тоді будь-який ненульовий вектор $\bar{x} \in L$ є власним з власним числом $\lambda = 1$.

Приклад 6.2. Нехай оператор $\mathcal{A}: L \rightarrow L$, $\mathcal{A}(\bar{x}) = k\bar{x}$ (оператор подібного перетворення). Тоді будь-який ненульовий вектор $\bar{x} \in L$ є власним з власним числом $\lambda = k$.

Приклад 6.3. Розглянемо оператор проектування векторів площини на вісь OX . Власними векторами з власним числом $\lambda = 1$ є множина векторів, що належать самій осі OX . Всі вектори, що лежать на осі OY – є власними з власним числом $\lambda = 0$.

Приклад 6.4. Нехай $\mathcal{A}$ – оператор, що відображає вектори площини симетрично відносно осі OY . Вектори, що лежать на осі OY , є власними з власним числом $\lambda = 1$. Вектори, що лежать на осі OX є власними з власним числом $\lambda = -1$.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матриця оператора $\mathcal{A}$ в деякому бази-

сі. Перепишемо умову $\mathcal{A}(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$ в вигляді матричного рівняння: $A\bar{x} = \lambda \bar{x}$ або $(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$. Отримуємо однорідну систему рівнянь із матрицею $A - \lambda E$. Для того, щоб квадратна однорідна система рівнянь мала ненульовий розв'язок $\bar{x}$, визначник системи повинен дорівнювати 0. Рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ називається **характеристичним рівнянням** лінійного оператора $\mathcal{A}$. У розгорнутому вигляді характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язуючи його, отримаємо власні числа лінійного оператора $\mathcal{A}$.

Зауваження 6.3. Характеристичне рівняння, а отже і набір його коренів, а отже і отримані власні числа оператора $\mathcal{A}$, не залежать від вигляду матриці оператора в різних базисах.

Нехай $\dim L = n$. Для коренів характеристичного рівняння можливі такі варіанти:

- 1) всі корені є дійсними і різними;
- 2) всі корені є дійсними, але серед коренів є кратні;
- 3) рівняння має менше ніж n дійсних коренів (є комплексні корені).

Задача 6.1. Знайти власні числа та власні вектори лінійного оператора

$$\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ заданого матрицею } A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

1. Складаємо характеристичне рівняння матриці оператора $\mathcal{A}$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & -3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2-\lambda)(-2-\lambda)(12-\lambda) + 45 + 45 + 9(-2-\lambda) + 45(2-\lambda) - 5(12-\lambda) = 0$$

$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 45\lambda - 54 = 0$. Коренями цього рівняння (власними числами оператора $\mathcal{A}$) є $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

2. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_1 = 6$. Для

цього розв'яжемо систему $(A - 6E)\bar{x} = \bar{0}$, де $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Розширена матриця системи має вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -5 & -3 & 0 \\ -1 & -8 & -3 & 0 \\ 3 & 15 & 6 & 0 \end{array} \right). \text{ Помінявши місцями пер-}$$

ший і другий рядки та помноживши їх на (-1) , отримуємо:

Розділ 1. Лінійні оператори.
 § 6. Власні числа та власні вектори лінійного оператора

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 15 & 6 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \langle -4 \rangle \quad \langle -3 \rangle \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & -27 & -9 & 0 \\ 0 & -9 & -3 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Відновлюємо систему $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ Нехай $x_2 = C$, тоді

$$x_3 = -3C, \quad x_1 = C. \text{ Отже, } \bar{x} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ -3C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

3. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 3$.

Розв'яжемо систему $(A - 3E)\bar{x} = \bar{0}$, де $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Розширена матриця

системи має вигляд: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -5 & -3 & 0 \\ -1 & -5 & -3 & 0 \\ 3 & 15 & 9 & 0 \end{array} \right)$. Бачимо, що рядки пропорційні.

Тому $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right)$ або $x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$. Нехай $x_2 = C_1$, $x_3 = C_2$, тоді $x_1 = -5C_1 - 3C_2$.

Отже,

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -5C_1 - 3C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, C_1^2 + C_2^2 \neq 0.$$

Відповідь. $\lambda_1 = 6, \quad \bar{x} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0,$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 3, \quad \bar{x} = C_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, C_1^2 + C_2^2 \neq 0.$$

Задача 6.2. Знайти власні числа та власні вектори лінійного оператора

$$\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ якому в певному базисі відповідає матриця } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

1. Складаємо характеристичне рівняння матриці оператора:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)(4-\lambda)(4-\lambda) + 2 + 0 - 0 - (4-\lambda) - 2(4-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 12\lambda^2 + 45\lambda - 54 = 0.$$

Коренями цього рівняння (власними числами оператора) є $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ (порівняйте із задачею 6.1).

2. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_1 = 6$. Для

цього розв'яжемо систему $(A - 6E)\bar{x} = \bar{0}$, де $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Записуємо роз-

ширену матрицю системи $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$. Додамо перший рядок до

другого рядка $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$. Третій рядок можна відкинути, оскі-

льки він є пропорційний другому. $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$. Відновлюємо сис-

тему $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ Нехай $x_3 = 2C$, тоді $x_2 = 4C$, $x_1 = 3C$. Отже,

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 3C \\ 4C \\ 2C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

3. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Розв'яжемо систему $(A - 3E)\bar{x} = \bar{0}$. Розширена матриця

системи має вигляд: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$. Від другого рядка віднімімо подвоє-

ний перший рядок: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$. Відкидаючи другий рядок, запи-

шемо $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$ (порівняйте із задачею 6.1). Відновлена система рів-

нянь має вигляд $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ Покладаючи $x_3 = C$, отримуємо

$$x_2 = -C, \quad x_1 = 0. \quad \text{Отже, } \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

$$\text{Відповідь.} \quad \lambda_1 = 6, \quad \bar{x} = C \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0,$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 3, \quad \bar{x} = C \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

Проаналізуємо власні числа та власні вектори в розглянутих задачах 6.1 та 6.2:

Власні числа операторів в обох задачах однакові $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

В задачі 6.1 власному числу $\lambda_1 = 6$ (кратності 1) відповідає власний підпростір розмірності 1, базис у цьому підпросторі $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Власному числу $\lambda = 3$ (кратності 2) відповідає власний підпростір розмірності 2, базисними векторами якого можна вибрати $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

В задачі 6.2 власному числу $\lambda_1 = 6$ (кратності 1) також відповідає власний підпростір розмірності 1, базис у цьому підпросторі $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, а власному числу $\lambda = 3$ (кратності 2) відповідає вже власний підпростір розмірності 1, базисний вектор якого $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ми можемо зробити такі важливі висновки:

Висновок 6.1. Власні вектори лінійного оператора $\mathcal{A}$, що відповідають різним власним числам, є лінійно незалежними.

Висновок 6.2. Розмірність власного підпростору, що відповідає певному власному числу λ , не перевищує кратності λ як кореня характеристичного многочлена.

Висновок 6.3. В n -вимірному просторі лінійний оператор $\mathcal{A}$ не може мати більше ніж n лінійно незалежних власних векторів.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайти власні числа та власні вектори лінійних операторів, заданих у деякому базисі матрицями:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

з) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

е) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

і) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

ж) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповіді:

а) $\lambda_1 = 1$, $c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3$, $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ при $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

б) $\lambda_1 = 7$, $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -2$, $c \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ при $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

в) $\lambda_1 = 1$, $c \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -2$, $c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ при $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

г) Власні числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

Власні вектори: $c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ для $\lambda = 1$, $c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ для $\lambda = -1$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

д) Власні числа: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$.

Власні вектори: $c \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ для $\lambda_1 = 1$,

$c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ для $\lambda_2 = 2$, $c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ для $\lambda_3 = -2$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

е) Власні числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

Власні вектори: $c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ для $\lambda = 1$, $c \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ для $\lambda = -1$, при

$c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

ж) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Власні вектори: $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ для $\lambda = 1$, $c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ для $\lambda = 0$, при $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

з) Власні числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Власні вектори: $c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ для $\lambda = 1$, $c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ для $\lambda = 0$, при

$c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

і) Власні числа: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Власні вектори: $c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ для $\lambda = 3$, $c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ для $\lambda = -1$, при $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

§ 7. Зведення матриці до діагонального вигляду

Говорять, що квадратну матрицю A можна звести до діагонального вигляду, якщо існує невироджена матриця T така, що $T^{-1}AT$ є діагональною матрицею. Іншими словами, якщо A – матриця деякого оператора $\mathcal{A}$ в фіксованому базисі та існує базис, в якому матриця оператора має діагональний вигляд.

Нехай для оператора $\mathcal{A}: L^n \rightarrow L^n$ існує базис з власних векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$. Якщо $\mathcal{A}(\bar{e}_1) = \lambda_1 \bar{e}_1, \mathcal{A}(\bar{e}_2) = \lambda_2 \bar{e}_2, \dots, \mathcal{A}(\bar{e}_n) = \lambda_n \bar{e}_n$, то матриця оператора $\mathcal{A}$ в цьому базисі має діагональний вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ де по діагоналі стоять власні числа } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

Справджуються наступні твердження:

Твердження 7.1. Якщо матриця зводиться до діагонального вигляду, то цей вигляд єдиний з точністю до перестановки діагональних елементів.

Твердження 7.2. Якщо характеристичний многочлен матриці має n різних дійсних коренів, де n – розмірність простору, то матрицю можна звести до діагонального вигляду.

Справді, власні вектори, що відповідають різним власним числам, лінійно незалежні, отже утворюють базис, а в базисі з власних векторів матриця оператора має діагональний вигляд.

Твердження 7.3. Якщо кратність деякого власного числа λ_k характеристичного рівняння дорівнює $r > 1$, та цьому власному числу відповідає власний підпростір розмірності r (іншими словами, якщо існує рівно r лінійно незалежних векторів, що відповідають власному числу λ_k), то мат-

Розділ 1. Лінійні оператори.
§ 7. Зведення матриці до діагонального вигляду

рицю A можна звести до діагонального вигляду. Якщо розмірність власного підпростору менша за r , то матрицю A не можна звести до діагонального вигляду.

Задача 7.1. Звести до діагонального вигляду матрицю та вказати від-

повідний базис: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. 1. Складаємо характеристичне рівняння матриці

$$\det(A - \lambda E) = 0 \text{ або } \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)(\lambda - 7) = 0, \text{ тобто } \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \text{ (кратність кореня два),}$$
$$\lambda_3 = 3, \lambda_4 = 7 \text{ (прості корені).}$$

2. Знаходимо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Для цього розв'язуємо однорідну систему рівнянь $(A + E)\bar{x} = \bar{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ранг матриці дорівнює 2, дефект матриці дорівнює також 2, отже ми маємо дві вільні змінні й два власних вектори, що відповідають числу

$\lambda = -1$. Відновлюємо систему: $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ Очевидно, що

Розділ 1. Лінійні оператори.

§ 7. Зведення матриці до діагонального вигляду

$x_3 = -x_4$, $x_1 = -x_2$. Нехай $x_2 = C_1$, $x_4 = C_2$ тоді

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -C_2 \\ C_2 \\ -C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad C_1^2 + C_2^2 \neq 0.$$

3. Знаходимо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_3 = 3$.

Для цього розв'язуємо однорідну систему рівнянь $(A - 3E)\bar{x} = \bar{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ранг матриці дорівнює 3 (другий рядок лінійно залежний від третього та четвертого), дефект матриці дорівнює також 1, отже ми маємо одну вільну змінну та один власний вектор, що відповідає числу $\lambda = 3$. Віднов-

люємо систему:
$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$
 Нехай $x_2 = C$, тоді $x_1 = C$ та

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

4. Знаходимо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_3 = 7$.

Для цього розв'язуємо однорідну систему рівнянь $(A - 7E)\bar{x} = \bar{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -6 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -16 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Розділ 1. Лінійні оператори.

§ 7. Зведення матриці до діагонального вигляду

Ранг матриці дорівнює 3, дефект матриці дорівнює також 1, отже ми маємо одну вільну змінну та один власний вектор, що відповідає числу

$$\lambda = 7. \text{ Відновлюємо систему: } \begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -16x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ -x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Нехай $x_4 = C$, тоді $x_3 = C$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ та отримаємо

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \\ C \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \neq 0.$$

5. В базисі з власних векторів $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

матриця A має вигляд $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Матриця переходу до діагонального вигляду має вигляд

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи

Звести до діагонального вигляду матрицю лінійного оператора.

Знайти базис, у якому матриця має діагональний вигляд.

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$

в) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$

Відповіді:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & -8 \end{pmatrix}.$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$

§ 8. Самоспряжений оператор та його матриця

Будемо казати, що в дійсному лінійному просторі L визначено операцію скалярного добутку, якщо кожній парі векторів $\bar{x}, \bar{y} \in L$ поставлено у відповідність єдине дійсне число, яке називають скалярним добутком векторів $\bar{x}, \bar{y}$ та позначають символом $(\bar{x}, \bar{y})$, причому справджуються такі умови (аксіоми скалярного добутку):

для довільних елементів $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in L$ та для деякого дійсного числа a маємо:

1. $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$.
2. $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$.
3. $(a\bar{x}, \bar{y}) = a(\bar{x}, \bar{y})$.
4. $(\bar{x}, \bar{x}) > 0$, якщо $\bar{x} \neq \bar{0}$ та $(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ у випадку $\bar{x} = \bar{0}$.

Дійсний лінійний простір називається **евклідовим**, якщо в ньому визначено скалярний добуток. Евклідові простір позначають символом E , а евклідові простір розмірності n позначають E_n .

Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ – деякий базис простору E_n , $\bar{x}, \bar{y}$ – довільні вектори цього простору. В евклідовому просторі **скалярний добуток** елементів $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{e}_i$, $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i \bar{e}_i$ виражається через координати векторів наступним чином:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \bar{e}_i, \sum_{k=1}^n y_k \bar{e}_k \right) = \sum_{i,k=1}^n (x_i \bar{e}_i, y_k \bar{e}_k) = \sum_{i,k=1}^n x_i y_k (\bar{e}_i, \bar{e}_k) = \sum_{i,k=1}^n g_{ik} x_i y_k,$$

де i та k незалежно пробігають значення $1, 2, \dots, n$, $g_{ik} = (\bar{e}_i, \bar{e}_k)$.

Базис називається ортонормованим, якщо $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = 0$ при $i \neq j$ та $|\bar{e}_i| = 1$. У випадку ортонормованого базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ отримаємо

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Нехай $\mathcal{A}$ – лінійний оператор, що діє в дійсному евклідовому просторі E_n .

Означення 8.1. Оператор $\mathcal{A}^*$, що діє з E_n у E_n , називається **спряженим** до лінійного оператора $\mathcal{A}$, якщо для будь-яких $\bar{x}$ і $\bar{y} \in E_n$ виконується співвідношення $(\mathcal{A}(\bar{x}), \bar{y}) = (\bar{x}, \mathcal{A}^*(\bar{y}))$ (тобто скалярні добутки $(\mathcal{A}(\bar{x}), \bar{y})$ та $(\bar{x}, \mathcal{A}^*(\bar{y}))$ збігаються).

Зауважимо, що для кожного лінійного оператора в E_n існує єдиний спряжений оператор. Матриці спряжених операторів пов'язані співвідно-

шенням $A^T \Gamma = \Gamma A^*$ (або $A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$), де $\Gamma = \begin{pmatrix} (\bar{f}_1, \bar{f}_1) & \dots & (\bar{f}_1, \bar{f}_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\bar{f}_n, \bar{f}_1) & \dots & (\bar{f}_n, \bar{f}_n) \end{pmatrix}$ – мат-

риця Грама (матриця скалярних добутків базисних векторів). Якщо базис простору ортонормований, то $A^* = A^T$.

Зауважимо також, що оператор $\mathcal{A}^*$, спряжений до лінійного оператора $\mathcal{A}$, сам є лінійним.

Приклад 8.1. Оператор $\mathcal{A}: E_3 \rightarrow E_3$ має в деякому ортонормованому

базисі матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю спряженого оператора у

цьому ж базисі.

