МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. І. Кушлик-Дивульська

Конспект лекцій

кредитного модуля ***«Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння»***

(ВИЩА МАТЕМАТИКА-2)

для напряму підготовки

6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа»

Київ-2015

Конспект лекцій кредитного модуля ***«Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння»*** (Вища математика-2) для напряму підготовки 6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа» для студ. Видавн.-полігр. ін.-ту / Уклад. О.І. Кушлик-Дивульська – К. 2015. – 241с.

Рекомендовано Вченою радою
Видавничо-поліграфічного інституту НТУУ «КПІ»

(Протокол № 11 від 27 квітня 2015р.)

Н а в ч а л ь н е   в и д а н н я

Конспект лекцій

кредитного модуля ***«Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння»***

(Вища математика-2)

для напряму підготовки

6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа»

для студентів Видавничо-поліграфічного інституту

Укладач: *Кушлик-Дивульська Ольга Іванівна*

Відповідальний редактор *С. Д. Івасишен*, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент *О. М. Величко*, д-р техн. наук, проф.
О.П. Коханівський, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Передмова

Мета цього навчального видання – допомогти студентам економічних та технічних спеціальностей у вивченні кредитного модуля «Вища математика-2», ознайомити їх із основними поняттями, методами, теоремами та формулами інтегрального числення та теорії диференціальних рівнянь, навчити набувати навички застосування теоретичного матеріалу в практичних задачах.

Конспект лекцій ***«Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння»*** призначений для студентів денної та заочної форм навчання Видавничо-поліграфічного інституту.

Навчальне видання складається із 18 лекцій, матеріал кожної з них сформовано за відповідним планом. Достатньо і доступно викладено основний теоретичний матеріал, передбачений навчальною та робочою навчальною програмами для напряму підготовки 6.051501 «Видавничо-поліграфічна справа». До кожної лекції розв’язано приклади, що сприяє більш повному оволодінню матеріалом. Також після кожної лекції є питання для самоконтролю, як теоретичного, так і практичного змісту, що підсилює ефективність опанування матеріалу студентом.

Додатки містять основні табличні формули диференціального та інтегрального числення функції однієї змінної.

Курс лекцій апробовано для студентів вказаного напряму підготовки, також для підготовки студентів за напрямами: 6.050503 «Машинобудування», 6.0502 «Менеджмент».

Автор дякує студентам економічної та технічних спеціальностей ВПІ за спільну працю і підготовку навчального видання.

Лекція 1. Первісна функція і невизначений інтеграл. Основні властивості інтеграла. Таблиця основних інтегралів

1.1. Первісна функції, її властивості.

1.2. Означення невизначеного інтеграла, його основні властивості.

1.3. Таблиця основних інтегралів.

1.4. Основні методи інтегрування.

1.4.1. Метод безпосереднього інтегрування та внесення під знак диференціала

1.4.2. Метод заміни змінної.

Початок інтегральному численню поклали задачі на обчислення площ плоских фігур, поверхонь та об'ємів тіл різної форми, а також задачі на знаходження сумарного шляху в нерівномірному русі.

Геометричні задачі розв'язували ще математики Стародавньої Греції. За допомогою розкладання фігур на нескінченно тонкі шари, на основі так званого методу вичерпування, було виведено формули для об'ємів піраміди, конуса, кулі.

Математики XVII – XVIII ст. ще не користувались поняттям границі. Вони говорили про «суму нескінченної кількості нескінченно малих доданків». Саме на такій основі німецький астроном, математик і механік Й.Кеплер (1571 – 1630) у творах «Нова астрономія» (1609) та «Стереометрія винних бочок» (!615) обчислив ряд площ (наприклад, площу еліптичного сектора, яка входить у формулювання 2-го закону Кеплера) та об'ємів різних тіл обертання. Ці дослідження продовжив італійський математик Б.Кавальєрі (1598 – 1647).

Інтегральне та диференціальне числення тривалий час розвивалися незалежно одне від одного. Англійський математик і філолог І. Барроу (1630 – 1677) відкрив зв'язок між задачами відшукання площі і проведення дотичної до кривої, тобто між операціями інтегрування та диференціювання. В загальному вигляді такий зв'язок було встановлено англійським фізиком і математиком Іссаком Ньютоном (1643–1727) та німецьким математиком і фізиком Г.Лейбніцом (1646 – 1716). Сучасне позначення інтеграла – $\int f(x)dx$ належить Лейбніцу, назва «інтеграл» – учневі Лейбніца, швейцарському математикові Я.Бернуллі (1654 – 1705).

Інтегрування елементарних функцій розглянуто Л. Ейлером у книзі «Інтегральне числення». Згодом з'ясувалося, що далеко не всі інтеграли від елементарних функцій виражаються через елементарні функції. Видатний російський математик П.Л. Чебишов (1821 – 1894) повністю дослідив це питання для деяких класів ірраціональних функцій (так званих диференціальних біномів).

Сучасне поняття визначеного інтеграла, як границі інтегральних сум, належить французькому математику О.Коші (1789 – 1857). На початку XIX ст. він же довів існування первісної для всіх неперервних функцій.

Значний внесок у вивчення поняття інтеграла є і вукраїнських математиків: М.В.Остроградського (1801 – 1889), Д.О.Граве (1863 – 1939), М.П.Кравчука (1892 – 1942) та інших.

1.1. Первісна функції, її властивості

Означення. Функція $y = F(x)$ називається *первісною* функції $y = f(x)$ на проміжку (a,b), якщо $y = F(x)$ диференційовна на (a,b) і $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in (a,b)$.

Наприклад, 1) $f(x) = \sin x, \quad F(x) = -\cos x$; 2) $f(x) = x, \quad F(x) = x^2/2 + 10$ або $F(x) = x^2/2 + C$, де $C = \text{const}$, оскільки $F'(x) = \left(x^2/2 + C\right)' = x, \quad x \in R.$

Задача знаходження первісної розв'язується неоднозначно, тобто в умові існування первісної для функції ця первісна є не єдиною. Дійсно, якщо $F(x)$ –

первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$, то функція $F(x)+C$, де C – довільна стала, також є первісною функції $f(x)$, оскільки $(F(x)+C)'=f(x)$ для будь-якого числа C.

Покажемо, що множина функцій $F(x)+C$, де $F(x)$ − деяка первісна функції $f(x)$, а C – довільна стала, вичерпує всі первісні функції $f(x)$.

Лема 1. Функція, похідна якої на деякому проміжку X дорівнює нулю, стала на цьому проміжку.

Доведення. Нехай у всіх точках проміжку X: $f'(x)=0$. Для будь-яких двох точок $x_1, x_2 \in X$ за теоремою Лагранжа одержимо

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1),\ x_1<c<x_2.$$

Оскільки $f'(c)=0$, то $f(x_2)=f(x_1)$, тобто $f(x)=C$, де C – деяке число.

Теорема. *Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на проміжку (a,b), то всяка інша первісна цієї функції на цьому ж проміжку має вигляд*

$$y=F(x)+C. \tag{1.1}$$

Доведення. Нехай $\Phi(x)$ – деяка інша, крім $F(x)$, первісна для функції $f(x)$, тобто $\Phi'(x)=f(x),\ x\in(a,b)$. Тоді для $\forall x\in(a,b)$:

$$\left[\Phi(x)-F(x)\right]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

а це означає, що $\Phi(x)-F(x)=C$. Отже,

$$\Phi(x)=F(x)+C.$$

З теореми випливає, що множина функцій $F(x)+C$, де $F(x)$ – одна із первісних функції $y=f(x)$, а C – довільна стала, визначає всю сукупність первісних заданої функції.

1.2. Означення невизначеного інтеграла, його основні властивості

Означення. Множину всіх первісних $F(x)+C$ на проміжку (a,b), де C – довільна стала для функції $y=f(x)$ називають ***невизначеним інтегралом функції*** $f(x)$ на цьому проміжку і позначають

$$\int f(x)dx = F(x)+C. \tag{1.2}$$

При цьому функцію $f(x)$ називають *підінтегральною функцією*, вираз $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл є множиною кривих, кожна з яких називається *інтегральною кривою* і утворюється зсувом однієї з них паралельно іншій із них відносно осі Oy.

Теорема. *Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, тоді для цієї функції існує первісна і, значить, невизначений інтеграл (1.2).*

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x)$.

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3. $\int dF(x) = F(x)+C$.

4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

5. Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\int f(u)du = \int dF(u) = F(u)+C.$$

6. $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

7. Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$, тоді

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Доведемо властивість 4.

Дійсно, нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Тоді $kF(x)$ – первісна функції $kf(x)$: $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$. Звідси випливає, що

$$k\int f(x)dx = k(F(x)+C) = kF(x)+C_1 = \int kf(x)dx,$$

де $C_1 = kC$.

1.3. Таблиця основних інтегралів

Відновлення функції за її похідною, або що те ж саме, знаходження невизначеного інтеграла за заданою функцією називається *інтегруванням.* Оскільки інтегрування – дія, обернена до диференціювання, то будь-яка формула, яка виражає похідну функції, тобто формула вигляду $F'(x) = f(x)$, може бути обернена (записана у вигляді інтегральної формули):

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

Використовуючи ці міркування, напишемо таблицю значень деяких невизначених інтегралів, які випливають з основних формул диференціального числення.

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C, \quad n \neq -1,$

$\left(\int dx = x+C, \quad \int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C, \quad \int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x}+C\right).$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C.$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

8. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.$

13. $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C.$

14. $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C.$

15. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C.$

16. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + C.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin\frac{x}{a} + C, \\ -\arccos\frac{x}{a} + C, \end{array}\right).$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C.$

19. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a} + C, \end{array}\right).$

20. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

21. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

22. $\int \sqrt{x^2 + a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

Зауваження. Правильність багатьох формул доводиться за допомогою диференціювання.

Доведемо формулу 20.

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)' = \frac{1}{2a}\Big[\ln|x-a| - \ln|x+a|\Big]' = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right] =$$

$$= \frac{1}{2a}\frac{x+a-(x-a)}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}, \text{ тобто } \int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Якщо первісна деякої елементарної функції $f(x)$ є елементарною функцією, то кажуть, що інтеграл $\int f(x)dx$ виражається через елементарні функції або, що цей інтеграл обчислюється. Зауважимо, що якщо операція диференціювання елементарних функцій знову приводить до елементарних функцій, то операція інтегрування вже може привести до неелементарних функцій, тобто функцій, які не виражаються через скінченне число арифметичних операцій і суперпозицій елементарних функцій.

Наприклад, доведено що наступні інтеграли не інтегруються в елементарних функціях:

$\int e^{-x^2}dx$ – інтеграл Пуассона, $\int\frac{dx}{\ln x}$ – інтегральний логарифм,

$\int\frac{\cos x}{x}dx$ – інтегральний косинус, $\int\frac{\sin x}{x}dx$ – інтегральний синус.

1.4. Основні методи інтегрування

1.4.1. *Метод безпосереднього інтегрування та внесення під знак диференціала*

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла та таблиці основних інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням.*

Приклад.

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=5\int\cos xdx+2\int dx-3\int x^2dx+$$

$$+\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{dx}{x^2+1}=5\sin x+2x-x^3+\ln|x|-4\mathrm{arctg}x+C.$$

Властивості 5, 7 використовують, вносячи неперервно-диференційовну функцію під знак диференціала. Наприклад,

$$\int\sin^3 x\cos xdx=\int\sin^3 xd(\sin x)=\frac{\sin^4 x}{4}+C;$$

$$\int x^2e^{x^3}dx=\frac{1}{3}\int e^{x^3}d\left(x^3\right)=e^{x^3}+C.$$

1.4.2. *Метод заміни змінної (метод підстановки)*

Теорема. *Нехай* $F(x)$– *первісна для функції* $f(x)$ *на проміжку* (a,b), *тобто* $\int f(x)dx=F(x)+C$ *і нехай функція* $x=\varphi(t)$ *визначена та диференційовна на проміжку* (α,β), *причому множина значень цієї функції є проміжок* (a,b). *Тоді справедлива формула*

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C,\quad t\in(\alpha,\beta). \tag{1.3}$$

Дійсно, з правила диференціювання складеної функції маємо

$$\left(F(\varphi(t))\right)'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

і справедливість формули випливає з властивості 1 невизначеного інтеграла.

Метод заміни змінної є одним із основних методів обчислення невизначених інтегралів.

Формула (1.3) називається ***формулою заміни змінної в невизначеному інтегралі.***

Приклад. $\displaystyle\int\frac{x^3}{(x-1)^2}dx=\begin{vmatrix}x=t+1\\ dx=dt\end{vmatrix}^*=\int\frac{(t+1)^3}{t^2}dt=\int\left(t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=$

$$= \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln \ |t| - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln \ |x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Зауваження. При заміні змінної в невизначеному інтегралі інколи зручніше задавати не x як функцію t, а, навпаки, задавати t як функцію x.

Завдання для самоконтролю

1. Пояснити на прикладі обчислення первісної функції.

2. Означити невизначений інтеграл та побудувати для обраної функції декілька інтегральних кривих.

3. Довести формули 11, 12, 17, 18, 19, 21, 22 із таблиці інтегралів.

4. Обчислити: 1. 1) $\int \left(3x + \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + \cos 4x + \frac{1}{x^2+16} \right) dx$; 2) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

2. 1) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$; 2) $\int \frac{x^3}{x^4+2} dx$; 3) $\int \sqrt[4]{\sin x} \cos x dx$ (в п.2 знайти інтеграли внесенням під знак диференціала та за допомогою заміни змінної).

Лекція 2. Інтегрування частинами. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен. Прості раціональні дроби

2.1. Формула інтегрування частинами, основні випадки її використання.

2.2. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен.

2.3. Інтегрування простих раціональних дробів.

2.1. Формула інтегрування частинами, основні випадки її використання

Нехай $u = u(x), v = v(x) -$ функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді для диференціала їхнього добутку маємо

$$d(uv) = vdu + udv, \quad udv = d(uv) - vdu.$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, дістанемо

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

або

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{2.1}$$

Формулу (2.1) називають ***формулою інтегрування частинами***.

Підінтегральний вираз udv можна розбити на множники u та dv кількома способами, тому вміння розбивати підінтегральну функцію, щоб інтеграл справа був простішим, ніж інтеграл зліва, виробляється в процесі обчислення інтегралів. Вкажемо деякі типи інтегралів, які зручно обчислювати даним методом.

1) Інтеграли виду

$$\int P(x)e^{kx}dx, \quad \int P(x)a^{x}dx, \quad \int P(x)\sin kxdx, \quad \int P(x)\cos kxdx,$$

де $P(x) -$ многочлен, а $k -$ дійсне число. В даних інтегралах $u = P(x),$ оскільки для $du = P'(x)dx$ порядок многочлена на одиницю зменшується. Відповідно до вищевказаних інтегралів приймають

$$dv=\begin{Bmatrix} e^{kx}dx,\ a^x dx \\ \sin kxdx, \\ \cos kxdx \end{Bmatrix}, \text{ тоді } v=\begin{Bmatrix} {}^1\!/_k\, e^{kx},\ {}^1\!/_{\ln a}\, a^x \\ -{}^1\!/_k \cos kx, \\ {}^1\!/_k \sin kx \end{Bmatrix}.$$

2) Інтеграли виду $\int P(x)\ln^n xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)\mathrm{arctg}xdx$, $\int P(x)\mathrm{arcctg}xdx$, де $n\in N$.

У цих інтегралах беруть $dv=P(x)dx$, відповідно, для першого інтеграла $u=\ln^n x, du=n\ln^{n-1}x\cdot\frac{1}{x}dx$, тобто зменшується степінь логагифма; для решти інтегралів

$$u=\begin{Bmatrix} \arcsin x, \arccos x \\ \mathrm{arctg}x, \mathrm{arcctg}x \end{Bmatrix},\quad du=\begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \frac{1}{1+x^2}, \quad -\frac{1}{1+x^2} \end{Bmatrix}dx.$$

2) Інтеграли виду $\int e^{\alpha x}\sin\beta xdx$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta xdx$, $\int a^x\sin\beta xdx$, $\int a^x\cos\beta xdx$, де $\alpha,\beta-$дійсні числа. Тут двічі застосовують формулу інтегрування частинами, рівносильно беручи перший або другий множник за u чи dv, оскільки після двохкратного застосування формули утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять інтеграл.

Приклади використання формули інтегрування частинами

Приклад 1. $\int \mathrm{arctg}\,xdx.$

$$\int \mathrm{arctg}\,xdx=\left| \begin{matrix} u=\mathrm{arctg}\,x, du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx, \int dv=\int dx, v=x \end{matrix} \right|^* = x\,\mathrm{arctg}\,x-\int x\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{1+x^2}=x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

Приклад 2. $\int xe^x dx.$

$$\int xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{matrix} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Приклад 3. $\int x \ln x dx.$

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Інколи для обчислення інтеграла формулу інтегрування частинами приходиться застосовувати декілька разів.

Приклад 4. $\int x^2 \cos x dx.$

$$\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{matrix} \right| = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{matrix} \right| = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\int \cos x dx = x^2 \sin x +$$

$$+2x \cos x - 2\sin x + C.$$

Для інтегралів виду 3) після дворазового застосування формули інтегрування частинами, приходимо в правій частині до виразу, який містить початковий інтеграл, тобто одержуємо рівняння з шуканим інтегралом як невідомим.

Приклад 5. $\int e^{ax} \sin bx dx.$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \left| \begin{matrix} u = e^{ax}, du = ae^{ax} dx \\ dv = \sin bx dx, v = -\dfrac{1}{b} \cos bx \end{matrix} \right| = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx +$$

$$+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx=\begin{vmatrix} u=e^{ax}, du=ae^{ax}dx \\ dv=\cos bxdx, v=\dfrac{\sin bx}{b}\end{vmatrix}=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+$$

$$+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bxdx;$$

в результаті одержано рівняння відносно невідомого інтеграла $\int e^{ax}\sin bxdx$:

$$\int e^{ax}\sin bxdx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bxdx.$$

Звідси, $\int e^{ax}\sin bxdx=\dfrac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C$.

2.2. Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен

2.2.1. *Обчислення* $I=\int\dfrac{dx}{ax^2+bx+c}$.

Розглядаємо $I=\int\dfrac{dx}{ax^2+bx+c}$, де $a, b, c-$дійсні числа.

Попередньо перетворимо тричлен: $ax^2+bx+c=a\left[x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right]=$

$$=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{2a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right],$$

де позначили $\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{4a^2}=\pm k^2$. Знак плюс або мінус залежить від коренів квадратного тричлена ($D>0-$корені дійсні і знак мінус, $D<0-$ дійсних коренів немає і знак плюс). Таким чином,

$$I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]}.$$

Зробивши підстановку $x+\dfrac{b}{2a}=t,\, dx=dt$, отримують $I=\dfrac{1}{a}\int\dfrac{dx}{t^2\pm k^2}$, які є табличними (формули 19, 20 таблиці інтегралів).

2.2.2. *Обчислення* $I=\int\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx, A\neq 0.$

Розглядаємо інтеграл більш загального вигляду $I=\int\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$, де $A, B-$також дійсні числа. Виконуємо тотожні перетворення підінтегральної функції $I=\int\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\dfrac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx=\dfrac{A}{2a}\int\dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=I_1+I_2,$$

де I_2 проаналізовано в п. 1. В першому інтегралі виконуємо заміну змінної $ax^2+bx+c=t,\quad (2ax+b)dx=dt$, тоді

$$\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|ax^2+bx+c\right|+C.$$

2.2.3. Інтегрування виразів вигляду $\dfrac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, A\neq 0$ та $A=0.$

Розглядаємо $I=\int\dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.За допомогою перетворень, аналогічних в п.1, даний інтеграл зводиться в залежності від знаку числа a до табличних інтегралів

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}},\ a>0 \text{ та } \int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}},\ a<0.$$

Інтеграл $\int\dfrac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ обчислюється за допомогою аналогічних перетворень в п.2:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Тоді для першого інтеграла $ax^2+bx+c=t, \quad (2ax+b)dx=dt$, тому

$$\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{ax^2+bx+c}+C,$$

а другий інтеграл розглянуто в п.3.

2.3. Інтегрування простих раціональних дробів

Означення. Відношення двох многочленів $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ вигляду $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ називають *раціональною функцією* або *раціональним дробом* за умови $P_m(x)\neq 0, Q_n(x)\neq 0$.

Означення. Раціональний дріб називають *правильним*, якщо степінь чисельника менший степеня знаменника $m<n$; в іншому випадку $(m\geq n)$ раціональний дріб називають *неправильним*.

Якщо дріб неправильний, то, виконавши ділення, дістанемо правильний дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W_k(x)+\dfrac{R_p(x)}{Q_n(x)}$, причому $p<n$.

Означення. Елементарними раціональними дробами називаються правильні раціональні дроби таких чотирьох видів:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{(x-a)^n}, \quad n=2,3,\ldots;$

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \quad n\geq 2,$

де A, a, M, N, p, q – дійсні числа, а тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів, тобто $D=p^2-4q<0$.

Інтегрування дробів I– III типу є достатньо простим.

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C.$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$.

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| +$$

$$+ \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Більш складнішим є інтегрування дробу IV -го типу.

Виконуємо спочатку аналогічні перетворення, як для III-го типу:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} =$$

$= \frac{M}{2}I + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_k$, тоді для першого інтеграла

$$I = \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx = \left|\begin{matrix} x^2+px+q=t, \\ (2x+p)dx = dt \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}dt = \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C.$$

Для другого інтеграла

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \left|\begin{matrix} x+\frac{p}{2} = t,\ dx = dt \\ q-\frac{p^2}{4} = m^2 \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} =$$

$$= \frac{1}{m^2}\int \frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k}dt = \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}dt.$$

Перетворюємо тепер другий інтеграл і інтегруємо його частинами:

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^k}=\int\frac{t\cdot tdt}{(t^2+m^2)^k}=\left|\begin{array}{l} u=t,\, du=dt \\ dv=\dfrac{tdt}{(t^2+m^2)^k},\, v=-\dfrac{1}{2(k-1)}\cdot\dfrac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}} \\ \int udv=uv-\int vdu \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2(k-1)}\left[t\cdot\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right].$$

Підставляємо даний вираз у I_k.

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}+\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right]=$$

$$=\frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

Отримали $I_k=\dfrac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}}+\dfrac{2k-3}{2m^2(k-1)}I_{k-1}$. Продовжуючи, отримують відомий табличний інтеграл

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}\mathrm{arctg}\frac{t}{m}+C.$$

Завдання для самоконтролю

1. Обчислити інтегруванням частинами:

1) $\int(x^2+1)\cos 3xdx$; 2) $\int x^3\ln xdx$; 3) $\int 3^x\sin 4xdx$; 4) $\int\mathrm{arctg}xdx$; 5) $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

2. Зінтегрувати вирази із квадратними тричленами:

1) $\int\dfrac{x+3}{x^2-2x-5}dx$; 2) $\int\dfrac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$.

3. Звести дроби до правильних, виділивши цілу частину:

1) $\dfrac{x^2+3}{x^2-5}$; 2) $\dfrac{x^4}{x^2-1}$; 3) $\dfrac{x^5}{x-5}$.

4. Означити елементарні раціональні дроби та на прикладах пояснити інтегрування дробів I – III типу.

5. Обчислити $\int\dfrac{1}{(x^2+9)^3}dx.$

Лекція 3. Комплексні числа. Деякі відомості з теорії раціональних дробів

3.1. Комплексні числа.

3.1.1. Основні поняття та означення.

3.1.2. Геометричне зображення комплексного числа.

3.1.3.Тригонометрична форма запису комплексного числа.

3.1.4. Натуральний степінь комплексного числа. Корінь *n*-го степеня з комплексного числа.

3.2. Многочлени.

3.3. Многочлен з дійсними коефіцієнтами.

3.4. Раціональні дроби. Розклад правильних раціональних дробів на елементарні.

3.1. Комплексні числа

Комплексні числа не є числами в елементарному значенні цього слова, що застосовуються при підрахунках і вимірюваннях, а є математичними об'єктами, які визначаються поданими нижче властивостями.

3.1.1. *Основні поняття та означення*

Означення. Комплексним числом називається впорядкована пара $z=\left(x,y\right)$ двох дійсних чисел x і y, дії над якими виконуються наступним чином:

$$z_1+z_2=\left(x_1+x_2,y_1+y_2\right) \qquad (3.1)$$

$$z_1\cdot z_2=\left(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1\right) \qquad (3.2)$$

Множину комплексних чисел позначають C.

Комплексне число позначається символом $a + bi$, де a і b − дійсні числа, які називаються відповідно *дійсною і уявною частинами* комплексного числа $a+ib$, а символ i, визначений умовою $i^2=-1$, називається *уявною одиницею.*

Звичайно комплексне число $a+ib$ позначають однією буквою (найчастіше z): $z=a+ib$.

Дійсну і уявну частини комплексного числа $z=a+ib$ позначають $Re\ z$ і $Im\ z$ відповідно:

$$a = Re\ z, \quad b = Im\ z.$$

Означення. Комплексні числа $z_1=a_1+b_1 i$ і $z_2=a_2+b_2 i$ вважаються *рівними*, якщо рівні їхні дійсні й уявні частини $a_1=a_2,\ b_1=b_2$.

Комплексне число $z=a+ib$ вважається рівним нулю, якщо його дійсна і уявна частини дорівнюють нулю ($a=b=0$). Комплексне число $z=a+ib$ за $b=0$ вважається таким, що збігається з дійсним числом $a(a+0i=a)$, а для $a=0$ вважається *суто уявним* і позначається $ib,\quad \left(0+ib=ib\right)$.

Означення. *Сумою* комплексних чисел $z_1=a_1+ib_1$ та $z_2=a_2+ib_2$ є комплексне число z, дійсна частина якого дорівнює сумі дійсних частин, а уявна частина − сумі уявних частин, тобто

$$z=(a_1+a_2)+i(\,b_1+b_2\,). \tag{3.3}$$

Про число z кажуть, що його дістали внаслідок додавання комплексних чисел z_1 та z_2 і записують $z=z_1+z_2$. Числа z_1 і z_2 називають *доданками.*

Властивості операції додавання комплексних чисел:

1) асоціативність: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$;

2) комутативність: $z_1+z_2=z_2+z_1$.

Комплексне число $-a-ib$ називається *протилежним* комплексному числу $a+ib$. Комплексне число, протилежне комплексному числу z, позначається $-z$. Сума комплексних чисел z і $-z$ дорівнює нулю $(z+(-z)=0)$.

Означення. *Різниця* комплексних чисел $z_1=a_1+ib_1$ та $z_2=a_2+ib_2$ є комплексне число z, що є сумою числа z_1, і числа, протилежного z_2

$$z=z_1+(-z_2)=(\,a_1-a_2)+i(\,b_1-b_2\,),$$

тобто комплексним числом, дійсна і уявна частини якого дорівнюють відповідно різниці дійсних і уявних частин зменшуваного і від'ємника. Про число z кажуть, що його дістали внаслідок віднімання комплексного числа z_2 від комплексного числа z_1, і записують $z = z_1 - z_2$.

Означення. *Добутком* комплексних чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ є комплексне число:

$$z = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 +_1 a_2 b_1). \qquad (3.4)$$

Про число z кажуть, що його дістали внаслідок множення комплексного числа z_1 на комплексне число z_2, і записують $z = z_1 z_2$. Числа z_1 і z_2 називають *співмножниками.*

Властивості операції множення комплексних чисел:

1) асоціативність: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$;

2) комутативність: $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

Означення. *Часткою* двох комплексних чисел z_1 і z_2 $(z_2 \neq 0)$ є таке комплексне число z, що $z_1 = z z_2$. Частку комплексних чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ обчислюють за формулою

$$z = \frac{a_1 a_2 - b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \qquad (3.5)$$

Доведення формули (3.5):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)\cdot(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)\cdot(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Додавання і множення комплексних чисел зв'язані правилом, яке називається *законом дистрибутивності* множення відносно додавання:

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Означення. Число $\sqrt{a^2 + b^2}$ називається *модулем* комплексного числа $z = a + ib$.

Модуль комплексного числа позначають $|z|$. Модулі двох будь-яких комплексних чисел z_1 і z_2 (для частки вважається, що $z_2 \neq 0$) задовольняють співвідношення:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||,$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad |z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|, \quad |z^n| = |z|^n = |\bar{z}|^n.$$

Означення. Комплексне число $a - ib$ називається *комплексно спряженим* з числом $z = a + ib$ і позначають $\bar{z}$.

3.1.2. *Геометричне зображення комплексного числа*

Подібно до того, як дійсні числа можна зображати точками числової прямої, комплексні числа можна зображати точками площини. Можливість такого зображення ґрунтується на ототожненні множини комплексних чисел множині пар дійсних чисел *(a,b),* які в прямокутній системі координат *Oxy* можна трактувати як координати точок площини.

Далі, з кожною точкою *A* координатної площини *Oxy* можна зв'язати вектор $\overrightarrow{OA}$, який виходить з початку координат і закінчується у точці *A*.

Тому комплексні числа допускають не одну геометричну інтерпретацію: кожне комплексне число $a + ib$ можна геометричне інтерпретувати як вектор $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a,b) (рис.3.1). Координати вектора $\overrightarrow{OA}$ при цьому будуть такими ж, як і координати точки *A,* а саме (*a;b).*

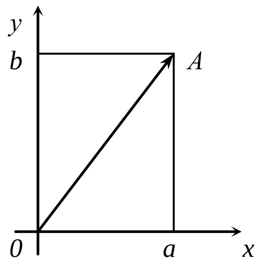

Рис. 3.1. Зображення комплексного числа.

3.1.3. *Тригонометрична форма запису комплексного числа*

Крім алгебраїчної форми запису комплексного числа застосовують також іншу, яка називається *тригонометричною.* Нехай комплексне число $z = a + ib \neq 0$ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a,b)(рис.3.1.).

Позначимо довжину вектора $\overrightarrow{OA}$ буквою *r*: $r = |\overrightarrow{OA}|$, а кут, який він утворює з додатним напрямом осі *Ox*, через φ (кут φ вважається виміряним у радіанах).

Скориставшись означеннями функцій $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$:

$$\sin\varphi = b / r, \quad \cos\varphi = a / r,$$

комплексне число $z = a + ib$ можна записати у вигляді

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{3.6}$$

де $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а кут φ позначається з умов

$$\sin\varphi = b \Big/ \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = a \Big/ \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{3.7}$$

Вираз (3.6) має назву *тригонометрична форма* запису комплексного числа. Дійсне число *r* є модулем комплексного числа і позначається $|z|$, а кут φ, виміряний в радіанах, його аргументом і позначається $\mathrm{Arg}z$.

Якщо комплексне число не дорівнює нулю, то модуль його додатний; якщо ж $z = 0$, тобто $a = b = 0$, то й модуль його дорівнює нулю. Модуль будь-якого комплексного числа визначено однозначно.

Якщо комплексне число не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3.7) з точністю до кута, кратного 2π. Якщо $z = 0$, тоді $r = 0$ і аргумент комплексного числа, що дорівнює нулю, не визначено.

Звичайно, для того, щоб уникнути неоднозначності, яка виникає при обчисленні аргументу комплексного числа, використовують поняття *головного значення* аргументу комплексного числа (позначення $\arg z$), вважаючи, що $\arg z \in (-\pi; \pi]$. Аргумент комплексного числа відповідає співвідношенню: $\mathrm{Arg}z = \arg z + 2\pi k$, $k \in Z$ (Z – множина цілих чисел).

Нехай z_1 і z_2 – два комплексні числа, що відмінні від нуля, записано в тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Добутком двох комплексних чисел z_1 і z_2 є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів співмножників, а аргумент − сумі аргументів співмножників:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \qquad (3.8)$$

Доведення формули (3.8):

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 -$$
$$-\sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+$$
$$+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

Вектор, що зображує добуток комплексних чисел z_1 і z_2, дістаємо поворотом вектора $\bar{z}$ проти годинникової стрілки на кут, що дорівнює φ_2, і розтягом його в $|z_2|$ раз (для випадку $|z_2|>1$ див. рис.3.2).

