

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

ЗАТВЕРДЖЕНО

Вченою радою

Фізико-математичного факультету

Протокол №2 від 26 лютого 2019 р.

Голова вченої ради  В.В. Ванін

М.П.

ПРОГРАМА

додаткового випробування

для вступу на освітньо-професійну програму підготовки магістра

спеціальності 111 Математика

по спеціалізації Математичні та комп'ютерні
методи в моделюванні динамічних систем

Програму рекомендовано кафедрою

математичної фізики

Протокол №6 від 13 лютого 2019 р.

Завідувач кафедри  В.М. Горбачук

Київ – 2019

I. ВСТУП

В сучасній науці і техніці математичні методи дослідження, моделювання і проектування відіграють важливу роль. Важливим завданням курсу вищої математики є розвиток логічного і алгоритмічного мислення студентів, вміння проводити математичний аналіз прикладних задач. Метою вищої школи є також допомогти студентам оволодіти необхідним математичним апаратом, який дозволить їм аналізувати, моделювати, розв'язувати прикладні інженерні задачі із застосуванням комп'ютерних технологій; здатність самостійно розширювати свої математичні знання, формулювати і вирішувати нові математичні задачі.

Ця програма з вищої математики відображає нові вимоги, які ставить до математичної освіти XXI століття. Її характеризує прикладна направленість та орієнтація на використання математичних методів, особлива увага до ймовірно-статистичних методів в зв'язку з її практичною значимістю. Загальний курс математики становить фундамент математичної підготовки.

Дисципліни, зміст яких входить до програми атестаційного випробування, належать до циклу математичних дисциплін. Метою проведення даного випробування є перевірка базових навичок та вмінь вступників щодо розв'язання математичних задач, які є основою при дослідженні характеристик процесів, знання основних принципів і законів математичних дисциплін; здатності відтворювати математичні моделі, кількісно формулювати і вирішувати математичні задачі, наявність уявлення про межі застосування математичних моделей і теорій.

Вступники повинні з повним розумінням знати фундаментальні закони математики, а також методи їх досліджень, вміти застосовувати ці знання при розгляді окремих явищ, поєднувати їх суть з аналітичними співвідношеннями, вміти використовувати знання з курсів базових математичних дисциплін, при вивченні інших дисциплін, як загально-інженерних, так і за фахом.

Додаткове випробування відбувається у вигляді письмового екзамену. Кожен з вступників отримує білет, в якому міститься два теоретичних питання та дві задачі з наведених нижче дисциплін. На підготовку відповіді відводиться 90 хв. часу.

ОСНОВНИЙ ВИКЛАД

Програма додаткового випробування складена на основі програм таких дисциплін: «Варіаційне числення і методи оптимізації», «Математична логіка», «Топологія», «Диференціальна геометрія», «Теоретична механіка», «Динамічні системи», «Якісна теорія диференціальних рівнянь», «Спеціальні функції» – і містить такі розділи:

Розділ 1. Варіаційне числення і методи оптимізації

1. Зв'язок задач варіаційного числення із задачами оптимізації та оптимального керування.
2. Класичні задачі варіаційного числення та оптимізаційні задачі математичної фізики.
3. Методи побудови наближених розв'язків варіаційних задач у параметричних класах функцій.
4. Умови оптимальності та екстремальні розв'язки варіаційних задач. Рівняння Ейлера.
5. Варіаційні задачі із обмеженнями. Узагальнені теореми Каруша-Куна-Таккера.
6. Градієнтні методи побудови розв'язків ускладнених варіаційних задач.
7. Друга варіація і достатні умови екстремуму. Теорема Лежандра.
8. Прямі методи варіаційного числення. Методи Рітца і Гальоркіна.
9. Умови оптимальності розв'язків варіаційних задач для функцій багатьох змінних.
10. Умови оптимальності розв'язків варіаційних задач для функціоналів від функцій і їх похідних вищих порядків. Рівняння Ейлера-Пуассона.
11. Варіаційні принципи.
12. Задачі оптимального керування. Задачі багатокритеріальної оптимізації.

Розділ 2. Математична логіка

1. Висловлювання. Логічні операції над висловленнями. Таблиці істинності. Тавтології.
2. Рівносильність формул алгебри висловлювань. Кон'юнктивна та диз'юнктивна нормальні форми. Досконалі нормальні форми.
3. Булеві функції. Теорема про функціональну повноту числення висловлень. Логічне слідування на базі алгебри висловлювань.
4. Алфавіт числення висловлювань. Правила утворення складних формул. Побудова числення висловлювань. Несуперечність числення висловлювань.
5. Поняття предиката. Логічні операції над предикатами. Квантори. Логічно загальнозначущі формули логіки предикатів.
6. Аксиоми та правила виводу в логіці предикатів.