Розв'язування. Оскільки базис ортонормований, то $A^* = A^T$. Отже

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Приклад 8.2. Нехай $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ – ортонормований базис, $\overline{f_1} = -\overline{e_1} - 3\overline{e_2}$, $\overline{f_2} = 2\overline{e_1} + \overline{e_2}$ і оператор $\mathcal{A}: E_2 \rightarrow E_2$ має в базисі $\overline{f_1}, \overline{f_2}$ матрицю $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти у базисі $\overline{f_1}, \overline{f_2}$ матрицю A^* спряженого оператора $\mathcal{A}^*$.

Розв'язування. Оскільки базис $\overline{f_1}, \overline{f_2}$ не є ортонормований, то $A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$. Знайдемо матрицю Грама для системи векторів $\overline{f_1}, \overline{f_2}$:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\overline{f_1}, \overline{f_1}) & (\overline{f_1}, \overline{f_2}) \\ (\overline{f_2}, \overline{f_1}) & (\overline{f_2}, \overline{f_2}) \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}, \Gamma^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{Тоді}$$

$$\begin{aligned} A^* &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -50 & 40 \\ -50 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} = A^*. \end{aligned}$$

Означення 8.2. Лінійний оператор $\mathcal{A}^*$, що діє з E_n в E_n , називається **самоспряженим**, якщо $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, тобто для будь-яких $\overline{x}$ і $\overline{y} \in E_n$ виконується співвідношення $(\mathcal{A}(\overline{x}), \overline{y}) = (\overline{x}, \mathcal{A}(\overline{y}))$.

Тотожний оператор є самоспряженим.

Теорема 8.1 У довільному ортонормованому базисі оператор $\mathcal{A}$ буде самоспряженим тоді і тільки тоді, коли його матриця A буде симетричною.

Тому у випадку дійсного евклідового простору самоспряжений оператор також називається **симетричним оператором**.

Приклад 8.3. Оператор $\mathcal{A}: E_3 \rightarrow E_3$ має в деякому ортонормованому базисі матрицю A . З'ясувати, чи буде оператор $\mathcal{A}$ самоспряженим, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

Розділ 1. Лінійні оператори.

§ 8. Самоспряжений оператор та його матриця

Розв'язування. Оскільки базис ортонормований, то оператор буде самоспряженим тоді й лише тоді, коли його матриця симетрична.

а) Матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ оператора не є симетричною, тому оператор

не є самоспряженим.

б) Матриця $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ оператора симетрична, отже оператор само-

спряжений.

Теорема 8.2. Усі власні числа симетричного лінійного оператора – дійсні числа. Власні вектори симетричного лінійного оператора, що відповідають різним власним числам, взаємно ортогональні. Якщо деяке власне число має кратність k , то можна вказати k взаємно ортогональних власних векторів, що відповідають цьому власному числу. Симетричний лінійний оператор простору E_n має n взаємно ортогональних власних векторів.

Теорема 8.3. Для симетричного лінійного оператора існує ортонормований базис, в якому його матриця буде діагональною.

Властивості самоспряжених операторів

1. Сума самоспряжених операторів є самоспряженим оператором.
2. Оператор, обернений до невивродженого самоспряженого лінійного оператора, є самоспряженим.
3. Добуток самоспряженого лінійного оператора на дійсне число є самоспряженим оператором.
4. Для того, щоб добуток самоспряжених лінійних операторів був самоспряженим, необхідно й достатньо, щоб ці оператори були комутуючими.

Розділ 1. Лінійні оператори.

§ 8. Самоспряжений оператор та його матриця

Приклад 8.4. В ортонормованому базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ лінійний оператор $\mathcal{A}$ задано матрицею $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Звести матрицю цього оператора до діагонального вигляду.

Розв'язування. Матриця оператора є симетричною, тому її можна діагоналізувати. Запишемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & 4 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 9.$$

Тепер знаходимо власні вектори оператора.

$\lambda_1 = -1$: $\begin{pmatrix} 8 & 4 | 0 \\ 4 & 2 | 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 | 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 0$. Нехай $x_1 = C$, тоді $x_2 = -2C$, $\overline{e_1} = \begin{pmatrix} C \\ -2C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Нормуючи цей розв'язок, знаходимо одиничний власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_1 = -1$: $\overline{e_1}' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 9$: $\begin{pmatrix} -2 & 4 | 0 \\ 4 & -8 | 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 | 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_1 + 2x_2 = 0$. Нехай $x_2 = C$, тоді $x_1 = 2C$, $\overline{e_2} = \begin{pmatrix} 2C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Нормуючи цей розв'язок знаходимо одиничний власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_2 = 9$: $\overline{e_2}' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

У базисі $\overline{e_1}', \overline{e_2}'$ матриця оператора має діагональний вигляд $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. В ортонормованому базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ лінійний оператор $\mathcal{A}$ задано матрицею A . Звести матрицю цього оператора до діагонального вигляду, переходячи до нового ортогонального базису.

Розділ 1. Лінійні оператори.

§ 8. Самоспряжений оператор та його матриця

а) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

2. В ортонормованому базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ лінійний оператор $\mathcal{A}$ задано матрицею A . Звести матрицю цього оператора до діагонального вигляду, переходячи до нового ортогонального базису.

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$ б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

3. Оператор $\mathcal{A}: E_3 \rightarrow E_3$ має в деякому ортонормованому базисі матрицю $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю спряженого оператора у цьому ж базисі.

Відповіді:

1.

а) $\overline{e_1}' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overline{e_2}' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$

б) $\overline{e_1}' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{e_2}' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

2.

а) $\overline{e_1}' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{e_2}' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{e_3}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

б) $\overline{e_1}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{e_2}' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{e_3}' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 9. Власні числа та власні вектори матриці

Власні значення та власні вектори матриці використовуються та відіграють важливу роль при розв'язуванні багатьох класів задач лінійної алгебри.

Розглянемо квадратну матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ із дійсними елементами. Ненульовий вектор $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, що задовольняє матричну

рівність $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ для деякого числа λ , називається **власним вектором матриці A** . Коефіцієнт λ називають **власним числом**, що відповідає власному вектору $\vec{x}$ (або говорять, що власний вектор $\vec{x}$ відповідає власному числу λ). Перепишемо умову $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ у вигляді рівняння $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$, де $\vec{0}$ - нульовий вектор, стовпчик висоти n . Отримуємо однорідну систему рівнянь із матрицею $A - \lambda E$. Для того, щоб квадратна однорідна система рівнянь мала ненульовий розв'язок $\vec{x}$, визначник системи повинен дорівнювати 0. Рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ називається **характеристичним рівнянням** матриці A . У розгорнутому вигляді

характеристичне рівняння має вигляд
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язуючи його, ми й отримаємо власні числа матриці A .

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 9. Власні числа та власні вектори матриці

Геометрично, власний вектор – це такий вектор $\vec{x}$, який при дії на нього лінійного оператора з матрицею A переходить у колінеарний йому вектор.

Зауваження 9.1. Якщо $\vec{x}$ – власний вектор матриці A , що відповідає власному числу λ , то довільний вектор $k\vec{x}$ ($k \neq 0$) теж буде власним вектором з тим самим власним числом λ . Дійсно, $A(k\vec{x}) = kA\vec{x} = k\lambda\vec{x} = \lambda(k\vec{x})$.

Зауваження 9.2. Якщо $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ – власні вектори матриці A , що відповідають одному власному числу λ , то вектор $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ теж є власним вектором з тим самим власним числом λ .

Із зауважень 9.1 та 9.2 випливає, що поповнена нульовим вектором множина всіх власних векторів, які відповідають власному числу λ , утворює лінійний підпростір. Він називається **власним підпростором**, що відповідає власному числу λ .

Алгебраїчної кратністю r_i **власного значення** λ_i називається кратність кореня λ_i як кореня характеристичного многочлена. **Геометричною кратністю** k_i **власного значення** λ_i називається розмірність власного підпростору, що породжується власним числом λ_i ($k_i = \text{def}(A - \lambda_i E)$).

Зауваження 9.3. Характеристичне рівняння, а, отже, і набір його коренів, а, отже, і отримані власні числа матриці A , не залежать від вигляду матриці в різних базисах.

Нехай розмірність матриці A дорівнює n . Для коренів характеристичного рівняння можливі такі випадки:

- 1) всі корені є дійсними і різними;
- 2) всі корені є дійсними, але серед коренів є кратні;

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 9. Власні числа та власні вектори матриці

3) рівняння має менше ніж n дійсних коренів (є комплексні корені).

Справедливі такі важливі твердження.

Твердження 9.1. Власні вектори матриці A , що відповідають різним власним числам, є лінійно незалежними.

Твердження 9.2. Розмірність власного підпростору, що відповідає певному власному числу λ , не перевищує кратності λ як кореня характеристичного многочлена (геометрична кратність λ не перевищує його алгебраїчної кратності).

Твердження 9.3. Якщо матриця A порядку n має n лінійно незалежних векторів, що відповідають власним числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (не обов'язково різних), тобто існує базис, складений із власних векторів матриці, то матрицю A можна діагоналізувати. Це означає, що існує діагональна матриця B подібна до матриці A , а саме $B = T^{-1}AT$, де T - матриця переходу до базису з власних векторів.

Тоді матриця A називається **матрицею простої структури**. Зокрема, якщо всі власні числа матриці A дійсні та різні, то матриця має просту структуру. У загальному випадку для того, щоб матриця A мала просту структуру, необхідно та достатньо, щоб для кожного власного числа λ_i алгебраїчна кратність власного числа λ_i дорівнювала геометричній кратності цього власного числа.

Розв'язування типових задач

Задача 9.1. Знайти власні числа та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

1. Знайдемо власні числа матриці.

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 9. Власні числа та власні вектори матриці

Складаємо характеристичне рівняння :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(8-\lambda) + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0.$$

Коренями цього рівняння є $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$. Дана матриця має просту структуру.

2. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_1 = 2$.

Для цього розв'яжемо систему $(A - 2E)\vec{x} = \vec{0}$, де $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Записуємо

розширену матрицю системи $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \end{array} \right)$. Другий рядок можна

відкинути, оскільки він є пропорційний першому. Маємо $(-1 \ 3|0)$.

Відновлюємо рівняння: $-x_1 + 3x_2 = 0$. Нехай $x_2 = C$, тоді $x_1 = 3C$.

Отже, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}, C \neq 0$.

3. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_2 = 7$.

Для цього розв'яжемо систему $(A - 7E)\vec{x} = \vec{0}$, де $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Записуємо

розширену матрицю системи $\left(\begin{array}{cc|c} -6 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$. Перший рядок можна

відкинути, оскільки він є пропорційний другому. Маємо $(-2 \ 1|0)$.

Відновлюємо рівняння: $-2x_1 + x_2 = 0$. Нехай $x_1 = C$, тоді $x_2 = 2C$.

Отже, $\vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ 2C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}, C \neq 0$.

Відповідь. $\lambda_1 = 2$, $\vec{x} = C \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}, C \neq 0$,

$\lambda_2 = 7$, $\vec{x} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}, C \neq 0$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 9. Власні числа та власні вектори матриці

Задача 9.2. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

1. Характеристичне рівняння матриці:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)(3-\lambda) - 0 = 0$$

має двократний корінь $\lambda = 3$ (алгебраїчна кратність $r = 2$).

2. Знайдемо власний вектор, що відповідають власному числу $\lambda = 3$.

Для цього розв'яжемо систему $(A - 3E)\vec{x} = \vec{0}$, де $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Записуємо

розширену матрицю системи $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow (1 \ 0|0)$. Відновлюємо

рівняння: $x_1 + 0x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$. Нехай $x_2 = C$, тоді власні вектори

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}, C \neq 0$. Геометрична кратність (розмірність

власного підпростору) $k = 1$, в цьому випадку $k < r$.

Відповідь. $\lambda = 3$, $\vec{x} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}, C \neq 0$,

Задача 9.3. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Характеристичне рівняння матриці $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 9 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + 9 = 0$. Многочлен не має дійсних коренів (комплексні корені

$\lambda_{1,2} = \pm 3i$, де $i^2 = -1$). Ми розглядаємо дійсний простір, отже, власні

вектори для комплексних власних чисел не шукаємо.

Відповідь. Власні числа над дійсним простором не існують.

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 9. Власні числа та власні вектори матриці

Зауважимо, що для скалярної матриці $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ власне число $\lambda = a$ має кратність 2 (збігається з порядком матриці A), а власним вектором буде довільний ненульовий вектор.

Задача 9.4 Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

1. Складаємо характеристичне рівняння матриці A :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & -4 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda) - 2 - 8 - 2(-2-\lambda) + 4(1-\lambda) + 2(3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Коренями цього рівняння (власними числами матриці A) є $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$.

2. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_1 = 1$.

Для цього розв'яжемо систему $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Відновлюємо систему: $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ Нехай $x_3 = C$, тоді

$$x_2 = -C, \quad x_1 = C. \text{ Отже, } \vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ -C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 9. Власні числа та власні вектори матриці

3. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_2 = -1$.

Розв'яжемо систему $(A + E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

Відновлюємо систему: $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_3 = 0. \end{cases}$ Маємо $x_3 = 0$, покладемо

$$x_2 = C, \text{ тоді } x_1 = C. \text{ Отже, } \vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

4. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_3 = 2$.

Розв'яжемо систему $(A - 2E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Відновлюємо систему: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ Нехай $x_3 = C$, тоді $x_2 = -C$,

$$x_1 = 0. \text{ Отже, } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

$$\text{Відповідь. } \lambda_1 = 1, \vec{x} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = -1, \vec{x} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_3 = 2, \vec{x} = C \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 9. Власні числа та власні вектори матриці

Задача 9.5 Знайти власні числа та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

1. Складаємо характеристичне рівняння матриці:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (4-\lambda)(-4-\lambda)(5-\lambda) + 180 + 0 + 28(-4-\lambda) - 0 + 5(5-\lambda) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0.$$

Коренями цього рівняння є $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$.

2. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_1 = 1$.

Для цього розв'яжемо систему $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 7 & 0 \\ 1 & -5 & 9 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 10 & -20 & 0 \\ 0 & -20 & 40 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Відновлюємо систему: $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ Нехай $x_3 = C$, тоді $x_2 = 2C$,

$x_1 = C$. Отже, $\vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ 2C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}, C \neq 0$. У випадку дійсного поля

розв'язування закінчено.

Відповідь. $\lambda_1 = 1$, $\vec{x} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}, C \neq 0$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 9. Власні числа та власні вектори матриці

Задача 9.6. Знайти власні числа та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Власними числами скалярної матриці буде число $\lambda = a$ (алгебраїчна кратність $r = 3$). Власними векторами, що відповідають єдиному власному числу буде довільний ненульовий вектор

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad C_i \in \mathbb{R}, C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 \neq 0 \quad (\text{отже, геометрична кратність власного}$$

числа також $k = 3$).

$$\text{Відповідь. } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = a, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad C_i \in \mathbb{R}, C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 \neq 0.$$

Задача 9.7. Знайти власні числа та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

1. Складаємо характеристичне рівняння матриці:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 1 \\ -6 & -10-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (-3-\lambda)(-10-\lambda)(-5-\lambda) - 12 - 12 - 3(-10-\lambda) + 12(-5-\lambda) + 4(-3-\lambda) = 0 \\ & \Leftrightarrow \lambda^3 + 18\lambda^2 + 108\lambda + 216 = 0. \end{aligned}$$

Коренями цього рівняння є число $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -6$ (алгебраїчна кратність $r = 3$).

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 9. Власні числа та власні вектори матриці

2. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_1 = -6$.