Частка двох комплексних чисел z_1 і z_2, що не дорівнюють нулю, є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого і дільника, а аргумент – різниці аргументів діленого і дільника:

$$z_1 / z_2 = r_1 / r_2[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \qquad (3.9)$$

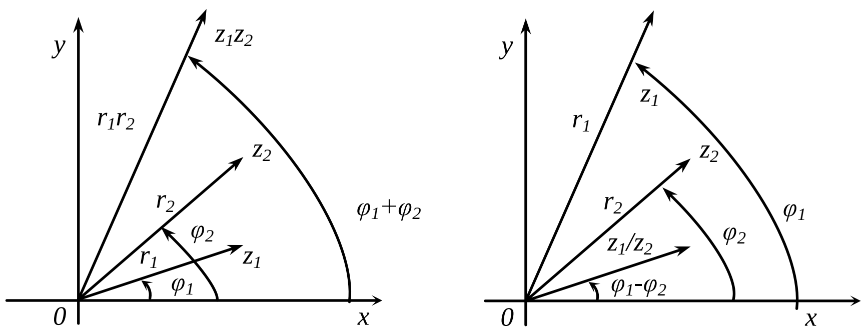

Рис.3.2. Множення і ділення комплексних чисел.

Вектор, що зображує частку двох комплексних чисел z_1 і z_2, дістаємо поворотом вектора, який зображує комплексне число z_1, за годинниковою стрілкою на кут, що дорівнює φ_2, і стиском його в $|z_2|$ раз (для випадку $|z_1|>1$ див. рис. 3.2).

3.1.4. *Натуральний степінь комплексного числа. Корінь n-го степеня з комплексного числа*

Означення. n- м *степенем* комплексного числа z називається комплексне число w, знайдене внаслідок множення числа z самого на себе n раз:

$$w = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z.$$

Звичайно використовують коротший запис: $w = z^n$, в якому число z є *основою степеня,* а натуральне число n – *показником степеня.*

n-й степінь комплексного числа z, заданого в тригонометричній формі обчислюється за *формулою Муавра:*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (3.10)$$

Означення. *Коренем n-го степеня* з комплексного числа z називається таке комплексне число w, n -й степінь якого дорівнює z:

$$w^n = z.$$

Корінь n-го степеня з комплексного числа z позначається символом $\sqrt[n]{z}$. На відміну від кореня з дійсного числа, корінь n-го степеня з комплексного числа визначається неоднозначно. Саме в множині комплексних чисел існує рівно n коренів n-го степеня з даного комплексного числа.

Усі корені n-го степеня з комплексного числа z, заданого в тригонометричній формі, обчислюються за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (3.11)$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Геометрично всі корені n-го степеня з комплексного числа зображуються точками, що лежать на колі з центром в початку координат, радіус якого дорівнює $\sqrt[n]{r}$, а центральні кути між радіусами, проведеними у сусідні точки, дорівнюють $2\pi / n$.

Приклад. Обчислити корені четвертого степеня з числа –1.

Розв'язання. Число –1 у тригонометричній формі можна записати так:

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Корені четвертого степеня з числа –1 − це комплексні числа, обчислені за формулою (3.11): $\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)$, де $k = 0,1,2,3$, тобто комплексні числа (рис. 3.3):

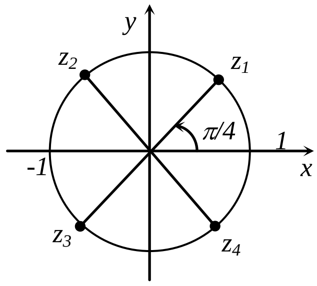

Рис. 3.3. Зображення коренів на одиничному колі.

$$z_1 = \cos(\pi / 4) + i\sin(\pi / 4) = \sqrt{2} / 2(1 + i);$$

$$z_2 = \cos(3\pi / 4) + i\sin(3\pi / 4) = \sqrt{2} / 2(-1 + i);$$

$$z_3 = \cos(5\pi / 4) + i\sin(5\pi / 4) = \sqrt{2} / 2(-1 - i);$$

$$z_4 = \cos(7\pi / 4) + i\sin(7\pi / 4) = \sqrt{2} / 2(1 - i).$$

Аналогічно, у множині комплексних чисел можна обчислити корінь *n*-го степеня з будь-якого дійсного числа. При цьому хоча б один корінь з додатного дійсного числа буде дійсним.

3.2. Многочлени

Означення. Многочленом *n*–го степеня називається функція вигляду:

$$P_n(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0,$$

де A_i, $i = 0,1,\ldots,n$ − сталі коефіцієнти дійсні або комплексні, а z − змінна. Якщо $A_n \neq 0$, то число n називається *степенем* многочлена.

Означення. Комплексне число z_0 таке, що $P_n(z_0) = 0$ називається *коренем* даного многочлена.

Теорема 1 (*Безу*). *При діленні многочлена* $P_n(z)$ *на різницю* $z - z_0$ *одержується залишок, що дорівнює* $P_n(z_0)$.

Доведення. При діленні $P_n(z)$ на $z - z_0$ часткою буде многочлен $Q_{n-1}(z)$, степінь якого на одиницю менший за степінь $P_n(z)$, залишком буде стале число r:

$$P_n(z) = (z - z_0)Q_{n-1}(z) + r \tag{3.12}$$

Нехай z прямує до z_0. Тоді границя лівої частини (3.12) дорівнює $P_n(z_0)$, а границя правої частини дорівнює r. Звідси, $r = P_n(z_0)$.

Наслідок 1. Якщо z_0 − корінь многочлена, тобто $P_n(z_0) = 0$, то $P_n(z)$ ділиться без залишку на $z - z_0$ і, отже, представляється у вигляді добутку

$$P_n(z) = (z - z_0)Q_{n-1}(z) \tag{3.13}$$

Означення. Якщо многочлен $P_n(z)$ ділиться на $(z - z_0)^k$ (k – натуральне число) і не ділиться на $(z - z_0)^{k+1}$, то число k називається *кратністю* кореня z_0.

Таким чином, якщо комплексне число z_0 є коренем кратності k многочлена $P_n(z)$, то

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z), \tag{3.14}$$

де $Q_{n-k}(z)$ − такий многочлен степеня $n - k$, що $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$.

Має місце теорема існування комплексного кореня у многочлена.

Теорема 2 (*основна теорема алгебри*). *Будь-який многочлен степеня* $n \geq 1$ *має принаймні один комплексний корінь.*

Приймаємо теорему без доведення. З теореми випливає важливий наслідок.

Наслідок 2. Многочлен n-го степеня $P_n(z)$ зі старшим, не рівним нулю коефіцієнтом ($A_n \neq 0$), має n комплексних коренів з врахуванням кратності, інакше кажучи $P_n(z)$ представляється у вигляді добутку

$$P_n(z) = A_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2}...(z - z_m)^{k_m} \tag{3.15}$$

де $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$, $z_1, ..., z_m$ – різні корені $P_n(z)$ кратностей відповідно $k_1, ..., k_m$.

Доведення. За теоремою многочлен $P_n(z)$ має принаймні один корінь. Позначимо його через z_1, а його кратність – через k_1. Тоді

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} Q_{n-k_1}(z),\ Q_{n-k_1}(z_1) \neq 0,$$

Якщо $n - k_1 = 0$, то $n = k_1$ і $Q_{n-k_1}(z) = A_n$, і теорема доведена. В цьому випадку $P_n(z) = A_n(z - z_0)^n$.

Якщо ж $k_1 < n$, то $Q_{n-k_1}(z)$ є многочлен степеня $n - k_1$. До нього можна застосувати основну теорему алгебри, за якою він має комплексний корінь. Позначимо його через z_2, а його кратність – через k_2. В результаті одержимо

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} Q_{n-k_1-k_2}(z),$$

$$Q_{n-k_1-k_2}(z_j) \neq 0,\ j = 1, 2.$$

Якщо $n - k_1 - k_2 = 0$, то $Q_{n-k_1-k_2}(z) = A_n$. Якщо ні, то процес можна продовжити. Проте цей процес після скінченного числа (не більше n) етапів закінчиться, і ми одержимо формулу (3.15). Якщо в ліву частину рівності (3.15) підставити замість z число, відмінне від $z_1, ..., z_m$, то вона не перетвориться в нуль. Це показує, що інших коренів, крім знайдених, многочлен $P_n(z)$ не має і зображення (3.15) єдине. Наслідок доведено.

Для многочлена $P_n(z)$ позначимо через $\overline{P}_n(z)$ многочлен, коефіцієнти якого є комплексними числами, спряженими до коефіцієнтів многочлена $P_n(z)$

$$\overline{P}_n(z) = \overline{A}_n z^n + \overline{A}_{n-1} z^{n-1} + ... + \overline{A}_1 z + \overline{A}_0.$$

Многочлен $\overline{P}_n(z)$ називається многочленом, *спряженим* до многочлена $P_n(z)$. Із властивостей спряжених комплексних чисел маємо

$$\overline{P_n(z)} = \overline{P}_n(\overline{z}).$$

Дійсно,

$$\overline{P}_n(z)=\overline{A_n z^n + A_{n-1}z^{n-1}+\ldots+A_n z + A_0}=$$
$$=\overline{A}_n\overline{z}^n+\overline{A}_{n-1}\overline{z}^{n-1}+\ldots+\overline{A}_1\overline{z}+\overline{A}_0=\overline{P}_n(\overline{z}).$$

Очевидно також, що $\overline{\overline{P}}(z)=P(z)$.

Покажемо, що коли число z_0 є коренем многочлена $P_n(z)$ кратності k, то спряжене до нього число $\bar{z}_0$ є коренем спряженого многочлена $\overline{P}_n(z)$ і притому тієї ж кратності.

Дійсно, переходячи в формулах $P_n(z)=(z-z_0)^k Q_{n-k}(z)$, $Q_{n-k}(z_0)\neq 0$, до спряжених виразів, одержимо

$$\overline{P}_n(\overline{z})=(\overline{z}-\overline{z}_0)^k\,\overline{Q}_{n-k}(\overline{z}),\ Q_{n-k}(\overline{z}_0)\neq 0.$$

Поклавши для наочності $\xi=\overline{z}$ ($\overline{z}$, як і $z-$ довільні комплексні числа) перепишемо одержані формули у вигляді

$$\overline{P}_n(\xi)=(\xi-\overline{z}_0)^k\,\overline{Q}_{n-k}(\xi),\quad Q_{n-k}(\overline{z}_0)\neq 0.$$

Це і означає, що число $\overline{z}_0$ є коренем кратності k для многочлена $\overline{P}_n(z)$.

3.3. Многочлен з дійсними коефіцієнтами

Нехай тепер всі коефіцієнти $P_n(z)$ є дійсними числами. В цьому випадку спряжений многочлен $\overline{P}_n(z)$, очевидно, співпадає з самим многочленом $P_n(z)$. Тому з доведеного випливає, що коли комплексне число z_0 є коренем кратності k многочлена $P_n(z)$ з дійсними коефіцієнтами, то і спряжене до нього число $\overline{z}_0$ також є коренем кратності k цього многочлена.

Відзначимо далі, що добуток $(z-z_0)(z-\overline{z}_0)$ завжди є многочленом з дійсними коефіцієнтами. Дійсно, нехай $z_0=a+ib$, де a і b дійсні, тоді $\overline{z}_0=a-ib$, і тому

$$(z-z_0)(z-\overline{z}_0)=(z-a-ib)(z-a+ib)=$$
$$=(z-a)^2+b^2=z^2-2az+a^2+b^2=z^2+pz+q.$$

де $p=-2a$, $q=a^2+b^2$; очевидно,що p і q дійсні. Відмітимо, що $\frac{p^2}{4}-q^2=-b^2$, тому при $b\neq 0$, $\frac{p^2}{4}-q^2<0$.

Отже, для будь-якого многочлена степеня n з дійсними коефіцієнтами має місце розклад на множники вигляду:

$$P_n(z)=A_n(z-a_1)^{\alpha_1}...(z-a_r)^{\alpha_r}(z^2+p_1z+q_1)^{\beta_1}...$$
$$...(z^2+p_sz+q_s)^{\beta_s},$$

де $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+2\sum_{i=1}^{S}\beta_i=n$, $\frac{p_j^2}{4}-q_j<0$, $j=1,2,...,S$ і всі коефіцієнти $A_n,a_1,...,a_r,p_1,q_1,...,p_S,q_S$ – дійсні.

3.4. Раціональні дроби. Розклад правильних раціональних дробів на елементарні

Важливий клас функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції утворюють раціональні функції (раціональні дроби), тобто функції, які можна зобразити у вигляді дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x),Q(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Як відомо із попередньої теми, раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена $P(x)$ менший степеня многочлена $Q(x)$. Якщо раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ не є правильним, то виконавши ділення чисельника на знаменник, дріб можна зобразити у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\frac{P^*(x)}{Q^*(x)},$$

де $R(x)$, $P^*(x)$, $Q^*(x)$ – деякі многочлени, а $\frac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ – правильний раціональний дріб.

Приклад. $\dfrac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1}=x^2+3-\dfrac{2x^2-6x+2}{x^3-2x+1}.$

Лема 1. Нехай $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ − правильний раціональний дріб. Якщо число a є дійсним коренем кратності $\alpha\geq 0$ многочлена $Q(x)$, тобто $Q(x)=(x-a)^{\alpha}Q^*(x)$ і $Q^*(a)\neq 0$, то існують дійсне число A і многочлен $P^*(x)$ з дійсними коефіцієнтами такі, що

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{P^*(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q^*(x)},\qquad(3.16)$$

де дріб $\dfrac{P^*(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q^*(x)}$ також є правильним.

Доведення.

Напишемо тотожність

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{P(x)-AQ^*(x)}{(x-a)^{\alpha}Q^*(x)},\qquad(3.17)$$

яка справджується при будь-якому A і визначимо сталу A так, щоб многочлен $P(x)-AQ^*(x)$ ділився на $x-a$, тобто визначимо A з умови

$$P(a)-AQ^*(a)=0.$$

Оскільки, за умовою, $Q^*(a)\neq 0$, то звідси $A=\dfrac{P(a)}{Q^*(a)}$. При такому A матимемо

$$P(x)-AQ^*(x)=(x-a)P^*(x),$$

і другий доданок в правій частині формули (3.17) можна скоротити на $x-a$, в результаті одержимо дріб вигляду

$$\frac{P^*(x)}{(x-a)^{\alpha-1}Q^*(x)}.$$

Оскільки дріб отримали скороченням правильного раціонального дробу на множник $x-a$, то і сам дріб також є правильним раціональним дробом.

Лема 2. Нехай $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ − правильний раціональний дріб. Якщо комплексне число $z_1 = a + ib$ ($a, b-$ дійсні) є коренем кратності $\beta \geq 1$ многочлена $Q(x)$, тобто

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^{\beta} Q^*(x),$$

де $Q^*(z_1) \neq 0$, а $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \overline{z}_1)$, то існують дійсні числа M, N та многочлен $P^*(x)$ з дійсними коефіцієнтами такий, що

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^{\beta}} + \frac{P^*(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta - 1} Q^*(x)},$$

де дріб $\dfrac{P^*(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta-1} Q^*(x)}$ також є правильним.

Доведення. Напишемо тотожність

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^{\beta}} + \frac{P(x) - (Mx + N)Q^*(x)}{(x^2 + px + q)^{\beta} Q^*(x)}, \tag{3.18}$$

справедливу за будь-яких M і N. Виберемо M і N так, щоб многочлен $P(x) - (Mx + N)Q^*(x)$ ділився на $x^2 + px + q = (x - z_1)(x - \overline{z}_1)$. Для цього достатньо вибрати M і N так, щоб z_1 було коренем многочлена $P(x) - (Mx + N)Q^*(x)$. Оскільки число $\overline{z}_1$ спряжене з z_1, воно також буде коренем вказаного многочлена, тоді многочлен буде ділитися на $x^2 + px + q$.

Отже, нехай

$$P(z_1) - (Mz_1 + N)Q^*(z_1) = 0.$$

Якщо це має місце, то $Mz_1 + N = \dfrac{P(z_1)}{Q^*(z_1)}$, де, за умовою, $Q^*(z_1) \neq 0$.

Нехай $z_1 = a + ib$, $\dfrac{P(z_1)}{Q^*(z_1)} = A + iB$, тоді

$$A + iB = Mz_1 + N = M(a + ib) + N.$$

Звідси, прирівнюючи дійсні та уявні частини, одержимо рівняння $Ma+N=A$ і $Mb=B$ і, отже, $M=\dfrac{B}{b}$ і $N=A-\dfrac{a}{b}B$.

При цих значеннях M і N многочлен $P(x_1)-(Mx_1+N)Q^*(x_1)$ буде ділитися на многочлен x^2+px+q.

Скорочуючи другий доданок правої частини рівності (3.18) на x^2+px+q, одержимо дріб вигляду

$$\frac{P^*(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-1}Q^*(x)},$$

причому, очевидно, що степінь $P^*(x)$ менший за степінь знаменника.

Теорема. *Нехай* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильний раціональний дріб,* $P(x)$, $Q(x)$ *– многочлени з дійсними коефіцієнтами. Якщо*

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}...(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}, \qquad (3.19)$$

де a_i *– попарно різні дійсні корені многочлена* $Q(x)$ *кратності* $\alpha_i, i=1,2,...,r$, $x^2+p_jx+q_j=(x-z_j)(x-\overline{z}_j)$, *де* z_j *і* $\overline{z}_j$ *– попарно різні при різних* j *комплексні корені многочлена* $Q(x)$ *кратності* β_j, $j=1,2,...,s$, *то існують такі дійсні числа* $A_i^{(\alpha)}, i=1,2,...,r,\ \alpha=1,2,...,\alpha_i$; $M_j^{(\beta)}$ *і* $N_j^{(\beta)}$, $j=1,2,...,s,\ \beta=1,2,...,\beta_j$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+...+\frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-a_1}+...+$$

$$+\frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}}+\frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}}+...+\frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x-a_r}+$$

$$\begin{aligned}&+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\frac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}}+...+\frac{M_1^{(\beta_1)}x+N_1^{(\beta_1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\\&+...+\frac{M_s^{(1)}x+N_s^{(1)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}}+\frac{M_s^{(2)}x+N_s^{(2)}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}}+...+\frac{M_s^{(\beta_s)}x+N_s^{(\beta_s)}}{x^2+p_sx+q_s}.\end{aligned} \qquad (3.20)$$

Доведення. Із розкладу (3.18) маємо

$$Q(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}Q^*(x).$$

Тут

$$Q^*(x)=(x-a_2)^{\alpha_2}...(x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}...(x^2+p_sx+q_sx)^{\beta_s}$$

і, отже, $Q^*(a_1)\neq 0$, тому, за лемою 1:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a)^{\alpha_1}}+\frac{P^*(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}Q^*(x)}.$$

Застосовуючи у випадку $\alpha_1>1$ подібним чином ту ж саму лему до раціонального дробу $\dfrac{P^*(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}Q^*(x)}$, одержимо

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a)^{\alpha_1}}+\frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\frac{P^{**}(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-2}Q^{**}(x)}.$$

Продовжуючи цей процес далі, поки показник степеня у співмножника x_1-a не дорівнюватиме нулю, а потім, поступаючи аналогічно відносно множників $x-a_i$, $i=2,...,r,$ матимемо

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a)^{\alpha_1}}+\frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+...+\frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-a_1}+...+$$
$$+\frac{A_r^{(1)}}{(x-a_r)^{\alpha_r}}+\frac{A_r^{(2)}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}}+...+\frac{A_r^{(\alpha_r)}}{x-a_r}+\frac{R(x)}{S(x)},$$

де $\dfrac{R(x)}{S(x)}$ − знову правильний раціональний дріб, $R(x),S(x)$ − многочлени з дійсними коефіцієнтами і многочлен $S(x)$ не має дійсних коренів.

Застосовуючи послідовно лему 2 до дробу $\dfrac{R(x)}{S(x)}$ і до виразів, які при цьому одержуються, в результаті одержимо формулу (3.20).

Означення. Раціональні дроби вигляду

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}\ \text{і}\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\beta}},$$

де $a,p,q,A,M,N-$ дійсні числа і $\dfrac{p^2}{4}-q<0$, також $\alpha,\beta\in\mathrm{N}$, називаються *елементарними раціональними дробами.*

Таким чином, доведена теорема стверджує, що будь-який правильний раціональний дріб можна розкласти на суму елементарних раціональних дробів.

При виконанні розкладу многочлена вигляду (3.19) для конкретного заданого дробу є зручний так званий *метод невизначених коефіцієнтів.* Він полягає в наступному. Для даного дробу $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ записується розклад (3.20), в якому коефіцієнти $A_i^{(\alpha)}$, $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ вважаються невідомими ($i=1,2,...,r$, $\alpha=1,2,...,\alpha_i$, $j=1,2,...,s$, $\beta=1,2,...,\beta_j$). Після цього обидві частини рівності зводяться до спільного знаменника і у многочленів, які отримані в чисельнику, прирівнюються коефіцієнти. При цьому, якщо степінь многочлена $Q(x)$ дорівнює n, то в чисельнику правої частини (3.20) після зведення до спільного знаменника одержується многочлен степеня $n-1$, тобто многочлен з n коефіцієнтами, а число невідомих $A_i^{(\alpha)}$, $M_j^{(\beta)}$, $N_j^{(\beta)}$ також дорівнює n:

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i + 2\sum_{j=1}^{s}\beta_j = n.$$

Таким чином, ми отримуємо систему n рівнянь з n невідомими. Існування у неї розв'язку випливає з доведеної теореми.

Зауважимо, що після зведення (3.20) до спільного знаменника і його відкидання, у випадку, коли $Q(x)$ має дійсні корені, доцільно підставити в обидві частини отриманої рівності послідовно ці корені; в результаті одержимо деякі співвідношення між шуканими коефіцієнтами, які є корисними для їх подальшого визначення.

Приклади розкладу на раціональні дроби

Приклад 1. Розкладемо дріб $\dfrac{x}{(x^2-1)(x-2)}$ на елементарні дроби:

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Зведемо до спільного знаменника і відкинемо його, одержимо:

$$x = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1). \quad (3.21)$$

Маємо випадок, коли всі корені знаменника дійсні. Підставивши в (3.21) послідовно $x=1$, $x=-1$ і $x=2$, знайдемо

$1=-2A$, $-1=6B$, $2=3C$, звідси $A=-\dfrac{1}{2}, B=-\dfrac{1}{6}$, $C=\dfrac{2}{3}$.

Отже, шуканий розклад

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}.$$

Приклад 2. Знайдемо розклад на елементарні дроби для $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$.

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Зведемо до спільного знаменника, відкинемо його. Маємо

$$x^2-1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x + (Dx+E)(x^2+1)x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$-1=A$, $0=C+E$, $1=2A+B+D$, $0=E$, $0=A+D$, звідси знайдемо

$$A=-1,\ B=2,\ C=0,\ D=1,\ E=0,$$

і, тому шуканий розклад має вигляд

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}.$$

Зауважимо, що в окремих випадках розклад на елементарні дроби можна одержати швидше і простіше, не використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, наприклад:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Означити комплексне число та записати його задання в алгебраїчній та тригонометричній формі.

2. Виконати дії: 1) $\left(1+4i\right)\cdot\left(2-3i\right)$; 2) $\dfrac{5-2i}{3+4i}$; 3) i^{13}, i^{2016}.

3. Обчислити:

1) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$; 2) $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}}{\left(1+i\right)^{7}}$; 3) $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{20}$; 4) $\dfrac{1+i}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}}$.

4. Записати формулу обчислення кореня n-го степеня із комплексного числа, знайти всі значення коренів та побудувати їх на комплексній площині:

1) $\sqrt[4]{-16}$; 2) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$; 3) $\sqrt{3+4i}$.

5. Розв'язати рівняння:

1) $x^2+4x+5=0$; 2) $x^4+5x^2+4=0$.

6. Сформулювати та пояснити теорему Безу, основну теорему алгебри та їх наслідки.

7. Записати в загальному випадку розклад многочлена з дійсними коефіцієнтами на множники.

8. Записати розклад правильного раціонального дробу на елементарні у випадках різних коренів знаменника.

9. Розкласти на елементарні дроби:

1) $\dfrac{x+1}{(x^2-4)(x+1)}$; 2) $\dfrac{x}{(x-2)^2(x^2+1)}$.

Лекція 4. Інтегрування дробово-раціональних функцій

4.1. Інтегрування елементарних раціональних дробів.

4.2. Інтегрування дробово-раціональних функцій в залежності від коренів знаменника.

4.1. Інтегрування елементарних раціональних дробів

За теоремою 1 (лекція 3) задача інтегрування раціональних дробів зводиться до обчислення інтегралів типу:

I. $\int \frac{A}{x-a}dx\left(A, a \in \mathbb{R}\right)$.

II. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx \;\left(A, a \in \mathbb{R}, n = 2,3,...\right)$.

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx, \;\left(M, N, p, q \in \mathbb{R}, \frac{p^2}{4} - q < 0\right)$.

IY. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx, \;\left(M, N, p, q \in \mathbb{R}, \frac{p^2}{4} - q < 0, n = 2,3,...\right)$.

Інтегрування елементарних дробів типу I, II, III не викликає труднощів (розглянуто в лекції 2).

Інтегрування елементарних дробів IY типу вимагає більш складних обчислень, тому повторимо його:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + \\ +\left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Перший інтеграл береться підстановкою $x^2+px+q=t$, $(2x+p)dx = dt$, а для другого інтеграла − позначимо його I_n отримують рекурентну формулу:

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{t}{a^2(2n-2)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2(2n-2)} I_{n-1},$$

звідки при $n > 1$

$$I_n = \frac{t}{a^2(2n-2)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}. \qquad (4.1)$$

Розглянемо на прикладі інтегрування такого дробу:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = \int \frac{0.5(2x+2)+(-1-1)}{(x^2+2x+3)^2} dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$
$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2+2x+3)} - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2}.$$

До останнього інтеграла застосовуємо підстановку $x+1=t$:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{dx}{((x+1)^2+2)^2} = \int \frac{dt}{(t^2+2)^2} =$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2}.$$

Розглянемо останній інтеграл, який обчислимо за формулою інтегрування частинами:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+2)^2} = \int \frac{t \cdot t dt}{(t^2+2)^2} = \left| \begin{array}{l} u = t, du = dt \\ dv = \dfrac{t dt}{(t^2+2)^2}, v = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int \frac{d(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\dfrac{1}{(t^2+2)} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} = -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}}.$$

(довільної сталої поки що не пишемо, ми врахуємо її тільки в кінцевому результаті).

Отже,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x+1}{2\ (x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right),$$

звідки,

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

4.2. Інтегрування дробово-раціональних функцій в залежності від коренів знаменника

Означення. *Цілою раціональною функцією* називається функція, що представляє собою многочлен: $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$.

Означення. *Дробово-раціональною функцією або раціональним дробом* називається відношення цілих раціональних функцій:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}.$$

Як відомо, якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника, дріб називається правильним, в протилежному випадку – неправильним. З неправильного дробу можна за допомогою ділення з остачею виключити цілу частину і записати даний дріб як суму цілої раціональної функції і правильного дробу.

Можна довести, що *будь-який правильний раціональний дріб можна розкласти на суму елементарних дробів.* Якщо дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильний та знаменник розкладається на множники

$$Q_m(x) = b_0\left(x-\gamma_1\right)^{r_1}\left(x-\gamma_2\right)^{r_2}\cdots\left(x-\gamma_s\right)^{r_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\cdot$$
$$\cdot\left(x^2+p_2x+q_2\right)^{l_2}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_vx+q_v\right)^{l_v},$$

то його можна розкласти на елементарні дроби за такою схемою ($b_0 = 1$):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-\gamma_1} + \frac{A_2}{(x-\gamma_1)^2} + \cdots + \frac{A_{r_1}}{(x-\gamma_1)^{r_1}} + \frac{B_1}{x-\gamma_2} + \cdots + \frac{B_{r_2}}{(x-\gamma_2)^{r_2}} + \cdots +$$
$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{C_{l_1}x+D_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \cdots + \frac{M_{l_\nu}x+N_{l_\nu}}{(x^2+p_\nu x+q_\nu)^{l_\nu}}.$$

Числа $A_1, A_2, \ldots, A_{r_1}, B_1, B_2, \ldots, B_{r_2}, C_1, D_1, C_2, D_2, \ldots, \cdots C_{l_1}, D_{l_1}, \ldots, M_{l_\nu}, N_{l_\nu}$ – дійсні числа, які визначають методом невизначених коефіцієнтів.

Загальний метод інтегрування дробово-раціональних функцій

1. Виключити цілу частину з даної функції; вона інтегрується безпосередньо.
2. Знаменник правильного дробу розкласти на множники вигляду $x-a$ та x^2+px+q, при цьому множники другого типу повинні бути нерозкладними на множники першого степеня.
3. Скоротити правильний дріб, якщо це можливо.
4. Розкласти правильний дріб на суму елементарних дробів та виконати інтегрування кожного доданка окремо.

Вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника $Q_m(x)$. Можливі наступні випадки:

1. *Корені знаменника тільки дійсні та різні числа*, тобто

$$Q_m(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdot \ldots \cdot (x-a_m). \tag{4.2}$$

В цьому випадку правильний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів І-го типу:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_m}{x-a_m}, \tag{4.3}$$

де $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – невизначені коефіцієнти, які знаходяться із тотожності, що написана вище.

2. *Корені знаменника тільки дійсні числа, причому деякі з них кратні*, тобто

$$Q_m(x)=(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_l)(x-b)^i, \tag{4.4}$$

де $l+i=m$.

Тоді правильний дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів І-го та ІІ-го типів:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\ldots+\frac{A_l}{x-a_l}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_{i-1}}{(x-b)^{i-1}}+\frac{B_i}{(x-b)^i}, \tag{4.5}$$

де невизначені коефіцієнти $A_1,\ldots,A_l,B_1,B_2,\ldots,B_{i-1},B_i$ знаходяться з тотожності, що написана вище.

3. *Корені знаменника дійсні числа, причому деякі з них кратні, також знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники (комплексні корені)*, тобто

$$Q_m(x)=(x-a)(x-b)^i(x^2+px+q). \tag{4.6}$$

В цьому випадку дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів І-го, ІІ-го та ІІІ-го типів

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_{i-1}}{(x-b)^{i-1}}+\frac{B_i}{(x-b)^i}+\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \tag{4.7}$$

де $A,B_1,B_2,\ldots,B_{i-1},B_i,M,N-$ невизначені коефіцієнти, які необхідно знайти.

4. *Корені знаменника дійсні числа, причому деякі з них кратні, крім того знаменник містить квадратні тричлени, які не розкладаються на множники (комплексні корені), причому деякі з них теж є кратні,* тобто

$$Q_m(x)=(x-a)(x-b)^i(x^2+px+q)(x^2+mx+l)^j, \tag{4.8}$$

де $3+i+2j=m$.

В цьому випадку дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів всіх типів

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_{i-1}}{(x-b)^{i-1}} + \frac{B_i}{(x-b)^i} + \frac{Mx+N}{x^2+px+q} + \\ + \frac{M_1x+N_1}{x^2+mx+l} + \frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+mx+l\right)^2} + \ldots + \frac{M_jx+N_j}{\left(x^2+mx+l\right)^j}, \tag{4.9}$$

де $A, B_1, B_2, \ldots, B_{i-1}, B_i, M, N, M_1, \ldots, M_j, N_1, \ldots, N_j$ – невизначені коефіцієнти, які необхідно знайти.