7. Рекурсивні функції. Примітивні та частково рекурсивні функції. Програмовані функції.
8. Машини з натуральнозначними регістрами. МНР-програми. МНР-обчислюваність.
9. Машини Тюрінга. Різновидності машин Тюрінга. МТ-обчислюваність.

Розділ 3. Топологія

1. Топологія та топологічні простори.
2. Метрика та метричні простори. Топологія, індукована метрикою.
3. Відкриті множини, околи, внутрішність, ізольовані точки.
4. Замкнені множини, замикання множини, граничні точки.
5. Підпростори топологічних просторів. Індукована топологія.
6. Неперервні відображення. Гомеоморфізми.

Розділ 4. Диференціальна геометрія

1. Крива, елементарна, проста, регулярна. Способи задання кривої. Особливі точки регулярних плоских кривих.
2. Асимптоти плоских кривих. Вектор-функція скалярного аргументу, властивості.
3. Дотична крива. Рівняння дотичних до кривої. Стична (із кривою) площина.
4. Стичні криві. Обвідна сім'я кривих.
5. Довжина дуги кривої: натуральна параметризація. Кривизна кривої.
6. Скрут кривої. Формула Френеля.
7. Теорема про повне завдання поверхні своєю кривизною та скрутом.
8. Плоскі криві. Еволюта, евольвента плоскої кривої.
9. Дотична площина та нормаль до поверхні. Поверхня стична із кривою.
10. Стична сфера. Стичний параболоїд: класифікація точок поверхні.
11. Обвідні сім'ї поверхонь. Обвідні сім'ї площин, залежних від одного параметра.
12. Перша квадратична форма. Довжина ліній поверхні. Кут між лініями на поверхні.

Розділ 5. Теоретична механіка

1. Закони Ньютона. Принцип Галілея. Принцип причинності. Межі застосовності класичної механіки. Різні види механік.
2. Описання положення матеріальної точки (частки). Ступені свободи системи. Описання положення системи N матеріальних точок. Зв'язки. Види зв'язків. Описання положення системи N матеріальних точок (часток) без зв'язків та зі зв'язками. Узагальнені координати.

3. Визначення механічної системи. Функція Лагранжа механічної системи. Принцип найменшої дії. Рівняння Лагранжа.
4. Загальні властивості функції Лагранжа.
5. Функція Лагранжа матеріальної точки. Інерціальні системи відліку. Принцип відносності Галілея.
6. Функція Лагранжа системи матеріальних точок.
7. Сила. Визначення сили. Кінетична та потенціальна енергія.
8. Функція Лагранжа системи у зовнішньому полі. Однорідне поле. Математичний маятник у полі сили тяжіння.
9. Інтеграли руху: енергія, імпульс, момент імпульсу. Їх адитивність.
10. Перехід від однієї інерціальної системи координат до іншої. Система центра інерції.
11. Закон перетворення енергії при переході до іншої інерціальної системи координат.
12. Закон перетворення моменту імпульсу при переході до іншої інерціальної системи координат.
13. Механічна подібність.
14. Теорема віріалу.
15. Описання еволюції механічних систем за допомогою інтегралів руху. Одновимірний рух.

Розділ 6. Динамічні системи

1. Поняття динамічної системи. Потоки та каскади. Неенергетичне означення консервативної та дисипативної системи.
2. Означення стійкості руху за Ляпуновим. Система рівнянь у варіаціях та система першого наближення.
3. Класифікація положень рівноваги лінійної системи диференціальних рівнянь другого порядку. Сигма - дельта діаграма стійкості.
4. Функції Ляпунова та їх властивості. Теорема Ляпунова про стійкість руху.
5. Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість. Теорема Четаєва.
6. Критерій А. Гурвіца. Умови асимптотичної стійкості положень рівноваги систем другого, третього та четвертого порядку.
7. Поняття орбітальної стійкості граничного циклу. Матриця монодромії. Мультиплікатори граничного циклу.
8. Грубі системи на площині. Типи траєкторій можливі в грубих системах.
9. Граничні множини дисипативних динамічних систем. Атрактори, репелери, сідлові множини.

10. Поняття біфуркації динамічної системи. Транскритична біфуркація положення рівноваги.
11. Біфуркації положень рівноваги динамічної системи (сідло-вузлова біфуркація та біфуркація вилка).