Розв'яжемо систему $(A + 6E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow (3 \ 2 \ 1|0).$$

Оскільки $\text{rang}(A + 6E) = 1$, $\text{def}(A + 6E) = 2$, то матриця буде мати два власних вектора (нам необхідно ввести два незалежних параметра C_1, C_2). Відновлюємо систему $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Нехай $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, тоді $x_3 = -3C_1 - 2C_2$. Тоді загальний розв'язок цієї системи

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ -3C_1 - 2C_2 \end{pmatrix}, \quad C_i \in \mathbb{R}, \quad \text{або} \quad \vec{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{при умовах}$$

$$C_i \in \mathbb{R}, C_1^2 + C_2^2 \neq 0. \quad \text{При } C_1 = 1, C_2 = 0 \text{ отримаємо } \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - \text{це}$$

$$\text{перший власний вектор. При } C_1 = 0, C_2 = 1 \text{ маємо } \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \text{другий}$$

власний вектор. Вектори $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ - лінійно незалежні, отже, утворюють базис власного підпростору, що відповідає власному числу $\lambda = -6$, таким чином, геометрична кратність кореня $k = 2$ ($k < r$).

$$\text{Відповідь. } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -6, \quad \vec{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 9. Власні числа та власні вектори матриці

Задача 9.8. Знайти власні числа та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -3 \\ 16 & 10 & 6 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

1. Складаємо характеристичне рівняння матриці:

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & -4 & -3 \\ 16 & 10-\lambda & 6 \\ -6 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-6-\lambda)(10-\lambda)(-1-\lambda) + 144 + 144 - 18(10-\lambda) + 64(-1-\lambda) + 18(-6-\lambda) = 0$$
$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0.$$

Коренями цього рівняння є $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

2. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_1 = -1$.

Для цього розв'яжемо систему $(A + E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -4 & -3 & 0 \\ 16 & 11 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & -18 & 0 \\ 0 & -9 & -18 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

Відновлюємо систему: $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ Нехай $x_3 = C$, тоді $x_2 = -2C$,

$$x_1 = C. \text{ Отже, } \vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ -2C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

3. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, алгебраїчна кратність $r = 2$.

Розв'яжемо систему $(A - 2E)\vec{x} = \vec{0}$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 9. Власні числа та власні вектори матриці

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & -4 & -3 & 0 \\ 16 & 8 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки $\text{rang}(A - 2E) = 2$, $\text{def}(A - 2E) = 1$, то матриця буде мати один власний вектор, що відповідає числу $\lambda_1 = 2$. Відновлена система рівнянь

має вигляд $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$ Покладаючи $x_1 = C$, отримуємо $x_2 = -2C$.

Отже, $\vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ -2C \\ 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}, C \neq 0$. Геометрична кратність кореня

$\lambda_1 = 2 \quad k = 1$.

Відповідь. $\lambda_1 = -1$, $\vec{x} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\vec{x} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}, C \neq 0$.

Задача 9.9. Знайти власні числа та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ -6 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

1. Складаємо характеристичне рівняння матриці:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 3 & 3 \\ -6 & -4 - \lambda & -6 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5 - \lambda)(-4 - \lambda)(2 - \lambda) + 0 + 0 - 0(-4 - \lambda) + 0(5 - \lambda) + 18(2 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0.$$

Коренями цього рівняння є $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 9. Власні числа та власні вектори матриці

2. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_1 = -1$.

Для цього розв'яжемо систему $(A + E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 0 \\ -6 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Відновлюємо систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$ Нехай, $x_1 = C$, тоді

$$x_2 = -2C. \quad \text{Отже,} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ -2C \\ 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}, C \neq 0. \quad \text{При} \quad C = 1$$

отримаємо один з власних векторів $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, алгебраїчна кратність $r = 2$.

$$\text{Розв'яжемо систему } (A - 2E)\vec{x} = \vec{0}: \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow (1 \ 1 \ 1|0).$$

Оскільки $\text{rang}(A - 2E) = 1$, $\text{def}(A - 2E) = 2$, то матриця буде мати два власних вектора, що відповідають числу $\lambda = 2$ (нам необхідно ввести два незалежних параметра C_1, C_2). Відновлена система рівнянь має вигляд $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Покладаючи $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, отримуємо $x_3 = -C_1 - C_2$.

Тоді загальний розв'язок цієї системи $\vec{x} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ -C_1 - C_2 \end{pmatrix}$. Довільний власний

вектор матриці запишемо так: $\vec{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C_i \in \mathbb{R}, C_1^2 + C_2^2 \neq 0$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 9. Власні числа та власні вектори матриці

Перший власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda = 2$, отримаємо

при $C_1 = 1, C_2 = 0$: $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Другий власний вектор запишемо при

$C_1 = 0, C_2 = 1$ $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Вектори $\vec{f}_2, \vec{f}_3$ – лінійно незалежні, отже,

утворюють базис власного підпростору, що відповідає власному числу $\lambda = 2$, таким чином, геометрична кратність кореня $k = 2$ ($k = r$).

Вектори $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ – лінійно незалежні, отже, утворюють базис, таким чином, матрицю можна діагоналізувати.

Відповідь. $\lambda_1 = -1$, $\vec{x} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}, C \neq 0$;

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\vec{x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C_i \in \mathbb{R}, C_1^2 + C_2^2 \neq 0$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайти власні числа та власні вектори матриці A :

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

е) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

д) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповіді:

а) $\lambda_1 = 1$, $c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3$, $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ при $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

б) $\lambda_1 = 2$, $c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -2$, $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ при $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

в) $\lambda_1 = 3$, $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ при $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

г) дійсний корінь $\lambda_3 = 1$ (комплексні корені $\lambda_{1,2} = \pm i$), власний вектор, що відповідає дійсному власному числу, $c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, при $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

д) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ при $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

е) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, власні вектори: $c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$, власні вектори: $c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, при

$c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.1. Жорданова форма матриці: основні поняття

Жордановою клітиною $J_k(\lambda)$ розміру k , що відповідає числу λ ,

назвемо квадратну матрицю розміру $k \times k$ виду $J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$,

на головній діагоналі якої розташовані числа λ , над головною діагоналлю - 1, решта елементів – нулі. Наприклад:

$$J_1(5) = (5), J_2(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_4(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Кажуть, що матриця має **жорданову нормальну форму** або просто **жорданову форму**, якщо вона має вигляд

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_m}(\lambda_m) \end{pmatrix}, \text{ тобто, по головній діагоналі розташовані}$$

жорданові клітинки, що відповідають власним числам матриці, а решта елементів нульові. Матрицю J блочно-діагонального вигляду з діагональними блоками $J_1, J_2, \dots, J_k$ назвемо **прямою сумою блоків**

$$J_1, J_2, \dots, J_k \text{ та будемо позначати } \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & J_k \end{pmatrix} = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_k. \text{ Таким}$$

чином, жорданова нормальна форма матриці є прямою сумою жорданових клітинок. Якщо жорданова форма матриці містить жорданові клітинки розмірності більше за 1, то кажуть, що матриця має **складну структуру**.

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

Звести матрицю A до жорданової форми – це означає знайти подібну до A матрицю J_A , яка має жорданову нормальну форму. Базис, в якому матриця лінійного оператора має жорданову нормальну форму, назовемо **жордановим базисом**. Якщо T – матриця переходу до жорданового базису, то $J_A = T^{-1}AT$.

Для довільної квадратної матриці A з комплексними елементами жорданова нормальна форма J_A існує і визначається однозначно з точністю до порядку клітинок на діагоналі.

Знаходження жорданового базису

I випадок. Всі власні числа матриці A різні дійсні. Тоді власні вектори, що відповідають цим власним числам є лінійно незалежні та утворюють базис (жорданів базис)

II випадок. Нехай λ – корінь характеристичного рівняння матриці A , причому його алгебраїчна кратність $r > 1$, а $\vec{f}$ – власний вектор, що відповідає цьому власному числу λ . Вектор $\vec{b}_1$ назовемо **приєднаним** до $\vec{f}$, якщо $(A - \lambda E)\vec{b}_1 = \vec{f}$. Вектор $\vec{b}_2$ назовемо приєднаним до $\vec{b}_1$, якщо $(A - \lambda E)\vec{b}_2 = \vec{b}_1$, і.т.д.. Такий ланцюжок $\vec{f} \leftarrow \vec{b}_1 \leftarrow \vec{b}_2 \leftarrow \vec{b}_3 \leftarrow \dots$ є скінченним. Нехай його довжина дорівнює $s+1$. Тоді s задовольняє умову: $(A - \lambda E)^s \neq 0$, але $(A - \lambda E)^{s+1} = 0$. Вектори ланцюжка $\vec{f} \leftarrow \vec{b}_1 \leftarrow \vec{b}_2 \leftarrow \vec{b}_3 \leftarrow \dots$ лінійно незалежні.

Перепишемо рівності для приєднаних векторів інакше:

$$\begin{aligned} A\vec{f} &= \lambda\vec{f} + 0\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + \dots + 0\vec{b}_s, \\ A\vec{b}_1 &= \vec{f} + \lambda\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + \dots + 0\vec{b}_s, \\ A\vec{b}_2 &= 0\vec{f} + \vec{b}_1 + \lambda\vec{b}_2 + \dots + 0\vec{b}_s, \\ &\dots \end{aligned}$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

Тоді в базисі, частиною якого є ланцюжок $\vec{f}, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_s$, та частина матриці лінійного оператора, що пов'язана з цими векторами, буде збігатися з жордановою клітиною $J_{s+1}(\lambda)$. Таким чином, ідея зведення матриці до жорданової форми полягає в тому, щоб:

- а) знайти всі власні числа і власні вектори, що відповідають цим власним числам;
- б) якщо кількість власних векторів менша розмірності простору n (а це відбувається, якщо алгебраїчна кратність деякого власного числа λ більша за його геометричну кратність (розмірності власного підпростору)), решту векторів для базису “набрати” з приєднаних векторів.

Розглянемо на конкретних прикладах зведення матриць розміру 2×2 , 3×3 , 4×4 до жорданової форми.

10.2. Зведення до жорданової форми матриць другого порядку

Задача 10.2.1. Знайти жорданову форму матриці $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

- 1) Знайдемо власні числа матриці.

Розв'язуємо характеристичне рівняння: $\det(A - \lambda E) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \text{ Маємо } (4 - \lambda)(3 - \lambda) = 0, \text{ тобто, } \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3 -$$

власні числа.

- 2) Знаходимо власні вектори матриці лінійного оператора, що відповідають власному числу $\lambda_1 = 4$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.2. Зведення до жорданової форми матриць другого порядку

Для цього розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A - 4E)\vec{x} = \vec{0}$, де

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Отримаємо $\vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ -2C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C \in R$. При $C = 1$ маємо

власний вектор $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3) Для знаходження власних векторів, що відповідають власному числу $\lambda_2 = 3$, розв'яжемо систему $(A - 3E)\vec{x} = \vec{0}$. Звідки отримаємо

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}$, $C \in R$. Покладемо $C = 1$, тоді $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Таким чином, маємо два лінійно незалежних власних вектора, що утворюють жорданів базис: $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ та $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Жорданова форма

матриці $J_A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = J_1(4) \oplus J_1(3)$, тобто матриця має діагональний вигляд.

4) Перевірка. Матриця переходу до нового базису має вигляд

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Знаходимо жорданову форму:

$$J_A = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

що підтверджує отриманий результат.

Відповідь. Жорданова форма матриці $J_A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = J_1(4) \oplus J_1(3)$,

жорданів базис: $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми
10.2. Зведення до жорданової форми матриць другого порядку

Задача 10.2.2. Знайти жорданову форму матриці $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

1) Складаємо характеристичне рівняння матриці:

$$\begin{vmatrix} -4 - \lambda & 4 \\ -1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \text{ Звідки } \lambda_1 = \lambda_2 = -2 - \text{корінь кратності 2.}$$

2) Знаходимо власні вектори матриці лінійного оператора.

$$(A + 2E)\vec{x} = \vec{0}, \text{ де } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow (-1 \ 2 \ | \ 0).$$

Отже, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \in R$. При $C=1$ маємо власний вектор

$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Алгебраїчна кратність кореня менша за його геометричну

кратність. Жорданова форма матриці $J_A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Знайдемо

жорданів базис, для цього треба доповнити базис приєднаним вектором.

3) Для знаходження вектора $\vec{f}_2$, приєданого до власного вектора,

знайдемо розв'язок системи $(A - \lambda E)\vec{b} = \vec{f}_1$, тобто $(A + 2E)\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Система $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right)$ рівносильна $(-1 \ 2 \ | \ 1)$, тобто $-x_1 + 2x_2 = 1$.

Нехай $x_2 = C$, тоді $x_1 = 2C - 1$ та $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2C - 1 \\ C \end{pmatrix}$, $C \in R$. Покладемо

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.2. Зведення до жорданової форми матриць другого порядку

$C = 0$, тоді $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{f}_2$. Маємо два лінійно незалежних вектори, що

утворюють жорданів базис: $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (власний вектор) та $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (приєднаний вектор).

4) Перевірка. Матриця переходу до нового базису має вигляд

$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Знаходимо жорданову форму:

$$J_A = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

що підтверджує отриманий результат.

Відповідь. Жорданова форма матриці $J_A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = J_2(-2)$,

жорданів базис: $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (власний вектор),

$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (приєднаний вектор).

Задача 10.2.3. Знайти жорданову форму матриці $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = 0$

або $\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$, тобто $(4 - \lambda)(2 - \lambda) + 2 = 0$, має тільки комплексні

корені $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$, тому у дійсному просторі матриця не має нормальної жорданової форми.

Зауважимо, що скалярна матриця $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ вже має жорданову нормальну форму $J_1(a) \oplus J_1(a)$.

10.3. Зведення до жорданової форми матриць третього порядку

При зведенні до жорданової нормальної форми матриці третього порядку можливі такі випадки:

1. корені характеристичного рівняння дійсні та різні, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, тоді

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \text{ тобто, } J_A = J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) \oplus J_1(\lambda_3);$$

2. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, тоді можливі два варіанта:

а. $J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad J_A = J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_3);$

б. $J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad J_A = J_2(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_3);$

3. дійсний корінь характеристичного рівняння має кратність 3, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, тоді:

- а. якщо $(A - \lambda E) = 0$, то матриця A діагоналізується, тобто

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ та } J_A = J_1(\lambda) \oplus J_1(\lambda) \oplus J_1(\lambda);$$

- б. при $(A - \lambda E) \neq 0$, $(A - \lambda E)^2 = 0$ в базисі два вектора власних,

один вектор приєднаний, тому $J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$

$$J_A = J_2(\lambda) \oplus J_1(\lambda);$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.3. Зведення до жорданової форми матриць третього порядку

с. якщо $(A - \lambda E) \neq 0$, $(A - \lambda E)^2 \neq 0$, $(A - \lambda E)^3 = 0$, то в базисі один

вектор власний, два вектора приєднаних, $J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$,

тобто, $J_A = J_3(\lambda)$;

4. якщо не всі корені характеристичного рівняння дійсні, тобто, є комплексні корені, будемо вважати, що матрицю не можна привести до жорданової нормальної форми (над полем дійсних чисел).

Всі ці випадки представлені в таблиці № 1 у додатках.

Задача 10.3.1. Знайти жорданову форму матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

1) Складаємо характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = 0$,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) = 0,$$

тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ – корінь характеристичного рівняння має кратність 3.

Запишемо $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$,

$$(A - \lambda E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто $(A - \lambda E)^3 = 0$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.3. Зведення до жорданової форми матриць третього порядку

Якщо нас цікавить тільки жорданова форма матриці, але не цікавить базис, в якому матриця має такий вигляд, то можемо сказати, що жорданова форма матриці складається з однієї жорданової клітинки

розміром 3×3 , а саме $J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2) Знайдемо жорданів базис. Знаходимо власні вектори матриці лінійного оператора. Для цього розв'яжемо однорідну систему рівнянь

$$(A - \lambda E)\vec{x} = (A - 2E)\vec{x} = \vec{0}, \text{ де } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0|0 \\ 1 & 0 & 0|0 \\ -1 & 5 & 0|0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0|0 \\ -1 & 5 & 0|0 \end{pmatrix}.$$

Відновлюємо систему: $\begin{cases} x_1 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 = 0. \end{cases}$ Нехай $x_3 = C$, тоді

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \in R. \text{ Отже, маємо лише один лінійно незалежний}$$

власний вектор $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Потрібно знайти ще два вектора $\vec{f}_2$ та $\vec{f}_3$, з яких $\vec{f}_2$ буде приєднаним до $\vec{f}_1$, а $\vec{f}_3$ – приєднаний до $\vec{f}_2$.