Розв'язання типових прикладів

Приклад 1. $\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}$ – це правильний раціональний дріб, знаменник якого x^3+2x^2-8x розкладається на множники $x(x-2)(x+4)$, тому даний дріб розкладається на суму найпростіших дробів типу I:

$$\frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x} = \frac{x^2-2x+2}{x(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+4}.$$

Невідомі коефіцієнти *A, B, C* будемо знаходити методом невизначених коефіцієнтів. Для цього праву частину одержаної вище рівності необхідно звести до спільного знаменника. Отримаємо

$$\frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x} = \frac{A^{(x-2)(x+4)}}{x} + \frac{B^{x(x+4)}}{x-2} + \frac{C^{x(x-2)}}{x+4} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x+4)+Bx(x+4)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+4)} =$$

$$\frac{Ax^2+2Ax-8A+Bx^2+4Bx+Cx^2-2Cx}{x(x-2)(x+4)}.$$

Знаменники в обох частинах рівні, тому і чисельники повинні бути рівні, тобто $x^2-2x+2 = Ax^2+2Ax-8A+Bx^2+4Bx+Cx^2-2Cx,$ звідки

$$x^2-2x+2 = (A+B+C)x^2+(2A+4B-2C)x-8A.$$

Остання рівність можлива лише тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях *x* в обох частинах рівності рівні, тобто

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A+B+C=1, \\ x & 2A+4B-2C=-2, \\ x^0 & -8A=2. \end{array}\Bigg\}$$

Отримали систему рівнянь, з якої знаходимо невизначені коефіцієнти

$$\begin{cases} B+C=\dfrac{5}{4}, \\ 2B-C=-\dfrac{3}{4}, \end{cases}$$

$$A=-\frac{1}{4}, B=\frac{1}{6}, C=\frac{13}{12}.$$

Підставляємо знайдені значення *A, B, C* в схему розкладу і отримуємо розклад підінтегральної функції:

$$\frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}=\frac{-\frac{1}{4}}{x}+\frac{\frac{1}{6}}{x-2}+\frac{\frac{13}{12}}{x+4}.$$

Інтегруючи останню рівність маємо:

$$\int\frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}dx=\int\frac{-\frac{1}{4}}{x}dx+\int\frac{\frac{1}{6}}{x-2}dx+\int\frac{\frac{13}{12}}{x+4}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+$$

$$+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{13}{12}\int\frac{dx}{x+4}=-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{1}{6}\ln|x-2|+\frac{13}{12}\ln|x+4|+C.$$

Зауваження. В лекції 3 невідомі коефіцієнти у випадку дійсних різних коренів знаменника обчислено підстановкою цих коренів в рівність чисельників. Цей метод також можна було використати для простіших обчислень коефіцієнтів в даному прикладі.

Приклад 2. $\int\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція – це правильний нескоротний раціональний дріб, знаменник якого містить лише дійсні кратні корені, тому цей дріб розкладається на суму найпростіших дробів I-го та II-го типу.

$$\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)}+\frac{D}{(x+2)^2}+\frac{E}{x+2}.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти *A, B, C, D*, та *E* методом невизначених коефіцієнтів та методом задання частинних значень, які доцільно комбінувати. Праву частину рівності зведемо до спільного знаменника, отримаємо:

$$\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}=$$

$$=\frac{A(x+2)^2+B(x+2)^2(x-1)+C(x+2)^2(x-1)^2+D(x-1)^3+E(x-1)^3(x+2)}{(x-1)^3(x+2)^2}.$$

Знаменники в обох частинах рівні, тому і чисельники повинні бути рівні:

$$2x^2+5x-8=A(x+2)^2+B(x+2)^2(x-1)+C(x+2)^2(x-1)^2+$$
$$+D(x-1)^3+E(x-1)^3(x+2).$$

Нагадаємо, що отриманий вираз є тотожністю, а через це рівність повинна зберігатися для будь-якого значення x. Використовуємо комбінований метод знаходження невизначених коефіцієнтів. Для $x=-2$ отримуємо:

$$2(-2)^2+5(-2)-8=D(-2-1)^3\Rightarrow -10=-27D\Rightarrow D=\frac{10}{27}.$$

Для $x=1$: $\quad 2\cdot 1^2+5\cdot 1-8=A(1+2)^2\Rightarrow -1=9A\Rightarrow A=-\frac{1}{9}.$

Залишилось визначити коефіцієнти *B, C, E*. Тепер будемо порівнювати коефіцієнти при однакових степенях x в лівій та правій частинах рівності. Коефіцієнт при x^4 в лівій частині дорівнює нулю (x^4 в лівій частині відсутній), а в правій $C+E$. Через це $C+E=0$.

Вільний член в лівій частині дорівнює −8, а в правій –

$$4A-4B+4C-D=2E,$$

на основі чого отримуємо друге рівняння: $4A-4B+4C-D-2E=-8$, в якому A та D відомі $\left(A=-\frac{1}{9};D=\frac{10}{27}\right)$, маємо $2B-2C+E=\frac{97}{27}$.

Ми порівняли саме вільні члени, тому що це можливо зробити, не виконуючи множення та піднесення до степеня у правій частині рівності.

Для того, щоб отримати третє рівняння для визначення *B, C* і *E*, знову повернемося до способу задання частинних значень.

Якщо $x=2$, отримуємо: $2\cdot 2^2+5\cdot 2-8=16A+16B+16C+D+4E.$

Знаючи, що $A=-\frac{1}{9}; D=\frac{10}{27}$, це рівняння прийме вигляд $4B+4C+E=\frac{77}{27}.$

Таким чином, для визначення *B, C* і *E* отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} C+E=0, \\ 2B-2C+E=\frac{97}{27}, \\ 4B+4C+E=\frac{77}{27}. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо: $B=\frac{29}{27}, C=-\frac{13}{27}, E=\frac{13}{27}.$

Отже, маємо:

$$A=-\frac{1}{9}, B=\frac{29}{27}, C=-\frac{13}{27}, D=\frac{10}{27}, E=\frac{13}{27}.$$

Тепер розклад підінтегральної функції має вигляд:

$$\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}=\frac{-\frac{1}{9}}{(x-1)^3}+\frac{\frac{29}{27}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{13}{27}}{(x-1)}+\frac{\frac{10}{27}}{(x+2)^2}+\frac{\frac{13}{27}}{(x+2)}.$$

Інтегруючи цю рівність, отримуємо:

$$\int\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}dx=-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\frac{29}{27}\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{13}{27}\int\frac{dx}{x-1}+$$

$$+\frac{10}{27}\int\frac{dx}{(x+2)^2}+\frac{13}{27}\int\frac{dx}{x+2}=-\frac{1}{9}\int(x-1)^{-3}dx+\frac{29}{27}\int(x-1)^{-2}dx-\frac{13}{27}\ln|x-1|+$$

$$+\frac{10}{27}\int(x+2)^{-2}dx+\frac{13}{27}\ln|x+2|=$$

$$=-\frac{1}{9}\frac{(x-1)^{-2}}{-2}+\frac{29}{27}\frac{(x-1)^{-1}}{-1}-\frac{13}{27}\ln|x-1|+\frac{10}{27}\frac{(x+2)^{-1}}{-1}+\frac{13}{27}\ln|x+2|+C=$$

$$=\frac{1}{18(x-1)^2}-\frac{29}{27}\frac{1}{(x-1)}-\frac{13}{27}\ln|x-1|-\frac{10}{27(x+2)}+\frac{13}{27}\ln|x+2|+C.$$

Приклад 3. $\int\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція – це правильний нескоротний дріб, знаменник якого: $x^4+x=x(x^3+1)=x(x+1)(x^2-x+1)$. Маємо, що знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники, та два дійсних корені $x=0$ та $x=-1$. Тоді даний дріб розкладається на суму найпростіших дробів I-го та III-го типу

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}=\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

Невідомі коефіцієнти *A, B, M* та *N* будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів. Для цього праву частину рівності потрібно звести до спільного знаменника, отримаємо:

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}=\frac{A(x^3+1)+B(x^2-x+1)+(Mx+N)(x^2+x)}{x(x+1)(x^2-x+1)}.$$

Знаменники в обох частинах рівні, тому і чисельники повинні бути рівні, тобто:

$$\begin{aligned}&x^3+4x^2-2x+1=A(x^3+1)+Bx(x^2-x+1)+(Mx+N)(x^2+x)=\\&=(A+B+M)x^3+(-B+M+N)x^2+(B+N)x+A.\end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримуємо систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів *A, B, M, N*

$$\left.\begin{array}{r|c}x^3 & A+B+M=1,\\ x^2 & -B+M+N=4,\\ x & B+N=-2,\\ x^0 & A=1.\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}B+M=0,\\ -B+M+N=4,\\ B+N=-2,\\ A=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M=2,\\ N=0,\\ B=-2,\\ A=1.\end{cases}$$

Отже, розклад підінтегральної функції приймає вигляд

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}=\frac{1}{x}+\frac{-2}{x+1}+\frac{2x+0}{x^2-x+1}.$$

Інтегруючи останню рівність, отримаємо:

$$\int\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx=\int\frac{1}{2}dx+\int\frac{-2}{x+1}dx+\int\frac{2xdx}{x^2-x+1}=$$

$$=\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{2x-1+1}{x^2-x+1}dx=\ln|x|-2\ln|x+1|+\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\int\frac{dx}{x^2-x+1}=$$

$$=\ln|x|-2\ln|x+1|+\ln\left|x^2-x+1\right|+\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\ln|x|-2\ln|x+1|+\ln\left|x^2-x+1\right|+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}/2}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}+C=\ln|x|-2\ln|x+1|+\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати загальний метод інтегрування дробово-раціональних функцій.

2. Знайти інтеграли:

1) $\int\frac{xdx}{(x-1)(2x-1)}$; 2) $\int\frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$; 3) $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$; 4) $\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$.

Лекція 5. Інтегрування ірраціональних функцій

5.1. Інтеграли типу $\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx$.

5.2. Інтеграли типу $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Підстановки Ейлера.

5.3. Інтеграли від диференціального бінома. Підстановки Чебишова.

5.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок.

5.1. Інтеграли типу $\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx$

Означення. Функція вигляду

$$R(u_1,u_2,...,u_n)=\frac{P(u_1,...,u_n)}{Q(u_1,...,u_n)} \tag{5.1}$$

де P і $Q-$ многочлени від змінних $u_1,...,u_n$, а змінні $u_1,...,u_n$ є функціями змінної x: $u_i=\phi_i(x)$, $i=1,2,...,n$ називається ***раціональною функцією*** від функцій $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$.

Наприклад, функція $f(x)=\frac{x+\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}}$ є раціональною функцією від x і радикалів $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2-1}$, $\sqrt{x^2+1}$:

$$f(x)=R(x,\sqrt{x},\sqrt[3]{x^2-1},\sqrt{x^2+1}).$$

Тут $R(u_1,u_2,u_3,u_4)=\frac{u_1+u_3^2}{u_2-u_4}$, $u_1=x$, $u_2=\sqrt{x}$, $u_3=\sqrt[3]{x^2-1}$, $u_4=\sqrt{x^2+1}$.

Якщо в формулі (5.1) змінні $u_1,...,u_n$ є елементарними тригонометричними функціями, то складна функція, яка отримується, називається *раціональною* відносно елементарних тригонометричних функцій. Прикладом такої функції є $\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^3 x+\cos x}=R(\sin x,\cos x).$

Перейдемо тепер до інтегралів від функцій вказаних типів і покажемо, що в наступних випадках вони зводяться до інтегралів від раціональних функцій. Розглянемо інтеграли типу $\int R\left[x,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx$ за умови, що сталі $r_1,\ldots,r_s$ раціональні та $\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$ $(a,b,c,d-$ сталі).

Нехай $m-$ спільний знаменник чисел $r_1,\ldots,r_s : r_i=\dfrac{p_i}{m}$, p_i- ціле, $i=1,2,\ldots,s.$

Покладемо $t^m=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, звідси $x=\dfrac{dt^m-b}{a-ct^m}=\rho(t)$; $\rho(t)$ є раціональною функцією, тому $\rho'(t)$ також раціональна функція; $dx=\rho'(t)dt$, $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i}=t^{mr_i}=t^{p_i}$, $i=1,2,\ldots,s.$

Тоді

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx=\int R\left(\frac{dt^m-b}{a-ct^m},t^{p_1},\ldots,t^{p_s}\right)\rho'(t)dt==\int R^*(t)dt,$$

де $R^*(t)=R\left(\dfrac{dt^m-b}{a-ct^m},t^{p_1},\ldots,t^{p_s}\right)\rho'(t)$ є раціональною функцією змінної t.

Таким чином, обчислення інтеграла типу

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right]dx \tag{5.2}$$

зводиться до інтегрування раціональних дробів.

Відзначимо, що до інтегралів типу (5.2) відносяться інтеграли

$$\int R\left[x,(ax+b)^{r_1},\dots,(ax+b)^{r_s}\right]dx,$$

і, зокрема, також

$$\int R(x,x^{r_1},\dots,x^{r_s})dx.$$

Приклади обчислення інтегралів

Приклад 1. $\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx.$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx=\left|\begin{matrix}\frac{x+1}{x-1}=t^3,\ x=\frac{t^3+1}{t^3-1}\\ dx=\frac{-6t^2dt}{(t^3-1)^2},\ x-1=\frac{2}{t^3-1}\end{matrix}\right|=\int t\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\frac{(t^3-1)^2}{4}dt=$$

$$=-\frac{3}{2}\int t^3dt=-\frac{3}{8}t^4+C=-\frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^4+C.$$

Приклад 2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\left|\begin{matrix}x=t^6\\ dx=6t^5dt\end{matrix}\right|=6\int\frac{t^5}{t^2+t^3}dt=6\left[\int(t^2-t+1)dt-\int\frac{dt}{t+1}\right]=$$

$$=2t^3-3t^2+6t-\ln|1+t|+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C.$$

5.2. Інтеграли типу $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Підстановки Ейлера

1. Нехай $a>0$.

Зробимо заміну x на t наступним чином:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}\pm t$$

(знаки можна брати в довільній комбінації). Піднесемо обидві частини написаної рівності до квадрата

$$ax^2+bx+c=ax^2\pm 2\sqrt{a}xt+t^2,$$

звідки

$$x=\frac{t^2-c}{b\mp 2t\sqrt{a}}=R_1(t),$$

$R_1(t)$ – раціональна функція від t, отже, $R_1'(t)-$ також раціональна функція.

Далі, $dx=R_1'(t)dt, \sqrt{ax^2+bx+c}=\pm R_1(t)\sqrt{a}\pm t=R_2(t),$ де, очевидно, $R_2(t)-$ раціональна функція.

Отже, $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R(R_1(t),R_2(t))R_1'(t)dt=\int R^*(t)dt,$

де $R^*(t)=R(R_1(t),R_2(t))R_1'(t)-$ раціональний дріб.

2. Нехай $c>0.$

В цьому випадку можна застосувати підстановку

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt$$

(комбінація знаків довільна). Підносячи до квадрата, одержимо

$$ax^2+bx=\pm 2\sqrt{c}xt+x^2t^2,$$

звідси

$$x=\frac{b\mp 2t\sqrt{c}}{t^2-a}=R_3(t),\ \ dx=R_3'(t)dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm R_3(t)t=R_4(t),$$

де $R_3(t),R_3'(t),R_4(t)-$ раціональні функції t.

Тому

$$\int R\left(x_,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R(R_3(t),R_4(t))R_3'(t)dt=\int \tilde{R}(t)dt,$$

де $\tilde{R}(t)=R(R_3(t),R_4(t))R_4'(t)-$ раціональний дріб.

3. Нехай корені x_1 і x_2 тричлена ax^2+bx+c є дійсними числами.

Якщо $x_1=x_2,$ то

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)^2}=|x-x_1|\sqrt{a}.$$

Звідси випливає, що в цьому випадку або під коренем стоїть від'ємна при всіх значеннях $x \neq x_1$ величина, тобто цей корінь приймає тільки чисто уявні вирази (цей випадок має місце при $a < 0$); або при $a \geq 0$ після вказаного елементарного перетворення одержимо, що змінна x не входить під знак кореня, тобто під інтегралом стоїть просто раціональна функція від x.

Нехай тепер $x_1 \neq x_2$. Тоді

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

і, відповідно,

$$R\left(x,\ \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) = R\left(x,\ |x - x_1|\sqrt{\frac{a\ (x - x_2)}{x - x_1}}\right) = R_6\left(x,\ \sqrt{\frac{a\ (x - x_2)}{x - x_1}}\right),$$

де $R_6(u, v) -$ раціональна функція змінних u, v $\left(u = x,\ v = \sqrt{\dfrac{a(x - x_2)}{x - x_1}}\right)$.

Як відомо, інтеграл від одержаної функції можна обчислити за допомогою підстановки (див. п.5.2) $t^2 = \dfrac{a(x - x_2)}{x - x_1}$, що в нашому випадку дає $\pm(x - x_1)t = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)}.$

Приклад. $\displaystyle\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2\sqrt{1 + x + x^2}} dx.$

$$\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2\sqrt{1 + x + x^2}} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1 \\ x = \dfrac{2t - 1}{1 - t^2}, dx = \dfrac{2t^2 - 2t + 2}{(1 - t^2)^2} dt \\ \sqrt{1 + x + x^2} = \dfrac{t^2 - t + 1}{1 - t^2} \\ 1 - \sqrt{1 + x + x^2} = -\dfrac{2t^2 + t}{1 - t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(-2t^2 + t)^2(1 - t^2)^2(1 - t^2)(2t^2 - 2t + 2)}{(1 - t^2)^2(2t - 1)^2(t^2 - t + 1)(1 - t^2)^3} dt =$$

$$=2\int\frac{t^2}{1-t^2}\,dt=-2t+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=-\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x}+$$
$$\ln\left|\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}-1}{x-\sqrt{1+x+x^2}+1}\right|+C.$$

Зауваження. Обчислення інтегралів за допомогою підстановок Ейлера звичайно приводить до громіздких виразів, тому їх потрібно застосувати лише тоді, коли інтеграл не вдається обчислити іншим, більш коротким способом.

Розглянемо, наприклад, інтеграл типу $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Цей інтеграл можна звести до інтеграла від раціонального дробу за допомогою однієї з підстановок Ейлера. Проте, значно швидше до мети приводить інший прийом (розгянули в лекції 2).

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+$$
$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}}.$$

Тоді для $c\neq\frac{b^2}{4a}$ і $a>0$ останній інтеграл можна звести до вигляду

$$\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm q^2}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm q^2}\right|+C,$$

а для $c>\frac{b^2}{4a}$ і $a<0$ – до вигляду $\int\frac{dt}{\sqrt{q^2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{q}+C.$

5.3. Інтеграли від диференціального бінома. Підстановки Чебишова

Означення. Вираз $x^m(a+bx^n)^p\,dx\ (a\neq 0, b\neq 0)$ називається ***диференціальним біномом***.

Будемо розглядати випадки, коли n, m і p – раціональні, а числа a і b – дійсні.

Нехай $x = t^{\frac{1}{n}}$, тоді

$$dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt \text{ і } \int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int (a+bt)^p t^{\frac{m+1}{n}-1} dt.$$

Таким чином, інтеграл від диференціального бінома

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx \tag{5.3}$$

зводиться до інтеграла типу

$$\int (a+bt)^p t^q dt, \tag{5.4}$$

де p і $q-$ раціональні, $q = \frac{m+1}{n} - 1.$

Перший випадок: $p-$ ціле число. Нехай $q = \frac{r}{s},$ де r і $s-$ цілі числа. За результатами пункту 5.1 в цьому випадку $z = t^{\frac{1}{s}}$ зводить інтеграл (5.4) до інтеграла від раціонального дробу.

Другий випадок: $q-$ціле число.

Нехай тепер $p = \frac{r}{s},$ де r і $s-$ цілі числа. За результатами пункту 5.1 в цьому випадку підстановкою $z = (a+bt)^{\frac{1}{s}}$ інтеграл (5.4) зводиться до інтеграла від раціонального дробу.

Третій випадок: $p+q-$ ціле.

Нехай $p = \frac{r}{s},$ де r і $s-$цілі числа. Запишемо для наглядності інтеграл (5.4) в іншому вигляді:

$$\int (a+bt)^p t^q dt = \int \left(\frac{a+bt}{t} \right)^p t^{p+q} dt.$$

Знову маємо інтеграл типу, що розглядався в пункті 5.1. На цей раз до інтеграла від раціонального дробу його приводить підстановка

$$z=\left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Отже, в трьох випадках, коли одне з чисел $p,\ q$ або $p+q$ є цілим, інтеграл (5.4) за допомогою вказаних вище підстановок зводиться до інтеграла від раціонального дробу.

Стосовно інтеграла (5.3) цей результат виглядає наступним чином: коли одне з чисел $p,\ \frac{m+1}{n}$ або $\frac{m+1}{n}+p$ є цілим, інтеграл можна звести до інтеграла від раціонального дробу. При цьому у випадку, коли p ціле, це зведення здійснює підстановка $z=x^{\frac{n}{s}}$, де число s є знаменником дробу $\frac{m+1}{n}$, тобто $\frac{m+1}{n}=\frac{r}{s}$; у випадку, коли $\frac{m+1}{n}$ ціле, підстановка

$$z=(a+bx^n)^{\frac{1}{s}},$$

де число $s-$ знаменник дробу p, тобто $p=\frac{r}{s}$, а у випадку, коли $\frac{m+1}{n}+p-$ ціле – підстановка $z=(ax^{-n}+b)^{\frac{1}{s}}$, де $s-$також знаменник дробу p.

П. Л. Чебишов показав, що при показниках m,n і p, які не задовольняють вказаним вище умовам, інтеграл (5.4) не виражається через елементарні функції.

Приклад . Розглянемо інтеграл

$$I=\int\sqrt{x}\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt{x^3}}}dx=\int x^{1/2}\left(1-x^{-3/2}\right)^{1/4}dx.$$

Тут $m=\frac{1}{2}, n=-\frac{3}{2}, p=\frac{1}{4}, \frac{m+1}{n}=-1-$маємо другий випадок.

Зробимо вказану вище підстановку: $z=\left(1-x^{-3/2}\right)^{1/4}$, звідси $x=(1-z^4)^{-2/3}$,

$$dx=\frac{8}{3}(1-z^4)^{-5/3}z^3dz, \text{тому}\, I=\frac{8}{3}\int\frac{z^4}{(1-z^4)^2}dz=\frac{2}{3}\int zd\left(\frac{1}{1-z^4}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{z}{1-z^4}-\int\frac{dz}{1-z^4}\right)=$$

$$=\frac{2z}{3(1-z^4)}-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1-z^2}+\frac{1}{1+z^2}\right)dz=\frac{2z}{3(1-z^4)}-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}z+C,$$

де z виражається через x за зробленою підстановкою.

5.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок

Розглянемо інтеграл $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx,$ де $a\neq 0$ і $c-\dfrac{b^2}{4a}\neq 0.$ Покажемо тут метод перетворення цього інтеграла до інтеграла типу

$$\int R(\sin z,\cos z)dz. \tag{5.5}$$

Проведемо перетворення тричлена, який знаходиться під коренем

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Зробимо заміну змінної, поклавши $x+\dfrac{b}{2a}=t,\ dx=dt.$ Тоді

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}.$$

Розглянемо всі можливі випадки.

1. Нехай $a>0,\ \ c-\dfrac{b^2}{4a}>0.$ Введемо позначення $a=m^2, c-\dfrac{b^2}{4a}=n^2.$ В цьому випадку матимемо

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2+n^2}.$$

2. Нехай $a>0,\ c-\dfrac{b^2}{4a}<0,$ тоді $a=m^2,\ c-\dfrac{b^2}{4a}=-n^2.$ Отже,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2-n^2}.$$

3. Нехай $a<0,\ c-\dfrac{b^2}{4a}>0$. Тоді $a=-m^2,\ c-\dfrac{b^2}{4a}=n^2$. Отже,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-t^2m^2}.$$

4. Нехай $a<0,\ c-\dfrac{b^2}{4a}<0$. В цьому випадку $\sqrt{ax^2+bx+c}$ є комплексним числом при будь-якому значенні x.

Таким чином інтеграл $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ перетвориться до одного з наступних типів інтегралів:

$$\int R(t,\sqrt{m^2t^2+n^2})dt, \tag{5.6}$$

$$\int R(t,\sqrt{m^2t^2-n^2})dt, \tag{5.7}$$

$$\int R(t,\sqrt{n^2-m^2t^2})dt. \tag{5.8}$$

Очевидно, що інтеграл (5.6) зводиться до інтеграла виду (5.5) за допомогою підстановки $t=\dfrac{n}{m}\mathrm{tg}z$. Інтеграл (5.7) зводиться до виду (5.5) за допомогою підстановки $t=\dfrac{n}{m}\dfrac{1}{\cos z}$, а інтеграл (5.8) – підстановки $t=\dfrac{n}{m}\sin z$.

Приклад. Знайти $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат в квадратному тричлені, маємо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(t^2+3)^3}},\ \text{де}\ t=x+2.$$

Виконаємо тепер підстановку $t=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,z,\quad dt=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2 z}dz,\quad \sqrt{t^2+3}=\sqrt{3}\dfrac{1}{\cos z}$, одержимо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+7)^3}}=\int\frac{\sqrt{3}\cos^3 z}{\cos^2 z\sqrt{3^3}}=\frac{1}{3}\int\cos zdz=\frac{1}{3}\sin z+C=\frac{1}{3}\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}}+C.$$

Завдання для самоконтролю

1. Пояснити методику інтегрування простіших ірраціональних виразів та обчислити $\int\frac{xdx}{1+\sqrt{3x+1}}$.

2. Розглянути в загальному випадку використання підстановок Ейлера для обчислення інтегралів типу $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

3. Сформулювати основні випадки інтегрування диференціального бінома (згідно із теоремою Чебишова).

4. Розглянути використання гіперболічних підстановок для обчислення інтегралів типу $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

5. Обчислити: 1) $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$.

6. Обчислити $\int\sqrt{x^2+10x+26}dx$ різними способами: інтегруванням частинами; за допомогою різних вибраних підстановок Ейлера; з використанням тригонометричної (гіперболічної) підстановки.

Лекція 6. Інтегрування виразів із тригонометричними функціями

6.1. Універсальна тригонометрична підстановка. Інтеграли типу $\int R(\sin x;\cos x)dx$.

6.2. Інтеграли типу $\int \sin^m x\cos^n xdx$.

6.3. Інтеграли типу $\int \sin\alpha x\cos\beta xdx, \int \sin\alpha x\sin\beta xdx, \int \cos\alpha x\cos\beta xdx.$

6.4. Інтеграли типу: $a)\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}dx;\qquad b)\ \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}dx.$

6. 5. Огляд основних методів інтегрування.

6.1. Універсальна тригонометрична підстановка. Інтеграли типу $\int R(\sin x;\cos x)dx$.

Теорема. *Інтеграли типу* $\int R(\sin x;\cos x)dx,$ *де підінтегральна функція є дробово-раціональна відносно* $\sin x$ *та* $\cos x$ *підстановкою* $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=u$ *зводяться до інтегралів від раціональних дробів.*

Доведення. Щоб довести цю теорему треба показати, що $\sin x, \cos x, dx$ виражаються раціонально через $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$. Це дуже легко побачити, застосовуючи відомі формули:

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2},\ \cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$x=2\mathrm{arctg}u,,\ dx=\frac{2du}{1+u^2}, \qquad (6.1)$$

тому $\int R(\sin x, \cos x)dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}.$

Таким чином, отримали інтеграл від раціональної функції.

Приклад.

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x} = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\frac{x}{2} = z,\ x = 2\mathrm{arctg}z,\ dx = \frac{2dz}{1+z^2} \\ \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{1-z^2}{1+z^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dz}{\left(5-3\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\left(1+z^2\right)} =$$

$$= \int \frac{2dz}{2+8z^2} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}2z + C = \left| z = \mathrm{tg}\frac{x}{2} \right| = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Зауважимо, що хоча розглядувані інтеграли завжди можна звести до інтеграла від раціонального дробу вказаним методом, при практичному його застосуванні, цей метод часто приводить до громіздких обчислень; разом з тим інші методи, зокрема, підстановки виду $u = \sin x$, $u = \cos x$, $u = \mathrm{tg}x$ інколи значно швидше дозволяють обчислити потрібний інтеграл. Універсальна тригонометрична підстановка найзручніша для інтегралів $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$, $a, b, c -$ дійсні числа, які не дорівнюють одночасно нулеві.

У вказаних нижче випадках віддається перевага наступним підстановкам, які також раціоналізують інтеграл:

1) Якщо інтеграл має вид $\int R(\sin x)\cos x dx$, то підстановка $u = \sin x$, $du = \cos x dx$ приводить цей інтеграл до виду $\int R(u)du$.

2) Якщо інтеграл має вид $\int R(\cos x)\sin x dx$, то він зводиться до інтеграла від раціональної функції заміною $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$.

3) Якщо підінтегральна функція залежить тільки від *tgx*, то заміна $u = \operatorname{tg} x,\ x = \operatorname{arctg} u,\ dx = \dfrac{du}{1+u^2}$ зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції $\int R(\operatorname{tg} x)dx = \int R(u)\dfrac{du}{1+u^2}$.

6.2. Інтеграли типу $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Нехай m і n – раціональні числа. Інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$ за допомогою підстановок $u = \sin x$ або $u = \cos x$ зводиться до інтеграла від диференціального бінома.

Дійсно, поклавши, наприклад, $u = \sin x,$ одержимо

$$\cos x = (1-u^2)^{\frac{1}{2}},\ \ du = \cos x dx,\ \ dx = (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} du,$$

тому

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int u^m (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} du.$$

Таким чином, інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$ виражається або через елементарні функції або як інтеграл від диференціального бінома.

У випадку, коли m і n – цілі (не обов’язково додатні) числа, інтеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$ відноситься до типу інтегралів, які розглядалися в пункті 5.1.

Наприклад, якщо $m = 2k+1$ (відповідно, $n = 2k+1$) – непарне число, то можна зробити підстановку $u = \cos x$ (відповідно, $u = \sin x$):

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d\cos x = -\int (1-u^2)^k u^n du.$$

Інтеграл зведено до інтеграла від раціонального дробу.

Аналогічний результат можна одержати і для інтеграла $\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx$ за допомогою підстановки $u = \sin x$.

Якщо $m = 2k+1,\ n = 2l+1,$ то буває корисна підстановка $t = \cos 2x$:

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^{2l+1} x dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x \sin x \cos x dx =$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^l \left(-\frac{1}{2} d \cos 2x \right) = -\frac{1}{2^{k+l+1}} \int (1-t)^k (1+t)^l dt,$$

тобто знову отримали інтеграл від раціонального дробу.

Якщо обидва показники m і n додатні і парні (або один з них нуль), то доцільно застосувати формули

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

які, очевидно, приводять розглядуваний інтеграл до інтеграла того ж типу, але з меншими, також невід'ємними показниками.

Приклад.

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

В загальному випадку для парних степенів має місце теорема.

Теорема. *Інтеграли типу* $\int R(\sin^2 x; \cos^2 x) dx$, *де підінтегральна функція є дробово-раціональна відносно* $\sin^2 x$ *та* $\cos^2 x$ *підстановкою* $\mathrm{tg} x = z \ (\mathrm{ctg} x = z)$ *зводяться до інтегралів від раціональних дробів.*

Доведення. Використаємо тригонометричні формули

$$\sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}; \ \cos^2 x = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 x},$$

далі, очевидно, що підстановка

$$\mathrm{tg} x = z \Rightarrow x = \mathrm{arctg} z \Rightarrow dx = \frac{dz}{1 + z^2} \tag{6.2}$$

зведе інтеграл до виду

$$\int R\left(\frac{z^2}{1 + z^2}; \ \frac{1}{1 + z^2} \right) \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Приклад.

$$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \left| tgx = z \right| = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{a^2\frac{z^2}{1+z^2} + b^2\frac{1}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{(az)^2 + b^2} =$$

$$= \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{az}{b} + C.$$

При інтегруванні $\int \cos^n x \sin^m x\,dx,$ де m та n − цілі невід'ємні числа розглядають два випадки:

1) Принаймні один з показників m (чи n) − число непарне. Тоді функцію $\cos^m xdx$ записуємо у вигляді добутку $\cos^{m-1} x \cdot \cos xdx = \cos^{m-1} x\, d(\sin x),$ тобто заводимо першу степінь косинуса (чи синуса) під диференціал, виражаємо підінтегральну функцію через ту тригонометричну функцію, яка стоїть під диференціалом. Інтеграл тим самим раціоналізується (заміна $\sin x = t,$ чи $\cos x = t$ приводить його до раціонального дробу).