Розділ 7. Якісна теорія диференціальних рівнянь

1. Гармонічний (лінійний) осцилятор. Розв'язок. Повна енергія осцилятора. Потенціальна та кінетична енергія. Фазова площа. Фазові траєкторії. Напрямок руху зображуючої точки. Особливі точки. Точка рівноваги.
2. Рівняння $\frac{d^2u}{dt^2} - \alpha^2 u = 0$. Повна енергія руху. Потенціальна енергія системи. Особливі точки. Фазова площа та фазові траєкторії. Сепаратиси. Напрямок руху зображуючої точки. Розв'язки для траєкторій різного типу.
3. Гармонічний (лінійний) осцилятор з дисипацією. Розв'язки. Особливі точки.
4. Ангармонічний (нелінійний) осцилятор Дюфінга:
 $\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha u + \beta u^3 = 0$. Повна та потенціальна енергія. Випадки $\alpha > 0; \beta > 0$ (1) і $\alpha < 0; \beta < 0$ (2). Фазова площа та фазові траєкторії. Особливі точки. Розв'язки для сепаратрис.
5. Ангармонічний (нелінійний) осцилятор Дюфінга: $\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha u + \beta u^3 = 0$.
Повна та потенціальна енергія. Випадок $\alpha > 0; \beta < 0$. Фазова площа та фазові траєкторії. Особливі точки. Солітонні розв'язки для сепаратрис.
6. Ангармонічний (нелінійний) осцилятор Дюфінга: $\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha u + \beta u^3 = 0$.
Повна та потенціальна енергія. Випадок $\alpha < 0; \beta > 0$. Фазова площа та фазові траєкторії. Особливі точки. Солітонні розв'язки для сепаратрис.
7. Математичний круговий маятник: $\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 \sin u = 0$.
8. Граничний цикл. Автоколивання. Рівняння Ван дер Поля.
9. Еліптичні функції Якобі та їх властивості.
10. Точні розв'язки рівняння Дюфінга.
11. Наближені методи розв'язання диференціальних рівнянь. Метод прямого розкладання на прикладі слабонелінійного рівняння Дюфінга.
12. Покращена теорія збурень.
13. Метод Ван дер Поля.

Розділ 8. Спеціальні функції

1. **Рівняння Бесселя.** Розв'язання у вигляді узагальненого степеневого ряду.
2. Власні значення та власні функції рівняння Бесселя. Функція Бесселя I-го роду порядку ν . Рівномірна збіжність.
3. Властивості функції Бесселя I-го роду: рекурентні співвідношення, представлення для напівцілого порядку.
4. Умови ортогональності та нормування функцій Бесселя I-го роду.
5. **Рівняння Лежандра.** Розв'язання у вигляді степеневого ряду.
6. Власні значення та власні функції рівняння Лежандра. Поліноми Лежандра нульового порядку. Формула Родріга.
7. Властивості поліномів Лежандра. Рекурентні співвідношення.
8. Умови ортогональності та нормування поліномів Лежандра.
9. Приєднані поліноми Лежандра та їх властивості.
10. **Сферичні функції Лежандра.**
11. Кульові функції Лапласа.
12. **Поліноми Чебишова-Ерміта.** Розв'язання у вигляді степеневого ряду.
13. Власні значення та власні функції.
14. Умови ортогональності та нормування поліномів Чебишова-Ерміта

ПРИКІНЦЕВІ ПОЛОЖЕННЯ

Допоміжні матеріали.

На додатковому випробуванні не допускається користування допоміжною літературою.

Критерії оцінювання.

На додатковому випробуванні вступник отримує екзаменаційний білет, який складається з двох теоретичних питань з переліку зазначених вище розділів навчальних дисциплін, а також двох практичних завдань (задач).

Система оцінювання оцінює здатність вступника:

- узагальнювати отримані знання для вирішення конкретних завдань, проблем;
- застосовувати правила, методи, принципи, закони у конкретних ситуаціях;
- аналізувати і оцінювати факти, події та робити обґрунтовані висновки;
- інтерпретувати схеми, графіки, діаграми;
- викладати матеріал логічно, послідовно, з дотриманням вимог стандартів.