а) Шукаємо розв'язок системи $(A - \lambda E)\vec{b}_1 = \vec{f}_1$. Система $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0|0 \\ 1 & 0 & 0|0 \\ -1 & 5 & 0|1 \end{pmatrix}$

рівносильна $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0|0 \\ -1 & 5 & 0|1 \end{pmatrix}$ та має розв'язок $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \\ C \end{pmatrix}, \quad C \in R.$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.3. Зведення до жорданової форми матриць третього порядку

Покладемо $C = 0$. Таким чином, другий вектор жорданового базису

$$\text{дорівнює } \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

б) Шукаємо тепер розв'язок системи $(A - \lambda E)\vec{b}_2 = \vec{f}_2$. Система

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ має розв'язок } \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/25 \\ C \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}. \text{ Знову покладемо } C = 0.$$

Тоді отримаємо третій вектор жорданового базису $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/25 \\ 0 \end{pmatrix}$. Отже, маємо

ланцюжок $\vec{f}_1 \leftarrow \vec{f}_2 \leftarrow \vec{f}_3$, де $\vec{f}_1$ – власний вектор, $\vec{f}_2$ – приєднаний до вектора $\vec{f}_1$, $\vec{f}_3$ – приєднаний до вектора $\vec{f}_2$.

4) Перевірка. Запишемо матрицю переходу до жорданового базису

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 1/25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Знайдемо обернену матрицю до матриці } T.$$

$$T^{-1} = -\frac{1}{1/25} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/25 \\ 1/25 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$J_A = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 1/25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 1/25 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J_A.$$

$$\text{Відповідь. } J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.3. Зведення до жорданової форми матриць третього порядку

$$\text{жорданів базис: } \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/25 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що знайдений жорданів базис є одним з можливих, в якому матриця має таку жорданову форму.

Покажемо другий спосіб знаходження жорданового базису. На початку розв'язування задачі 4.1 ми отримали $(A - \lambda E)^3 = 0$. Отже, для довільного вектора $\bar{x} \in R^3$ маємо $(A - \lambda E) \underbrace{(A - \lambda E)(A - \lambda E)\bar{x}}_{\vec{f}} = \bar{0}$. Це означає,

що вектор $(A - \lambda E) \underbrace{(A - \lambda E)\bar{x}}_{\vec{b}} = \vec{f}$ є власним вектором, що відповідає

власному числу λ . В свою чергу вектор $(A - \lambda E)\bar{x} = \vec{b}$ є приєднаним до вектора $\vec{f}$, а вектор $\bar{x}$ є приєднаним до вектора $\vec{b}$. Отже, маємо ланцюжок $\vec{f} \leftarrow \vec{b} \leftarrow \bar{x}$, де вектор $\bar{x}$ – довільний вектор простору. Головне, щоб вектори, які ми отримуємо, не були нульовими. На практиці побудова ланцюжка виглядає так: вибираємо деякий ненульовий вектор $\bar{x} \in R^3$, діємо на нього матрицею $(A - \lambda E)$: $\vec{b} = (A - \lambda E)\bar{x}$, потім на результат діємо матрицею $(A - \lambda E)$ ще раз: $\vec{f} = (A - \lambda E)^2 \bar{x}$. Отримаємо жорданів базис: $\vec{f}_1 = \vec{f}$, $\vec{f}_2 = \vec{b}$, $\vec{f}_3 = \bar{x}$.

Знайдемо жорданів базис для матриці в задачі 4.1. Нехай

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{f}_3. \text{ Тоді} \quad \vec{f}_2 = (A - \lambda E)\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$\vec{f}_1 = (A - \lambda E)^2 \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.3. Зведення до жорданової форми матриць третього порядку

Маємо, $\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – жорданів базис.

Перевірка. $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$J_A = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 10.3.2. Знайти жорданову форму матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

1) Складаємо характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + (2-\lambda) = 0 \quad \text{або}$$

$(2-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda) + 1) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$, тобто кратність кореня характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ дорівнює 3.

2) Запишемо матрицю $A - \lambda E = A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$(A - 2E)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, максимальна довжина ланцюжка дорівнює 2 та жорданова форма матриці буде мати дві жорданові клітини $J_2(2) \oplus J_1(2)$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.3. Зведення до жорданової форми матриць третього порядку

3) Знаходимо власні вектори матриці. Розв'язуємо однорідну систему

$$(A - \lambda E)\vec{x} = (A - 2E)\vec{x} = \vec{0}, \text{ де } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & | & 0 \\ -2 & 0 & -2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1 \ 0 \ 1 | 0).$$

Оскільки $\text{rang}(A - 2E) = 1$, то $\text{def}(A - 2E) = 3 - 1 = 2$ ми будемо мати два власних вектора та один приєднаний вектор, отже, одну жорданову клітину другого порядку $J_2(2)$ й одну жорданову клітину першого порядку $J_1(2)$.

Відновлюємо систему $x_1 + x_3 = 0$. Очевидно, що $x_1 = -x_3$. Нехай

$$x_2 = C_1, \ x_3 = C_2. \text{ Тоді } x_1 = -C_2, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

4) Для вектора f_1 повинен існувати приєднаний вектор. Для цього нам необхідно вибрати параметри C_1, C_2 (які не дорівнюють нулю одночасно)

$$\text{так, щоб система } \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & | & -C_2 \\ -2 & 0 & -2 & | & C_1 \\ 1 & 0 & 1 & | & C_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & C_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & C_1 + 2C_2 \end{pmatrix} \text{ мала}$$

ненульовий розв'язок (який і буде вектором f_2). Легко бачити (з того, що $C_1 + 2C_2 = 0$), що можна взяти $C_2 = 1, C_1 = -2$. Тоді отримаємо рівняння

$$x_1 + x_3 = 1, \text{ одним із розв'язків якого є вектор } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Таким чином,}$$

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{ власний вектор, } \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{ вектор, приєднаний до } \vec{f}_1,$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.3. Зведення до жорданової форми матриць третього порядку

$\bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – другий власний вектор з множини власних векторів, незалежних

з вектором $\bar{f}_1$.

5) Перевірка. Запишемо матрицю переходу до жорданового базису

Запишемо матрицю перетворень $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Обернена матриця

$T^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тоді:

$$\begin{aligned} J_A = T^{-1}AT &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J_A. \end{aligned}$$

Таким чином, ми маємо одну жорданову клітину $J_2(2)$ розміру 2×2 , що відповідає власному числу $\lambda = 2$, та одну жорданову клітину $J_1(2)$ розміру один, що відповідає також власному числу $\lambda = 2$.

Відповідь. $J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

матриця переходу до жорданового базису: $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 10.3.3. Знайти жорданову форму матриці $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.3. Зведення до жорданової форми матриць третього порядку

Розв'язування.

1) Складаємо характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} -4 - \lambda & 0 & -1 \\ -2 & 0 - \lambda & 4 \\ 1 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda(-4 - \lambda)(-2 - \lambda) - \lambda = 0,$$

тобто $\lambda(3 + \lambda)^2 = 0$. Маємо $\lambda_1 = 0$ простий корінь характеристичного рівняння, $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ – корінь кратності 2.

2) Знайдемо жорданів базис. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_1 = 0$. Для цього розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A - \lambda E)\vec{x} = (A - 0E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Оскільки $\text{rang}(A - 0E) = 2$, то $\text{def}(A - 0E) = 3 - 2 = 1$ та ми будемо мати одну жорданову клітину $J_1 = (0)$, матриця A буде мати один власний вектор, що відповідає $\lambda_1 = 0$.

Відновлюємо систему: $\begin{cases} x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ Очевидно, що $x_1 = x_3 = 0$.

Нехай $x_2 = C$. Тоді $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \in R$. Отже маємо $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$. Маємо однорідну систему рівнянь $(A - \lambda E)\vec{x} = (A + 3E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array} \right).$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.3. Зведення до жорданової форми матриць третього порядку

Оскільки $\text{rang}(A + 3E) = 2$, то $\text{def}(A + 3E) = 3 - 2 = 1$. Ми будемо мати одну жорданову клітину другого порядку $J_2(-3)$, матриця A буде мати один власний вектор та один приєднаний вектор (що відповідають цьому власному числу).

Відновлюємо систему:
$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 = 0, \\ 0x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$
 Покладемо $x_3 = C$, тоді

$x_1 = -C$, $x_2 = -2C$. Отже $\bar{x} = \begin{pmatrix} -C \\ -2C \\ C \end{pmatrix} = -C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C \in R$. Покладаючи

$C = -1$ отримаємо $\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ – власний вектор, що відповідає $\lambda_2 = -3$.

4) Знайдемо вектор, приєднаний до $\bar{f}_2$. Для цього шукаємо розв'язок

системи $(A - \lambda E)\bar{x} = (A + 3E)\bar{b} = \bar{f}_2$. Розширена матриця

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array} \right)$$
 відповідає системі

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 = -1, \\ 0x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$
 Покладемо $x_3 = C$, тоді $x_1 = -1 - C$ та

$x_2 = -2C$. Покладаючи $C = 0$, отримаємо $\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{f}_3$ третій вектор

жорданового базису. Таким чином, маємо жорданів базис: $\bar{f}_1$ – власний вектор ($\lambda_1 = 0$), $\bar{f}_2$ – власний вектор ($\lambda_2 = \lambda_3 = -3$), $\bar{f}_3$ приєднаний до $\bar{f}_2$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.3. Зведення до жорданової форми матриць третього порядку

5) Перевірка. Запишемо матрицю переходу до жорданового базису

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді обернена матриця $T^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} J_A = T^{-1}AT &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = J_A. \end{aligned}$$

Відповідь. Жорданова форма: $J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = J_1(0) \oplus J_2(-3),$

жорданів базис: $\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{f}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Задача 10.3.4. Знайти жорданову нормальну форму матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

1) Складаємо характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 0 & 0 \\ 3 & -3 - \lambda & 0 \\ 3 & 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda(-3 - \lambda)(-3 - \lambda) = 0,$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.3. Зведення до жорданової форми матриць третього порядку

тобто $\lambda(3 + \lambda)^2 = 0$. Маємо $\lambda_1 = 0$ простий корінь характеристичного рівняння, $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ – корінь кратності 2.

2) Знайдемо власний вектор, що відповідає числу $\lambda_1 = 0$. Для цього

розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A - \lambda E)\vec{x} = (A - 0E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

Відновлюємо систему:
$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 0, \\ 3x_1 + 0x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Покладемо $x_2 = C$, тоді $x_1 = x_3 = C$. Тобто $\vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \in R$.

Покладаючи $C = 1$, отримаємо $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Знайдемо власний вектор, що відповідає $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$. З однорідної

системи рівнянь $(A - \lambda E)\vec{x} = (A + 3E)\vec{x} = \vec{0}$ маємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Відновлюємо рівняння: $3x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$, отже, $x_1 = 0$. Покладемо

$x_2 = C_1$, $x_3 = C_2$. Тоді $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_1, C_2 \in R$. Таким чином,

власному числу $\lambda = -3$ відповідає два власних лінійно незалежних вектора

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.3. Зведення до жорданової форми матриць третього порядку

$\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $\bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Алгебраїчна кратність кореня $\lambda = -3$ дорівнює його

геометричній кратності.

Жорданів базис $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ – є базисом, складеним з власних векторів, у такому базисі жорданова нормальна форма матриці є діагональною та складається з трьох клітинок розміру 1:

$$J_A = J_1(0) \oplus J_1(-3) \oplus J_1(-3).$$

Відповідь: $J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$

матриця переходу до жорданового базису $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Перевірку можна виконати таким способом: оскільки рівність $J_A = T^{-1}AT$ еквівалентна рівності $TJ_A = AT$, то

$$TJ_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$
$$AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad TJ_A = AT.$$

Отже, жорданову форму матриці знайдено вірно.

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Зауважимо, що при розв'язуванні рівнянь четвертого степеня в дійсних числах можливі різні варіанти кратності коренів, тому при зведенні до жорданової форми матриці четвертого порядку можуть бути такі випадки:

I варіант. Всі власні числа матриці A – різні дійсні, тобто $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$. Тоді власні вектори, що відповідають цим власним числам є лінійно незалежні і утворюють базис (жорданів базис). В базисі з власних векторів матриця A має діагональний вигляд. Жорданова форма матриці

має вигляд
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

II варіант. Серед власних чисел матриці A – є кратні числа, але алгебраїчна кратність всіх таких чисел дорівнює їх геометричній кратності. В цьому випадку також існує базис, що складається з n власних векторів (жорданів базис), в якому матриця A також має діагональний вигляд.

III варіант. Серед власних чисел матриці A – є кратні числа, причому геометрична кратність деяких з них менша їх алгебраїчної кратності. В цьому випадку також існує базис, що складається з власних векторів та приєднаних до них (жорданів базис), в якому матриця A вже має блочно–діагональний вигляд (жорданові клітини).

Зведемо всі можливі варіанти в таблицю 2 (див. додаток).

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми
10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Задача 10.4.1. Знайти жорданову форму матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

1) Складаємо характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = \bar{0}$ або

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$((3-\lambda)(-5-\lambda)+16)((3-\lambda)(-1-\lambda)+4)=0$$

або $(\lambda^2 + 2\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$, тобто кратність коренів характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$ дорівнює 2. Ми маємо кратні власні числа, тому жорданова нормальна форма може мати один з виглядів (див. табл. 2 п. 3.1–3.4):

- а) $J_2(1) \oplus J_2(-1)$, при $\text{def}(A - E) = 1$, $\text{def}(A + E) = 1$;
- б) $J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_2(-1)$, при $\text{def}(A - E) = 2$, $\text{def}(A + E) = 1$;
- в) $J_2(1) \oplus J_1(-1) \oplus J_1(-1)$, при $\text{def}(A - E) = 1$, $\text{def}(A + E) = 2$;
- г) $J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(-1) \oplus J_1(-1)$, при $\text{def}(A - E) = 2$, $\text{def}(A + E) = 2$.

2) $\lambda = 1$. Досліджуємо однорідну систему $(A - \lambda E)\vec{x} = (A - E)\vec{x} = \vec{0}$ або

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ранг матриці $A - E$ дорівнює 3, тому

$$\text{def}(A - E) = n - \text{rang}(A - E) = 4 - 3 = 1.$$

Таким чином, ми отримаємо одну жорданову клітинку $J_2(1)$ з числом $\lambda = 1$. Цьому числу буде відповідати один власний вектор та один

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

приєднаний вектор. Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 1$. При відновленні системи нульовий рядок

$$\text{відкидаємо: } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 0, \\ 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases} \quad \text{Нехай } x_4 = C, \text{ тоді } x_3 = x_4 = C,$$

$$x_2 = x_3 = C, \quad x_1 = C, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \in R. \quad \text{Покладаючи } C = 1,$$

$$\text{отримаємо власний вектор } \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ що відповідає власному числу}$$

$\lambda = 1$. Приєднаний вектор знайдемо, розв'язуючи неоднорідну систему

$$\text{рівнянь } (A - E)\vec{x} = \vec{f}_1: \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & | & 1 \\ 4 & -6 & -2 & 4 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 1, \\ 2x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases} \quad \text{Нехай } x_4 = C, \text{ тоді } x_3 = \frac{1+2C}{2}, \quad x_2 = C,$$

$$x_1 = \frac{1-2C}{2}. \quad \text{Маємо } \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1-2C}{2} \\ C \\ \frac{1+2C}{2} \\ C \end{pmatrix}. \quad \text{При } C = 0 \text{ отримаємо } \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

вектор, приєднаний до $\vec{f}_1$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

3) $\lambda = -1$. Досліджуємо однорідну систему $(A - \lambda E)\vec{x} = (A + E)\vec{x} = \vec{0}$

$$\text{або } \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 & | & 0 \\ 4 & -4 & -2 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці $A + E$ дорівнює 3, тому

$\text{def}(A + E) = n - \text{rang}(A + E) = 4 - 3 = 1$. Таким чином, ми отримаємо одну жорданову клітинку $J_2(-1)$ з числом $\lambda = -1$. Цьому числу буде відповідати один власний вектор та один приєднаний вектор. Знайдемо власний вектор, що відповідають власному числу $\lambda = -1$. Запишемо

відновлену систему:
$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 0, \\ 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_4 = 0. \end{cases}$$
 Маємо $x_4 = 0$, $x_3 = 0$. Нехай

$$x_2 = C, \text{ тоді } x_1 = C \text{ та } \vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C \in R. \text{ Власний вектор } \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

отримаємо при $C = 1$. Тепер знайдемо приєднаний вектор, розв'язуючи

неоднорідну систему рівнянь $(A + E)\vec{x} = \vec{f}_3$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 & | & 1 \\ 4 & -4 & -2 & 4 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_4 = 1, \\ 2x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Маємо $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Нехай $x_2 = C$, тоді $x_1 = \frac{1}{4}(1 + 4C)$. При $C = 0$

отримаємо $\vec{f}_4 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – вектор, приєднаний до $\vec{f}_3$.