2) Обидва показники m та n − числа парні, то інтеграл зводиться до табличного тригонометричними перетвореннями зниженням показників степеня і перетворенням добутку в суму.

Приклади.

$a)\int \sin^3 x\cos^3 xdx = \int \sin^3 xcos^2 x\cos xdx = \int \sin^3 x\left(1-\sin^2 x\right)d\sin x = \int \sin^3 xd\sin x -$
$-\int \sin^5 xd\sin x = \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$

$b)\int \sin^2 x\cos^2 xdx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2xdx = \frac{1}{8}\int \left(1-\cos 4x\right)dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C.$

Застосовуючи формулу подвійного кута, можна було б і інтеграл *а*) обчислювати так:

$$\int \sin^3 x\cos^3 xdx = \frac{1}{8}\int (2\sin x\cos x)^3 dx = \frac{1}{8}\int \sin^3 2xdx = \frac{1}{16}\int \sin^3 2xd(2x) =$$

$$=\frac{1}{16}\int \sin^2 2x \sin 2x\, d2x = -\frac{1}{16}\int (1-\cos^2 2x)\, d\cos 2x =$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 2x + \frac{1}{48}\cos^3 2x + C.$$

Порівнюючи відповіді, ми можемо зробити висновок, що їх вигляд залежить від методу обчислення інтегралу. Але ці відповіді будуть тотожно рівними, в чому неважко переконатись, розписавши

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$$

6.3. Інтеграли типу $\int \sin\alpha x \cos\beta x dx, \int \sin\alpha x \sin\beta x dx, \int \cos\alpha x \cos\beta x dx.$

Вказані в заголовку пункту інтеграли безпосередньо обчислюються, якщо в них підінтегральні функції перетворити за формулами

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right],$$

$$\sin\alpha x \sin\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\right],$$

$$\cos\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right].$$

Приклад.

$$\int \sin 2x \cos x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 3x + \sin x) dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

6.4. Інтеграли типу: $a)\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx; \quad b)\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx.$

У випадку, коли m і n − парні додатні числа, і n-m − число парне раціоналізуються підстановкою $\mathrm{tg} x = z\ (\mathrm{ctg} x = z)$.

Приклади. Обчислити $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx, \int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{\frac{\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}^2x}}{\frac{1}{\left(1+\mathrm{tg}^2x\right)^2}}d(\mathrm{tg}x)=\int\mathrm{tg}^2x\left(1+\mathrm{tg}^2x\right)d\mathrm{tg}x;$$

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x}=\int\frac{1}{\sin^2 x}\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int\frac{1}{\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2x}}d\mathrm{ctg}x=-\int\left(1+\mathrm{ctg}^2x\right)d\mathrm{ctg}x.$$

Якщо $m-$ непарне, то в чисельнику функцію $\cos^m xdx$ записуємо у вигляді добутку $\cos^{m-1}x\cdot\cos xdx=\cos^{m-1}x\,d(\sin x)$, тобто заводимо першу степінь косинуса (чи синуса) під диференціал, виражаємо підінтегральну функцію через таку, як під диференціалом, і інтеграл тим самим раціоналізується.

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x\cos xdx}{\sin^2 x}=\int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)d\sin x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C.$$

6.5. Огляд основних методів інтегрування

Вид інтегралу	Метод інтегрування
1. $\int F\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx$	Підстановка $\varphi(x)=t$
2. $\int f(x)\varphi'(x)dx$	Інтегрування частинами $\int f(x)\varphi'(x)dx=f(x)\varphi(x)-\int\varphi(x)f'(x)dx$
3. $\int f(x)\varphi^{(n)}(x)dx$	Зводиться до інтегрування добутку $f^{(n)}(x)\varphi(x)$ за допомогою n-кратного інтегрування частинами: $\int f(x)\varphi^{(n)}(x)dx=f(x)\varphi^{(n-1)}(x)-f'(x)\varphi^{(n-2)}(x)+f''(x)\varphi^{(n-3)}(x)+\ldots+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x)\varphi(x)+(-1)^{n-1}\int f^{(n)}(x)\varphi(x)dx$
4. $\int e^{kx}p_n(x)dx$, де $p_n(x)-$ многочлен n-го степеня	Застосовуючи n раз формулу інтегрування частинами одержимо: $\int e^{kx}p_n(x)dx=e^{kx}\left(\frac{p_n(x)}{k}-\frac{p_n'(x)}{k^2}+\frac{p_n''(x)}{k^3}-\ldots+(-1)^n\frac{p_n^{(n)}(x)}{k^{n+1}}\right)+C$
5. $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $D<0$	Підстановка $x+\frac{p}{2}=t$

6. $I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$	Застосовуємо рекурентне співвідношення: $I_n = \frac{x}{(2n-2)\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$
7. $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$	Коли $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб і знаменник $Q(x)=(x-x_1)^n (x-x_2)^m \ldots \left(x^2+px+q\right)^k$, то підінтегральний вираз представляють у вигляді суми найпростіших дробів: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(x-x_2)}$ $+ \frac{M_1 x + N_1}{\left(x^2+px+q\right)} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{M_k x + N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}$
8. $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$	Зводиться до інтегралу від раціонального дробу підстановкою $x=t^k$, де k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$
9. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$	Зводиться до інтегралу від раціонального дробу підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$
10. $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$	Підстановкою $x+\frac{b}{2a}=t$ інтеграл зводиться до суми двох табличних інтегралів $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = M_1 \int \frac{tdt}{\sqrt{at^2+m}} + N_1 \int \frac{dt}{\sqrt{at^2+m}}$
11. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$, де R – раціональна функція $x, \sqrt{ax^2+bx+c}$	Зводиться до інтегралу від раціональних дробів підстановками Ейлера: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}, \ (a>0);$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}, \ (c>0);$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1), \quad \left(b^2-4ac>0\right)$
12. $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, де $P_n(x)$ – многочлен степеня n.	Застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів до рівності $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + k\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$. Продиференціювавши та звівши до спільного знаменника одержимо тотожність $P_n(x) = Q'_{n-1}(x)\left(ax^2+bx+c\right) + \frac{1}{2} Q_{n-1}(x)(2ax+b) + k,$ яка дає нам систему $n+1$ лінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів

	многочлена $Q_{n-1}(x)$ і множника k
13. $\int \frac{dx}{(x-x_1)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}$	Підстановкою $x-x_1=\frac{1}{t}$ зводиться до інтегралу (12).
14. $\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx$, де m, n, p – раціональні числа (інтеграл від біноміального диференціала)	1. Якщо p – ціле додатне число, то двочлен підноситься по біному Ньютона до степеня і інтеграл дорівнює сумі інтегралів від степеневих функцій. 2. Якщо p – ціле від'ємне число, то підстановка $x=t^k$, де k – спільний знаменник дробів m і n зводить до інтегралу від раціональної функції. 3. Якщо $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, то застосовують підстановку $a+bx^n=t^k$, де k – знаменник дробу p; 4. Якщо $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле число, то застосовується підстановка $a+bx^n=x^n t^k$, де k – знаменник дробу p
15. $\int R(\sin x, \cos x)dx$	До інтегралу від раціонального дробу завжди зводить підстановка $tg\frac{x}{2}=t$. Однак дроби будуть простішими, якщо скористатись такими підстановками: Якщо $R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x)$, то підстановка $\cos x=t$; Якщо $R(\sin x, -\cos x)=-R(\sin x, \cos x)$, то підстановка $\sin x=t$; Якщо $R(-\sin x, -\cos x)=R(\sin x, \cos x)$, то підстановка $\mathrm{tg} x=t$
16. $\int \sin ax \sin bx dx$ $\int \sin ax \cos bx dx$ $\int \cos ax \cos bx dx$	Добуток перетворюємо в суму. Одна із формул: $\sin ax \sin bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right)$
17. $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де m і n – цілі числа	Якщо $m=2k+1,\ k>0$ – підстановка $\cos x=t$; якщо $n=2k+1,\ k>0$ – підстановка $\sin x=t$; якщо $m+n=2k,\ k<0$ – підстановка $tgx=t$; якщо $m=2k,\ k>0\ і\ n=2l,\ l>0$ – знижують степінь, застосовуючи формули $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$
18. $\int \sin^p x \cos^q x dx$, де p і q – раціональні	Підстановкою $\sin x=t$ зводиться до інтеграла від біноміального диференціалу $\int \sin^p x \cos^q x dx=\int t^p \left(1-t^2\right)^{q-1} dt$ (див. п.14)

числа	
19. $\int R\left(e^{ax}\right)dx$	Підстановкою $e^{ax}=t$ зводиться до інтеграла від раціонального дробу

Завдання для самоконтролю

1. Універсальна тригонометрична підстановка, раціональність її використання.

2. Пояснити застосування заміни тригонометричних функцій обчислення $\int \sin^m x \cos^n x dx$ для різних значень чисел m і n.

3. Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{(x+1)^2 dx}{x\sqrt{x}}$; 2) $\int \frac{\sin x + \mathrm{ctg} x}{\mathrm{tg}\, x}dx$; 3) $\int \frac{dx}{2x\ln x}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+7}}$; 5) $\int xe^{3x^2+2}dx$;
6) $\int xe^{-3x}dx$; 7) $\int \cos(\ln x)dx$; 8) $\int \frac{x^4-2x^3-11x^2-22}{x^3-13x-12}dx$; 9) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x+3}$;
10) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

Лекція 7. Визначений інтеграл

7.1. Означення визначеного інтеграла.

7.2. Умови існування визначеного інтеграла.

7.3. Основні властивості визначеного інтеграла.

7.4. Інтеграл із змінною верхньою межею.

7.5. Формула Ньютона-Лейбніца.

7.1. Означення визначеного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

Позначимо це розбиття через τ, а точки $x_0, x_1 \ldots, x_n$ будемо називати точками розбиття. В кожному з одержаних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ виберемо довільну точку $\xi_i (x_{i-1} \le \xi_i \le x_i), i = 1, \ldots, n.$ Через Δx_i позначимо різницю $x_i - x_{i-1}$, яку називають довжиною відрізка $[x_{i-1}, x_i]$.

Утворимо суму:

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f\left(\xi_n\right)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I\,, \tag{7.1}$$

яку назвемо *інтегральною сумою* для функції $f(x)$ на $[a,b]$, яка відповідає даному розбиттю $[a,b]$ на відрізку і даному вибору проміжних точок ξ_i.

Позначимо через λ довжину найбільшого відрізка розбиття τ: $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\}$.

Означення. Якщо існує скінченна границя I інтегральної суми (7.1) за $\lambda \to 0,$ то ця границя називається ***визначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається наступним чином:

$$I=\int_a^b f(x)dx \tag{7.2}$$

або

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

В цьому випадку функція $f(x)$ називається *інтегровною* на $[a,b]$. Числа a та b називаються відповідно *нижньою* і *верхньою межами* інтегрування, $f(x)$ – *підінтегральною функцією,* x – *змінною інтегрування.*

З означення визначеного інтеграла випливає, що величина інтеграла (7.2) залежить тільки від виду функції $f(x)$ та чисел a, b. Отже, якщо задані $f(x)$ і межі інтегрування, то інтеграл (7.2) визначається однозначно і є деяким числом. Звідси, зокрема, випливає, що визначений інтеграл не залежить від вибору позначення для аргументу підінтегральної функції, тобто від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(\xi)d\xi \quad \text{і т. д.}$$

7.2. Умови існування визначеного інтеграла

Теорема 1 (*необхідна умова інтегровності функції*). *Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.*

Доведення. Припустимо обернене, тобто, що $f(x)$ необмежена на $[a,b]$. Покажемо, що в цьому випадку інтегральну суму σ можна зробити як завгодно великою при будь-якому розбитті відрізка $[a,b]$ із-за вибору точок $\xi_1,\xi_2,...\xi_n$. Дійсно, оскільки $f(x)$ необмежена на $[a,b]$, то при будь-якому розбитті відрізка $[a,b]$ вона має цю властивість хоча б на одному відрізку розбиття, наприклад, на $[x_0,x_1]$. Виберемо на інших відрізках розбиття точки $\xi_2,\xi_3,...\xi_n$ довільно і позначимо

$$\sigma' = f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Задамо довільне число $M > 0$ та візьмемо таке ξ_1 на $[x_0, x_1]$, щоби

$$|f(\xi_1)| \geq \frac{|\sigma'| + M}{\Delta x_1}.$$

Це можна зробити із-за необмеженості функції $f(x)$ на $[x_0, x_1]$. Тоді

$$|f(\xi_1)|\Delta x_1 \geq |\sigma'| + M,$$

$$|\sigma| = |f(\xi_1)\Delta x_1 + \sigma'| \geq |f(\xi_1)|\Delta x_1 - |\sigma'| \geq M,$$

тобто інтегральна сума σ за абсолютною величиною більша від будь-якого наперед заданого числа. Тому вона і не має скінченної границі при $\lambda \to 0$, а це означає, що визначений інтеграл від необмеженої функції не існує.

Зауваження. Обернена теорема не має місця, тобто умова обмеженості функції $f(x)$ необхідна, але не достатня умова інтегровності функції. Пояснимо це твердження на прикладі. Розглянемо функцію Діріхле на відрізку $[0,1]$.

Функція Діріхле, очевидно, обмежена. Проте вона не інтегровна на [0,1]. Покажемо це. Якщо за будь-якого розбиття відрізка [0,1] вибрати раціональні точки $\xi_i (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i)$, то одержимо

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1,$$

а якщо взяти ξ_i ірраціональними, то одержимо

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Таким чином, при розбитті на як завгодно малі частини відрізка, інтегральна сума може приймати, як значення, яке дорівнює 0, так і значення, яке дорівнює 1. Тому інтегральна сума σ при $\lambda \to 0$ границі не має.

Таким чином, для існування визначеного інтеграла від деякої функції $f(x)$, крім обмеженості, вона повинна мати деякі додаткові властивості, які забезпечать її інтегровність. Для встановлення цих властивостей необхідно ввести поняття нижніх і верхніх сумм Дарбу.

Нехай функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a,b]$ і $\tau-$розбиття цього відрізка точками: $a=x_0<x_1<...<x_{i-1}<...<x_i<x_n=b$. Позначимо через m_i і M_i відповідно точну нижню і точну верхню грані цієї функції на відрізку $[x_{i-1},x_i]$ та складемо наступні суми:

$$S=M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+...+M_n\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,$$

$$s=m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+...+m_n\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i.$$

Ці суми називаються відповідно *верхньою* і *нижньою сумами* або *верхньою і нижньою сумами Дарбу* функції $f(x)$ для даного розбиття τ відрізка $[a,b]$.

З означення нижньої і верхньої граней випливає, що $m_i\le f(\xi_i)\le M_i$ для $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. Звідси

$$s=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\le\sigma=\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i\right)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=S,$$

тобто будь-яка інтегральна сума і суми Дарбу для даного розбиття пов'язані нерівностями $s\le\sigma\le S.$

Теорема 2 (*необхідна і достатня умова інтегровності*).

Для того, щоб обмежена на відрізку $[a,b]$ *функція* $f(x)$ *була інтегрованою на цьому відрізку, необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0.$$

Відзначимо деякі класи інтегровних функцій:

– функції неперервні на відрізку $[a,b]$;

– функції обмежені на відрізку $[a,b]$ і неперервні на ньому всюди, крім скінченного числа точок.

7.3. Основні властивості визначеного інтеграла

Інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ було введено для випадку $a<b$. Узагальнимо поняття визначеного інтеграла на випадок, коли межі інтегрування співпадають або нижня межа більша верхньої. За означенням покладемо

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx. \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Основні властивості визначеного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Доведення.

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx.$$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх інтегралів,

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Доведення.

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Зауваження. Властивість 2 має місце для будь-якого скінченного числа доданків.

3. Які б не були числа a, b, c має місце рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (7.3)$$

Доведення. Припустимо спочатку, що $a < c < b$. Оскільки границя інтегральної суми σ не залежить від способу розбиття відрізка $[a, b]$, то будемо розбивати $[a, b]$ так, щоб точка c була точкою розбиття. Якщо, наприклад, $c = x_m$, то σ можна розбити на дві суми:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Переходячи в цій рівності до границі при $\lambda \to 0$, одержимо рівність (7.3).

Доведення для іншого розташування точок a, b, c легко зводиться до попереднього випадку. Нехай, наприклад, $a < b < c$, тоді за доведеним, маємо

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

звідки,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

тобто знову прийшли до рівності (7.3).

4. Якщо на відрізку $[a, b]$, де $a < b$, функція $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Доведення. Дійсно, будь-яка інтегральна сума $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ для функції $f(x)$ на $[a,b]$ невід’ємна, оскільки $f(\xi_i) \geq 0,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0,\ i = 1,2,3...,n.$

Переходячи до границі при $\lambda \to 0$ в нерівності $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0,$ одержимо

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Зауваження. Якщо на відрізку $[a,b]$, де $a < b$, функція $f(x) \geq 0,$ то

$$S_{крив.трапеції} = \int_a^b f(x)dx,$$

де ця трапеція обмежена віссю *Ox,* вертикальними прямими $x = a$ та $x = b$ і графіком невід’ємної функції $y = f(x).$

5. Якщо на відрізку $[a,b]$ $(a < b)$ виконується нерівність для всіх значень незалежної змінної $f(x) \leq g(x),$ то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{7.4}$$

Доведення. Застосуємо властивість 4 до функції $g(x) - f(x) \geq 0.$ Маємо

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0.$$

За властивістю 2

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0,$$

звідки одержимо нерівність (7.4).

6. Для функції $f(x)$, визначеної на відрізку $[a,b]$ $(a<b)$, має місце нерівність

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \tag{7.5}$$

Доведення.

Застосувавши властивість 4 до очевидних нерівностей $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, одержимо

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$$

а це рівносильно нерівності (7.5).

Наслідок. Якщо всюди на відрізку $[a,b]$ $(a<b)$, $|f(x)| \le k$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le k(b-a). \tag{7.6}$$

Дійсно, з нерівності $|f(x)| \le k$ та властивостей 5 і 6 випливає, що

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b kdx = k\int_a^b dx.$$

Звідси, зауваживши, що

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n 1\cdot \Delta x_i = b-a, \tag{7.7}$$

отримуємо (7.6).

7. Теорема 3 (*оцінка визначеного інтеграла*).

Якщо m *і* $M-$ *відповідно найменше і найбільше значення функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a,b]$, *то*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \tag{7.8}$$

Доведення.

За умовою, для будь-якого $x \in [a,b]$ маємо $m \le f(x) \le M$. Застосовуючи властивість 5 до цих нерівностей, маємо

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx,$$

звідки з врахуванням (7.7) одержимо нерівності (7.8).

8. Теорема 4 ***(теорема про середнє).*** *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$, *то на цьому відрізку існує точка* c *така, що*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{7.9}$$

Доведення. Оскільки $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то за теоремою Вейєрштрасса існують числа m і M такі, що

$$\min_{[a,b]} f(x) = m \le f(x) \le M = \max_{[a,b]} f(x).$$

Звідси, за властивістю 7, одержимо

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

і, отже, $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$. Покладемо

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu \ \ (m \le \mu \le M).$$

Оскільки число μ знаходиться між найменшим і найбільшим значеннями неперервної функції $f(x)$ на $[a,b]$, то за теоремою про проходження неперервної функції через будь-яке проміжне значення існує точка $c \in [a,b]$ така, що $f(c) = \mu$. Тому

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c),$$

і це рівносильне рівності (7.9).

7.4. Інтеграл із змінною верхньою межею

Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$. Тоді вона інтегровна і на будь-якому відрізку $[a,x]$, де $a \le x \le b,$ тобто для будь-якого $x \in [a,b]$ має зміст інтеграл $\int\limits_a^x f(t)dt.$

Розглянемо функцію

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Ця функція $\Phi(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$ і називається *інтегралом із змінною верхньою межею*.

Теорема *(основна властивість інтеграла зі змінною верхньою межею).*

Похідна інтеграла від неперервної функції по змінній верхній межі існує і дорівнює значенню підінтегральної функції в точці, що дорівнює верхній межі, тобто

$$\Phi'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)dt \right)' = f(x). \tag{7.10}$$

Доведення. Нехай $x \in [a,b],\ x + \Delta x \in [a,b]$. Тоді

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(x)dt - \int\limits_a^x f(x)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)dt.$$

Використовуючи теорему про середнє, одержимо

$$\Delta\Phi = f(c)\Delta x,$$

де число $c -$ число, яке міститься між числами x і $x + \Delta x$. Поділимо обидві частини рівності на Δx:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c).$$

Тому, переходячи до границі при $\Delta x \to 0$, в останній рівності, одержимо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = \lim\limits_{c \to x} f(c) = f(x)$ або $\Phi'(x) = f(x)$.

Зауваження.

З доведеної теореми, зокрема, випливає, що будь-яка неперервна на відрізку функція має первісну на цьому відрізку, причому функція $\Phi(x) -$ інтеграл з змінною верхньою межею – є первісною для $f(x)$. А оскільки будь-яка інша первісна функції $f(x)$ може відрізнятися від $\Phi(x)$ тільки на сталу, то встановлено зв'язок між невизначеним і визначеним інтегралом у вигляді

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(x)dt + C,$$

де $C -$ довільна стала.

7.5. Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема (*основна теорема інтегрального числення*). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$. *Якщо функція* $F(x)$ *є довільною її первісною на цьому відрізку, то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{7.11}$$

Ця формула називається ***формулою Ньютона-Лейбніца.***

Доведення. Нехай $F(x)$ є деякою первісною функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. За доведеною вище теоремою, функція $\Phi(x) = \int_a^x f(x)dt$ також є первісною функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Таким чином, функції $F(x)$ та $\Phi(x) -$ дві первісні однієї і тієї ж функції $f(x)$, тому

$$\Phi(x) = F(x) + C,\ a \le x \le b.$$

За значенння $x = a$ з рівності випливає, що $C = -F(a)$.

Отже,

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a).$$

Поклавши $x = b,$ одержимо формулу (7.11).

Якщо ввести позначення $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$ то формулу (7.11) можна переписати так $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Приклад. $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$

Завдання для самоконтролю

1. Дати означення інтегральної суми для функції однієї змінної та визначеного інтеграла.
2. Навести приклад обмеженої, але не інтегровної функції.
3. Сформулювати та довести декілька властивостей визначеного інтеграла.
4. Сформулювати теорему про середнє значення та пояснити її зміст.
5. Означити інтеграл зі змінною верхньою межею, пояснити його основну властивість.
6. Записати та довести формулу Ньютона-Лейбніца.
7. Обчислити інтеграли:

1) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\cos x dx;$ 2) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx;$ 3) $\int_1^2 \left(\sqrt[4]{(x-1)^3} + 3e^{2x-1}\right)dx.$

Лекція 8. Обчислення визначеного інтеграла

8.1. Визначений інтеграл як границя інтегральних сум.

8.2. Заміна змінної у визначеному інтегралі.

8.3. Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

8.4. Наближене обчислення визначених інтегралів.

8.4.1. Формули прямокутників і трапецій.

8.4.2. Формула Сімпсона.

8.1. Визначений інтеграл як границя інтегральних сум

Один із способів обчислення визначеного інтеграла пов'язаний з безпосереднім використанням означення інтеграла як границі інтегральних сум

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Приклад. Обчислити $\int_1^2 x^2 dx.$

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок $[1,2]$ на частини так, щоб абсциси точок розбиття утворювали геометричну прогресію:

$$x_0 = 1, x_1 = q, x_2 = q^2, ..., x_{n-1} = q^{n-1}, x_n = q^n = 2,$$

де $q = 2^{1/n}$. Точку ξ_i виберемо на лівому кінці $i-$го відрізка.

Тоді

$$f(x_0) = 1,\ f(x_1) = q^2, f(x_2) = q^4,\ ...\ , f(x_{n-1}) = q^{2(n-1)},$$

$$\Delta x_1 = q - 1, \Delta x_2 = q^2 - q = q(q-1),$$

$$\Delta x_3 = q^2(q-1), ..., \Delta x_n = q^{n-1}(q-1),$$

$$\sigma = 1\cdot(q-1) + q^3(q-1) + q^6(q-1) + \ldots + q^{3(n-1)}(q-1) = (q-1)\times$$

$$\times(1 + q^3 + q^6 + \ldots + q^{3(n-1)}) = (q-1)\frac{q^{3n}-1}{q^3-1} = \frac{q^{3n}-1}{q^2+q+1} =$$

$$= \frac{2^3-1}{2^{\frac{2}{n}} + 2^{\frac{1}{n}} + 1} = \frac{7}{2^{\frac{2}{n}} + 2^{\frac{1}{n}} + 1}.$$

Отже,

$$\int_1^2 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{2^{\frac{2}{n}} + 2^{\frac{1}{n}} + 1} = \frac{7}{3}.$$

8.2. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема. *Нехай* $f(x)-$ *неперервна функція на відрізку* $[a,b]$.*Тоді, якщо:*

1) *функція* $x=\varphi(t)-$ *диференційовна на* $[\alpha,\beta]$ *і* $\varphi'(t)$ *неперервна на* $[\alpha,\beta]$*;*

2) *множиною значень функції* $x=\varphi(t)$ *є відрізок* $[a,b]$*;*

3) $\varphi(\alpha)=a$ *та* $\varphi(\beta)=b$, *то має місце рівність*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\ [\varphi(t)]\ \varphi'(t)dt \tag{8.1}$$

Ця формула називається ***формулою заміни змінної у визначеному інтегралі*** або ***формулою інтегрування підстановкою.***

Доведення.

Нехай $F(x)-$ будь-яка первісна для функції $f(x)$ на $[a,b]$. Тоді для точок $t\in[\alpha,\beta]$ має зміст складена функція $F[\varphi(t)]$, яка є первісною для $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. За формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(x)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

З цих рівностей і випливає формула (8.1).

Зауваження. Якщо при обчисленні невизначеного інтеграла з допомогою заміни змінної від нової змінної t потрібно повертатися до старої змінної x, то при обчисленні визначеного інтеграла цього робити не потрібно, оскільки тепер потрібно знайти число, яке, за доведеною теоремою, дорівнює значенню кожного з інтегралів.

Приклад. Обчислити $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$

Розв'язання. Розглянемо підстановку $x = \sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$ Дана підстановка задовольняє всі умови теореми, оскільки $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ неперервна на $[0,1]$, функція $\varphi(t) = \sin t$ диференційовна на $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ і $\varphi'(t) = \cos t$ неперервна на $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$; при зміні t від 0 до $\frac{\pi}{2}$ функція $\varphi(t) = \sin t$ змінюється від 0 до 1 і $\varphi(0) = 0, \varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

Застосуємо формулу (8.1):

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t) == \left(\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Зауваження. При використанні формули (8.1) необхідно перевіряти виконання перерахованих в теоремі умов. Якщо ці умови порушуються, то можна одержати неправильний результат.

Приклад. Обчислити $\int_0^{\pi} dx.$

Розв'язання. Маємо $\int_0^{\pi} dx = x\big|_0^{\pi} = \pi.$ З іншого боку,

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)}.$$

Підстановка $\text{tg}x = t$ формально приводить до наступного результату

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{d(\text{tg}x)}{1+\text{tg}^2 x} = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0.$$

Одержали неправильний результат, оскільки $\pi \neq 0.$ Це сталося тому, що функція $t = \text{tg}x$ розривна для $x = \dfrac{\pi}{2}$ і не задовольняє умови теореми.

8.3. Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема. *Якщо функція* $u(x)$ *і* $v(x)$ *мають неперервні похідні на відрізку* $[a,b]$, *то має місце формула*

$$\int_a^b u dv = u v\Big|_a^b - \int_a^b v du. \tag{8.2}$$

Доведення. Оскільки функція $u(x)v(x)$ є первісною функції $\left[u(x)v(x)\right]' = u(x)v'(x) + v'(x)u(x),$ то за формулою Ньютона- Лейбніца

$$\int_a^b \left[u(x)v'(x) + v(x)u'(x)\right]dx = \left[u(x)v\left(x\right)\right]\Big|_a^b$$

або, що те ж сааме

$$\int_a^b u dv + \int_a^b v du = uv\Big|_a^b,$$

звідки і випливає (8.2).

Приклад.

$$\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = x \ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} = e - x\Big|_1^e = 1.$$

8.4. Наближене обчислення визначених інтегралів

При розв’язувані фізичних і технічних задач доводиться знаходити визначені інтеграли від функцій, первісні яких не виражаються через елнментарні функції. Це привело до необхідності виведення наближених формум обчислення визначених інтегралів.

Основна ідея побудови цих формул полягає в заміні підінтегральної функції на функцію простішого вигляду, наприклад, многочлен, інтеграл від якого знаходять безпосередньо за формулою Ньютона-Лейбніца.

8.4.1. *Формули прямокутників і трапецій*

Найпростіший спосіб наближеного обчислення визначених інтегралів випливає з означення останнього. Поділимо відрізок $\left[a,b\right]$ на рівні частини точками

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad (k = 0,1,...,n) \tag{8.3}$$

і покладемо

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \tag{8.4}$$

Вираз (8.4) називається *формулою прямокутників.* В формулі прямокутників шукана площа фігури, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a, x = b$, наближено дорівнює сумі площ прямокутників (рис.8.1).

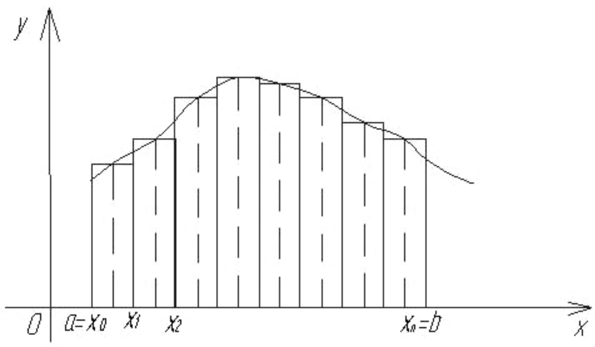

Рис.8.1. Площі прямокутників.

Зауважимо, що якщо функція є лінійною, то для неї формула (8.4) точна.

Приведемо ще другий природній спосіб наближеного обчислення визначеного інтеграла, який приводить до *формули трапецій.* Він полягає в тому, що відрізок $\left[a,b\right]$ ділиться на рівні частини точками системи (8.3) і вважається наближено, що

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right) \qquad (8.4)$$

Це і є формула трапеції. В ній площа криволінійної трапеції замінюється сумою площ прямолінійних трапецій (рис. 8.2).

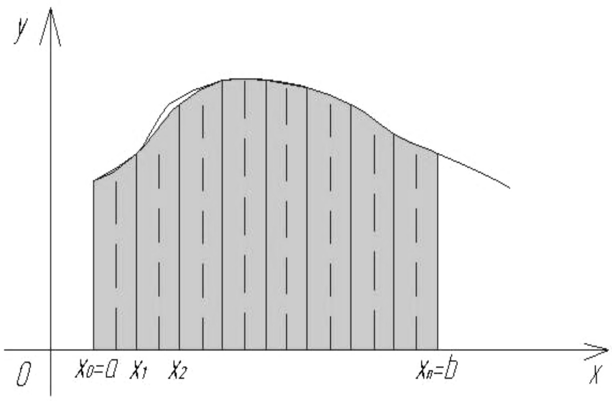

Рис. 8.2. Прямолінійні трапеції.