Відповідь на теоретичні питання – по 25 балів за кожне питання:

- повна відповідь з правильним формулюванням, доведеннями (не менше 90% потрібної інформації) – 20...25 балів,

- повна відповідь з неprincipовими неточностями у формулюванні, доведенні (не менше 75% потрібної інформації) – 15...19 балів
- неповна відповідь з неточностями (не менше 50% потрібної інформації) – 10...14 балів
- неповна відповідь з грубими помилками та (або) принциповими неточностями (менше 50%) потрібної інформації – 1...9 балів
- відсутність відповіді – 0 балів

Відповідь на практичне питання (задача) – по 25 балів за кожну задачу:

- повна відповідь з розрахунками, правильним результатом, поясненням (не менше 90% потрібної інформації) – 20...25 балів,
- повна відповідь з неprincipовими неточностями в розрахунках, поясненнях (не менше 70% потрібної інформації) – 15...20 балів
- неповна відповідь з неточностями (не менше 40% потрібної інформації) – 10...14 балів
- неповна відповідь з грубими помилками та (або) принциповими неточностями (менше 40%) потрібної інформації – 1...9 балів
- відсутність відповіді – 0 балів

Загальна оцінка за комплексне фахове випробування обчислюється як проста арифметична сума вагових балів чотирьох відповідей. Таким чином, за результатами комплексного фахового випробування вступник може набрати від 0 до 100 балів.

Залежно від загальної кількості суми отриманих балів вступнику, згідно критеріїв ECTS, виставляється оцінка:

Сума набраних балів	Оцінка
95...100	Відмінно
85...94	Дуже добре
75...84	Добре
65...74	Задовільно
60...64	Достатньо
Менше 60	Не задовільно

Типове завдання додаткового випробування

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ
СІКОРСЬКОГО»

Додаткове випробування

(для випускників ОКР „бакалавр” 6.040201 „Математика”)

Освітньо-професійна програма підготовки магістр
(назва ОПП)

Спеціальність 111 Математика
(код і назва спеціальності)

Навчальна дисципліна математика
(назва)

Екзаменаційний білет № 11

1. Крива, елементарна, проста, регулярна. Способи задання кривої. Особливі точки регулярних плоских кривих.
2. Метрика та метричні простори. Топологія, індукована метрикою.
3. Записати поліном Лежандра $P_5(x)$, користуючись формулою Родріга

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m.$$

4. Визначити тип будь-якого положення рівноваги наступної

$$\begin{aligned} & \bullet \\ & \text{динамічної системи} \quad \begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y - \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} y, \\ \bullet \\ \dot{y} = -x - y - \cos x^2 + 1 + 2 \sin y. \end{cases} \end{aligned}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: 2005.
2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
3. Шенфилд Дж. Математическая логика. – М.: Наука, 1975. – 528 с.
4. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: / В.И. Игошин. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 400 с.
5. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. – М.: Мир. – 1972.
6. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія та топологія. 1995.

7. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.-Л.: ГИФМЛ, 1949.
8. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория и приложения. – М.: Мир, 1986. – 243 с.
9. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
10. Парасюк І.О. Вступ до якісної теорії диференціальних рівнянь. – К.: ВПЦ Київ. ун-т, 2005.
11. Косевич А.М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. – К.: Наук.думка, 1989. – 304 с.
12. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
13. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984. – 384 с.
14. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.-Л.: ГИФМЛ, 1963. – 358 с.
15. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
16. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984. – 344 с.
17. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. – М.: Наука, 1990. – 528 с.
18. Сикорский Ю.С. Элементы теории эллиптических функций: с приложениями к механике. – М.: КомКнига, 2006. – 368 с.
19. Шалдырван В.А., Герасимчук В.С. Методы математической физики. – М.: Вузовская книга, 2006. – 512 с.
20. Кручкович Г.И., Мордасова Г.М., Подольский В.А. и др. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. – М.: Высшая школа, 1970. – 512 с.
21. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики. Т. I (кинематика, статика, динамика точки). 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 480 с.
22. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Наука, 1966. – 300 с.
23. Парс Л.А. Аналитическая динамика. – М.: Наука, 1971. – 636 с.
24. Уиттекер Э.Т. Аналитическая динамика. – М.: УРСС, 2004. – 504 с.
25. Голдстейн Г. Классическая механика. – М.: Гостехиздат, 1957. – 408 с.
26. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, под ред. Л.П. Питаевского. – 2007. – 224 с.
27. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – Ижевск: РХД, 1999. – 572 с.
28. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике, ч. 1. – Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2004. – 280 с.

29. Швець О.Ю. Динамічні системи: Стійкість динамічних систем (консп. лекцій). – Київ: НТУУ «КПІ». – 2011 р. – 51 с.
30. Краснопольская Т.С., Швець А.Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. – Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2008. – 280 с.

Розробники програми:

Професор каф. математичної фізики

д.ф.-м.н., проф.
Швець Олександр
Юрійович

Професор каф. математичної фізики

д.ф.-м.н., проф.
Герасимчук Віктор
Семенович