Зауважимо, що отримали варіант 3.3 з таблиці 2.

Запишемо матрицю переходу до жорданового базису $T = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Зробимо перевірку: повинна виконатися рівність $TJ_A = AT$.

$$TJ_A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1 & 3/4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AT = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1 & 3/4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = J_2(1) \oplus J_2(-1),$$

$$\text{матриця переходу до жорданового базису } T = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Задача 10.4.2. Знайти жорданову форму матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

1) Знайдемо власні числа матриці A .

Складаємо характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -4-\lambda & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda(4+\lambda)+4)(1-\lambda)^2 = 0 \quad \text{або}$$

$(2+\lambda)^2(1-\lambda)^2 = 0$, тобто кратність коренів характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ та $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ дорівнює 2.

2) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = -2$.

$$\text{Запишемо } A - \lambda E = A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A + 2E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

При відновленні системи другий рядок відкидаємо:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases} \quad \text{Нехай } x_2 = C, \text{ тоді } x_1 = C,$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C \in R. \text{ За власний вектор приймемо } \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо вектор, приєднаний до $\vec{f}_1$. Для цього розв'язуємо неоднорідну систему рівнянь:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & -5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right). \text{ Другий рядок є лінійно}$$

залежним від третього та четвертого (можна його відкинути).

$$\text{Відновлюємо систему} \quad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

$2x_1 = 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 1 = 2x_2 + 1$. Отже, $x_1 = x_2 + 1/2$. Нехай $x_2 = 0$, тоді

$$x_1 = 1/2, \text{ та маємо } \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{вектор, приєднаний до } \vec{f}_1.$$

3) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 1$.

$$\text{Запишемо } A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -9 & -7 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Нехай x_3, x_4 – вільні змінні. При відновленні системи два останніх рядка

$$\text{відкидаємо: } \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ -9x_2 - 7x_3 + 16x_4 = 0. \end{cases} \quad \text{Маємо} \quad x_2 = \frac{1}{9}(-7x_3 + 16x_4),$$

$$x_1 = -2x_2 - x_3 + 4x_4, \quad x_1 = \frac{1}{9}(14x_3 - 32x_4) - x_3 + 4x_4, \quad x_1 = \frac{1}{9}(5x_3 + 4x_4).$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9}x_3 + \frac{4}{9}x_4 \\ -\frac{7}{9}x_3 + \frac{16}{9}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{x_3}{9} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_4}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отже, } \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} - \text{власні вектори, що відповідають власному}$$

числу $\lambda = 1$.

Таким чином, ми маємо одну жорданову клітину $J_2(-2)$ розміру 2×2 , що відповідає власному числу $\lambda = -2$, та дві жорданові клітини $J_1(1)$ розміру 1, що відповідають власному числу $\lambda = 1$ (див. таблицю 2 п. 3.2).

$$4) \text{ Запишемо матрицю перетворень } T = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку: $TJ_A = AT$.

$$TJ_A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

$$AT = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } J_A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J_2(-2) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1),$$

$$\text{матриця переходу до жорданового базису } T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -7 & 16 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Задача 10.4.3. Знайти жорданову форму матриці } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

1) Знайдемо власні числа матриці A .

Складаємо характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^4 = 0 \text{ тобто кратність кореня}$$

характеристичного рівняння $\lambda = 1$ дорівнює 4.

2) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 1$.

$$\text{Запишемо } A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$:

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

При відновленні системи перший рядок відкидаємо: $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$ Нехай

$$x_4 = C, \text{ тоді } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \in R \text{ за } \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо вектор $\vec{f}_2$, приєднаний до власного вектора $\vec{f}_1$.

Розв'яжемо неоднорідну систему $(A - E)\vec{x} = \vec{f}_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{вектор, приєднаний до } \vec{f}_1.$$

Знайдемо вектор $\vec{f}_3$, приєднаний до власного вектора $\vec{f}_2$.

Розв'яжемо неоднорідну систему $(A - E)\vec{x} = \vec{f}_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Нехай } C = 0, \text{ тоді } \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

вектор, приєднаний до $\vec{f}_2$.

Знайдемо вектор $\vec{f}_4$, приєднаний до власного вектора $\vec{f}_3$. Розв'яжемо неоднорідну систему $(A - E)\vec{x} = \vec{f}_3$:

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай $C = 0$, тоді $\vec{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – вектор, приєднаний до $\vec{f}_3$.

Зауважимо, що отримали варіант 4.5 з таблиці 2.

Запишемо матрицю перетворень $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Зробимо перевірку: $TJ_A = AT$.

$$TJ_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Покажемо другий спосіб знаходження жорданової форми матриці.

$$\text{Знайдемо } (A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$(A - \lambda E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

$$(A - \lambda E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$(A - \lambda E)^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Таким чином, можемо стверджувати, що жорданова форма матриці A складається з однієї жорданової клітини $J_4(1)$ розміру 4×4 , що відповідає власному числу $\lambda = 1$. Тепер знаходимо жорданів базис.

Виберемо вектор $\vec{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Подіємо на нього матрицею $A - \lambda E$,

$$\text{отримаємо вектор } \vec{f}_3 = (A - \lambda E)\vec{f}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подіємо на вектор $\vec{f}_3$ матрицею $A - \lambda E$, отримаємо вектор

$$\vec{f}_2 = (A - \lambda E)\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (A - \lambda E)^2 \vec{f}_4.$$

Так саме отримаємо вектор $\vec{f}_1$:

$$\vec{f}_1 = (A - \lambda E)\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (A - \lambda E)^3 \vec{f}_4.$$

Вектор $\vec{f}_1$ є власним вектором, оскільки $(A - \lambda E)\vec{f}_1 = (A - \lambda E)^4 \vec{f}_4 = 0$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Вектор $\vec{f}_2$ приєднаний до власного вектора $\vec{f}_1$, вектор $\vec{f}_3$ приєднаний до вектора $\vec{f}_2$, вектор $\vec{f}_4$ приєднаний до вектора $\vec{f}_3$.

Зауваження: вибір вектора $\vec{f}_4$ – довільний, але вектори ланцюжка, який отримаємо при цьому $\vec{f}_3, \vec{f}_2, \vec{f}_1$ не повинні бути нульовими.

Задача 10.4.4. Знайти жорданову форму матриці

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

1) Знайдемо власні числа матриці A .

Складаємо характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2-\lambda & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)^2(1 - \lambda)^2 = 0, \quad \text{тобто}$$

кратність коренів характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ та $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ дорівнює 2.

2) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = -2$.

$$\text{Запишемо } A - \lambda E = A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A + 2E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

При відновленні системи отримаємо: $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ Маємо дві вільні

змінні. Нехай $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, тоді $x_2 = C_2 - C_1$, $x_1 = C_1 + C_2$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ C_2 - C_1 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Отже, $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – власні вектори, що відповідають власному

числу $\lambda = -2$.

3) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 1$.

$$\text{Запишемо } A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & -3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad \text{Нехай } x_3, x_4 - \text{ вільні}$$

змінні. При відновленні системи два останніх рядка відкидаємо:

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{Нехай } x_3 = C_1, \quad x_4 = C_2, \quad \text{тоді } x_2 = -C_1, \quad x_1 = C_2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} C_2 \\ -C_1 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in R.$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Отже, $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – власні вектори, що відповідають власному

числу $\lambda = 1$.

Таким чином, ми маємо дві жорданові клітини розміру один $J_1(-2)$, що відповідають власному числу $\lambda = -2$, та дві жорданові клітини $J_1(1)$ розміру 1, що відповідають власному числу $\lambda = 1$ (див. таблицю 2 п. 3.1).

4) Запишемо матрицю перетворень $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Зробимо перевірку: $TJ_A = AT$.

$$TJ_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AT = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } J_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J_1(-2) \oplus J_1(-2) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1),$$

матриця переходу до жорданового базису $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Задача 10.4.5. Знайти жорданову форму матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

1) Знайдемо власні числа матриці A . Складаємо характеристичне рівняння

$$\text{матриці } \det(A - \lambda E) = 0 \text{ або } \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^4 = 0,$$

тобто кратність кореня характеристичного рівняння $\lambda_1 = 1$ дорівнює 4.

2) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 1$.

$$\text{Запишемо } A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

При відновленні системи отримаємо: $\begin{cases} x_2 + x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$ Маємо дві вільні змінні.

Нехай $x_1 = C_1$, $x_3 = C_2$, тоді $x_2 = -C_2$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} C_1 \\ -C_2 \\ C_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_1, C_2 \in R$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Отже, $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – власні вектори, що відповідають власному

числу $\lambda = 1$. Зауважимо, що отримали варіант 5.4 з таблиці 2.

3) Знайдемо вектор $\vec{f}_2$, приєднаний до власного вектора $\vec{f}_1$.

Розв'яжемо неоднорідну систему $(A - E)\vec{x} = \vec{f}_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ При } C=1 \text{ маємо } \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} -$$

вектор, приєднаний до $\vec{f}_1$.

Знайдемо вектор $\vec{f}_3$, приєднаний до власного вектора $\vec{f}_2$.

Розв'яжемо неоднорідну систему $(A - E)\vec{x} = \vec{f}_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Нехай } C = -1, \text{ тоді}$$

$$\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{вектор, приєднаний до } \vec{f}_2.$$

Таким чином, ми маємо дві жорданові клітини: розміру 3×3 та розміру 1, що відповідають власному числу $\lambda = 1$, тобто $J_3(1)$ та $J_1(1)$ (див. таблицю п. 5.4).

4) Запишемо матрицю перетворень $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Зробимо перевірку: $TJ_A = AT$.

$$TJ_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AT = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J_3(1) \oplus J_1(1), \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} -$$

матриця переходу до жорданового базису .

Задача 10.4.6. Знайти жорданову форму матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

1) Знайдемо власні числа матриці A .

Складаємо характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^4 = 0, \text{ тобто кратність кореня}$$

характеристичного рівняння $\lambda_1 = 1$ дорівнює 4.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

2) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 1$.

$$\text{Запишемо } A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

При відновленні системи отримаємо: $x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Маємо три вільні змінні (це означає, що маємо три власних вектора, що відповідають цьому власному числу, та один приєднаний вектор).

Нехай $x_1 = C_1$, $x_3 = C_2$, $x_4 = C_3$,

тоді $x_2 = C_3 - C_2$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 - C_2 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in R.$

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{власні вектори, що відповідають власному}$$

числу $\lambda = 1$. Зауважимо, що отримали варіант 5.2 з таблиці 2.

3) Знайдемо вектор $\vec{f}_2$, приєднаний до власного вектора $\vec{f}_1$.

Розв'яжемо неоднорідну систему $(A - E)\vec{x} = \vec{f}_1$:

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ При } C=1 \text{ маємо } \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} -$$

вектор, приєднаний до $\vec{f}_1$.

Таким чином, ми маємо жорданові клітини розміру два, один та один, що відповідають власному числу $\lambda=1$, тобто $J_2(1)$, $J_1(1)$ та $J_1(1)$ (див. таблицю 2 п. 5.2).

4) Запишемо матрицю перетворень $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Зробимо перевірку: $TJ_A = AT$.

$$TJ_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J_2(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1),$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — матриця переходу до жорданового базису.}$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Задача 10.4.7. Знайти жорданову форму матриці

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

1) Знайдемо власні числа матриці A .

Складаємо характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -\lambda & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)(1 - \lambda)^3 = 0, \text{ тобто кратність}$$

коренів характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ та $\lambda_4 = -2$.

2) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 1$.

$$\text{Запишемо } A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

При відновленні системи отримаємо: $\begin{cases} -x_1 + x_4 = 0, \\ -x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ Маємо дві вільні

змінні. Нехай $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, тоді $x_2 = C_2 - C_1$, $x_1 = C_2$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 - C_1 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Отже, $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – власні вектори, що відповідають власному

числу $\lambda = 1$.

Знайдемо вектор $\vec{f}_2$, приєднаний до власного вектора $\vec{f}_1$.

Розв'яжемо неоднорідну систему $(A - E)\vec{x} = \vec{f}_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ При } C=1 \text{ маємо } \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} -$$

вектор, приєднаний до $\vec{f}_1$.

3) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = -2$.

$$\text{Запишемо } A - \lambda E = A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A + 2E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \text{ Нехай } x_1 - \text{вільна змінна. При}$$

відновленні системи останній рядок відкидаємо:
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Маємо $x_4 = 0$. Нехай $x_1 = C$, тоді $x_2 = -C$, $x_3 = C$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ -C \\ C \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \in R$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Отже, при $a=1$ маємо $\vec{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – власний вектор, що відповідає власному

числу $\lambda = -2$.

Таким чином, ми маємо дві жорданові клітини розміру два та один $J_2(1)$, $J_1(1)$, що відповідають власному числу $\lambda=1$, та одну жорданову клітину $J_1(-2)$ розміру 1, що відповідають власному числу $\lambda=-2$ (див. таблицю п. 2.2).

4) Запишемо матрицю перетворень $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Зробимо перевірку: $TJ_A = AT$.

$$TJ_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AT = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = J_2(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(-2)$, матриця переходу

до жорданового базису $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Задача 10.4.8. Знайти жорданову форму матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

1) Знайдемо власні числа матриці A .

Складаємо характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2-\lambda & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0, \text{ тобто}$$

корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ та $\lambda_3 = 2$ $\lambda_4 = -2$.

2) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 1$.

Запишемо $A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

При відновленні системи отримаємо: $\begin{cases} -x_1 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ Маємо дві вільні

змінні. Нехай $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, тоді $x_3 = -C_2$, $x_4 = C_1$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ -C_2 \\ C_1 \end{pmatrix}$, $C_1, C_2 \in R$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Отже, $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – власні вектори, що відповідають $\lambda = 1$.

3) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 2$.

$$\text{Запишемо } A - \lambda E = A - 2E = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A - 2E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Нехай x_4 – вільна змінна. При відновленні системи останній рядок

$$\text{відкидаємо: } \begin{cases} -x_1 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{Нехай } x_4 = C_1, \quad \text{тоді } x_1 = C_1, \quad x_2 = C_1$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 \\ 0 \\ C_1 \end{pmatrix}, \quad C_1 \in R.$$

Отже, $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda = 2$.

4) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = -2$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Запишемо $A - \lambda E = A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A + 2E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Нехай x_3 – вільна змінна. При

відновленні системи останній рядок відкидаємо:
$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Нехай $x_3 = C$, тоді $x_1 = C$, $x_2 = -C$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ -C \\ C \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \in R$.

Отже, $\vec{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda = -2$.

Таким чином, ми маємо дві жорданові клітини розміру один $J_1(1)$, що відповідають власному числу $\lambda = 1$, та по одній жорданові клітині розміру 1 $J_1(2)$ та $J_1(-2)$, що відповідають власним числам $\lambda = 2$ та $\lambda = -2$ відповідно (див. таблицю 2 п. 2.1).