Формула трапецій точна для многочленів не вище першого степеня. В цьому розумінні формула трапеції не має переваг перед формулою прямокутників, обидві вони є точними для лінійних функцій. Формули прямокутників і трапецій тим точніші, чим більше n. Можна показати, якщо функція $f(x)$ має на $\left[a,b\right]$ неперервну другу похідну, то абсолютна величина похибки прямокутників і трапецій не більша за

$$\Delta = \frac{(b-a)^3}{12n^2}M, M = \max_{x\in[a;b]} f''(x), \qquad (8.5)$$

причому наявність похідних порядку вище другого не впливає на точність.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ з точністю до 0,001.

За формулою (8.5) маємо:

$$R_n < 0, \quad |R_n| < \frac{1}{6n^2}.$$

Візьмемо $n = 10$, тоді

$$\left|R_{10}\right| < \frac{1}{600} < 1\cdot 7\cdot 10^{-3}.$$

Обчислення подамо таблицею:

x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_i	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,7143	0,6667	0,6250	0,5882	0,5556	0,5263	0,5000

Отже, за формулою (8.4):

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1\cdot 500}{2} + 6{,}1877\right) = 0{,}69377.$$

8.4.2. *Формула Сімпсона*

Для обчислення визначеного інтеграла можна дістати наближену формулу вищої точності, ніж формули прямокутників і трапецій, вписуватимемо в дану криву замість прямолінійних відрізків гілки *параболи*.

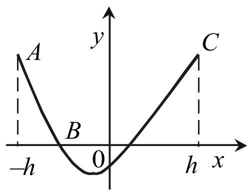

Рис. 8.3. Парабола.

Можна довести, що площа S криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y = ax^2 + bx + c$, яка проходить через точки A, B, C (рис.8.3), обчислюється формулою:

$$S = \frac{h}{3}\left(y_1 + 4y_2 + y_3\right) \qquad (8.6)$$

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену графіком функції $y = f(x), x \in [a, b]$, і розіб’ємо відрізок інтегрування [a; b] на $2n$ рівних частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{2k} < ... < x_{2n-1} < x_{2n} = b.$$

Провівши через кожні три точки $A_0A_1A_2, ..., A_{2k-2}A_{2k-1}A_{2k}, ..., A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}$

параболу, дістанемо n криволінійних трапецій, обмежених згори параболами.

За формулою (8.6) площа кожної такої частинної криволінійної трапеції, що спирається на відрізок $[x_{2k}, x_{2k+2}]$, подається у вигляді

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}\right),$$

де $y_k = f(x_k)$, $0 \le k \le 2n.$

Додаючи почленно ці наближені рівності, дістаємо формулу:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{6n}\left[y_0 + y_n + 2(y_2 + ... + y_{2n-2}) + 4(y_1 + ... + y_{2n-1})\right]. \qquad (8.7)$$

Формула (8.7) *називається формулою Сімпсона*.

Можна довести, що похибка формули (8.7) не перевищує

$$M\frac{(b-a)^5}{2880n^4}, \quad M = \max_{x\in[a;b]}\left|f^{\mathrm{IV}}(x)\right|. \qquad (8.8)$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^1 e^{x^2}dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. За формулою (8.8) маємо:

$$y^{\mathrm{IV}} > 0, \ \left|y^{\mathrm{IV}}\right| = y^{\mathrm{IV}} = 4e^{x^2}(4x^4 + 12x^2 + 3).$$

Очевидно, що похідна y^{IV} зростає для $0 \le x \le 1$і набуває найбільшого значення за $x = 1$.

Отже, $\left|R_n\right| \le \frac{1}{180n^4}\cdot 76e.$

Поклавши $n = 10$, дістаємо

$$\left|R_n\right| \le \frac{76e}{180\cdot 10^4} < 0{,}00012.$$

Розрахунки наведемо в таблиці:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	0	1,0101	1,0408	1,0942	1,1735	1,2840	1,433	1,6323	1,8965	2,2479	2,7183

Тоді за формулою (8.7) маємо

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1,463.$$

Зауваження. У деяких випадках застосовують досконаліші обчислювальні схеми (наприклад, Гаусса, Чебишова і т. ін.), які за рахунок вибору значень функції дають змогу швидше обчислювати наближені значення визначених інтегралів.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати теорему про заміну змінної у визначеному інтегралі та пояснити її використання на прикладі.

2. Вивести формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

3. Обчислити: 1) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos 3x dx$; 2) $\int_0^1 e^{2x} \sin x dx$.

Лекція 9. Невласні інтеграли 1-го роду

9.1. Означення невласного інтеграла на нескінченному проміжку.

9.2. Формули інтегрального числення для невласних інтегралів.

9.3. Ознаки збіжності інтегралів.

9.1. Означення невласного інтеграла на нескінченному проміжку

Означивши визначений інтеграл як границю інтегральних сум, ми припускали, що відрізок інтегрування скінченний, а підінтегральна функція обмежена на цьому відрізку. Узагальнимо поняття інтеграла як на випадок функцій визначених на необмежених проміжках, так і на випадок функцій, визначених на обмежених проміжках, але необмежених на них.

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $\left[a,+\infty\right)$ і інтегровна на будь-якому відрізку $\left[a,b\right]$. Якщо існує границя $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то її називають ***невласним інтегралом*** і позначають $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Таким чином:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{9.1}$$

Якщо границя (9.1) існує (дорівнює сталій величині), то, кажуть, що *невласний інтеграл збігається*. Якщо ця границя, а, значить, і невласний інтеграл не існують, то кажуть, що *невласний інтеграл розбігається*.

Аналогічно до (9.1) вводиться невласний інтеграл на проміжку $\left(-\infty,b\right]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx \tag{9.2}$$

Як суму інтегралів виду (9.1) і (9.2) визначимо невласний інтеграл з двома нескінченними границями, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \tag{9.3}$$

де c – будь-яке число за умови існування обидвох інтегралів справа.

Зауваження. Якщо для якогось фіксованого числа c один із інтегралів $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ чи $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ розбігається, тоді є розбіжним і інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Геометрична інтерпретація

Нехай задано невід'ємну функцію $y = f(x)$, неперервну на промені $[a, +\infty)$. Для кожного $b > a$ визначений інтеграл $\int_{a}^{b} f(x)dx$ задає площу криволінійної трапеції *aABb*.

Перемістивши відрізок Bb праворуч, дістанемо замість значення невласного інтеграла $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ площу «трикутника $Aa\infty$» (рис. 9.1).

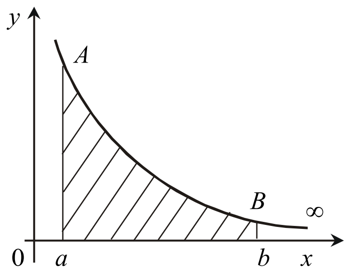

Рис. 9.1. Площа нескінченної криволінійної трапеції.

Приклад. Дослідити збіжність інтеграла $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} (a > 0)$ залежно від параметра λ.

Зауваження. Інтеграл $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} (a > 0)$ називають ***інтегралом Діріхле***.

Розв'язання. Скориставшись означенням (9.1), розглянемо два випадки.

1. $\lambda \neq 1$:

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A\frac{dx}{x^\lambda}=\lim_{A\to+\infty}\left.\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right|_a^A=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{A^{1-\lambda}}{1-\lambda}-\frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{ll}\infty, & \text{якщо } \lambda<1;\\ \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}, & \text{якщо } \lambda>1.\end{array}\right.$$

2. $\lambda=1$: $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x}\pm\lim_{A\to\infty}\int_a^A\frac{dx}{x}=\lim_{A\to\infty}\left(\ln A-\ln a\right)=\infty.$

Отже,

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}\to\left[\begin{array}{ll}\text{збіжний}, & \text{якщо } \lambda>1;\\ \text{розбіжний}, & \text{якщо } \lambda\le 1.\end{array}\right. \tag{9.4}$$

Приклад. Дослідити збіжність інтеграла $\int_0^{+\infty}\sin bx dx (b>0)$.

Розв'язання.За означенням (9.1) маємо

$$\int_0^{+\infty}\sin bx dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\sin bx=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}\cos bx\Big|_0^A\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}\cos bA+\frac{1}{b}\right),$$

границя $\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}\cos bA\right)$ не існує, тому інтеграл розбіжний.

9.2. Формули інтегрального числення для невласних інтегралів

Із-за властивостей границі і означення невласного інтеграла, як границі визначеного інтеграла, на невласні інтеграли переноситься багато властивостей визначеного інтеграла.

Розглянемо деякі з них.

1. ***Формула Ньютона-Лейбніца*** для невласних інтегралів. Якщо функція $f(x)$ визначена, інтегровна на проміжку $\left[a,+\infty\right)$ і $F(x)-$будь-яка її первісна на ньому, то

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=F(+\infty)-F(a),$$

де $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

2. *Лінійність невласного інтеграла*. Якщо невласні інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються, то для будь-яких чисел λ, μ збігається і невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}\left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)dx$, причому

$$\int\limits_a^{+\infty}\left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)dx=\lambda\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx+\mu\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$$

3. *Інтегрування нерівностей*

Якщо інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx, \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються, і для всіх $x\in[a,+\infty)$ виконується нерівність $f(x)<\mathrm{g}(x)$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx<\int\limits_a^{+\infty}\mathrm{g}(x)dx.$$

4. *Правило інтегрування частинами*

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервно-диференційовні на проміжку $[a,+\infty)$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} udv=uv\Big|_a^{+\infty}-\int\limits_a^{+\infty} vdu,$$

причому, якщо будь-які два з виразів $\int\limits_a^{+\infty} udv$, $uv\Big|_a^{+\infty}$ та $\int\limits_a^{+\infty} vdu$ мають зміст (тобто відповідні границі існують та скінченні), то має зміст і третій.

9.3. Ознаки збіжності інтегралів

Якщо функція *f*(*x*) додатна, то інтеграл

$$\Phi(A)=\int_a^A f(x)dx \tag{9.5}$$

являє собою монотонно зростаючу функцію від змінної *A*. Питання про існування скінченної границі при $A\to\infty$ розв'язується за допомогою поданих далі (без доведення) теорем.

Теорема. *Для збіжності невласного інтеграла (9.1) необхідно і достатньо, щоб інтеграл (9.5) зі зростанням A залишався обмеженим зверху*:

$$\int_a^A f(x)dx \le L \qquad (L=\text{const}).$$

Теорема. *Якщо хоча б для значень змінної таких, що* $x\ge A$ *виконується нерівність*

$$f(x)\le g(x),$$

то із збіжності інтеграла $\int_a^\infty g(x)dx$ *випливає збіжність інтеграла* $\int_a^\infty f(x)dx$ *або із розбіжності* $\int_a^\infty f(x)dx$ *випливає розбіжність інтеграла* $\int_a^{+\infty} g(x)dx.$

Теорема. *Якщо існує границя*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K \quad (0\le K\le+\infty), \tag{9.6}$$

то із збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *при* $K<+\infty$ *випливає збіжність інтеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, *а із розбіжності першого інтеграла випливає розбіжність другого.*

Теорема *(Коші).* *Нехай для достатньо великих x функція f(x) має вигляд*

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{x^\lambda} \quad (\lambda>0).$$

Тоді: 1) якщо $\lambda > 1$ *і* $\varphi(x) \le c$*, то інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *збігається;*

2) якщо $\lambda \le 1$ *і* $\varphi(x) \ge c > 0$ *то цей інтеграл розбіжний.*

Теорема. *Якщо збіжним є інтеграл* $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|dx,$ *то збіжний також інтеграл* $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx.$

Означення. Якщо одночасно з інтегралом $\int\limits_a^{\infty} f(x)$ збігається інтеграл $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|dx$, то інтеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ називається ***абсолютно збіжним***, а функція $f(x)$ – *абсолютно інтегровною* на проміжку $[a; \infty)$.

Теорема *(ознака Абеля).* *Нехай функції f(x) і g(x) визначені на проміжку [a; ∞), причому:*

1)функція f(x) інтегровна на цьому проміжку, так що інтеграл (9.1) збігається;

2)функція g(x) монотонна і обмежена: $|g(x)| \le L \quad (L = \text{const}).$

Тоді інтеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ *збіжний.*

Теорема *(ознака Діріхле).* *Нехай виконуються такі умови:*

1) функція f(x) інтегровна на будь-якому проміжку [a, A] і інтеграл $\int\limits_a^{A} f(x)dx$ *обмежений:*

$$\left|\int\limits_a^{A} f(x)dx\right| \le K \quad (K = \text{const});$$

2) функція g(x) монотонно прямує до 0 при $x \to +\infty$*:*

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0.$$

Тоді інтеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ *збіжний.*

Приклади. Дослідити збіжність інтегралів:

1. $\int\limits_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx \quad (a>0)$. 2. $\int\limits_a^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}dx \quad (a>0)$. 3. $\int\limits_0^{\infty} x^{\mu}e^{-ax}\cos xdx \quad (\mu, a>0)$.

Розв'язання. 1. $\int\limits_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx \quad (a>0)$.

За ознакою Діріхле візьмемо

$$f(x)=\sin x, \quad g(x)=\frac{1}{x^2}.$$

Умови 1 і 2 виконано, оскільки $\left|\int\limits_a^{A} \sin xdx\right| = |\cos a-\cos A| \le 2$ і функція $\frac{1}{x^2}$ монотонно спадає, прямуючи до 0 при $x\to\infty$, тому інтеграл збіжний.

2. $\int\limits_a^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}dx \quad (a>0)$.

За ознакою Абеля візьмемо

$$f(x)=\frac{1}{x^3},\ g(x)=\operatorname{arctg} x.$$

За умовою 1 інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ збіжний, за умовою 2

$$|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл збіжний.

3. $\int\limits_0^{\infty} x^{\mu}e^{-ax}\cos xdx \quad (\mu, a>0)$.

За ознакою Абеля візьмемо

$$f(x) = x^{\mu} e^{-ax}, \quad g(x) = \cos x.$$

Інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} x^{\mu} e^{-ex} dx$ збіжний (довести), $|\cos x| \le 1$, тому розглядуваний інтеграл збіжний.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати означення невласного інтеграла 1-го роду (на різних нескінченних проміжках).
2. Дослідити збіжність інтеграла Діріхле.
3. Записати деякі формули інтегрального числення для невласного інтеграла.
4. Сформулювати ознаки збіжності невласного інтеграла 1-го роду.
5. Обчислити невласні інтеграли або довести їхню розбіжність:

1) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$; 2) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-kx} dx (k > 0, k < 0)$.

Лекція 10. Невласні інтеграли 2-го роду

10.1. Означення невласного інтеграла.

10.2. Основні ознаки збіжності та властивості.

10.3. Деякі особливі інтеграли (Ейлера, Ейлера-Пуассона, Фруллані).

10.1. Означення невласного інтеграла

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку [a; b).

Означення. Точка $x = b$ називається особливою точкою, якщо функція $f(x)$ необмежена в будь-якому околі точки b.

Означення. Границя інтеграла $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0$ (скінченна або нескінченна) називається ***невласним інтегралом 2-го роду*** функції $f(x)$ на проміжку [a; b):

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (10.1)$$

Якщо границя існує, то говорять, що невласний інтеграл (10.1) збіжний. Якщо границя не існує або нескінченна, то цей інтеграл розбіжний.

Геометрична інтерпретація особливої точки (рис.10.1).

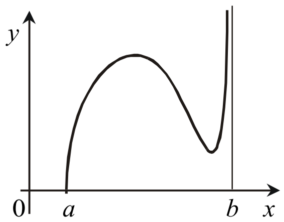

Рис. 10.1. Необмежена функція в правій точці.

Аналогічно, якщо $x = a -$ особлива точка, то невласний інтеграл визначають так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (10.2)$$

Якщо $x = c -$ єдина внутрішня особлива точка на проміжку (a; b), то вважають

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx,$$

за умови, що обидва невласні інтеграли праворуч збіжні.

Якщо особливих точок на відрізку [a; b] кілька, то його розбивають таким чином, щоб у кожному проміжку розбиття була не більш, ніж одна особлива точка, і користуються означеннями (10.1), (10.2).

Нехай $F(x)$ − первісна для функції $f(x)$. Візьмемо

$$F(a+0) = \lim_{\varepsilon \to +0} F(a+\varepsilon),$$
$$F(b-0) = \lim_{\varepsilon \to -0} F(b-\varepsilon),$$

(якщо ці границі існують). Тоді аналогом *формули Ньютона-Лейбніца* для збіжних інтегралів, в яких особливими є точки $x = a$ та $x = b$, буде формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a+0). \tag{10.3}$$

Приклад. Дослідимо збіжність інтеграла $\int_0^a \frac{dx}{x^\lambda}, \quad a > 0, \quad a = \text{const}.$

1. Нехай $\lambda \neq 1$. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x^\lambda}$ має одну особливу точку на проміжку інтегрування (0; a]:

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_\varepsilon^a \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left. \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right|_{0+\varepsilon}^a = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{\varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) = \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$

Відповідь. Інтеграл збіжний.

2. Нехай $\lambda = 1$. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x}$ має одну особливу точку на проміжку інтегрування (0; a]. Звідси випливає:

$$\int_0^a \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^a \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \ln|x|\Big|_\varepsilon^a = \lim_{\varepsilon\to 0+0}(\ln a - \ln\varepsilon) = +\infty.$$

Відповідь. Інтеграл розбіжний.

10.2. Основні ознаки збіжності та властивості

1. Нехай $f(x)\ge 0$ на проміжку $[a;\ b)$. Тоді для збіжності невласного інтеграла (10.1) необхідно і достатньо, щоб для всіх $\varepsilon > 0$ виконувалась нерівність

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \le L \quad (L = \text{const})..$$

2. *Ознака Коші*. Нехай для достатньо близьких до b значень x функція $f(x)$ має вигляд

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^\lambda}, \quad (\lambda > 0).$$

Тоді: 1) якщо $\lambda < 1$ і $0 < g(x) \le c,$ то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збіжний;

2) якщо $\lambda \ge 1$ і $g(x) \ge c > 0$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ розбіжний.

3. Якщо при $x\to b$ функція $y = f(x)$ є нескінченно великою порядку $\lambda > 0$ (порівняно з $\frac{1}{b-x}$), то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збіжний або розбіжний залежно від того, яка умова виконується: $\lambda < 1$ чи $\lambda \ge 1$.

Приклади. Дослідити збіжність інтегралів: 1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$; 2. $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$.

Розв'язання. 1. $x = 1 -$ особлива точка. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ є нескінченно великою функцією порядку $1/4$, оскільки

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} : \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}} \to \frac{1}{\sqrt[4]{4}}, \text{ коли } x \to 1.$$

Отже, інтеграл збіжний.

2. $x=1-$особлива точка. Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ є нескінченно великою порядку 1, оскільки

$$\frac{\ln x}{x-1} \to 1, \text{ якщо } x \to 1.$$

Отже, інтеграл розбіжний.

Зауваження. Властивості невласних інтегралів аналогічні властивостям визначених інтегралів і випливають із них, а саме: інтеграли є границею визначених інтегралів, тому, зазвичай, достатньо написати для цих останніх (визначених інтегралів) рівність або нерівність, що виражає потрібну властивість, і перейти до границі.

Зауважимо, що не всі властивості визначеного інтеграла переносяться на невласні інтеграли. Так, наприклад, добуток двох функцій, інтегровних на деякому відрізку, є функцією, також інтегровною на ньому. Аналог цього твердження для невласних інтегралів не завжди справедливий. Дійсно, нехай, наприклад, $f(x)=\mathrm{g}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ збігається, а інтеграл $\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{x}dx$ розбігається.

Зауваження. Можливі випадки, коли за допомогою заміни змінних невласний інтеграл перетворюється в звичайний.

Приклад. $$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} x=\sin t \\ dx=\cos t dt \\ 0 \le t < \pi/2 \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi/2} dt = t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

10.3. Деякі особливі інтеграли *(Ейлера, Ейлера-Пуассона, Фруллані)*

10.3.1. *Інтеграл Ейлера*

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin x dx. \qquad (10.4)$$

Інтегруванням частинами цей невласний інтеграл можна звести до визначеного і ,відповідно, довести його існування.

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin x dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln\sin x,\, du=\dfrac{\cos x dx}{\sin x} \\ dv=dx,\, v=x \end{array}\right|=$$

$$=x\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\int\limits_0^{\pi/2}x\frac{\cos x}{\sin x}dx=-\int\limits_0^{\pi/2}x\operatorname{ctg}x dx.$$

Обчислимо інтеграл (10.4):

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin x dx=\left|\begin{array}{l} x=2t \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \pi/2 \\ \hline t & 0 & \pi/4 \end{array} \end{array}\right|=2\int\limits_0^{\pi/4}\ln\sin 2t dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int\limits_0^{\pi/4}\ln\sin t dt+2\int\limits_0^{\pi/4}\ln\cos t dt=$$

$$=\left|\begin{array}{c} t=\dfrac{\pi}{2}-u,dt=-du \\ \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \pi/4 \\ \hline u & \dfrac{\pi}{2} & \dfrac{\pi}{4} \end{array} \end{array}\right|=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int\limits_0^{\pi/4}\ln\sin t dt+2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin dt=$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin t dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I,$$

або $I=-\dfrac{\pi}{2}\ln 2.$

Зауваження. До інтеграла I зводяться також інтеграли $\int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{ctg}\,x dx$,

$\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x} dx$.

10.3.2. ***Інтеграл Ейлера-Пуассона***

$$P = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \tag{10.5}$$

Функція $f(t) = (1+t)e^{-t}$ досягає свого найбільшого значення 1 при $t = 0$.

Отже, $(1+t)e^{-t} < 1$ для $t > 0$ і $t < 0$. Беручи $t = \pm x^2$, дістаємо:

$$(1-x^2)e^{x^2} < 1 \text{ і } (1+x^2)e^{-x^2} < 1,$$

звідки

$$1 - x^2 < e^{-x^2}, \quad x \in (0;1); \tag{10.6}$$

$$e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}, \quad x > 0. \tag{10.7}$$

Підносячи вирази (10.6) і (10.7) до степеня з будь-яким натуральним показником n, маємо:

$$(1-x^2)^n < e^{-nx^2} \quad (0 < x < 1), \tag{10.8}$$

$$e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad (x > 0). \tag{10.9}$$

Інтегруючи нерівність (10.8) на проміжку від 0 до 1, а нерівність (10.9) — від 0 до $+\infty$, дістаємо:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^1 e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Водночас виконуються такі співвідношення:

$$1)\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx = \left| \begin{array}{l} u=\sqrt{n}x; \\ \dfrac{u}{\sqrt{n}}=x; \\ dx=\dfrac{1}{\sqrt{n}}du \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-n\cdot\frac{u^2}{n}}du = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{1}{\sqrt{n}}P;$$

$$2)\int_0^{1}(1-x^2)^n dx = \left| \begin{array}{l} x=\sin t, \\ dx=\cos t dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & \dfrac{\pi}{2} \end{array} \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt = \frac{2n!!}{(2n+1)!!};$$

$$3)\int_0^{1}\frac{dx}{(1+x^2)^n} = \left| \begin{array}{l} x=\mathrm{ctg}\, t; \\ dx=-\dfrac{1}{\sin^2 t}dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & \dfrac{\pi}{2} & 0 \end{array} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}t dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Звідси

$$\sqrt{n}\frac{2n!!}{(2n+1)!!} < P < \sqrt{n}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (10.10)$$

Підносячи до квадрата і перетворюючи вираз (10.10), дістаємо:

$$\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{(2n!!)^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)} < P^2 < \frac{n}{2n-1}\cdot\frac{[(2n-3)!!]^2(2n-1)}{[(2n-2)!!]^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2. \qquad (10.11)$$

Із формули Валліса $\frac{\pi}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)}$ випливає, що обидва крайні вирази у (10.11) при $n\to\infty$ прямують до $\frac{\pi}{4}$, тому $P^2=\frac{\pi}{4}$ і $P=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Отже,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ . \tag{10.12}$$

10.3.3. ***Інтеграли Фруллані***

Інтеграли Фруллані записуються у вигляді

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx \ \ (a, b > 0), \tag{10.13}$$

причому виконуються такі умови:

1) функція $y = f(x)$ визначена і неперервна для $x \geq 0$;

2) існує скінченна границя $f(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Можна довести, що $\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx = [f(0) - f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}$.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати означення невласного інтеграла 2-го роду для особливих точок, які є крайніми точками проміжку інтегрування та внутрішніми точками.

2. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_0^{a} \frac{dx}{\left(x-a\right)^{\lambda}}, \quad a > 0, \quad a = \text{const}.$

3. Сформулювати основні властивості невласних інтегралів 2-го роду, пояснити на прикладах подібність та відмінність від властивостей визначеного інтеграла.

4. Обчислити невласні інтеграли або довести їхню розбіжність:

1) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

5. Обчислити інтеграли: $\int\limits_0^{\pi/2} x\,\mathrm{ctg}\,x dx,\ \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x}dx.$

Лекція 11. Застосування визначеного інтеграла

11.1. Площа плоскої фігури.

11.2. Об'єм тіла обертання.

11.3. Довжина дуги кривої.

11.4. Площа поверхні обертання.

11.1. Площа плоскої фігури

Нехай на площині Oxy задана фігура, обмежена відрізком $[a,b]$ осі Ox, прямими $x=a,\ y=b$ і графіком неперервної функції $y=f(x)$ на $[a,b]$. Таку фігуру називають *криволінійною трапецією* (рис. 11.1).

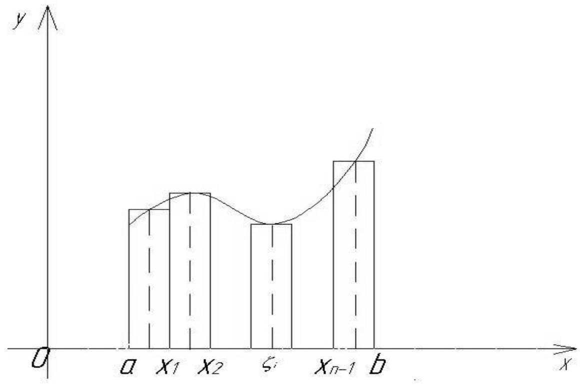

Рис.11.1. Вигляд криволінійної трапеції.

Поставимо задачу обчислити площу криволінійної трапеції. Розіб'ємо довільний відрізок $[a,b]$на n частин точками

$$a=x_0<x_1<...<x_{i-1}<x_i<...<x_{n-1}<x_n=b,$$

виберемо на кожному відрізку $[x_{i-1},x_i]$ довільну точку $\xi_i\left(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i\right)$ і розглянемо цю фігуру (рис.11.1). Площа S криволінійної трапеції наближено дорівнює площі східчатої фігури:

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\, i = 1,...,n.$ Природно вважати, що при $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} \to 0$ площа східчатої фігури прямує до площі криволінійної трапеції. З іншого боку, площа східчатої фігури є інтегральною сумою для інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$. Оскільки функція $y = f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то площа S криволінійної трапеції дорівнює визначеному інтегралу функції $y = f(x)$ на $[a,b]$:

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{11.1}$$

Отже, визначений інтеграл від невід'ємної, неперервної функції на відрізку $[a,b]$, дорівнює площі криволінійної трапеції з основою $[a,b]$, обмеженої зверху графіком функції $f(x)$, збоку прямими $x = a,\, x = b$, а знизу – віссю *Ox*. В цьому також і полягає ***геометричний зміст визначеного інтеграла***.

Нехай фігура обмежена знизу і зверху графіками функцій $y = f_1(x), y = f_2(x),$ причому $f_1(x) < f_2(x),\, x \in [a,b]$ (рис. 11.2), де $f_1(x),\ f_2(x)$ – дві неперервні функції. Якщо обидві функції

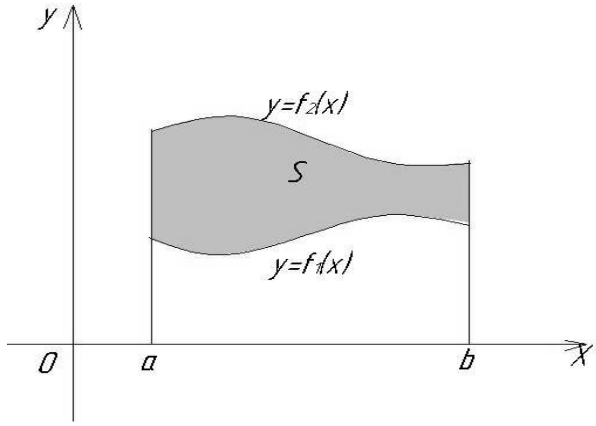

Рис.11.2. Обмеженість криволінійної трапеції двома функціями.

невід'ємні, то площа S даної фігури дорівнює різниці площ криволінійних трапецій, обмежених зверху відповідно графіками функцій $y = f_1(x), y = f_2(x)$.

Отже,

$$S=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx. \qquad (11.2)$$

Формула (11.2) справедлива і тоді, коли $f_1(x),\ f_2(x)$ не є невід'ємними. Дійсно, із-за їх обмеженості, існує число де $h>0$ таке, що функції $f_1^h(x)=f_1(x)+h,\ f_2^h(x)=f_2(x)+h$ є невід'ємними, і має місце очевидна рівність

$$\int_a^b\left(f_2^h(x)-f_1^h(x)\right)dx=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=f_1(x)=x, y=f_2(x)=2-x^2.$

Будуємо вказану криволінійну трапецію. Знайдемо абсциси точок перетину прямої $x=a$ з параболою $y=2-x^2$. Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y=x, \\ y=2-x^2 \end{cases},$$

одержимо $x_1=-2$ та $x_2=1$. Це є межі інтегрування (рис. 11.3).

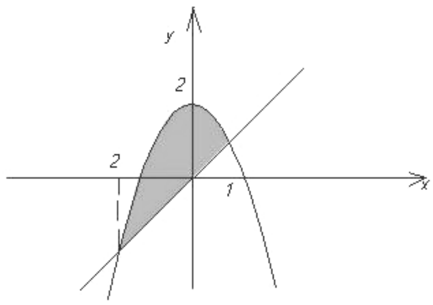

Рис.11.3. Вигляд обчислюваної площі.

Тоді площа фігури обчислюється за формулою (11.2):

$$S=\int_{-2}^{1}\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(\left(2-x^2\right)-x\right)=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}.$$

Зауваження. Для обчислення площі криволінійної трапеції у випадку, коли верхня крива задана параметричним рівняннями

$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\le t\le\beta,$ причому $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$, в формулі (11.1) потрібно зробити заміну змінної, поклавши $x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)dt$. Тоді одержимо

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t.\end{cases}$

Розв'язання. Еліпс симетричний відносно осей координат, тому достатньо обчислити площу частини фігури, яка знаходиться в I чверті (рис.11. 4). Отже,

$$S=4\int_{\pi/2}^{0}b\sin t\left(a\cos t\right)'dt=4ab\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 t dt=2ab\int_{0}^{\pi/2}\left(1-\cos 2t\right)dt=\pi ab.$$

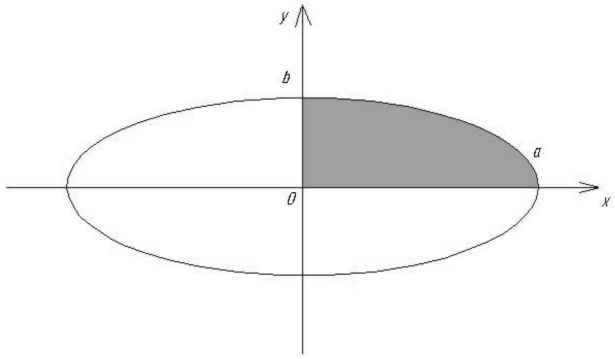

Рис.11.4. Еліпс.

Зокрема, якщо $a=b=R$, то одержимо відому формулу площі круга

$$S=\pi R^2.$$

Нехай крива *AB* задана в полярних координатах рівнянням $\rho=\rho\left(\varphi\right),\alpha\le\varphi\le\beta,$ причому функція $\rho=\rho\left(\varphi\right)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $\left[\alpha,\beta\right]$.

Плоску фігуру, обмежену кривою *AB* і двома променями, які утворюють з полярною віссю кути α і β, будемо називати *криволінійним сектором* (рис.11.5). Знайдемо площу криволінійного сектора.

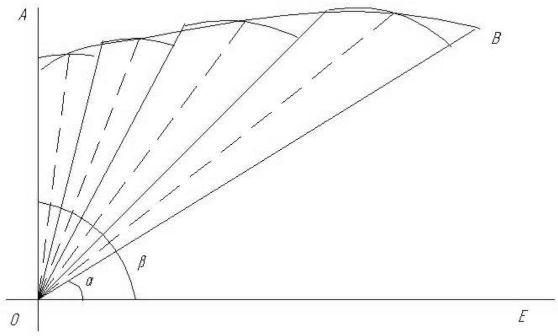

Рис.11.5.Криволінійний сектор.

Розіб'ємо довільним чином відрізок $[\alpha,\beta]$на n частин точками

$$\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_{i-1}<\varphi_i<\ldots<\varphi_{n-1}<\varphi_n=\beta,$$

виберемо на кожному відрізку$[\varphi_{i-1},\varphi_i]$ довільну точку $\xi_i\left(\varphi_{i-1}\le\xi_i\le\varphi_i\right)$ та побудуємо кругові сектори з радіусами $\rho(\xi_i)$. В результаті одержимо фігуру, площа якої S наближено дорівнює сумі площ кругових секторів

$$S\approx\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho^2\left(\xi_i\right)\Delta\varphi_i,$$

де$\Delta\varphi_i=\varphi_i-\varphi_{i-1}$. З іншого боку, ця площа є інтегральною сумою для інтеграла $\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$. Оскільки функція $\rho^2(\varphi)$ неперервна па відрізку$[\alpha,\beta]$, то границя цієї суми при $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\varphi_i\}\to 0$ існує і дорівнює інтегралу $\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$.

Отже, площа криволінійного сектора дорівнює цьому визначеному інтегралу

$$S=\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho^2\left(\xi_i\right)\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho=a(1+\cos\varphi)$ (рис.11.6).

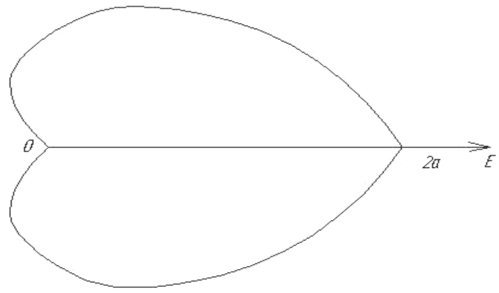

Рис. 11.6. Кардіоїда.

Розв'язання.

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+\cos\varphi\right)^2d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

11.2. Об'єм тіла обертання

Нехай функція $y=f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a,b]$. Знайдемо об'єм тіла, яке утворюється обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, які обмежена зверху графіком функції $y=f(x)$.

Розіб'ємо довільним чином відрізок $[a,b]$ на n частин точками

$$a=x_0<x_1<...<x_{i-1}<x_i<...<x_{n-1}<x_n=b,$$

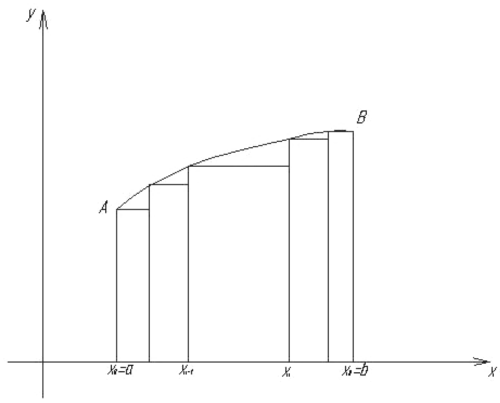

Рис.11.7. Вписані прямокутники під функцією.

На кожному відрізку побудуємо прямокутник (рис 11.7). При обертанні $[x_{i-1},x_i]$ навколо осі Ox кожний прямокутник опише циліндр. Знайдемо об'єм *i*-го циліндра, який має висоту $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}, i=1,...,n$ і радіус $y_i=f(x_{i-1})$

$$V_i \approx \pi f^2(x_{i-1})\Delta x_i$$

Сума об’ємів всіх циліндрів наближено дорівнює об’єму даного тіла обертання

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V \approx \pi \sum_{i=1}^{n} f^2(x_{i-1})\Delta x_i.$$

З іншого боку, ця сума є інтегральною сумою для інтеграла $\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx.$ Оскільки функція $f^2(x)$ неперервна на $[a,b]$, то границя цієї суми при $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\} \to 0$ існує і дорівнює визначеному інтегралу $\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx.$

Таким чином,

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\pi\sum_{i=1}^{n} f^2(x_{i-1})\Delta x_i = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx. \qquad (11.3)$$

Приклад. Знайти об’єм еліпсоїда обертання, який утворений обертанням $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$еліпса навколо осі Ox.

Розв’язання. Еліпсоїд обертання є тіло, обмежене поверхнею обертання кривої $y = b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}, \left(-a \le x \le a\right)$ навколо осі Ox, тому за формулою (11.3)

$$V == \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx = \pi b^2\int\limits_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

11.3. Довжина дуги кривої

Ми розглянули ряд задач, які приводять до поняття визначеного інтеграла. Всі вони мають те спільне, що в них знаходження значення будь-якої величини зводиться до визначення границі деякої інтегральної суми при прямуванні діаметра поділу розбиття до нуля, тобто до визначеного інтеграла. Існує також інше коло задач, які приводять до поняття визначеного інтеграла. В них відома швидкість зміни однієї величини відносно іншої і потрібно знайти першу величину, або, точніше, дана похідна функції, а потрібно знайти саму функцію, тобто за заданою функцією знайти одну з її первісних. Ця задача також розв'язується за допомогою визначеного інтеграла, оскільки такою первісною є, наприклад, визначений інтеграл із змінною верхньою межею. Розглянемо для прикладу обчислення довжини дуги кривої.

Нехай крива Г задана параметрично векторним записом $\vec{r} = \vec{r}(t), a \le t \le b,$ де функція $\vec{r}(t)$ неперервно-диференційовна на відрізку $[a,b]$. Тоді, як відомо, крива Г спрямлювана, і зміна довжини дуги $l(t)$, яка відраховується від початкової точки (її радіус-вектор – це $\vec{r}(a)$) кривої Г, є також неперервно-диференційовною функцією параметра t на відрізку $[a,b]$, причому

$$\frac{dl}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|.$$

Тому за формулою Ньютона-Лейбніца, для довжини $l = l(b)$ кривої Г, одержимо

$$l = l(b) - l(a) = \int_a^b \frac{dl}{dt} dt,$$

звідки

$$l = \int_a^b \left|\frac{dr}{dt}\right| dt.$$

Якщо $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, то

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt. \tag{11.4}$$

У випадку, коли крива Г є графіком неперервно-диференційовної функції $y = f(x), a \le x \le b$, формула (11.4) приймає вигляд

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \tag{11.5}$$

Приклад. Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $y = x^{3/2}$, якщо $0 \le x \le 5$. (рис.11.8).

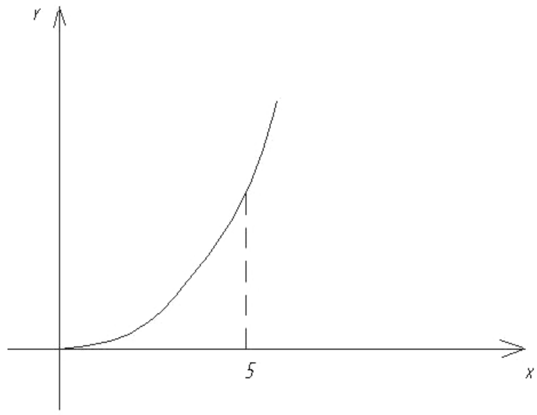

Рис.11.8. Вигляд дуги кривої.

Розв'язання. З рівняння $y = x^{3/2}$ знайдемо $y' = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$. Отже, за формулою (11.5)

$$l = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^5 = \frac{335}{27}.$$

Зауваження. Для обчислення довжини дуги плоскої кривої у випадку, коли крива задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi), \alpha \le \varphi \le \beta$, де $\rho = \rho(\varphi)$ має неперервну похідну $\rho'(\varphi)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$, потрібно перейти від полярних координат до прямокутних. Тоді одержимо параметричне задання кривої рівняннями $x = \rho(\varphi)\cos\varphi, y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \alpha \le \varphi \le \beta$ ($\varphi -$ параметр).

Оскільки $x' = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi, y' = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi.$$

11.4. Площа поверхні обертання

Нехай функція $f(x)$ невід'ємна і неперервна разом зі своєю першою похідною на відрізку $[a,b]$. Знайдемо площу поверхні, яка утворюється обертанням графіка цієї функції навколо осі Ox. Розіб'ємо довільний відрізок $[a,b]$ на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Нехай $A_0, A_1, \ldots, A_n$ – відповідні точки графіка функції $f(x)$. Побудуємо ламану, що з'єднує точки $A_0, A_1, \ldots, A_n$. При обертанні цієї ламаної навколо осі Ox одержимо поверхню, яка складається з бічних поверхонь зрізаних конусів (циліндрів).

Площа бічної поверхні зрізаного конуса (циліндра), утвореного обертанням i-той ланки ламаної, дорівнює $2\pi \dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} l_i$, де l_i – довжина хорди $A_{i-1}A_i, i = 1, \ldots, n$, тобто

$$l_i = \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})^2\right)}.$$

За формулою Лагранжа скінченних приростів

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\left(x_i - x_{i-1}\right), \left(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i\right).$$

Поклавши $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \ldots, n,$ одержимо

$$l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Отже, площа поверхні обертання наближено дорівнює площі поверхні, отриманої від обертання ламаної, і має вигляд

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i.$$

Запишемо цю суму у вигляді двох сум

$$P \approx 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i +$$

$$+\pi \left(\sum_{i=1}^{n} \left[\left(f(x_{i-1}) - f(\xi_i) \right) + \left(f(x_i) - f(\xi_i) \right) \right] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \right). \qquad (11.6)$$

Перша сума в правій частині (11.6) є аналогом інтегральної суми для інтеграла $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$ і при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \left\{ \Delta x_i \right\} \to 0$ за неперервності функції $f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$ має границею цей інтеграл. Оскільки функція $f(x)$ рівномірно неперервна на $[a,b]$, то, за теоремою Кантора, для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ таке, що для $\lambda<\delta$ виконується нерівності $|f(x_{i-1})-f(\xi_i)|<\varepsilon$ і $|f(x_i)-f(\xi_i)|<\varepsilon$. Якщо позначити через M максимальне значення функції $\sqrt{1+f'^2(x)}$ на відрізку $[a,b]$, то права сума в (11.6) при $\lambda<\delta$ оцінюється наступним чином

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\Big[\big(f(x_{i-1})-f(\xi_i)\big)+\big(f(x_i)-f(\xi_i)\big)\Big]\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i\right|<2M\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=2M(b-a)\varepsilon.$$

Оскільки $\varepsilon-$ довільно мале число, то звідси випливає, що границя вказаного виразу дорівнює нулю при $\lambda>0$.

Таким чином, переходячи в рівності (11.6) до границі при $\lambda>0$, матимемо

$$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx \tag{11.7}$$

Зауваження.

1) Якщо поверхня отримується обертанням навколо осі Ox кривої AB, яка задана параметричними рівняннями $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha\le t\le\beta,$ причому $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$, то, зробивши в інтегралі (11.7) заміну змінної $x=\varphi(t),\ dx=\varphi'(t)dt$, матимемо

$$P=2\pi\int_a^b\psi(\mathrm{t})\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \tag{11.8}$$

2) Якщо крива задана в полярних координатах рівнянням $\rho=\rho(\varphi),\alpha\le\varphi\le\beta$, де $\rho=\rho(\varphi)$ і має неперервну похідну $\rho'(\varphi)$ на відрізку $[\alpha,\beta]$, то цей випадок зводиться до параметричного задання кривої $x=\rho(\varphi)\cos\varphi,\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi,\ \alpha\le\varphi\le\beta$ ($\varphi-$параметр), тому формула (11.8) приймає вигляд

$$P=2\pi\int_0^\pi\rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi.$$

Приклад. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кардіоїди $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$ навколо полярної осі.

Маємо $\rho' = -2a\sin\varphi$,

$$\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)} = \sqrt{4a^2(1+\cos\varphi)^2 + 4a^2\sin^2\varphi} = 4a\cos\frac{\varphi}{2}.$$

$$P = 2\pi\int_0^{\pi} 2a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\cdot 4a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 64\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = \frac{128}{5}\pi a^2.$$

Завдання для самоконтролю

1. Записати формули обчислення площі криволінійної трапеції для різних випадків задання кривої.
2. Отримати формулу обчислення об'єму тіла, яке утворюється обертанням неперервної кривої навколо осі Oy.
3. Вивести формулу обчислення довжини дуги явно заданої неперервної кривої, користуючись засобами інтегрального числення і як наслідок, вивести формули для параметрично заданої кривої та кривої в полярній системі координат.
4. Пояснити формули обчислення площі поверхні обертання.
5. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y = 2 - x^2$ та $y = 2 - x$.
6. Обчислити площу фігури, яка обмежена лінією $\rho = 2 - \cos\varphi$.
7. Обчислити довжину дуги лінії $y = \ln x$, якщо $x \in [1, e]$.
8. Обчислити об'єми тіл обертання навколо осей Ox та Oy фігури, яка обмежена лініями $y = x^2$ та $y = x$.

Лекція 12. Диференціальні рівняння 1-го порядку

12.1. Задачі, що приводять до поняття диференціального рівняння.

12.2. Основні поняття для диференціальні рівняння 1-го порядку. Теорема Коші існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

12.3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

12.4. Однорідні диференціальні рівняння (права частина є однорідною функцією нульового виміру).

12.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння. Теорема про структуру загального розв'язку.

У більшості випадків закони, що керують тими чи іншими природними явищами, знаходять своє відображення у формі диференціальних рівнянь. Ісаак Ньютон, який вважається засновником математичного природознавства розглядав дві задачі. У першій з них було необхідно для заданої функції визначити відповідну їй похідну. Отже, це задача диференціального числення. Друга задача передбачає, що за рівнянням, яке містить похідні, визначають співвідношення між функцією та аргументом. Ця задача визначає вже зміст теорії звичайних диференціальних рівнянь. Своє відкриття у цій галузі Ньютон вважав таким важливим, що відомості про нього надав лише у зашифрованому вигляді. У перекладі зміст цього відкриття такий: «Розв'язувати диференціальні рівняння корисно».

12.1. Задачі, що приводять до поняття диференціального рівняння

1) Із співвідношення $\frac{dy}{dx} = f(x)$, де $f(x) -$ відома функція, знайти невідому функцію $y = y(x)$. Тоді розв'язки − невизначений інтеграл

$$y = \int f(x)dx + C,$$

де C − довільна стала.

Розв'язок, який містить довільну сталу C, називають *загальним розв'язком* рівняння; розв'язок, утворений із загального, при окремому значенні $C \in (-\infty; +\infty)$ називають *частинним.*

Якщо $f(x)$ є неперервна функція на деякому проміжку (a, b), то розв'язок можна записати так:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C,$$

де x_0 – довільна точка проміжку. При $x = x_0$ матимемо $C = y(x_0)$. Якщо позначити $y(x_0) = y_0$, тоді розв'язок диференціального рівняння запишеться у вигляді

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

З останнього слідує, що частинний розв'язок диференціального рівняння цілком визначається, якщо задати певне (початкове) значення y_0 функції $y(x)$.

Числа x_0 та y_0 називають ***початковими даними*** або ***початковими умовами.***

2) Приклад із механіки

Нехай матеріальна точка M з масою m рухається прямолінійно під дією сили $\vec{F} = \vec{F}(t)$, напрям дії якої збігається з напрямом руху точки M, а величина її дорівнює $F(t)$. Треба знайти закон, за яким відбувається рух точки.

Позначимо $x = x(t)$ шлях, який точка пройде від початку руху за час t. За другим законом Ньютона

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t).$$

Отримане рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку. Знаходження невідомої функції, що входить в нього, називають ***розв'язанням або інтегруванням.***

Зінтегруємо рівняння. Записуємо його у вигляді $\frac{d}{dx}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)=\frac{1}{m}F(t)$, так як $\frac{dx(t)}{dt}=v(t)$, тоді $\frac{dv(t)}{dt}=\frac{1}{m}F(t)$, звідки і знаходимо

$$v(t)=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F(t)dt+C_1,$$

де C_1 – стала інтегрування.

Підставляючи $\frac{dx(t)}{dt}=v(t)$, маємо $\frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}F(t)dt+C_1$, яке зінтегруємо:

$$x(t)=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{t}F(t)dt\right)dt+C_1(t-t_0)+C_2,$$

де C_2 – довільна стала.

Сталим C_1, C_2 надають певного змісту: $C_1=v(t_0)=v_0$, $C_2=x(t_0)=x_0$ і поклавши $t_0=0$, маємо

$$x(t)=\frac{1}{m}\int_{0}^{t}\left(\int_{0}^{t}F(t)dt\right)dt+v_0t+x_0,$$

де v_0 – початкова швидкість, а x_0 – початкове положення точки.

12.2. Основні поняття для диференціальні рівняння 1-го порядку. Теорема Коші існування та єдиності розв’язку задачі Коші

Означення. *Диференціальним рівнянням 1-го порядку, розв’язаним відносно похідної*, називають співвідношення вигляду

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \tag{12.1}$$

де $f(x,y)$ – задана і неперервна функція двох змінних в деякій області двовимірного простору R^2.

Означення. Диференціальне рівняння, нерозв’язне відносно y', називають *неявним* диференціальним рівнянням:

$$F(x,y,y')=0, \tag{12.2}$$

де $F(x, y, y')$ – задана функція трьох змінних x, y, y', які змінюються в деякій області тривимірного простору.

Нехай $f(x, y)$ – визначена і неперервна в деякій області $D \subset R^2$.

Означення. Область D називають *областю визначення* диференціального рівняння (12.1).

Якщо $f(x, y)$ в околі точки $(x_0, y_0) \in D$ є необмеженою, тоді розглядають диференціальні рівняння $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{f(x, y)}$.

Означення. *Розв'язком* диференціального рівняння (12.1) на проміжку (a, b) (a і b можуть бути і невласними числами, відповідно $-\infty$ та $+\infty$) називається функція $y = \varphi(x)$, яка задовольняє умови:

1) $\varphi(x)$ має на проміжку (a, b) неперервну похідну і не виходить для всіх $x \in (a, b)$ з області визначення D;

2) для $\forall x \in (a, b)$: $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$.

Якщо проміжок (a, b) є відрізок або піввідрізок, то під похідною $\varphi'(x)$ в кінцевих точках розуміють односторонню похідну (теж і для неперервності).

Задача Коші: *Серед усіх розв'язків диференціального рівняння (12.1) знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який при заданому значенні незалежної змінної $x = x_0$ дорівнює заданому значенню y_0: $y(x_0) = y_0$.*

Теорема *(теорема Коші існування і єдиності розв'язку задачі Коші).*

Нехай для (12.1) виконані умови:

1) Функція $f(x, y)$ є неперервною в замкненому прямокутнику R: $[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, $a > 0, b > 0$. Тоді $\exists M > 0$, що для $\forall (x, y) \in R$ виконується нерівність $|f(x, y)| \le M$ (обмеженість функції);

2) Функція $f(x, y)$ за змінною y в прямокутнику задовольняє умові Ліпшиця

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|,$$

де L − стала Ліпшиця, а точки $(x,y_1),(x,y_2)$ − довільні точки із прямокутника.

Тоді на відрізку $[x_0-h,x_0+h]$, де $h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$, існує єдиний розв'язок $y=y(x)$ (12.1), який для $x\in[x_0-h,x_0+h]$ не виходить із прямокутника R і $y(x_0)=y_0$.

Теорема. *Якщо функція $f(x,y)$ в прямокутнику R має обмежену частинну похідну за змінною y, тобто $\left|f_y'(x,y)\right|\le A$, де A − додатне число, тоді умова Ліпшиця виконується.*

Доведення. Різницю $f(x,y_1)-f(x,y_2)$ можна розглядати як частинний приріст за змінною y і застосувати теорему Лагранжа про скінченний приріст:

$$f(x,y_1)-f(x,y_2)=f_y'(x,y_1+\theta(y_1-y_2))(y_1-y_2),\quad 0<\theta<1.$$

Тоді, згідно із обмеженістю частинної похідної за другою змінною, випливає виконання умови Ліпшиця.

В результаті інтегрування (12.1) отримуємо всі розв'язки у вигляді *загального*

$$y=\varphi(x,C). \tag{12.3}$$

Тоді, якщо задати початкові дані, то за теоремою Коші із загального можна дістати єдиний розв'язок, що задовольняє дану початкову умову. При цьому треба знайти значення C, що відповідає даним початковим умовам.

Отже, (12.3) повинно допускати розв'язання відносно C, яке повинно забезпечувати єдиність розв'язку задачі Коші.

Означення. Нехай область $D\subset R^2$ є тією областю, в кожній точці якої (12.1) має єдиний розв'язок. Тоді функція (12.3), яка визначена в деякій області змінних x,C і має в цій області неперервну похідну за змінною x, називається *загальним розв'язком* (12.1), якщо:

1) (12.3) допускає розв'язання відносно C, тобто $C=\psi(x,y)$;

2) для всіх x,y із області D $C=\psi(x,y)$ дає таке значення C, включаючи $\pm\infty$, при якому функція (12.3) є розв'язок (12.1).

Означення. Розв’язок (12.1), в кожній точці якого виконуються умови єдиності, називається *частинним*.

Означення. Загальний розв’язок є сім’я кривих, залежних від параметра C, яку називають *інтегральною сім’єю кривих*, частинний розв’язок − *інтегральною кривою* для (12.1).

Означення. Розв’язок диференціального рівняння,в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають *особливим*.

Геометричне тлумачення. Диференціальне рівняння $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ задає в області D *поле напрямів* $(\forall (x_0, y_0) \in D: \quad \alpha_0 = \operatorname{arctg}\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{arctg} f(x_0, y_0))$. Тому задача інтегрування (12.1) − *знайти такі криві, дотичні до яких в кожній точці збігаються з напрямом поля в цій точці*.

12.3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Рівняння вигляду

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \qquad (12.4)$$

де $M_1(x), M_2(x), N_1(y), N_2(y)$ − задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називають диференціальним рівнянням, яке допускає *відокремлювання змінних*.

Для відокремлювання змінних у (12.4) досить його помножити на функцію $\dfrac{1}{N_1(y)M_2(x)}$ за умови $N_1(y) \neq 0, \quad M_2(x) \neq 0$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Інтегруючи, отримаємо загальний інтеграл (12.4) у вигляді:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Тут окремо слід дослідити ті значення x та y, за яких функції $N_1(y)$ і $M_2(x)$ дорівнюють 0. Корені рівнянь $N_1(y)=0$ та $M_2(x)=0$ також будуть розв'язками (12.4) (можуть бути особливими і їх слід записувати додатково до загального інтеграла).

12.4. Однорідні диференціальні рівняння (права частина є однорідною функцією нульового виміру)

Означення. Функція $f(x,y)$ називається *однорідною функцією n-го виміру* відносно змінних x та y, якщо для $\forall t\neq 0$ виконується рівність:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y).$$

Означення. Диференціальне рівняння $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ називають *однорідним*, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Зауваження. Рівняння вигляду $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ буде однорідним тоді і тільки тоді, коли функції $P(x,y),Q(x,y)$ будуть однорідними функціями одного й того самого виміру.

Однорідні рівняння зводять до рівнянь з відокремлюваними змінними підстановкою

$$y=u\cdot x,\quad u=u(x) \tag{12.5}$$

Якщо функція (12.5) є розв'язком диференціального. рівняння, тоді

$$u+x\frac{du}{dx}=f(x,ux).$$

Поклавши $t=\dfrac{1}{x}$, дістанемо $f(x,ux)=f(1,u)$ і рівняння з відокремлюваними змінними $u+x\dfrac{du}{dx}=f(1,u)$.

За умови $f(1,u)-u\neq 0$, знаходимо:

$\displaystyle\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\ln|x|+C$, $u=\dfrac{y}{x}$ − загальний інтеграл рівняння.

Якщо $f(1,u)-u=0$, то рівняння запишеться у вигляді $x\dfrac{du}{dx}=0$ і можуть бути ще розв'язки $y=Cx\ (x\neq 0)$ та $x=0\ (y\neq 0)$.

Зауваження. Рівняння виду $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$, $\dfrac{a}{a_1}\neq\dfrac{b}{b_1}$, а $f-$ довільна неперервна функція в розглядуваній області введенням нових змінних ξ,η за формулами $x=\xi+h,\ y=\eta+k$ приводиться до однорідного.

12.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння. Теорема про структуру загального розв'язку

Означення. Рівняння вигляду

$$A(x)\frac{dy}{dx}+B(x)y=C(x),$$

де $A(x),B(x),C(x)$ − неперервні функції на деякому проміжку (a,b), причому $\forall x\in(a,b):A(x)\neq 0$ називають *лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку.*

Записують його у вигляді

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x), \tag{12.6}$$

де $P(x)=\dfrac{B(x)}{A(x)},\quad Q(x)=\dfrac{C(x)}{A(x)}$.

Доводять, що в будь-якому прямокутнику $R:\{a_1\leq x\leq b_1;-k\leq y\leq k\}$, де $a_1>a;b_1<b;k-$довільне додатне число, для рівняння (12.6) виконуються умови теореми Коші про існування та єдиність розв'язку.

12.5.1. *Метод Лагранжа (варіації довільної сталої)*

Нехай для (12.6) $Q(x)=0,$ тоді рівняння $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$ називають *лінійним однорідним* диференціальним рівнянням. Воно допускає відокремлення змінних при $y \neq 0$: $\frac{dy}{y} = -P(x)dx$, звідки загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y = Ce^{-\int P(x)dx},$$

де C − довільна стала.

Нехай $C = C(x)$ і підставляємо в (12.6):

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int P(x)dx} - CP(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)Ce^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

або $\frac{dC}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$, з якого $C = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1$, де C_1 − довільна стала.

Підставивши значення C, знаходимо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння у вигляді

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx. \quad (12.7)$$

Довели **теорему** (***про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння)***: *загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння складається із суми загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння і частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння.*

12.5.2. *Метод Бернуллі*

Розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (12.6) шукають у вигляді добутку $y = uv$, $u = u(x), v = v(x) -$ невідомі функції, причому одна з цих функцій довільна.

Отже, $y = uv$, $y' = u'v + uv' -$ підстановка згідно з методом Бернуллі дає для рівняння $u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$ згідно з довільністю у виборі функції $v(x)$ систему вигляду:

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = Q(x). \end{cases}$$

Перше рівняння $\frac{dv}{v} = -P(x)dx$ має розв'язок $v = C_1 e^{-\int P(x)dx}, C_1 \neq 0$.

Візьмемо тоді $v = e^{-\int P(x)dx}, C_1 = 1$ і для другого рівняння $du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ маємо

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Оскільки $y = uv,$ тоді

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

12.5.3. *Рівняння Бернуллі, його розв'язування*

Означення. Рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, n \neq 0, n \neq 1 \tag{12.7}$$

називають *рівнянням Бернуллі*.

Очевидно, що при $n = 0$ це рівняння лінійне, а при $n = 1$ – з відокремлюваними змінними.

Припустивши $y \neq 0, n \neq 1, n \neq 0$, поділимо на y^n:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x).$$

Заміна $z = y^{1-n}$ зводить рівняння до лінійного неоднорідного.

При $n > 0,$ крім розв'язку $y = uv \neq 0,$ рівняння Бернуллі має розв'язок $y \equiv 0.$

Приклад розв'язування лінійного неоднорідного диференціального рівняння

Розглянемо обидва методи на прикладі. Знайдемо розв'язок рівняння $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \cos x$, яке є лінійним.

1. За *методом Бернуллі* застосовуємо підстановку $y = uv$, де u і v – функції змінної x. Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляючи y і y' у вихідне рівняння, одержуємо:

$$u'v + uv' - uv\,\mathrm{tg}\,x = \cos x .$$

Згрупуємо члени, що містять u, і винесемо u за дужки, а саме:

$$u'v + u\left(v' - v\,\mathrm{tg}\,x\right) = \cos x .$$

Отже,

$$\begin{cases} v' - vtgx = 0; \\ u'v = \cos x. \end{cases}$$

За першим рівнянням системи знаходимо функцію v, для чого відокремлюємо змінні:

$$\frac{dv}{dx} = v\,\mathrm{tg}\,x \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \mathrm{tg}\,xdx$$

і інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx .$$

Отримуємо частинний розв’язок:

$$\ln|v| = -\ln|\cos x| \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|\cos x|^{-1} .$$

Звідси $v = \dfrac{1}{\cos x}$.

Знайдену функцію v підставляємо в друге рівняння системи і отримуємо диференціальне рівняння відносно функції u:

$$u' \cdot \frac{1}{\cos x} = \cos x \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = \cos^2 x .$$

Отже, $du = \cos^2 xdx$.

Інтегруємо

$$\int du = \int \cos^2 xdx + C \Rightarrow u = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}dx + C .$$

Звідси отримуємо загальний розв’язок: $u = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

Таким чином,

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C\right) \cdot \frac{1}{\cos x} .$$

2. Розв'яжемо цей же приклад за *методом варіації довільної сталої*.

Спочатку складаємо однорідне рівняння, яке відповідає вихідному:

$$y' - ytgx = 0$$

і знаходимо його загальний розв'язок:

$$\frac{dy}{y} = tgxdx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|\cos x| + C$$

або

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{\cos x}.$$

Припустимо, що $C = C(x)$. Тоді, підставивши у вихідне рівняння,

$$y' = \frac{C'(x)\cos x - C(x)(-\sin x)}{\cos^2 x},$$

отримуємо:

$$\frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}tgx = \cos x.$$

Зводимо подібні і отримуємо: $\dfrac{C'(x)}{\cos x} = \cos x \quad \Rightarrow \quad dC = \cos^2 x \cdot dx$.

Ми вже знаходили функцію за таким диференціалом, отже, можемо записати $C(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

Підставивши замість довільної сталої у загальний розв'язок однорідного рівняння знайдене значення $C = C(x)$, матимемо загальний розв'язок лінійного рівняння:

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C\right) \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Зрозуміло, що ми отримали той самий розв'язок.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати основні означення для диференціальних рівнянь першого порядку.

2. Сформулювати задачу Коші та теорему існування та єдиності її розв’язку із використанням достатніх умов виконання умови Ліпшиця.

3. Записати загальний вигляд диференціального рівняння із відокремлюваними змінними та пояснити розв’язування таких рівнянь.

4. Знайти загальний інтеграл (загальний розв’язок) та особливі розв’язки диференціальних рівнянь:

1) $x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0$; 2) $(xy^2+y^2)dx+(x^2-x^2y)dy=0.$

5. Розв’язати $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$, якщо $f(x,y)-$однорідна функція нульового порядку.

6. Розв’язати $x\dfrac{dy}{dx}=y\ln\dfrac{y}{x}$.

7. Довести існування та єдність розв’язку задачі Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку.

8. Знайти розв’язок рівняння $y'+2xy=2x,$ який задовольняє умову $y(0)=2$ (розв’язування провести різними методами).

Лекція 13. Диференціальні рівняння вищих порядків

13.1. Основні поняття та означення. Задача Коші.