5) Запишемо матрицю перетворень $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Зробимо перевірку: $TJ_A = AT$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

$$TJ_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AT = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(-2) \oplus J_1(1),$$

матриця переходу до жорданового базису $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Задача 10.4.9. Знайти жорданову форму матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Розв'язування.

1) Знайдемо власні числа матриці A .

Складаємо характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -\lambda & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^3(\lambda + 2) = 0,$$

тобто корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ та $\lambda_4 = -2$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

2) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 1$.

$$\text{Запишемо } A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

При відновленні системи отримаємо:
$$\begin{cases} -x_1 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases} \quad \text{Тоді } x_1 = 0. \text{ Маємо}$$

одну вільну змінну (тобто, один власний вектор та два приєднаних). Нехай

$$x_2 = C, \text{ тоді } x_3 = -C \text{ та } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ -C \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C \in R. \quad \text{Отже, } \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{власний}$$

вектор, що відповідає числу $\lambda = 1$.

Знайдемо вектор $\vec{f}_2$, приєднаний до власного вектора $\vec{f}_1$.

Розв'яжемо неоднорідну систему $(A - E)\vec{x} = \vec{f}_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{При}$$

$$C = 1 \text{ маємо } \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{вектор, приєднаний до } \vec{f}_1.$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Знайдемо вектор $\vec{f}_3$, приєднаний до вектора $\vec{f}_2$.

Розв'яжемо неоднорідну систему $(A - E)\vec{x} = \vec{f}_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При $C = -1$ маємо $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ – вектор, приєднаний до $\vec{f}_2$.

3) Знайдемо власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda = -2$.

$$\text{Запишемо } A - \lambda E = A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A + 2E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

При відновленні системи отримаємо:
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Маємо одну вільну змінну (тобто, один власний вектор).

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Нехай $x_2 = C$, тоді $x_3 = -C$, $x_1 = -C$ та $\vec{x} = \begin{pmatrix} -C \\ C \\ -C \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \in R$.

Отже, при $C = -1$ маємо $\vec{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – власний вектор, що відповідає $\lambda = -2$.

Таким чином, ми маємо дві жорданові клітини: $J_3(1)$ та $J_1(-2)$ (див. таблицю 2 п. 4.3).

2) Запишемо матрицю перетворень $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Перевірка: $TJ_A = AT$.

$$TJ_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AT = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = J_3(1) \oplus J_1(-2), \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} -$$

матриця переходу до жорданового базису.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Задача 10.4.10. Знайти жорданову форму матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & -4 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

1) Знайдемо власні числа матриці A .

Складаємо характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 & 2 \\ 4 & -3-\lambda & -4 & -3 \\ -3 & 1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2)^2 = 0,$$

тобто корені характеристичного рівняння (власні числа матриці A):

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2 \text{ та } \lambda_3 = \lambda_4 = 1.$$

2) Знайдемо власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda = -2$.

$$\text{Запишемо } A - \lambda E = A + 2E = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & -4 & -3 \\ -3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

При відновленні системи отримаємо:
$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$
 Маємо одну вільну

змінну (тобто, один власний вектор). Нехай $x_4 = C$, тоді $x_2 = C$, $x_1 = C$ та

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ 0 \\ C \end{pmatrix}, \quad C \in R. \quad \text{Отже, при } C=1 \text{ маємо } \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{власний вектор, що}$$

відповідає числу $\lambda = -2$.

Знайдемо вектор $\vec{f}_2$, приєднаний до власного вектора $\vec{f}_1$.

Розв'яжемо неоднорідну систему $(A - E)\vec{x} = \vec{f}_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 2 & | & 1 \\ 4 & -1 & -4 & -3 & | & 1 \\ -3 & 1 & 4 & 2 & | & 0 \\ 1 & -3 & -3 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{При } C=1 \text{ маємо } \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{вектор, приєднаний до } \vec{f}_1.$$

3) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 1$.

$$\text{Запишемо } A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 & 2 \\ 4 & -4 & -4 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 & 2 & | & 0 \\ 4 & -4 & -4 & -3 & | & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & -3 & -3 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{При відновленні системи отримаємо: } \begin{cases} x_1 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \quad \text{Тоді } x_1 = 0. \text{ Маємо одну} \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

вільну змінну (тобто, один власний вектор). Нехай $x_2 = C$, тоді $x_3 = -C$ та

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ -C \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C \in R. \quad \text{Отже, при } C = -1 \text{ маємо } \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{власний вектор,}$$

що відповідає числу $\lambda = 1$. Знайдемо вектор $\vec{f}_4$, приєднаний до власного вектора $\vec{f}_3$. Розв'яжемо неоднорідну систему $(A - E)\vec{x} = \vec{f}_3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{При}$$

$$C = 1 \text{ маємо } \vec{f}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \text{вектор, приєднаний до } \vec{f}_3.$$

Таким чином, ми маємо дві жорданові клітини: $J_2(-2)$ та $J_2(1)$ (див. таблицю 2 п. 5.3).

$$4) \text{ Запишемо матрицю перетворень } T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевірка: $TJ_A = AT$.

$$TJ_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$AT = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & -4 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Відповідь: $J_A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J_2(-2) \oplus J_2(1), T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} -$

матриця переходу до жорданового базису.

Задача 10.4.11. Знайти жорданову форму матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

1) Знайдемо власні числа матриці A .

Складаємо характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda E) = 0$ або

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1-\lambda & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^3(\lambda + 2) = 0,$$

тобто корені характеристичного рівняння (власні числа матриці A):

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \text{ та } \lambda_4 = -2.$$

2) Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda = 1$.

Запишемо $A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Розв'яжемо однорідну

систему рівнянь $(A - E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

При відновленні системи отримаємо: $x_1 - x_4 = 0$ Тоді $x_1 = x_4$. Маємо три

вільні змінні (тобто, три власні вектори). Нехай $x_2 = C_1$, $x_3 = C_2$, $x_4 = C_3$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

Тоді $x_1 = C_3$ та $\vec{x} = \begin{pmatrix} C_3 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$, $C_1, C_2, C_3 \in R$. Отже, при $C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = 0$,

$C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 1$, $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 0$ маємо відповідно $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – власні вектори, що відповідають $\lambda = 1$.

3) Знайдемо власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda = -2$.

$$\text{Запишемо } A - \lambda E = A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему рівнянь $(A + 2E)\vec{x} = \vec{0}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

При відновленні системи отримаємо: $\begin{cases} x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ Маємо одну вільну

змінну (тобто, один власний вектор). Нехай $x_1 = C$, тоді $x_2 = -C$, $x_3 = C$ та

Розділ 2. Жорданова форма матриці

§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми

10.4. Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} C \\ -C \\ C \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C \in R. \quad \text{Отже, при } C=1 \text{ маємо } \vec{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{власний вектор, що}$$

відповідає числу $\lambda = -2$.

Таким чином, ми маємо чотири жорданові клітини: $J_1(1)$, $J_1(1)$, $J_1(1)$ та $J_1(-2)$ (див. таблицю 2 п. 4.1): $J_A = J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(-2)$.

4) Запишемо матрицю перетворень $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Перевірка: $TJ_A = AT$.

$$TJ_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AT = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – матриця переходу до

жорданового базису.

10.5. Завдання для самостійного розв'язування

Звести матрицю A до жорданової форми. Побудувати жорданів базис. Для контролю правильності побудови жорданового базису зробити перевірку: $AT = TJ_A$, де T – матриця переходу до жорданового базису, J_A – жорданова форма матриці.

№	Матриця A	Відповідь	
		Жорданова форма матриці J_A	Жорданів базис T
1.	$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$
2.	$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$
3.	$A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$
4.	$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$
5.	$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 12 & -7 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$
6.	$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
7.	$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
8.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми
 10.5. Завдання для самостійного розв'язування

9.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
10.	$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
11.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
12.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
13.	$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
14.	$A = \begin{pmatrix} -7 & -5 & 9 \\ 1 & -1 & -1 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
15.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
16.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
17.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$T = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & 0 & -2 \\ 3 & -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{8}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 & \frac{8}{3} \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми
10.5. Завдання для самостійного розв'язування

18.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{7}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
19.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
20.	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
21.	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$
22.	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
23.	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
24.	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми
10.5. Завдання для самостійного розв'язування

25.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
26.	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
27.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$
28.	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
29.	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
30.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

§ 11. Функції від матриць

11.1. Основні поняття

Нехай A – квадратна матриця порядку n , E – одинична матриця порядку n . Якщо $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ – многочлен степеня k , то значення цього многочлена від матриці A визначається так:

$$P(A) = a_0E + a_1A + \dots + a_kA^k. \quad (11.1)$$

Це означення природним чином поширюється і на аналітичні функції $f(x)$, які зображаються у вигляді суми степеневого ряду в деякому інтервалі $(-R, R)$:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + \dots, \text{ де } a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$$

Значення $f(A)$ в цьому випадку визначається **матричним рядом**

$$f(A) = f(0)E + \frac{f'(0)}{1!}A + \frac{f''(0)}{2!}A^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}A^k + \dots \quad (11.2)$$

Зрозуміло, що при такому визначенні $f(A)$ виникає питання про збіжність матричного ряду.

Твердження 11.1. Для того, щоб матричний ряд (11.2) був збіжним, необхідно і достатньо, щоб всі власні числа матриці A знаходились всередині круга збіжності ряду для $f(x)$, тобто $|\lambda_i| < R$.

Якщо функція $f(x)$ розкладається в степеневий ряд з нескінченним радіусом збіжності, то матричний ряд (11.2) буде збіжним при довільній матриці A . Прикладами таких функцій є e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$. Тому

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots,$$

$$\sin A = A - \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{5!}A^5 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k-1)!}A^{2k-1} + \dots,$$

$$\cos A = E - \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{4!}A^4 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}A^{2k} + \dots,$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 11. Функції від матриць

$$\operatorname{sh} A = A + \frac{1}{3!} A^3 + \frac{1}{5!} A^5 + \dots + \frac{1}{(2k-1)!} A^{2k-1} + \dots,$$

$$\operatorname{ch} A = E + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{4!} A^4 + \dots + \frac{1}{(2k)!} A^{2k} + \dots$$

Якщо матриця A має діагональний вигляд $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$

легко бачити, що $f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda_3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}.$

11.2. Значення функції $f(x)$ від клітинки Жордана

Покажемо, як можна знайти значення функції від жорданової клітинки другого порядку.

Нехай $J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ - клітинка Жордана порядку 2. Тоді

$$J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda E + I, \text{ де } I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Помітимо, що $I^2 = 0$.

$$\text{Тоді } (J_2(\lambda))^k = (\lambda E + I)^k = \lambda^k E + k\lambda^{k-1}I = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

Тоді, згідно з формулою (11.2)

$$f(J_2(\lambda)) = f(0)E + \frac{f'(0)}{1!} J_2(\lambda) + \frac{f''(0)}{2!} (J_2(\lambda))^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (J_2(\lambda))^k + \dots =$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 11. Функції від матриць

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} f(0) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{f'(0)}{1!} \lambda & \frac{f'(0)}{1!} \\ 0 & \frac{f'(0)}{1!} \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{f''(0)}{2!} \lambda^2 & \frac{f''(0)}{2!} 2\lambda \\ 0 & \frac{f''(0)}{2!} \lambda^2 \end{pmatrix} + \dots + \\
 &+ \begin{pmatrix} \frac{f^{(k-1)}(0)}{k!} \lambda^k & \frac{f^{(k-1)}(0)}{k!} k \lambda^{k-1} \\ 0 & \frac{f^{(k-1)}(0)}{k!} \lambda^k \end{pmatrix} + \dots = \\
 &= \begin{pmatrix} [f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \lambda + \frac{f''(0)}{2!} \lambda^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \lambda^k + \dots] & [\frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} 2\lambda + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} k \lambda^{k-1} + \dots] \\ 0 & [f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \lambda + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \lambda^k + \dots] \end{pmatrix} + \dots = \\
 &= \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Покажемо, як можна знайти значення функції від жорданової клітинки третього порядку.

$$\text{Нехай } J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + I, \text{ де } I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Помітимо, що } I^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I^3 = 0.$$

Тоді

$$(J_3(\lambda))^k = (\lambda E + I)^k = \lambda^k E + k \lambda^{k-1} I + \frac{k(k-1)}{2} \lambda^{k-2} I^2 = \begin{pmatrix} \lambda^k & k \lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} \lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k \lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$$

Тоді, згідно з формулою (11.2)

$$f(J_3(\lambda)) = f(0)E + \frac{f'(0)}{1!} J_3(\lambda) + \frac{f''(0)}{2!} (J_3(\lambda))^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (J_3(\lambda))^k + \dots =$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 11. Функції від матриць

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} f(0) & 0 & 0 \\ 0 & f(0) & 0 \\ 0 & 0 & f(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{f'(0)}{1!}\lambda & \frac{f'(0)}{1!} & 0 \\ 0 & \frac{f'(0)}{1!}\lambda & \frac{f'(0)}{1!} \\ 0 & 0 & \frac{f'(0)}{1!}\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{f''(0)}{2!}\lambda^2 & \frac{f''(0)}{2!}2\lambda & \frac{f''(0)}{2!} \\ 0 & \frac{f''(0)}{2!}\lambda^2 & \frac{f''(0)}{2!}2\lambda \\ 0 & 0 & \frac{f''(0)}{2!}\lambda^2 \end{pmatrix} + \dots = \\
 &= \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Тепер сформулюємо більш загальне твердження.

Твердження 11.2. Значення многочлена $f(x)$ від клітинки жордана

$$A = J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \text{ визначається формулою:}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \frac{f'''(\lambda)}{3!} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f'(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda) & \dots & \frac{f^{(n-4)}(\lambda)}{(n-4)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (11.3)$$

Твердження 11.3. Якщо A – клітинно-діагональна матриця

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}, \text{ то } f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(A_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(A_k) \end{pmatrix}. \quad (11.4)$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 11. Функції від матриць

Твердження 11.4. Якщо матриці A і B подібні, тобто $B = T^{-1}AT$ для деякої матриці T , то $f(B) = T^{-1} \cdot f(A) \cdot T$. Тоді $f(A) = T \cdot f(B) \cdot T^{-1}$.

Розв'яжемо декілька прикладів.

Задача 11.1. Знайти значення e^A , $\operatorname{sh} A$, $\cos A$ якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Матриця A є жордановою клітиною третього порядку

$$A = J_3(0). \text{ За формулою (11.3) маємо } f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Оскільки $(e^x)' = e^x$, $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$, тому

$$e^A = \begin{pmatrix} e^0 & e^0 & \frac{e^0}{2} \\ 0 & e^0 & e^0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix}, \quad e^0 = 1 \Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{sh} A = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} 0 & \operatorname{ch} 0 & \frac{\operatorname{sh} 0}{2} \\ 0 & \operatorname{sh} 0 & \operatorname{ch} 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sh} 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{sh} 0 = 0, \quad \operatorname{ch} 0 = 1, \quad \operatorname{sh} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\cos A = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 & \frac{-\cos 0}{2} \\ 0 & \cos 0 & -\sin 0 \\ 0 & 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{оскільки } \cos 0 = 1,$$

$$\sin 0 = 0.$$

Задача 11.2. Знайти значення e^A , $\sin A$, $\operatorname{ch} A$ якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Матриця A є жордановою клітиною четвертого порядку $A = J_4(0)$. За формулою (11.3) для четвертого порядку маємо:

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sin A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{ch} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.3. Знайти e^A , якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Знайдемо жорданову форму та жорданів базис матриці A .

Знайдемо корені характеристичного рівняння: $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -7 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$(4-\lambda)(-5-\lambda)+14=0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, тобто $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$. Оскільки корені різні, то жорданова форма матриці A буде діагональною:

$J_A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Матриця переходу T до діагонального вигляду складається

з власних векторів матриці A . Знайдемо власні вектори.