13.2. Інтегрування і пониження порядку диференціальних рівнянь з вищими похідними.

13.2.1. Диференціальні рівняння, які містять n-у похідну від шуканої функції і незалежну змінну.

13.2.2. Інтегрування диференціальних рівнянь, які не містять шуканої функції та $(k-1)$-ї похідної.

13.2.3. Пониження порядку диференціальних рівнянь, які не містять незалежної змінної.

13.1. Основні поняття та означення. Задача Коші

Диференціальне рівняння n-го порядку, не розв'язане відносно старшої похідної, має вигляд

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 , \tag{13.1}$$

а розв’язане відносно $y^{(n)}$ має форму

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) . \tag{13.2}$$

Частинний випадок цих рівнянь – це лінійне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = f(x) .$$

Означення. Функція $y = y(x)$, визначена і n раз неперервно-диференційовна на (a,b), називається *розв'язком* диференціального рівняння (13.1), якщо вона на (a,b) перетворює це рівняння в тотожність

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \equiv 0, \ x \in (a,b) . \tag{13.3}$$

Будь-якому розв'язку диференціального рівняння (13.1) відповідає на площині (x, y) деяка крива, яку будемо називати *інтегральною*.

Розглянемо диференціальне рівняння (13.2) і поставимо ***задачу Коші:*** *серед всіх розв'язків диференціального рівняння (13.2) знайти такий* $y = y(x)$, *який задовольняє умови*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \tag{13.4}$$

де $x_0,\ y_0,\ y_0', \dots, y_0^{n-1}$ *– задані числа,* x_0 *– початкове значення незалежної змінної,* $y_0, y_0', \dots, y_0^{n-1}$ *– початкові дані.*

Для диференціального рівняння другого порядку

$$y''(x) = f(x, y, y') \tag{13.5}$$

розв’язання задачі Коші полягає в тому, щоб знайти такий його розв'язок, який би задовольняв умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'. \tag{13.6}$$

Геометрично задача Коші полягає в тому, щоб знайти таку криву $y = y(x)$, яка задовольняє диференціальне рівняння (13.5), проходить через точку $M(x_0, y_0)$ і має заданий напрямок дотичної $tg\alpha = y_0'$ (рис. 13.1).

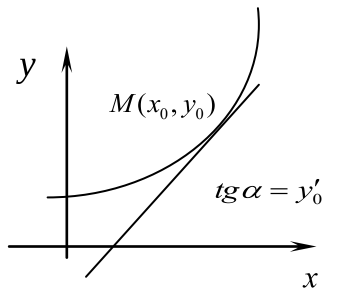

Рис. 13.1. Геометричне тлумачення задачі Коші.

Механічний зміст задачі Коші

$$x'' = f(x, t, x'),\ x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = V_0 \tag{13.7}$$

полягає в тому, щоб знайти ту траєкторію механічної системи, яка є розв'язком диференціального рівняння і має в t_0 фіксовані положення x_0 і швидкість V_0.

Розглянемо питання єдиності та існування розв'язку задачі Коші (13.2), (13.4). Єдиність розв’язку для диференціального рівняння (13.2) не означає, що через точку $M(x_0, y_0)$ проходить тільки одна інтегральна крива. Але, наприклад, для диференціального рівняння (13.5) єдиність розуміється в тому сенсі, що через точку $M(x_0, y_0)$ проходить єдина інтегральна крива (рис.13.1) із заданим нахилом дотичної, а через точку $M(x_0, y_0)$ можуть проходити і інші інтегральні криві, які мають інші нахили дотичних.

Необхідні умови існування розв′язку задачі Коші (13.2), (13.4) – права частина диференціального рівняння (13.2) неперервна в околі початкових даних.

Сформулюємо без доведення теорему про достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

Теорема *(теорема Пікара).* *Розглянемо задачу Коші (13.2), (13.4) Припустимо, що функція $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ визначена в деякій замкненій обмеженій області*

$$R:\ |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b,\ |y' - y_0'| \le b,\ |y'' - y_0''| \le b, ...,\ \left|y^{(n-1)} - y_0^{n-1}\right| \le b \quad (13.8)$$

(a,b – дійсні додатні числа) і задовольняє в цій області умовам:

1) Функція $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ є неперервною за своїми аргументами і, отже, обмеженою

$$\left| f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \right| \le M,\ (x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in R \qquad (13.9)$$

(тут $M > 0$ – константа);

2) Функція $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ має обмежені частинні похідні за змінними $y, y', ..., y^{(n-1)}$, тобто

$$\left| \frac{\partial f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(l)}} \right| \le K,\ l=0,1,2,...,(n\text{-}1);\ (x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \in R, \quad (13.10)$$

де K – константа.

За цих припущеньдиференціальне рівняння (13.2) має єдиний розв'язок, який задовольняє умови (13.4) і є неперервним разом зі своїми похідними до n-го порядку включно на інтервалі

$$\left|x - x_0\right| < h = \min\left\{a, \frac{b}{\max\limits_R\left(M, \left|y'\right|, \left|y''\right|, ..., \left|y^{(n-1)}\right|\right)}\right\}. \qquad (13.11)$$

З теореми випливає, що для поліноміальної правої частини диференціального рівняння (13.2) розв'язок задачі Коші з довільними початковими умовами існує та є єдиним.

Загальний розв'язок та загальний інтеграл, частинний та особливий розв'язки. Проміжні та перші інтеграли

Загальним розв'язком диференціального рівняння (13.2) називається сімейство розв'язків, яке залежить від *n* довільних констант $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right) \qquad (13.12)$$

Розглянемо область *D* в просторі $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, в кожній точці якої виконуються умови теореми про існування і єдиність розв′язку задачі Коші.

Означення. Функцію (13.12), визначену в деякій області змінних *x*, $C_1, C_2, ..., C_n$, і яка має частинні похідні по *x* до *n*-го порядку включно, будемо називати ***загальним розв'язком*** диференціального рівняння (13.2) в області *D*, якщо:

1) функція (13.12) є розв'язком диференціального рівняння (13.2) при всіх значеннях $C_1, C_2, ..., C_n$;

2) система рівнянь

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, ..., C_n), \\ y' = \varphi'(x, C_1, ..., C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, ..., C_n) \end{cases} \qquad (13.13)$$

розв'язується відносно $C_1, C_2, ..., C_n$ в області *D*

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n = \psi_n(x, y, y', ..., y^{(n-1)}). \end{cases} \qquad (13.14)$$

Для розв'язування задачі Коші необхідно (13.4) підставити в (13.14) і визначити

$$\begin{cases} C_1^{(0)} = \psi_1(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{n-1}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_n^{(0)} = \psi_n(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{n-1}). \end{cases}$$

Розв'язок задачі Коші запишеться у вигляді $y = \varphi(x, C_1^{(0)}, ..., C_n^{(0)})$. Якщо розв'язок можна представити у вигляді $y = \varphi(x, x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$, то така форма запису називається формою Коші.

В більшості випадків розв'язок диференціального рівняння (13.2) отримуємо у вигляді

$$\Phi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right) = 0, \tag{13.15}$$

який називається *загальним інтегралом*.

Означення. Будемо називати (13.15) ***загальним інтегралом*** диференціального рівняння (13.2) в області *D*, якщо це співвідношення визначає загальний розв'язок $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right)$ диференціального рівняння (13.2) в області *D*.

Означення. Розв'язок, що визначається співвідношеннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, \dots, C_n), \\ y = \psi(t, C_1, \dots, C_n), \end{cases} \tag{13.16}$$

називають *загальним розв'язком в параметричній формі*.

Означення. Якщо розв′язок диференціального рівняння (13.2) складається тільки з точок єдиності розв′язку задачі Коші, то такий розв′язок будемо називати *частинним*.

Наприклад, при конкретних $C_1, C_2, ..., C_n$ розв′язок буде частинним.

Означення. Розв′язок, в кожній точці якого порушується єдиність розв′язку задачі Коші, будемо називати *особливим розв′язком*.

Рівняння *n*-го порядку може мати сім'ю особливих розв′язків, залежних від довільних констант, кількість яких може досягати $n-1$.

Приклад. Знайти особливі розв′язки рівняння

$$y'' = 2\sqrt{y'}\,.$$

Розв'язання. Вводимо заміну $y' = z$, $z-$ нова змінна. Маємо

$$z' = 2\sqrt{z}\,. \tag{13.17}$$

Звідки $z = (x + C_1)^2,\ x > -C_1, y' = (x + C_1)^2, x > -C_1,\ y = \dfrac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2,\ x > -C_1.$

Рівняння (13.17) має особливий розв′язок $z = 0$, тобто $y' = 0$. Тому $y = C -$ сім'я особливих розв′язків.

13.2. Інтегрування і пониження порядку диференціальних рівнянь з вищими похідними

13.2.1. *Диференціальні рівняння, які містять n-у похідну від шуканої функції і незалежну змінну*

а) Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f(x). \tag{13.18}$$

Так як $\left(y^{(n-1)}\right)' = f(x)$, то

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1\,.$$

Аналогічно, $y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx + C_1(x - x_0) + C_2$, …..,

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \dots \int_{x_0}^{x}}_{n\ раз} f(x)dx...dx + C_1\left(\frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + C_2\left(\frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + ... + C_n\,. \tag{13.19}$$

Остання формула дає загальний розв'язок в області

$$a < x < b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty, -\infty < y'' < \infty, \dots, -\infty < y^{(n-1)} < \infty.$$

Формулу (13.19) легко використати для знаходження розв'язків задачі Коші з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \tag{13.20}$$

Цей розв′язок представляється у вигляді

$$y=\int_{x_0}^{x}...\int_{x_0}^{x} f(x)dx...dx+y_0^{n-1}\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right)+y_0^{n-2}\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right)+...+y_0 . \quad (13.21)$$

Функція

$$y_1=\int_{x_0}^{x}...\int_{x_0}^{x} f(x)dx\dots dx$$

є частинним розв′язком диференціального рівняння (13.18) з початковими умовами

$$y_1(x_0)=0, y_1'(x_0)=0,\dots y_1^{(n-1)}(x_0)=0,$$

яким відповідають константи $C_1=C_2=...=C_n=0$.

Для обчислення $y_1(x)$ використовують формулу Коші

$$y_1(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt . \quad (13.22)$$

Дійсно, інтеграл

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx=\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{u} f(t)dt\right)du=\int_{x_0}^{x}du\int_{x_0}^{u} f(t)dt$$

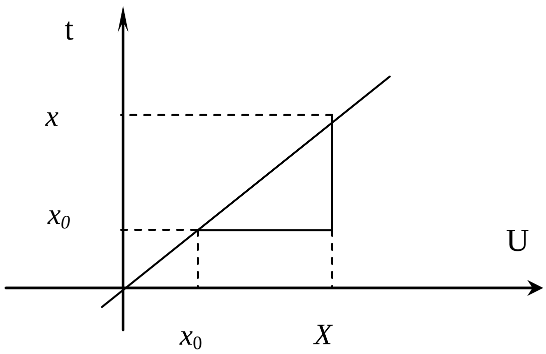

Рис.13.2. Область інтегрування.

можна розглядати як повторний інтеграл в зображеній області (рис. 13.2).

Міняючи порядок інтегрування, отримаємо

$$\int_{x_0}^{x} du \int_{x_0}^{u} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \int_{t}^{x} du = \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)dt .$$

Аналогічно обчислюємо

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dxdxdx = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{u} f(t)(u-t)dtdu = \int_{x_0}^{x} du \int_{x_0}^{u} f(t)(u-t)dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x} f(t)dt \int_{t}^{x} (u-t)du = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f(t)(u-t)^2 dt \quad \text{і т.д.}$$

Приходимо до формули (13.22). Таким чином, розв′язок (13.21) записується у вигляді

$$y_1(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt + y_0^{n-1}\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + y_0^{n-2}\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + \ldots + y_0.$$

Загальний розв′язок диференціального рівняння (13.18) можна також записати через невизначений інтеграл

$$y = \int \ldots \int f(x)dx \ldots dx + C_1\left(\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right) + C_2\left(\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}\right) + \ldots + C_n . \quad (13.23)$$

Приклад. Розв′язати рівняння $y'' = 6x$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо $y' = 3x^2 + C_1$, $y = x^3 + xC_1 + C_2$.

б) Розглянемо випадок

$$F\left(x, y^{(n)}\right) = 0, \quad (13.24)$$

в якому рівняння не можна розв'язати відносно $y^{(n)}$ в елементарних функціях або вирази для $y^{(n)}$ будуть досить складними.

Припустимо, що диференціальне рівняння (13.24) допускає параметризацію

$$y^{(n)} = \psi(t), x = \varphi(t) , \quad (13.25)$$

де $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ такі, що $F\left(\psi(t), \varphi(t)\right) \equiv 0$.

Проводимо обчислення

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\varphi'(t)dt\,,$$

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 \equiv \varphi_1(t, C_1)\,.$$

Аналогічно, обчислюємо

$$y^{(n-2)} = \int \varphi_1(t, C_1)\varphi'(t)dt + C_2 \equiv \varphi_2(t, C_1, C_2)\,.$$

Остаточно маємо

$$\begin{cases} y = \varphi_n(t, C_1, C_2 ..., C_n), \\ \quad x = \varphi(t) \end{cases} - \tag{13.26}$$

загальний розв′язок в параметричній формі.

Відмітимо два випадки, в яких диференціальне рівняння (13.24) легко параметризується

I. $x = \varphi(y^{(n)})$, (13.27)

$y^{(n)} = \psi(t),\ x = \varphi(\psi(t))$ (зокрема, можна ввести таку параметризацію $y^{(n)} = t,\ x = \varphi(t)$);

II. $P\left(x, y^{(n)}\right) + Q\left(x, y^{(n)}\right) = 0$, (13.28)

де P і $Q-$однорідні функції виміру k і m відповідно.

Покладемо

$$y^{(n)} = tx \tag{13.29}$$

і розв′яжемо рівняння (13.28) відносно x через t: $x = \varphi(t)$.

Підставляючи $x = \varphi(t)$ в (13.29), отримаємо

$$\begin{cases} y^{(n)} = t\varphi(t), \\ \quad x = \varphi(t). \end{cases} \tag{13.30}$$

Далі, вищеописаним способом, знаходимо загальний розв'язок в параметричній формі.

Приклад. Розв'язати рівняння $e^{y''} + y'' = x$.

Розв'язання. Зробимо заміну $\begin{cases} y'' = t, \\ x = e^t + t, \end{cases}$

$$dy' = y''dx = t(e^t + 1)dt,$$

$$y' = (t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1,$$

$$dy = y'dx = \left[(t-1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1 \right](e^t + 1)dt.$$

Остаточно маємо

$$\begin{cases} y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + c_1 - 1\right)e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2, \\ x = e^t + t. \end{cases}.$$

13.2.2. ***Інтегрування диференціальних рівнянь, які не містять шуканої функції та*** $(k-1)$***-ї похідної***

Розглянемо диференціальне рівняння

$$F\left(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (13.31)$$

в якому є $y^{(k)}$, як функція незалежної змінної x.

Введемо нову змінну

$$y^{(k)} = z, \qquad (13.32)$$

отримаємо

$$F\left(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0, \qquad (13.33)$$

тобто ми понизили порядок диференціального рівняння (13.31) на k одиниць.

Припустимо, що ми розв'язали диференціальне рівняння (13.33) і визначили

$$z = \omega(x, C_1, \ldots, C_{n-k}). \qquad (13.34)$$

Тоді рівняння

$$y^{(k)} = \omega(x, C_1, \ldots, C_{n-k}) \qquad (13.35)$$

інтегруємо і отримаємо загальний розв'язок

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n). \qquad (13.36)$$

Якщо замість загального розв'язку можна знайти загальний інтеграл

$$\Omega\left(x, z, C_1, ..., C_{n-k}\right) = 0,$$

то отримаємо диференціальне рівняння $\Omega\left(x, y^{(k)}, C_1, ..., C_{n-k}\right) = 0$ типу (13.24).

Розглянемо два частинних випадки відносно диференціального рівняння (13.31).

а) Диференціальне рівняння вигляду

$$F\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (13.37)$$

Якщо диференціальне рівняння (13.37) можна розв′язати відносно $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}), \qquad (13.38)$$

то поклавши $y^{(n-1)} = z$ перейдемо до рівняння $z' = f(z)$.

Якщо $z = \omega(x, C_1)$ – загальний розв′язок останнього рівняння, то остаточно маємо рівняння вигляду (13.18) $y^{(n-1)} = \omega(x, C_1)$.

Припустимо, що диференціальне рівняння (13.35) не можна записати в вигляді (13.38), але воно допускає параметризацію

$$y^{(n-1)} = \varphi(t), y^{(n)} = \psi(t). \qquad (13.39)$$

Тоді із співвідношення $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$ знаходимо $dx = \dfrac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$, відповідно,

$$\begin{cases} x = \displaystyle\int \frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)} + C_1, \\ y^{(n-1)} = \varphi(t). \end{cases} \qquad (13.40)$$

Диференціальне рівняння (13.40) вигляду (13.25) і його розв'язки можна отримати в параметричній формі.

б) *Диференціальне рівняння вигляду*

$$F\left(y^{(n-2)}, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (13.41)$$

Нехай диференціальне рівняння (13.41) можна розв′язати відносно $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right). \qquad (13.42)$$

Позначимо $y^{(n-2)} = z$ і перейдемо до диференціального рівняння

$$z'' = f(z). \qquad (13.43)$$

Помножимо (13.43) на $2z'dx$: $2z'z''dx = 2z'f(z)dx$, звідки $d(z')^2 = 2f(z)dz.$

Отже,

$$(z')^2 = 2\int f(z)dz + C_1,$$

з якого визначимо

$$z' = \pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}\,.$$

Останнє диференціальне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Знайшовши з нього

$$z = \varphi(x, C_1, C_2),$$

ми остаточно переходимо до диференціального рівняння вигляду (13.18)

$$y^{(n-2)} = \varphi(x, C_1, C_2)\,. \qquad (13.44)$$

Припустимо, що диференціальне рівняння (13.41) не можна розв'язати відносно $y^{(n)}$, але для нього можлива параметризація $y^{(n-2)} = \varphi(t), y^{(n)} = \psi(t)$. Запишемо співвідношення

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx, dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx\,.$$

Помножимо першу рівність на $y^{(n-1)}$

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}y^{(n-1)}dx\,,$$

після чого отримаємо

$$d(y^{(n-1)})^2 = 2y^{(n)}y^{(n-1)} = 2y^{(n)}dy^{(n-2)}\,.$$

Звідки

$$d(y^{(n-1)})^2 = 2\psi(t)\varphi'(t)dt\,.$$

Отже, маємо

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\psi(t)\varphi'(t)dt + C_1} \equiv \psi_1(t, \mathrm{C}_1)\,.$$

Приєднавши до останньої рівності $y^{(n-2)} = \varphi(t),$ ми отримаємо рівняння пункту а).

13.2.3. ***Пониження порядку диференціальних рівнянь, які не містять незалежної змінної***

Ці диференціальні рівняння мають вигляд

$$F\left(y, y', .., y^{(n)}\right) = 0 \qquad (13.45)$$

і їх порядок можна понизити на одиницю заміною $y' = z$. При цьому y стає незалежною зміною, а z – шуканою функцією. Обчислюємо

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}z\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)z\,,$$

$$\dots\ \dots\ \dots$$

$$y^{(n)} = \omega_n\left(z, \frac{dz}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)$$

і остаточно прийдемо до диференціального рівняння $(n-1)$ порядку

$$F\left(y, z, \frac{dz}{dy}z, ..., \omega_n\left(z, \frac{dz}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)\right) = 0\,. \qquad (13.46)$$

Якщо $z = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1})$ – розв′язок диференціального рівняння (13.46), то

$$y' = \varphi(y, C_1, ..., C_{n-1})\,. \qquad (13.47)$$

Інтегруємо диференціальне рівняння (13.46) і знайдемо загальний інтеграл.

Особливі розв'язки можуть з’являтися при інтегруванні диференціального рівняння (13.47). Переходячи до диференціального рівняння (13.46), можна загубити розв′язки $y = \text{const}$. Для їх знаходження необхідно розв’язати рівняння $F(b, 0, \ldots, 0) = 0$. Якщо $b = b_i$ – розв′язок останнього рівняння, то $y = b_i$ – розв’язок диференціального рівняння (13.4).

Приклад. Розв′язати рівняння

$$4y''\sqrt{y} = 1\quad .$$

Розв'язання. Вводимо змінну $y' = z$, $y'' = \dfrac{dz}{dy} z$, тоді

$$4\frac{dz}{dy} z\sqrt{y} = 1,\ z^2 = \sqrt{y} + C_1,$$

звідки $z = \pm\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$, отже, $\dfrac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$, $x + C_2 = \pm\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}}$ – загальний інтеграл рівняння.

Завдання для самоконтролю

1. Сформулювати основні поняття та означення для диференціальних рівнянь вищих порядків.

2. Сформулювати задачу Коші для диференціального рівняння вищого порядку та теорему існування та єдиності її розв’язку.

3. Пояснити з геометричної та механічної точки зору існування єдиного розв’язку задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку.

4. Розв’язати $y^{(n)} = f(x)$.

5. Розв’язати диференціальні рівняння $F\left(x, y', y''\right) = 0$, $F(y', y'') = 0.$

6. Пояснити пониження порядку для диференціальних рівнянь $F\left(y, y', .., y^{(n)}\right) = 0$, $F\left(y, y', y''\right) = 0.$

7. Розв’язати диференціальні рівняння:

1) $y''' = \cos 5x + x + 3$; 2) $y'' + y' = x$; 3) $1 + y'^2 = yy''$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Лекція 14. Лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку

14.1. Загальні властивості лінійних однорідних диференціальних рівнянь *n*-го порядку.

14.1.1. Властивості лінійного диференціального оператора.

14.1.2. Властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння *n*-го порядку.

14.1.3. Необхідні і достатні умови лінійної незалежності *n* розв'язків лінійного однорідного рівняння *n*-го порядку.

14.1.4. Формула Остроградського-Ліувілля. Фундаментальна система розв'язків та її існування.

14.2. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння.

14.3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальний та частинний розв'язки.

14.1. Загальні властивості лінійних однорідних диференціальних рівнянь *n*-го порядку

14.1.1. *Властивості лінійного диференціального оператора*

Означення. *Лінійним диференціальним рівнянням* називається рівняння вигляду

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \qquad (14.1)$$

де $p_i(x)$, $i = 1,\ldots,n,$ $f(x)$ – задані функції, неперервні на (a,b).

За таких умов диференціальне рівняння (14.1) має єдиний розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots \quad , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}.$$

Цей розв'язок визначений і *n* раз неперервно-диференційовний на (a,b).

Особливих розв'язків диференціальне рівняння (14.1) не має. Будь-який розв'язок при конкретних початкових умовах є частинним. Якщо при $y^{(n)}$ стоїть $p_0(x)$, то точки, в яких $p_0(x)=0$, називаються особливими.

Якщо $f(x)=0,$ то диференціальне рівняння (14.1) називають *однорідним*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0. \qquad (14.2)$$

Для скорочення запису введемо лінійний диференціальний оператор

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x). \qquad (14.3)$$

Властивості оператора L:

a) $L(ky) = kL(y), \quad k = const$;

b) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$;

c) $L\left(\sum_{i=1}^{m} C_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{m} C_i L(y_i)$, де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – деякі числа.

Використовуючи оператор *L*, диференціальні рівняння (14.1) і (14.2) перепишемо у вигляді

$$L(y) = f(x), \qquad (14'.1)$$

$$L(y) = 0. \qquad (14'.2)$$

Означення. Функція $y = y(x)$ називається *розв'язком* диференціального рівняння (14.1), якщо $L(y(x)) = f(x)$ (для диференціального рівняння (14.2) $L(y(x)) \equiv 0$).

Лінійне диференціальне рівняння (14.1) залишається бути лінійним при будь-якій заміні незалежної змінної $x = \varphi(t) \quad (\varphi'(t) \neq 0)$.

Лінійне диференціальне рівняння (14.1) залишається бути лінійним для будь-якої лінійної заміни шуканої функції

$$y = \alpha(x)z + \beta(x) \qquad (14.4)$$

при певних обмеженнях на функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$.

14.1.2. ***Властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку***

Задача полягає в тому, щоб знайти всі дійсні розв'язки диференціального рівняння

$$L(y)=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0. \qquad (14.5)$$

Для розв'язування такої задачі доцільно знайти деякі комплексні розв'язки.

Означення. Функцію $z(x)=u(x)+iv(x)$, де $u(x)$, $v(x)$ – дійсні функції, $i=\sqrt{-1}$, будемо називати *комплексною функцією* від дійсної змінної x ($u(x)$ – дійсна частина, $v(x)$ – уявна частина).

Похідна n-го порядку від $z(x)$ дорівнює

$$z^{(n)}(x)=u^{(n)}(x)+iv^{(n)}(x). \qquad (14.6)$$

Наведемо формули для обчислення похідних:

а) $$\left(e^{\alpha x}\right)'=\alpha e^{\alpha x} \qquad (\alpha=a+ib). \qquad (14.7)$$

Дійсно,

$$\left[e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)\right]'=ae^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+e^{ax}[-b\sin bx+ib\cos bx]=$$
$$=e^{ax}(a+ib)\cos bx+e^{ax}(ai-b)\sin bx=(a+ib)e^{ax}(\cos bx+i\sin bx);$$

б) для дійсного k і будь-якого α справедлива формула

$$\left(x^k e^{\alpha x}\right)'=\left(kx^{k-1}+\alpha x^k\right)e^{\alpha x}; \qquad (14.8)$$

в) можна показати

$$\left(P_n(x)e^{\alpha x}\right)'=\overline{P}_n(x)e^{\alpha x}, \qquad (14.9)$$

де $P_n(x)$, $\overline{P}_n(x)$ – поліноми степеня n;

г) при будь-якому α (дійсному або комплексному) справедлива формула

$$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}. \qquad (14.10)$$

Формула (14.10) доводиться шляхом представлення $x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ і використання формули (14.7).

Означення. Комплексна функція

$$y(x) = y_1(x) + iy_2(x) \tag{14.11}$$

називається *розв'язком* однорідного диференціального рівняння (14.5), якщо

$$L(y(x)) \equiv 0,\ a < x < b.$$

Комплексний розв'язок (14.11) утворює два дійсних розв'язки $y_1(x), y_2(x)$. Дійсно, $L(y(x)) = L(y_1(x) + iy_2(x)) = L(y_1(x)) + iL(y_2(x)) = 0,$ звідки $L(y_1(x)) = 0,\ L(y_2(x)) = 0$.

Властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння

а) Якщо $y_1(x)$ – розв'язок , тобто $L(y_1(x)) = 0$, то $y = Cy_1(x)$, де C – довільна константа, теж розв'язок диференціального рівняння (14.5)

$$L(Cy_1) = CL(y_1) = 0;$$

б) якщо $y_1(x), y_2(x)$ – розв'язки диференціального рівняння (14.5), то $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ теж розв'язок. Дійсно, $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0;$

в) якщо $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_m(x)$ – розв'язки диференціального рівняння (14.5), то їх лінійна комбінація також є розв'язком

$$L\Big(\sum_{i=1}^{m} C_i y_i(x)\Big) = \sum_{i=1}^{m} C_i L(y_i(x)) = 0.$$

14.1.3. ***Необхідні і достатні умови лінійної незалежності n розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку***

Означення. Функції $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називаються *лінійно незалежними* на (a, b), якщо між ними не існує співвідношення виду

$$\alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0,\ a < x < b, \tag{14.12}$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – постійні числа, не рівні нулю одночасно. В противному випадку функції $y_1(x),\ y_2(x), \ldots, y_n(x)$ називають *лінійно залежними* на (a, b).

Для двох функцій поняття лінійної незалежності на (a,b) зводиться до того, щоб відношення функцій $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$, ($y_2(x)\neq 0$) не було постійним на (a,b).

Зауваження. Якщо одна із функцій на (a,b) тотожно дорівнює нулю, то ці функції лінійно залежні.

Приклад. Функції $y_1=1$, $y_2=x$, ... , $y_n = x^{n-1}$ – лінійно незалежні на будь-якому інтервалі (a,b) $\subset(-\infty,+\infty)$.

Дійсно, співвідношення $\alpha_1+\alpha_2 x$ + ... + $\alpha_n x^{n-1}=0$, в якому не всі α_i дорівнюють нулю, не може виконуватися для будь-яких x, так як рівняння $(n-1)-$го степеня має не більше $(n-1)-$го кореня.

Приклад. Функції $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$ – лінійно незалежні, так як співвідношення $\alpha_1 e^x+\alpha_2 e^{-x}=0$, де α_1,α_2 не рівні одночасно нулю, виконуються не більше, ніж в одній точці. Це випливає з рівності

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=e^{2x}\neq const\,.$$

Розглянемо необхідні умови лінійної залежності n функцій .

Теорема 1. *Якщо функції* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *– лінійно залежні на (a,b), то їх вронскіан W (x) тотожно дорівнює нулю на (a,b). Тут*

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \qquad (14.13)$$

Доведення. Згідно умови теореми

$$\alpha_1\, y_1(x) + \alpha_2\, y_2(x) + \dots + \alpha_n\, y_n(x)\equiv 0,\; a<x<b,$$

де не всі α_i одночасно рівні нулю. Нехай $\alpha_n\neq 0$, тоді

$$y_n=-\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2-\dots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}. \qquad (14.14)$$

Диференціюємо (14.14) $(n-1)$ раз і підставляємо в (14.13)

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_{n-1}(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2-\ldots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1} \\ y_1'(x) & \cdots & y_{n-1}'(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1'-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2'-\ldots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}y_1^{(n-1)}-\frac{\alpha_2}{\alpha_n}y_2^{(n-1)}-\ldots-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (14.15)$$

Розкладаючи визначник (14.15) на суму визначників, будемо мати в кожному з них два однакові стовпчики, тому всі визначники будуть рівні нулю і, отже, $W(x)=0, a<x<b.$

Теорема доведена.

Нехай кожна з функцій $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)-$розв’язок диференціального рівняння (14.5). Тоді необхідні і достатні умови лінійної незалежності цих розв’язків даються теоремою 1 і наступною теоремою 2.

Теорема 2. *Якщо функції* $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)-$*лінійно незалежні розв’язки диференціального рівняння (14.5), всі коефіцієнти якого неперервні на (a,b), то вронскіан цих розв’язків W не дорівнює нулю в жодній точці інтервалу (a,b).*

Доведення. Припустимо протилежне, що в точці $x_0\in(a,b)$ $W(x_0)=0$. Складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+ \ \ldots \ +C_ny_n(x_0)=0, \\ C_1y_1'(x_0)+ \ \ldots \ +C_ny_n'(x_0)=0, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+ \ \ldots \ +C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0. \end{cases} \quad (14.16)$$

Так як визначник системи (14.16) $W(x_0)\neq 0$, то вона має ненульовий розв’язок $C_1^{(0)},...,C_n^{(0)}$. Розглянемо функцію

$$y= C_1^{(0)}y_1(x)+\ldots+C_n^{(0)}y_n(x), \quad (14.17)$$

яка є розв'язком диференціального рівняння (14.5).

Система (14.16) показує, що в точці x_0 розв'язок (14.17) перетворюється в нуль разом із своїми похідними до $(n-1)$-го порядку. В силу теореми існування і єдиності це значить, що має місце тотожність

$$y(x)= C_1^{(0)}y_1(x)+...+C_n^{(0)}y_n(x)\equiv 0,\ a < x < b,$$

де не всі $C_i^{(0)}$ дорівнюють нулю. Останнє означає, що розв'язки $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ – лінійно залежні на (a,b). Це протиріччя і доводить теорему.

З теорем випливає: *для того, щоб n розв'язків диференціального рівняння (14.5) були лінійно незалежними на (a,b) необхідно і достатньо, щоб їх вронскіан не дорівнював нулю в жодній точці цього інтервалу*.