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 11. Функції від матриць

$$\lambda = -3: \begin{pmatrix} 7 & -7 & | & 0 \\ 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix}, C \neq 0.$$

Покладемо $C = 1$, тоді $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\lambda = 2: \begin{pmatrix} 2 & -7 & | & 0 \\ 2 & -7 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -7 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x_1 - 7x_2 = 0. \text{ Нехай } x_1 = 7C, \text{ тоді}$$

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 7C \\ 2C \end{pmatrix}, C \neq 0. \text{ При } C = 1 \text{ маємо } \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ є матрицею переходу до діагонального вигляду,

тобто $D = T^{-1}AT$. Тоді за твердженням 11.4 маємо $e^D = T^{-1}e^A T$. За

твердженням 3.3 отримаємо $e^D = \begin{pmatrix} e^{-3} & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}$. Остаточного знаходимо

$$e^A = T e^D T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3} & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 2e^{-3} - 7e^2 & 7e^2 - 7e^{-3} \\ 2e^{-3} - 2e^2 & 2e^2 - 7e^{-3} \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Тотожності від однієї змінної залишаються справедливими й для матриць, тобто для довільної матриці A справджується:

1. формули Ойлера: $e^{iA} = \cos A + i \sin A$, де $i^2 = -1$ (i – комплексна одиниця).

2. $\operatorname{ch} A = \frac{1}{2}(e^A + e^{-A})$, $\operatorname{sh} A = \frac{1}{2}(e^A - e^{-A})$.

3. тригонометричні формули: $\sin^2 A + \cos^2 A = I$,
 $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$, $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$.

Якщо формули стосуються двох змінних (різних матриць), то тотожності, можливо, не будуть виконуватися.

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 11. Функції від матриць

Задача 11.4. Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти e^A , e^B , e^{A+B} .

Чи справджується рівність $e^A e^B = e^{A+B}$?

Розв'язування. Матриця A діагональна, тому згідно (11.4) маємо

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow e^A = \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Матриця B є жордановою клітиною $B = J_2(-1)$. За формулою (11.3)

для другого порядку маємо $e^B = \begin{pmatrix} e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$.

4. $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C$. Знайдемо жорданову форму матриці C .

Спочатку знайдемо корені

характеристичного рівняння: $\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)\lambda = 0$. Маємо

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ – прості корені характеристичного рівняння. Тепер знайдемо власні вектори.

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} 1 & 1|0 \\ 0 & 0|0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1 \quad 1|0) \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}, c \neq 0.$$

$$\text{При } c = 1 \Rightarrow \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda = 0: \begin{pmatrix} 0 & 1|0 \\ 0 & 1|0 \end{pmatrix} \Rightarrow (0 \quad 1|0) \Rightarrow 0x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

Нехай $x_1 = c$, тоді $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, $c \neq 0$. При $c = 1$ маємо $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Отже, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ є матрицею переходу до діагонального вигляду, тобто

$$D = T^{-1}CT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ За твердженням 11.3 маємо } e^D = \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 11. Функції від матриць

Тоді з твердження 11.4 отримаємо $e^C = T e^D T^{-1}$:

$$e^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 1 \\ -e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-e \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Перемножимо тепер $e^A e^B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1} & e^{-1} \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e \end{pmatrix}$. Порівнюючи

результати з $e^C = e^{A+B} = \begin{pmatrix} 1 & 1-e \\ 0 & e \end{pmatrix}$ робимо висновок, що $e^A e^B \neq e^{A+B}$.

Зауваження. Рівність $e^A e^B = e^{A+B}$ виконується у випадку, коли матриці комутують, тобто $AB = BA$.

Задача 3.5. Обчислити A^{2021} , де матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Зведемо матрицю A до жорданової нормальної форми.

Характеристичний многочлен $\det(A - \lambda E) = 0$ або $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ має

корені $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Корені дійсні та різні, отже, матрицю можна

діагоналізувати. Діагональна форма матриці A : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Нагадаємо,

що $A^m = T J^m T^{-1}$, де J – діагональний вигляд матриці A , T – матриця переходу до діагонального вигляду.

Знайдемо власні вектори для відповідних власних чисел.

$$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ тобто } x_1 = x_2, \quad \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c, c \in R, c \neq 0, \quad \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 11. Функції від матриць

$$\lambda_2 = -1: \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ тобто } x_1 = 0, x_2 = d, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d, d \in R, d \neq 0,$$

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Матриця переходу до жорданового базису має вигляд:}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Тоді } T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Обчислимо } B^{2021} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{2021} = \begin{pmatrix} 1^{2021} & 0 \\ 0 & (-1)^{2021} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Тоді}$$

$$A^{2021} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } A^{2021} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 11. 6. Обчислити A^m , де матриця $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Зведемо матрицю A до жорданової нормальної форми. Коренями характеристичного многочлена

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \text{ будуть числа } \lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = 1.$$

Власне число $\lambda = 2$ має кратність 2.

$$\text{Маємо } B_1 = A - 2E = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \text{ ранг матриці } B_1 \text{ дорівнює } 1,$$

дефект дорівнює 2, що співпадає з кратністю кореня. Матрицю A можна діагоналізувати.

Оскільки $A^m = TJ^mT^{-1}$, то знайдемо матрицю J (жорданову нормальну форму матриці A) та матрицю переходу T .

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 11. Функції від матриць

Знайдемо власні вектори, які відповідають власному числу $\lambda_{1,2} = 2$.

Однорідна система лінійних рівнянь
$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 рівносильна

одному рівнянню $-3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$. Нехай $x_1 = c, x_2 = d$, тоді

$x_3 = -3c + 3d$. З фундаментальної системи розв'язків $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} c + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} d$ будемо

мати $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Знайдемо власні вектори, що відповідають власному числу $\lambda_3 = 1$.

Однорідна система лінійних рівнянь
$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 рівносильна

системі
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$
 або
$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$
. Нехай $x_3 = 1$, тоді $x_1 = 1, x_2 = 1$.

Отже, маємо $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Отже, діагональна форма матриці A має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
, матриця переходу до діагонального вигляду має вигляд:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
. Знайдемо J^m та T^{-1} .

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 11. Функції від матриць

$$J^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 1^m \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$A^m = TJ^mT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 1^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^m = \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 1 \\ 0 & 2^m & 1 \\ -3 \cdot 2^m & 3 \cdot 2^m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot 2^m + 3 & 3 \cdot 2^m - 3 & 1 - 2^m \\ -3 \cdot 2^m - 3 & 4 \cdot 2^m - 3 & -2^m + 1 \\ -3 \cdot 2^m + 3 & 3 \cdot 2^m - 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } A^m = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2^m + 3 & 3 \cdot 2^m - 3 & 1 - 2^m \\ -3 \cdot 2^m - 3 & 4 \cdot 2^m - 3 & -2^m + 1 \\ -3 \cdot 2^m + 3 & 3 \cdot 2^m - 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.7. Знайти $\sqrt{A}$, якщо матриця $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Зведемо характеристичний многочлен $\det(A - \lambda E) = 0$ або $\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$. $(3 - \lambda)(5 - \lambda) + 1 = (4 - \lambda)^2$. Цей многочлен має кратні дійсні корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. З'ясуємо, чи можна діагоналізувати матрицю. Для цього знайдемо геометричну кратність власного числа. Матриця $A - 4E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ має ранг 1, тому її дефект дорівнює також 1, матрицю діагоналізувати не можна. Маємо одну жорданову клітину другого порядку

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 11. Функції від матриць

$J = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Нагадаємо, що $f(A) = T \cdot f(J) \cdot T^{-1}$, де T – матриця переходу

до жорданового вигляду.

Знайдемо власні вектори для власного числа.

$$\lambda_1 = 4 \quad : \quad A - 4E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \text{ дає } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ тобто } x_1 = x_2,$$

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c, c \in R, c \neq 0, \quad \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо приєднаний вектор $\vec{f}_2$ із рівняння $(A - 4E)\vec{f}_2 = \vec{f}_1$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Маємо $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, тобто $x_2 = 1 + x_1$. Нехай $x_1 = 0$, тоді $x_2 = 1$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Матриця переходу до жорданового базису має вигляд $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо $\sqrt{J} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & \frac{1}{2\sqrt{4}} \\ 0 & \sqrt{4} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{\pm 1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. Тоді

$$\sqrt{A} = \frac{\pm 1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\pm 1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\pm 1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\sqrt{A} = \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$.

Задача 11.8. Знайти $\sqrt{A}$, якщо матриця $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Зведемо характеристичний многочлен $\det(A - \lambda E) = 0$

або $\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$. $(6-\lambda)(7-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$. Цей многочлен

має різні дійсні корені $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$ – матрицю можна діагоналізувати:

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 11. Функції від матриць

$J = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Нагадаємо, що $f(A) = T \cdot f(J) \cdot T^{-1}$, де T – матриця переходу

до жорданового базису.

Знайдемо власні вектори для відповідних власних чисел.

$$\lambda_1 = 9: A - 9E = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \text{ дає } \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ тобто } 3x_1 = 2x_2,$$

$$\vec{f}_1 = c \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, c \in R, c \neq 0, \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1 = 4: A - 4E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \text{ дає } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ тобто } x_1 = -x_2,$$

$$\vec{f}_2 = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in R, c \neq 0, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу до жорданового базису має вигляд $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді

$$T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо $\sqrt{J} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{9} & 0 \\ 0 & \sqrt{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 3 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$. Маємо 4 різних

варіанти, а саме $\sqrt{J} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \sqrt{J} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \sqrt{J} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$

$\sqrt{J} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Тоді

$$\sqrt{A} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{A} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 11. Функції від матриць

$$\sqrt{A} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -15 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{A} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ -3 & -13 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\sqrt{A} = \pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}, \sqrt{A} = \pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

Задача 11.9. Розв'язати рівняння $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Розв'язування. Завдання зводиться до знаходження $\sqrt{A}$. Зведемо характеристичний многочлен $\det(A - \lambda E) = 0$ або $\begin{vmatrix} 9 - \lambda & -7 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$

$(9 - \lambda)(1 - \lambda) = 0.$ Цей многочлен має різні дійсні корені $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1$ –

матрицю можна діагоналізувати: $J = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$ Тепер знайдемо матрицю T

переходу до жорданового базису.

Знайдемо власні вектори для відповідних власних чисел.

$\lambda_1 = 9: A - 9E = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array}$ дає $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array}$, тобто $x_1 = c, x_2 = 0,$

$\vec{f}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c \in R, c \neq 0, \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$\lambda_2 = 1: A - 4E = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array}$ дає $\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array}$, тобто $8x_1 = 7x_2,$ тоді

$\vec{f}_2 = c \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}, c \in R, c \neq 0, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$

Матриця переходу до жорданового базису має вигляд $T = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$ Тоді

$T^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Розділ 2. Жорданова форма матриці
§ 11. Функції від матриць

Обчислимо $\sqrt{J} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{9} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 3 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

Ми маємо 4 різні варіанти, а саме $\sqrt{J} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sqrt{J} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$\sqrt{J} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sqrt{J} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді

$$\sqrt{A} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 24 & -14 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{A} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -24 & 14 \\ 0 & -8 \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{A} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 24 & -28 \\ 0 & -8 \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{A} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -24 & 28 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A = \pm \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 24 & -14 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $A = \pm \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 24 & -28 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

Завдання для самостійного розв'язування

1. Знайти e^A , якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення $\sin A$, $\operatorname{sh} A$ та $\cos A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення $\sin A$ та $\operatorname{sh} A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти значення e^A , $\cos A$ та $\operatorname{ch} A$, якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Нехай $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Знайти e^A , e^B , e^{A+B} .

6. Знайти $\sqrt{A}$, якщо матриця $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

7. Знайти $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^5$.

8. Знайти $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^{12}$ та $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^m$.

9. Знайти $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^5$.

10. Знайти $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{2012}$ та $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^9$.

11. Знайти $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^6$, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^{10}$ та $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^9$.

12. Довести, що для комутуючих (переставних) матриць має місце рівність $e^A e^B = e^{A+B}$.

Розділ 2. Жорданова форма матриці
Завдання для самостійного розв'язування

Відповіді:

$$1. e^A = \frac{1}{2}e^2 \begin{pmatrix} e^4 + 1 & e^4 - 1 \\ e^4 - 1 & e^4 + 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. f(A) = f(2)\frac{1}{4}(4A - A^2) + f'(2)\frac{1}{2}(-8I + 6A - A^2) + \frac{1}{4}f(4)(4I - 4A + A^2).$$

$$3. f(A) = f(1)I + f'(1)(A - I) + \frac{1}{2}f''(1)(A - I)^2.$$

$$4. a) f(A) = f(2)(3I - A) + f(3)(A - 2I).$$

$$б) f(A) = f(-2)\frac{1}{15}(3I - 4A + A^2) + f(1)\frac{1}{6}(6I + A - A^2) + f(3)\frac{1}{10}(-2I + A + A^2)$$

$$в) f(A) = \frac{f(-2)}{12}(-2I + A + 2A^2 - A^3) + \frac{f(-1)}{6}(4I - 4A - A^2 + A^3) + \\ + \frac{f(1)}{6}(4I - 4A - A^2 + A^3) + \frac{f(1)}{6}(4I - 4A - A^2 - A^3) + \frac{f(2)}{12}(-2I - A + 2A^2 + A^3)$$

$$5. e^A = \operatorname{ch} 1 \cdot I + \operatorname{sh} 1 \cdot A, e^B = \cos 1 \cdot I + \sin 1 \cdot B, e^{A+B} = I + A + B.$$

$$6. \sqrt{A} = \pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}, \sqrt{A} = \pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7. \begin{pmatrix} 32 & 33 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$8. \begin{pmatrix} 2^{12} & \frac{2^{11}(1-2^{12})}{3} \\ 0 & (-4)^{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^m & \frac{2^{m-1}(1-2^m)}{3} \\ 0 & (-4)^m \end{pmatrix}.$$

$$9. \begin{pmatrix} 342 & 341 \\ 682 & 683 \end{pmatrix}.$$

$$10. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 256 & 256 \\ 768 & -256 \end{pmatrix}.$$

$$11. \begin{pmatrix} 85 & 21 \\ -84 & -20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1365 & 341 \\ -1364 & -340 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 683 & 171 \\ -684 & -170 \end{pmatrix}.$$

Додаток 1. Варіант контрольної роботи з теми «Лінійні оператори»

(45 хвилин; 15 балів)

Нехай $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ – деякий базис простору R^2 . Оператор A діє у просторі таким чином: якщо $\overline{x} = x_1 \overline{e_1} + x_2 \overline{e_2}$, то $A(\overline{x}) = (5x_1 - 9x_2)\overline{e_1} + 2x_2 \overline{e_2}$.

1. Показати, що оператор є лінійним. Написати матрицю A_e цього оператора в базисі $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ (3 бали).
2. Знайти образ вектора $\overline{b} = (2; 1)$ при перетворенні A (двома способами) (1 бал).
3. Знайти ядро та образ лінійного оператора A (2 бали).

Новий базис $\{\overline{f_1}, \overline{f_2}\}$ пов'язаний із старим формулами:

$$\overline{f_1} = \overline{e_1}, \quad \overline{f_2} = -3\overline{e_1} - \overline{e_2}.$$

4. Написати матрицю переходу від старого базису до нового та навпаки (2 бали).
5. Написати матрицю A_f оператора A в новому базисі (2 бали).
6. Скласти характеристичні многочлени матриць A_e та A_f . Переконатися, що ці многочлени збігаються (1 бал).
7. Знайти власні числа та власні вектори лінійного оператора A (3 бали).
8. Чи можна матрицю оператора звести до діагонального вигляду? Відповідь обґрунтуйте (1 бал).

**Додаток 2. Питання для самоперевірки та контролю
засвоєння знань з теми «Лінійні оператори»**

- 1) Що називається відображенням лінійних просторів?
- 2) Що називається оператором $\mathcal{A}$ лінійного простору?
- 3) Яке відображення називається лінійним?
- 4) Що називається лінійним перетворенням простору?
- 5) Що називається образом елемента x при відображенні $\mathcal{A}$?
- 6) Що можна сказати про образ лінійної комбінації векторів?
- 7) Що можна сказати про образи лінійно залежних векторів?
- 8) Чи можна стверджувати, що композиція лінійних відображень буде лінійним відображенням?
- 9) Що називається прообразом елемента $y = \mathcal{A}(x)$ при відображенні $\mathcal{A}$?
- 10) Наведіть приклади лінійних відображень.
- 11) Наведіть приклади відображень, які не є лійними.
- 12) Як визначається матриця лінійного оператора?
- 13) Як знайти матрицю лінійного оператора в заданому базисі?
- 14) Чи однозначно визначається матриця лінійного оператора?
- 15) За яким правилом знаходяться координати образу вектора $\bar{x}$ при лінійному відображенні?
- 16) Як зміниться матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$ при переході до іншого базису?
- 17) Як вводяться лінійні операції над операторами?
- 18) Що називається сумою лінійних відображень?
- 19) Що називається добутком лінійного оператора $\mathcal{A}$ на число λ .
- 20) Матриця суми лінійних операторів дорівнює...
- 21) Матриця добутку лінійного оператора $\mathcal{A}$ на число λ дорівнює...
- 22) Матриця добутку лінійних операторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ дорівнює...
- 23) Означення оберненого оператора до оператора $\mathcal{A}$.
- 24) Матриця оберненого оператора дорівнює...

*Додаток 2. Питання для самоперевірки та контролю засвоєння знань з теми
«Лінійні оператори»*

- 25) Нехай $\mathcal{A}$ – оператор повороту на 90° відносно початку координат в просторі $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ – оператор симетричного відображення відносно осі OY в просторі $\mathbb{R}^2$. Що таке $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{D} = \mathcal{A}\mathcal{B}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, $\mathcal{G} = 2\mathcal{A}$? Зобразити дії цих операторів на рисунках.
- 26) Що називається ядром лінійного оператора $\mathcal{A}$?
- 27) Як позначається ядро лінійного оператора $\mathcal{A}$?
- 28) Що називається образом лінійного оператора $\mathcal{A}$?
- 29) Як позначається образ лінійного оператора $\mathcal{A}$?
- 30) Властивості ядра лінійного оператора.
- 31) Властивості образу лінійного оператора.
- 32) Дати означення рангу та дефекту лінійного оператора $\mathcal{A}$.
- 33) Як можна визначити ранг лінійного оператора, якщо відомо ранг його матриці у певному базисі?
- 34) Як виражається розмірність простору L через розмірність ядра та образу лінійного оператора?
- 35) Що називається власним числом, власним вектором лінійного оператора?
- 36) Як пов'язані власні вектори оператора $\mathcal{A}$, що відповідають різним власним числам цього оператора?
- 37) Який лінійний оператор називається симетричним?
- 38) Який вигляд має матриця симетричного оператора в ортонормованому базисі?
- 39) Матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$ є симетричною. Що можна сказати про власні числа та власні вектори цього оператора?

Додаток 3. Таблиця 1. Види жорданових форм матриць третього порядку

№	Корені характеристичного рівняння	Алгебраїчна кратність $r(\lambda_i)$	Геометрична кратність $k(\lambda_i)$	Відповідні до λ_i вектори жорданового базису	Відповідні жорданові клітинки	J_A
Корені дійсні різні						
1	λ_1	1	1	$\vec{f}_1$ – власний	$J_1(\lambda_1)$	$J_A = J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) \oplus J_1(\lambda_3)$
	λ_2	1	1	$\vec{f}_2$ – власний	$J_1(\lambda_2)$	
	λ_3	1	1	$\vec{f}_3$ – власний	$J_1(\lambda_3)$	
Один корінь кратності 2, інший корінь простий						
2.1	$\lambda_1 = \lambda_2$	2	2	$\vec{f}_1, \vec{f}_2$ – власні	$J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1)$	$J_A = J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_3)$
	λ_3	1	1	$\vec{f}_3$ – власний	$J_1(\lambda_3)$	
2.2	$\lambda_1 = \lambda_2$	2	1	$\vec{f}_1$ – власний, $\vec{f}_2$ – приєднаний до $\vec{f}_1$	$J_2(\lambda_1)$	$J_A = J_2(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_3)$
	λ_3	1	1	$\vec{f}_3$ – власний	$J_1(\lambda_3)$	
Один корінь кратності 3						
3.1	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	3	3	$\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ – власні	$J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1)$	$J_A = J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1)$
3.2	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	3	2	$\vec{f}_1$ – власний, $\vec{f}_2$ – приєднаний до $\vec{f}_1$, $\vec{f}_3$ – власний	$J_2(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1)$	$J_A = J_2(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1)$
3.3	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	3	1	$\vec{f}_1$ – власний, $\vec{f}_2$ – приєднаний до $\vec{f}_1$, $\vec{f}_3$ – приєднаний до $\vec{f}_2$	$J_3(\lambda_1)$	$J_A = J_3(\lambda_1)$

Таблиця 2. Види жорданових форм матриць четвертого порядку

№	Корені характеристичного рівняння	Алгебраїчна кратність $r(\lambda_i)$	Геометрична кратність $k(\lambda_i)$	Відповідні до λ_i вектори жорданового базису	Відповідні жорданові клітинки	J_A
Корені дійсні різні						
1	λ_1	1	1	$\vec{f}_1$ – власний	$J_1(\lambda_1)$	$J_A = J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) \oplus J_1(\lambda_3) \oplus J_1(\lambda_4)$
	λ_2	1	1	$\vec{f}_2$ – власний	$J_1(\lambda_2)$	
	λ_3	1	1	$\vec{f}_3$ – власний	$J_1(\lambda_3)$	
	λ_4	1	1	$\vec{f}_4$ – власний	$J_1(\lambda_4)$	
Один корінь кратності 2 інші корені прості						
2.1	$\lambda_1 = \lambda_2$	2	2	$\vec{f}_1, \vec{f}_2$ – власні	$J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1)$	$J_A = J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_3) \oplus J_1(\lambda_4)$
	λ_3	1	1	$\vec{f}_3$ – власний	$J_1(\lambda_3)$	
	λ_4	1	1	$\vec{f}_4$ – власний	$J_1(\lambda_4)$	
2.2	$\lambda_1 = \lambda_2$	2	1	$\vec{f}_1$ – власний, $\vec{f}_2$ – приєднаний до $\vec{f}_1$	$J_2(\lambda_1)$	$J_A = J_2(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_3) \oplus J_1(\lambda_4)$
	λ_3	1	1	$\vec{f}_3$ – власний	$J_1(\lambda_3)$	
	λ_4	1	1	$\vec{f}_4$ – власний	$J_1(\lambda_4)$	
Два дійсних корені кратності 2						
3.1	$\lambda_1 = \lambda_2$	2	2	$\vec{f}_1, \vec{f}_2$ – власні	$J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1)$	$J_A = J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_3) \oplus J_1(\lambda_3)$
	$\lambda_3 = \lambda_4$	2	2	$\vec{f}_3, \vec{f}_4$ – власні	$J_1(\lambda_3) \oplus J_1(\lambda_3)$	

3.2	$\lambda_1 = \lambda_2$	2	1	$\vec{f}_1$ – власний, $\vec{f}_2$ – приєднаний до $\vec{f}_1$	$J_2(\lambda_1)$	$J_A = J_2(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_3) \oplus J_1(\lambda_3)$
	$\lambda_3 = \lambda_4$	2	2	$\vec{f}_3, \vec{f}_4$ – власні	$J_1(\lambda_3) \oplus J_1(\lambda_3)$	
3.3	$\lambda_1 = \lambda_2$	2	1	$\vec{f}_1$ – власний, $\vec{f}_2$ – приєднаний до $\vec{f}_1$	$J_2(\lambda_1)$	$J_A = J_2(\lambda_1) \oplus J_2(\lambda_3)$
	$\lambda_3 = \lambda_4$	2	1	$\vec{f}_3$ – власний, $\vec{f}_4$ – приєднаний до $\vec{f}_3$	$J_2(\lambda_3)$	
Два кореня, один з яких кратності 3						
4.1	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	3	3	$\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ – власні	$J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1)$	$J_A = J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_4)$
	λ_4	1	1	$\vec{f}_4$ – власний	$J_1(\lambda_4)$	
4.2	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	3	2	$\vec{f}_1$ – власний, $\vec{f}_2$ – приєднаний до $\vec{f}_1$, $\vec{f}_3$ – власний	$J_2(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1)$	$J_A = J_2(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_4)$
	λ_4	1	1	$\vec{f}_4$ – власний	$J_1(\lambda_4)$	
4.3	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	3	1	$\vec{f}_1$ – власний, $\vec{f}_2$ – приєднаний до $\vec{f}_1$, $\vec{f}_3$ – приєднаний до $\vec{f}_2$	$J_3(\lambda_1)$	$J_A = J_3(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_4)$
	λ_4	1	1	$\vec{f}_4$ – власний	$J_1(\lambda_3)$	

Один дійсний корінь кратності 4						
5.1	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$	4	4			Скалярна матриця
5.2	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$	4	3	$\vec{f}_1$ – власний,	$J_2(\lambda_1)$	$J_A = J_2(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1)$
				$\vec{f}_2$ – приєднаний до $\vec{f}_1$		
				$\vec{f}_3$ – власний	$J_1(\lambda_1)$	
				$\vec{f}_4$ – власний	$J_1(\lambda_1)$	
5.3	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$	4	2	$\vec{f}_1$ – власний,	$J_2(\lambda_1)$	$J_A = J_2(\lambda_1) \oplus J_2(\lambda_1)$
				$\vec{f}_2$ – приєднаний до $\vec{f}_1$		
				$\vec{f}_3$ – власний,	$J_2(\lambda_1)$	
				$\vec{f}_4$ – приєднаний до $\vec{f}_3$		
5.4	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$	4	2	$\vec{f}_1$ – власний,	$J_3(\lambda_1)$	$J_A = J_3(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_1)$
				$\vec{f}_2$ – приєднаний до $\vec{f}_1$,		
				$\vec{f}_3$ – приєднаний до $\vec{f}_2$		
				$\vec{f}_4$ – власний	$J_1(\lambda_1)$	
5.5	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$	4	1	$\vec{f}_1$ – власний,	$J_4(\lambda_1)$	$J_A = J_4(\lambda_1)$
				$\vec{f}_2$ – приєднаний до $\vec{f}_1$,		
				$\vec{f}_3$ – приєднаний до $\vec{f}_2$		
				$\vec{f}_4$ – приєднаний до $\vec{f}_3$		

Додаток 4. Питання для самоперевірки та контролю засвоєння знань

1. Що називається власним числом матриці A .
2. Що називається власним вектором, що відповідає власному числу λ .
3. Алгебраїчна та геометрична кратність власного числа.
4. Характеристичний многочлен матриці A .
5. Що називається жордановою клітинкою порядку k .
6. Що називається жордановим блоком, що відповідає власному числу λ .
7. Що називається жордановим базисом. Побудова жорданового базису.
8. Способи знаходження жорданової форми матриці.
9. Способи побудови жорданового базису.
10. Який вектор $\vec{x}$ називається приєднаним до вектора $\vec{f}$.
11. Формулювання теореми про жорданову форму матриці.
12. Відомо: геометрична кратність власного числа менша за алгебраїчну кратність власного числа. Що можна сказати про кількість власних векторів, що стосуються цього власного числа та кількість приєднаних до них векторів?
13. Відомо: геометрична кратність власного числа менша за алгебраїчну кратність власного числа. Що можна сказати про розмірність жорданової клітинки?
14. Якою є жорданова нормальна форма матриці порядку n у випадку всіх різних дійсних коренів?
15. Якою може бути жорданова нормальна форма матриці третього порядку у випадку двократного кореня?
16. Якою може бути жорданова нормальна форма матриці третього порядку у випадку трикратного дійсного кореня?
17. Якою може бути жорданова нормальна форма матриці четвертого порядку у випадку двох дійсних двократних коренів?
18. Якою може бути жорданова нормальна форма матриці четвертого порядку у випадку трикратного кореня (чотирикратного кореня)?

Література

1. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
2. **Гельфанд И.М.** Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971. – 271 с.
3. **Дискант В.І., Береза Л.Р., Грижук О.П., Захаренко Л.М.** Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. – К.: Вища шк., 2001. – 303 с. : іл.
4. **Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р.** Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 стр.
5. **Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І.** Алгебра і теорія чисел. Ч.1.– К.: Вища шк., 1983. – 232с.
6. **Калужнін Л.А., Вишенський В.А., Шуб Ц.О.** Лінійні простори. – К.: Вища шк., 1971. –343 с.
7. **Козак А.В., Пилиди В.С.** Линейная алгебра.– М.: Вузовская книга, 2005г. – 184с.
8. **Кострикин А.И., Манин Ю.И.** Линейная алгебра и геометрия. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 319 с. : іл.
9. **Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А.** Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.: Высш. школа, 1985. – 120с.
10. **Кряквин. В.Д.** Линейная алгебра в задачах и упражнениях /– М.: Вузовская Книга, 2006. – 589 с.
11. **Курош А.Г.** Курс высшей алгебры.– М.: Наука, 1968. – 432 с.
12. **Ланкастер П.** Теория матриц.– М.: Наука, 1973 . – 282 с.
13. **Мазорчук В.С.** Жорданова нормальна форма.– К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 1998. – 123 с.
14. **Мальцев А. И.** Основы линейной алгебры.– М.: Наука, 1975. – 400 с.
15. **Фаддеев Д.К., Соминский И.С.** Сборник задач по высшей алгебре.– М.: Наука, 1977. – 288 с.
16. **Фаддеев Д.К., Соминский И.С.** Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977
17. **Шилов Г.Е.** Конечномерные линейные пространства.– М.: Наука, 1969. – 432 с.

Зміст

Вступ	3
Умовні позначення	4
Розділ 1. Лінійні оператори	5
§ 1. Означення лінійного оператора	5
<i>Завдання для самостійного розв'язування</i>	<i>10</i>
§ 2. Матриця лінійного оператора	11
<i>Завдання для самостійного розв'язування</i>	<i>20</i>
§ 3. Матриця лінійного перетворення при переході до нового базису	22
<i>Завдання для самостійного розв'язування</i>	<i>23</i>
§ 4. Дії над лінійними операторами	25
<i>Завдання для самостійного розв'язування</i>	<i>31</i>
§ 5. Ядро та образ лінійного оператора	34
<i>Завдання для самостійного розв'язування</i>	<i>39</i>
§ 6. Власні числа та власні вектори лінійного оператора	41
<i>Завдання для самостійного розв'язування</i>	<i>48</i>
§ 7. Зведення матриці до діагонального вигляду	50
<i>Завдання для самостійного розв'язування</i>	<i>54</i>
§ 8. Самоспряжений оператор та його матриця	55
<i>Завдання для самостійного розв'язування</i>	<i>59</i>
Розділ 2. Жорданова форма матриці	61
§ 9. Власні числа та власні вектори матриці	61
<i>Завдання для самостійного розв'язування</i>	<i>75</i>
§ 10. Практикум по зведенню матриць до жорданової форми	
10.1. Жорданова форма матриці: основні поняття	76
10.2. Зведення до жорданової форми матриць другого порядку	78

10.3.	Зведення до жорданової форми матриць третього порядку	82
10.4.	Зведення до жорданової форми матриць четвертого порядку	95
10.5.	<i>Завдання для самостійного розв'язування</i>	<i>131</i>
§ 11.	Функції від матриць	135
11.1.	Основні поняття	135
11.2.	Значення функції $f(x)$ від клітинки Жордана	136
	<i>Завдання для самостійного розв'язування</i>	<i>151</i>
	Додатки	153
1.	Варіант контрольної роботи з теми «Лінійні оператори»	153
2.	Питання для самоперевірки та контролю засвоєння знань з теми «Лінійні оператори»	154
3.	Таблиця 1. Жорданові форми матриць третього порядку	156
3.	Таблиця 2. Жорданові форми матриць четвертого порядку	157
4.	Питання для самоперевірки та контролю засвоєння знань з теми «Жорданова форма матриці»	160
	Література	161