Отже, для вияснення лінійної незалежності *n* розв'язків диференціального рівняння (14.5) достатньо переконатися , що *W(x)* не дорівнює нулю хоча б в одній точці інтервалу (a,b) . Це випливає з наступних властивостей вронскіана від *n* розв'язків диференціального рівняння (14.5).

а) Якщо вронскіан дорівнює нулю в одній точці $x_0 \in (a,b)$ і всі коефіцієнти диференціального рівняння (14.5) є неперервними, то $W(x_0)\equiv 0$ на (a,b). Дійсно, якщо $W(x_0)=0$, то за *теоремою2* функції $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)-$ лінійно залежні на (a,b). Тоді, *за теоремою1* $W(x)\equiv 0$ на (a,b);

б) Якщо вронскіан *n* розв'язків диференціального рівняння (14.5) відмінний від нуля в одній точці $x_0 \in (a,b)$, то $W(x)\neq 0$ на (a,b). Дійсно, якби *W(x)* дорівнював в одній точці із (a,b) нулеві, то згідно п. а) $W(x)\equiv 0$ на (a,b), в тому числі і в точці $x_0 \in (a,b)$, що суперечить умові.

Звідси випливає, якщо *n* розв'язків диференціального рівняння (14.5) лінійно незалежні на (a,b), то вони будуть лінійно незалежні на будь-якому $(a_1,b_1)\subset(a,b)$.

14.1.4. *Формула Остроградського-Ліувілля. Фундаментальна система розв'язків та її існування*

Теорема. *Формула Остроградського-Ліувілля має вигляд*

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx}. \tag{14.18}$$

Доведення. Розглянемо вронскіан $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$ і обчислимо його похідну

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \ldots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Перших $(n-1)$ визначників рівні нулю, так як всі вони мають по два однакових рядки. Далі, домножимо перші $(n-1)$ рядки останнього визначника відповідно на $p_n(x), p_{n-1}(x), \ldots, p_2(x)$ і додамо всі n рядків. В силу диференціального рівняння (14.5) маємо

$$W'(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ -p_1 y_1^{(n-1)} & -p_1 y_2^{(n-1)} & \cdots & p_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -p_1(x)W(x).$$

Отже, маємо формулу (14.18).

Означення. Сукупність n розв'язків диференціального рівняння (14.5), визначених і лінійно незалежних на (a,b), називається ***фундаментальною системою розв'язків.***

З попереднього випливає, для того, щоб система n розв'язків диференціального рівняння (14.5) була *фундаментальною системою розв'язків необхідно і достатньо, щоб вронскіан цих розв'язків був відмінний від нуля хоч в одній точці інтервалу неперервності коефіцієнтів диференціального рівняння (14.5). Всі ці розв'язки повинні бути ненульовими.*

Теорема ***(про існування фундаментальної системи розв'язків).*** *Якщо коефіцієнти диференціального рівняння (14.5) є неперервними на (a,b), то існує фундаментальна система розв'язків на цьому інтервалі.*

Доведення. Візьмемо точку $x_0 \in (a,b)$ і побудуємо, використовуючи метод Пікара, розв'язки :

$y_1(x)$ з початковими умовами $y_1(x_0)=1, y_1'(x_0)=0,..., y_1^{(n-1)}(x_0)=0$;

$y_2(x)$ з початковими умовами $y_2(x_0)=0, y_2'(x_0)=1,..., y_2^{(n-1)}(x_0)=0$;

………………………………………………

$y_n(x)$ з початковими умовами $y_n(x_0)=0, y_n'(x_0)=0,..., y_n^{(n-1)}(x_0)=1$.

Очевидно, що $W(x_0)=1\neq 0$, отже, побудовані розв'язки лінійно незалежні.

Теорема доведена.

З методу побудови лінійно незалежних функцій випливає, що таких функцій можна побудувати безліч.

Побудована система розв'язків називається *нормованою* в точці $x = x_0$.

Для будь-якого диференціального рівняння (14.5) існує тільки одна фундаментальна система розв'язків, нормована за x_0.

Теорема. *Якщо* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x) -$ *фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (14.5), то формула*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \tag{14.19}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n -$*довільні константи, дає загальний розв'язок диференціального рівняння (14.5) в області*

$$a < x < b,\ |y| < \infty, |y'| < \infty, \ldots, \left|y^{(n-1)}\right| < \infty, \tag{14.20}$$

тобто в області визначення диференціального рівняння (14.5).

Доведення. Якщо $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – розв'язки диференціального рівняння (14.5), то лінійна комбінація (14.19) теж розв'язок. Систему

$$\begin{cases} y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \\ y' = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i'(x) \\ \ldots \\ y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}(x) \end{cases} \tag{14.21}$$

можна розв'язати відносно $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в області (14.20), так як $W(x) \neq 0$. Згідно означення, (14.19) – *загальний розв'язок*, і він містить в собі всі розв'язки диференціального рівняння (14.5).

Теорема доведена.

Для знаходження частинного розв'язку такого, що

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{14.22}$$

необхідно все підставити в (14.21) і визначити $C_i^{(0)}, i=1,...,n$. Тоді $y=\sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_i(x)$ – частинний розв'язок. Якщо фундаментальна система розв'язків є нормована в точці $x=x_0$, то $C_i^{(0)}=y_0$, тобто

$$y=y_0 y_1(x)+y_0' y_2(x)+...+y_0^{(n-1)} y_n(x) - \qquad (14.23)$$

загальний розв'язок в формі Коші.

Зауважимо, що загальний розв'язок диференціального рівняння (14.5) є однорідна лінійна функція від довільних констант.

Теорема. *Диференціальне рівняння (14.5) не може мати більше ніж n лінійно незалежних частинних розв'язків.*

14.2. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$L(y)=y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_n y=f(x), \qquad (14.24)$$

де $a_1,...,a_n$ – постійні дійсні числа, $f(x)$ – неперервна функція на (a,b).

Разом з неоднорідним диференціальним рівнянням (14.24) будемо розглядати однорідне диференціальне рівняння

$$L(y)=y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_n y=0. \qquad (14.25)$$

Для побудови загального розв'язку диференціального рівняння (14.25) необхідно знайти хоч одну фундаментальну систему розв'язків. Виявляється, що фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (14.25) можна побудувати з елементарних функцій.

Наприклад, при $n=1$ для диференціального рівняння $y'+a_1y=0$, де a_1 – дійсне число, частинним розв’язком буде функція $y_1=e^{-a_1x}$.

Дотримуючись ідеї Ейлера, частинні розв’язки диференціального рівняння (14.25) шукаємо у вигляді

$$y=e^{\lambda x}, \qquad (14.26)$$

де λ – деякі, поки невідомі, постійні числа (дійсні або комплексні). Підставимо (14.26) в (14.25) отримаємо

$$L\left(e^{\lambda x}\right)=\left(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n\right)e^{\lambda x}=P_n(\lambda)e^{\lambda x}. \qquad (14.27)$$

Із (14.27) випливає, що $y=e^{\lambda x}$ є розв'язком диференціального рівняння (14.25) тоді і тільки тоді, коли $P_n(\lambda)=0$, тобто

$$P_n(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \qquad (14.28)$$

Рівняння (14.28) називають *характеристичним рівнянням*, а його корені − *характеристичними числами* диференціального рівняння (14.25).

Розглянемо три випадки побудови лінійно незалежних розв'язків.

а) *Корені характеристичного рівняння* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – *дійсні і різні*. Тоді n дійсних частинних розв'язків знайдемо згідно формул

$$y_1=e^{\lambda_1x}, y_2=e^{\lambda_2x},\ldots,y_n=e^{\lambda_nx}.$$

Ці розв'язки є лінійно незалежними. Дійсно

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1x} & e^{\lambda_2x} & \ldots & e^{\lambda_nx} \\ \lambda_1e^{\lambda_1x} & \lambda_2e^{\lambda_2x} & \ldots & \lambda_ne^{\lambda_nx} \\ . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1x} & \lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2x} & \ldots & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_nx} \end{vmatrix}=e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}\neq 0,$$

так як останній визначник є визначником Вандермонда, який не дорівнює нулю, коли всі числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – різні.

В цьому випадку загальний розв'язок має вигляд

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x} \tag{14.29}$$

в області

$$|x| < \infty, |y| < \infty, |y'| < \infty, \ldots, \left|y^{(n-1)}\right| < \infty, \tag{14.30}$$

де $C_1, \ldots, C_n$ – довільні сталі.

б) *Корені характеристичного рівняння всі різні, але серед них є комплексні.*

Нехай $a \pm bi$ – пара комплексно-спряжених коренів. Два дійсних, лінійно незалежних розв'язки, будуються таким чином. Кореню $a + bi$ відповідає комплексний розв'язок $y = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$. Згідно доведеному вище, функції $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$ також є розв'язками диференціального рівняння (14.25), які є незалежними в інтервалі $(-\infty, \infty)$. Аналогічно, кореню $a - bi$ відповідають два дійсних, лінійно незалежних розв'язки $e^{ax}\cos bx$, $-e^{ax}\sin bx$. Їх приєднання до знайдених дають лінійно залежну систему розв'язків. Тобто, спряжений корінь не приносить нових дійсних, лінійно незалежних частинних розв'язків.

Таким чином, кожній парі комплексно спряжених коренів відповідає два дійсних, лінійно незалежних розв'язки виду

$$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx,$$

які разом з розв'язком $e^{\lambda_k x}$ (λ_k – дійсні числа) утворюють фундаментальну систему розв'язків на інтервалі $(-\infty, \infty)$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння і знайдемо його розв'язки

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_2 = 3.$$

Тоді

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}, y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} -$$

загальний розв’язок.

Приклад. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0.$$

Розв'язання. $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0, \lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i,$

$$y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{2x}\cos 3x,\ y_3 = e^{2x}\sin 3x,\ y = C_1 e^{-x} + \left(C_2\cos 3x + C_3\sin 3x\right)e^{2x} -$$

загальний розв'язок.

Приклад. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$$

Розв'язання. $\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm 2i,$

$$y_1 = e^x,\ y_2 = \cos 2x,\ y_3 = \sin 2x,\ y = C_1 e^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x.$$

в) *Випадок наявності кратних коренів характеристичного рівняння.*

Припустимо, що $\lambda_1 - k$-кратний корінь характеристичного рівняння (14.28), так що

$$P_n(\lambda_1) = P_n'(\lambda_1) = \ldots = P_n^{(k-1)}(\lambda_1) = 0,\ \text{але}\ P_n^{(k)}(\lambda_1) \neq 0. \tag{14.31}$$

Щоб знайти розв’язки, які відповідають характеристичному числу λ_1, продиференціюємо тотожність

$$L\left(e^{\lambda x}\right) = P_n(\lambda)e^{\lambda x} \tag{14.32}$$

m раз за λ, використовуючи при цьому формулу

$$\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}L(u)=L\left(\frac{\partial^m u}{\partial\lambda^m}\right),\quad \left(u=e^{\lambda x}\right).$$

Для знаходження похідної від добутку функцій використовуємо формулу Лейбніца

$$(uv)^{(m)}=\sum_{i=0}^{m}C_m^i u^{(i)}v^{(m-i)},\qquad \left(C_m^0=1\right),$$

де $u(\lambda)=P_n(\lambda), v(\lambda)=e^{\lambda x}$. Маємо

$$L(x^m e^{\lambda x})=\sum_{i=0}^{m}C_m^i P_n^{(i)}(\lambda)x^{m-i}e^{\lambda x}.$$

Використовуючи (14.31), запишемо $L(x^m e^{\lambda x})\equiv 0,\ m=0,1,\dots,k-1,$ тобто функції

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x},\dots,x^{k-1}e^{\lambda_1 x} \tag{14.33}$$

є розв'язками диференціального рівняння (14.25). Ці функції лінійно незалежні на (a,b).

Таким чином, кожному дійсному кореню λ_1 кратності k відповідає k дійсних лінійно незалежних розв'язків виду (14.33).

Зауваження. Якщо характеристичне рівняння має комплексні корені $a\pm ib$ кратності k, то $2k$ лінійно незалежних розв'язків будуть мати вигляд

$$\begin{cases} e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\dots,x^{k-1}e^{ax}\cos bx \\ e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\dots,x^{k-1}e^{ax}\sin bx \end{cases}. \tag{14.34}$$

Розв'язки (14.34) лінійно незалежні на інтервалі $\left(-\infty,\infty\right)$.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'''-3y''+3y'-y=0.$$

Розв'язання. Запишемо розв’язки характеристичного рівняння

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Тоді

$$y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = x^2 e^x,\ y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x -$$

загальний розв’язок.

Приклад. Розв’язати диференціальне рівняння

$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0.$$

Розв'язання. $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0$, $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$,

$y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{2x}, y_3 = xe^{2x}$, $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x + C_3 x e^x -$ загальний розв'язок.

Приклад. Розв’язати диференціальне рівняння

$$y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Розв'язання. $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1 + i, \lambda_{3,4} = 1 - i$,

$$y_1 = e^x \cos x,\ y_2 = xe^x \cos x,\ y_3 = e^x \sin x,\ y_4 = xe^x \sin x,$$

$y = e^x \cos x(C_1 + xC_2) + e^x \sin x(C_3 + xC_4)$ – загальний розв'язок.

14.3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальний та частинний розв’язки

Розглянемо

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (14.35)$$

де p, q – дійсні числа.

За методом Ейлера слід шукати частинні розв’язки цього рівняння у вигляді

$$y = e^{kx}, \qquad (14.36)$$

де k – стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти. Підставивши функцію (14.36) в рівняння (14.35) дістанемо

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0,$ то

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{14.37}$$

Отже, якщо k буде коренем рівняння (14.37), то функція (14.36) буде розв'язком рівняння (14.35). Квадратне рівняння (14.37) називається *характеристичним рівнянням диференціального рівняння* (14.35).

Позначимо корені характеристичного рівняння через k_1 і k_2 . Можливі три випадки:

I. k_1 і k_2 – дійсні і різні числа ($k_1 \neq k_2$);

II k_1 і k_2 – комплексні числа $(k_{1,2} = \alpha \pm i\beta)$;

III. k_1 і k_2 – дійсні і рівні числа ($k_1 = k_2$).

Розглянемо кожен випадок окремо.

I. *Корені характеристичного рівняння дійсні і різні:* $k_1 \neq k_2$. У цьому випадку частинними розв'язками рівняння (14.35) є функції

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, тому що для $k_1 \neq k_2$

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}.$$

Згідно з теоремою про фундаментальну систему розв'язків, за формулою (14.19), загальний розв'язок рівняння (14.35) знаходять за формулою

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{14.38}$$

II. *Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені:*

$$k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i.$$

Підставивши значення $k_1 i \quad k_2$ у формулу (14.36), знайдемо розв'язки

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}, y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

За формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

маємо

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x);$$
$$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Зауважимо, що коли функція $z(x) = u(x) + iv(x)$ є розв'язком рівняння (14.35), то розв'язками будуть також функції $u(x)$ та $v(x)$. Дійсно, підставивши функцію $z(x)$ в рівняння (14.35), дістанемо:

$$u'' + v''i + p(u' + v'i) + q(u + vi) \equiv 0,$$

або $(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0.$

Остання тотожність можлива, коли вирази в дужках дорівнюють нулю. Це означає, що функції u та v – розв'язки рівняння (14.35). Згідно з цим зауваженням, частинними розв'язками рівняння (14.35) є функції

$$y_1 = e^{\alpha x}\sin\beta x, \qquad y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{e^{\alpha x}\cos\beta x} = \mathrm{tg}\beta x \neq \mathrm{const},$$

Тому загальний розв'язок рівняння (14.35) запишеться у вигляді

$$y = e^{\alpha x}(C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x). \qquad (14.39)$$

III. *Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні* $k_1 = k_2 = k$. За формулою (14.36) дістанемо один з розв'язків:

$$y = e^{kx}.$$

Другий розв'язок шукатимемо у вигляді $y_2 = ue^{kx}$, де u – невідома функція від x. Знайшовши y_2', y_2'' та підставивши їх у рівняння (14.35), дістанемо

$$(u'' + 2u'k + uk^2)e^{kx} + p(u' + uk)e^{kx} + que^{kx} = 0,$$

або

$$u''+(2k+p)u'+(k^2+pk+q)u=0.$$

Оскільки k – корінь рівняння (14.37), то $k^2+pk+q=0$ і за теоремою Вієта $2k=-p,$ тому $2k+p=0$ і $u''=0,$ звідки $u=C_1x+C_2,$ де C_1,C_2 – довільні сталі. Поклавши $C_1=1, C_2=0$ (нас цікавить який-небудь розв'язок $u(x)\neq 0$), знайдемо другий частинний розв'язок рівняння (14.35):

$$y_2=xe^{kx}.$$

Розв'язки y_1, y_2 – лінійно незалежні, тому загальний розв'язок рівняння (14.35) має вигляд

$$y=e^{kx}(C_1+C_2x). \tag{14.40}$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''-5y'+6y=0.$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2-5k+6=0$ і знайдемо його корені $k_1=2, k_2=3.$ За формулою (14.38) шуканий розв'язок має вигляд:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Пояснити (на прикладі) поняття лінійно залежних та незалежних функцій, фундаментальної системи розв'язків для лінійного однорідного диференціального рівняння *n*-го порядку.
2. Записати та довести властивості лінійного диференціального оператора, пояснити доцільність його введення.
3. Довести необхідні умови лінійної залежності *n* функцій.
4. Сформулювати властивості вронскіана від *n* розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння *n*-го порядку.
5. Записати в загальному вигляді структуру загального розв'язку для лінійного однорідного диференціального рівняння *n*-го порядку та пояснити метод Ейлера побудови фундаментальної системи розв'язків.

6. Записати фундаментальну систему розв’язків та загальний розв’язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку:

1) $y'' + 4y' + 20y = 0;$ 2) $y'' + y' - 2y = 0;$ 3) $y'' - 14y' + 49y = 0.$

7. Знайти частинні розв’язки:

1) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0, \ \ y(0) = -1, \ \ y'(0) = 0, \ \ y''(0) = 1;$

2) $y^{IY} - 16y = 0, \ \ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \ \ y'''(0) = -8.$

Лекція 15. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння *n*-го порядку

15.1. Структура загального розв′язку неоднорідного рівняння.

15.2. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).

15.2.1. Метод Лагранжа для неоднорідного лінійного диференціального рівняння *n*-го порядку.

15.2.2. Метод варіації довільних сталих при розв'язуванні лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку.

15.3. Знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів.

15.4. Неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та із спеціальною правою частиною.

15.1. Структура загального розв′язку неоднорідного рівняння

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = f(x), \qquad (15.1)$$

де $f(x),\ p_1(x), \ldots, p_n(x)$ – неперервні на (a,b) функції.

Припустимо, що для диференціального рівняння (15.1) ми знайшли частинний розв′язок так, що

$$L(y_1) = f(x). \qquad (15.2)$$

Введемо нову змінну z

$$y = y_1 + z. \qquad (15.3)$$

Тоді $L(y_1 + z) = L(y_1) + L(z) = f(x)$, звідки

$$L(z) \equiv z^{(n)} + p_1(x) z^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) z = 0. \qquad (15.4)$$

Диференціальне рівняння (15.4) називається *однорідним диференціальним рівнянням,* яке відповідає неоднорідному диференціальному рівнянню (15.2).

Загальний розв′язок диференціального рівняння (15.4) записується у формі

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + ... + C_n z_n, \tag{15.5}$$

де $z_1, z_2, ..., z_n$ – фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (15.4), $C_1, C_2, ..., C_n$ – довільні сталі. Тоді

$$y = y_1(x) + C_1 z_1 + C_2 z_2 + ... + C_n z_n \tag{15.6}$$

буде *загальним розв′язком диференціального рівняння (15.1) в області*

$$a < x < b, |y| < \infty, |y'| < \infty, \ldots, \left|y^{(n-1)}\right| < \infty. \tag{15.7}$$

Таким чином, для знаходження загального розв′язку неоднорідного диференціального рівняння (15.1) необхідно знайти один частинний розв′язок диференціального рівняння (15.1) і додати до нього загальний розв′язок однорідного диференціального рівняння.

Зауваження. Розглянемо диференціальне рівняння

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x). \tag{15.8}$$

Припустимо, що $y_1(x)$– частинний розв′язок диференціального рівняння $L(y_1) = f_1(x)$, а $y_2(x)$– частинний розв′язок диференціального рівняння $L(y_2) = f_2(x)$. Тоді, очевидно, $y_1(x) + y_2(x)$– частинний розв′язок диференціального рівняння (15.8), тобто справедлива теорема про накладання частинних розв’язків для неоднорідного диференціального рівняння.

Приклад. Знайти частинний розв′язок диференціального рівняння

$$y'' + 2y = 2 + 3e^x.$$

Розв'язання. Розглянемо диференціальні рівняння:

$y'' + 2y = 2$ для якого $y_1 = 1; y'' + 2y = 3e^x$ для якого $y_2 = e^x$.

Тоді $y_1 + y_2 = e^x + 1$– частинний розв′язок даного диференціального рівняння.

15.2. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

15.2.1. *Метод Лагранжа для неоднорідного лінійного диференціального рівняння n-го порядку*

Загальний розв′язок неоднорідного диференціального рівняння (15.1) можна знайти в квадратурах, якщо відомо загальний розв′язок відповідного однорідного диференціального рівняння (15.4). Будемо шукати загальний розв′язок диференціального рівняння (15.1) у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) z_i \,, \tag{15.9}$$

де $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x) -$ деяка фундаментальна система розв′язків диференціального рівняння (15.4).

Виберемо функції $C_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$ так, щоб функція (15.9) була загальним розв′язком диференціального рівняння (15.1). Так як шукані функції задовольняють тільки одній умові, то для їх визначення треба підпорядкування $(n-1)$ умові, які записують, обчислюючи похідні вищих порядків.

Таким чином, знайдемо *n* похідних функції (15.9):

$$y' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) z_i' + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_i \ \text{ та покладемо } \ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_i = 0;$$

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) z_i'' + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_i' \ \text{ та покладемо } \ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_i' = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) z_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_i^{(n-2)} \ \text{ та покладемо } \ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_i^{(n-2)} = 0;$$

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) z_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_i^{(n-1)} \ \text{ та покладемо } \ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_i^{(n-1)} = 0. \tag{15.10}$$

Підставляючи (15.10) в диференціальне рівняння (15.1) отримаємо *n*–е рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(x)L(z_i) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)z_i^{(n-1)} = f(x).$$

Таким чином, для визначення невідомих функцій отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)z_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)z_i' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)z_i^{(n-2)} = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)z_i^{(n-1)} = f(x) \; . \end{cases} \tag{15.11}$$

Відносно $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$ – це система лінійних рівнянь з визначником $W(x) \neq 0$. Для знаходження $C_i'(x)$ запишемо формулу

$$C_i'(x) = \frac{W_{ni}(x) f(x)}{W(x)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \, , \tag{15.12}$$

де $W_{ni}(x)$ – алгебраїчне доповнення до елемента n-го рядка i-го стовпчика визначника $W(x)$. Всі функції, які входять в праву частину диференціального рівняння (15.12), є неперервними на (a,b). Із (15.12) отримаємо

$$C_i(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{W_{ni}(x) f(x)}{W(x)} dx + C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \, , \tag{15.13}$$

де C_i, $i = 1, 2, \dots, n$ – довільні сталі, $x_0 \in (a, b)$.

Тоді загальний розв′язок диференціального рівняння (15.1) запишеться у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^{n} z_i \int_{x_0}^{x} \frac{W_{ni}(t) f(t)}{W(t)} dt + \sum_{i=1}^{n} C_i z_i \, . \tag{15.14}$$

Тут

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n} z_i \int_{x_0}^{x} \frac{W_{ni}(t) f(t)}{W(t)} dt - \tag{15.15}$$

частинний розв′язок диференціального рівняння (15.1).

Неважко перевірити, що частинний розв′язок (15.15) задовольняє нульові початкові умови

$$y_1(x_0) = 0,\ y_1'(x_0) = 0, \ldots,\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0,\ x_0 \in (a,b).$$

Приклад. Знайти загальний розв′язок диференціального рівняння

$$y'' + k^2 y = f(x),\ k \neq 0.$$

Розв'язання. Фундаментальна система розв′язків для диференціального рівняння $z'' + k^2 z = 0$ буде $z_1 = \cos kx,\ z_2 = \sin kx$. Отже,

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -k \sin kx & k \cos kx \end{vmatrix} = k.$$

Тому загальний розв′язок запишемо у вигляді ($w_{21} = -\sin kx,\ w_{22} = \cos kx$)

$$y = -\frac{\cos kx}{k} \int_{x_0}^{x} \sin kt\, f(t) dt + \frac{\sin kx}{k} \int_{x_0}^{x} \cos kt\, f(t) dt + C_1 \cos kx + C_2 \sin kx,$$

$$y = \frac{1}{k} \int_{x_0}^{x} \sin k(x-t)\, f(t) dt + C_1 \cos kx + C_2 \sin kx.$$

Висновок. Для знаходження загального розв′язку диференціального рівняння (15.1) необхідно знайти фундаментальну систему розв′язків однорідного рівняння (15.4), після чого загальний розв′язок запишеться в квадратурах.

15.2.2. Метод варіації довільних сталих при розв’язуванні лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку

Загальним прийомом розв’язування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку є метод Лагранжа, або ***метод варіації довільних сталих.***

Для диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (15.16)$$

загальний розв′язок (із попереднього пункту) запишеться у вигляді

$$y = -z_1\int_{x_0}^{x}\frac{z_2 f(t)}{W(t)}dt + z_2\int_{x_0}^{x}\frac{z_1 f(t)}{W(t)}dt + C_1 z_1 + C_2 z_2 . \qquad (15.17)$$

При цьому $y_1(x)$– частинний розв′язок диференціального рівняння (15.16), який задовольняє цьому рівнянню з початковими умовами $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=0$:

$$y = -z_1\int_{x_0}^{x}\frac{z_2 f(t)}{W(t)}dt + z_2\int_{x_0}^{x}\frac{z_1 f(t)}{W(t)}dt.$$

Для диференціального рівняння виду

$$y'' + q(x)y = f(x), \quad (p(x)\equiv 0) , \qquad (15.18)$$

так як $W(x)=\mathrm{const}$, що випливає з формули Остроградського-Ліувілля, загальний розв′язок запишемо у формі

$$y = -\frac{z_1}{W(x_0)}\int_{x_0}^{x} z_2 f(t)dt + \frac{z_2}{W(x_0)}\int_{x_0}^{x} z_1 f(t)dt . \qquad (15.19)$$

Розглянемо цей метод для лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \qquad (15.20)$$

Суть методу полягає в тому, що для відповідного однорідного рівняння $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ записується загальний розв’язок зі сталими C_1 і C_2:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (15.21)$$

у якому $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – незалежні частинні розв’язки однорідного рівняння.

Розв’язок неоднорідного рівняння (15.20) шукаємо у вигляді

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x), \qquad (15.22)$$

причому величини C_1 і C_2 уже розглядаємо як функції від аргументу x. Ці функції підбираємо таким чином, щоб записана у зазначеному вигляді функція (15.22) була розв'язком (15.20).

Для знаходження функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ будуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x), \end{cases}$$

звідки похідні $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ невідомих функцій $C_1(x), C_2(x)$ знаходимо як розв'язки цієї системи рівнянь:

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}, \ C_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)},$$

при цьому самі функції $C_1(x), C_2(x)$ визначаються шляхом безпосереднього інтегрування.

Приклад. Знайти загальний розв'язок $y'' + y = \text{tg}^2 x.$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0.$ Його корені комплексні і дорівнюють $\lambda_1 = i$ і $\lambda_2 = -i$. Отже, загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння має вигляд

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння шукаємо у вигляді

$$y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Для визначення $C_1(x)$ і $C_2(x)$ складемо систему із двох рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \text{tg}^2 x, \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему відносно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, знайдемо

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \text{tg}^2 x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}; \ C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \text{tg}^2 x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Тепер функції $C_1(x), C_2(x)$ знаходимо шляхом інтегрування:

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}d(\cos x) = -\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1;$$

$$C_2(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x \right)dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C_2.$$

Підставивши знайдені функції $C_1(x), C_2(x)$ в $y(x)$, знайдемо загальний розв'язок даного диференціального рівняння:

$$y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x =$$
$$= \left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1 \right)\cos x + \left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C_2 \right)\sin x =$$
$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sin x \cdot \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - 2.$$

15.3. Знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів

Для деяких частинних випадків функції $f(x)$ можна знайти частинні розв'язки диференціального рівняння

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \tag{15.23}$$

де $a_1, \ldots, a_n$ – постійні дійсні числа, $f(x)$ – неперервна функція на (a,b).

I). Розглянемо диференціальне рівняння із правою частиною

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = P_m(x)e^{\alpha x}, \tag{15.24}$$

де $P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m, (m \geq 0) -$ поліном з дійсними чи комплексними коефіцієнтами, $\alpha -$постійне дійсне чи комплексне число.

Розглянемо два випадки.

Випадок 1. Число α не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок диференціального рівняння (15.24) шукають у вигляді

$$y_1 = Q_m(x)e^{\alpha x}, \tag{15.25}$$

де

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1}x + q_m - \tag{15.26}$$

поліном m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами. Тобто, в цьому випадку, частинний розв'язок має ту ж аналітичну структуру, що і права частина диференціального рівняння (15.24)

Коефіцієнти $q_i,\ i = 0,1,\ldots,m$ знаходяться шляхом підстановки (15.25) в (15.24) і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x.

Переконаємося, що шукані коефіцієнти визначаються однозначно. Підставимо (15.25) в (15.24), отримаємо

$$\begin{aligned} L(y_1) &= L\left(Q_m(x)e^{\alpha x}\right) = L\left(\left(q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_{m-1}x + q_m\right)e^{\alpha x}\right) = \\ &= q_0 L\left(x^m e^{\alpha x}\right) + q_1 L\left(x^{m-1}e^{\alpha x}\right) + \ldots + q_{m-1}L\left(xe^{\alpha x}\right) + q_m L\left(e^{\alpha x}\right) = \\ &= \left(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m\right)e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Використовуючи вище наведені формули, запишемо

$$L\left(e^{\alpha x}\right) = P_n(\alpha)e^{\alpha x}, L\left(x^s e^{\alpha x}\right) = \sum_{i=0}^{s} C_s^i P_n^{(i)}(\alpha)x^{s-i}e^{\alpha x}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} &q_0 \sum_{i=0}^{m} C_m^i P_n^{(i)}(\alpha)x^{m-i}e^{\alpha x} + q_1 \sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i P_n^{(i)}(\alpha)x^{m-1-i}e^{\alpha x} + \\ &+ \ldots + q_{m-1}\sum_{i=0}^{1} C_1^i P_n^{(i)}(\alpha)x^{1-i}e^{\alpha x} + q_m P_n(\alpha)e^{\alpha x} = \\ &= \left(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m\right)e^{\alpha x}. \end{aligned}$$

Скорочуємо на $e^{\alpha x}$ і прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях

$$\begin{array}{ll} x^m: & \left\{ \begin{array}{c} q_0 P_n(\alpha) = p_0 \\ q_0 C_m^1 P_n'(\alpha) + q_1 P_n(\alpha) = p_1 \\ \ldots \\ q_0 C_m^{m-1} P_n^{(m-1)}(\alpha) + q_1 C_{m-1}^{m-2} P_n^{(m-2)}(\alpha) + \ldots + q_{m-1} P_n(\alpha) = p_{m-1} \\ q_0 C_m^m P_n^{(m)}(\alpha) + q_1 C_{m-1}^{m-1} P_n^{m-1}(\alpha) + \ldots + q_{m-1} P_n'(\alpha) + q_m P_n(\alpha) = p_m. \end{array} \right. \\ x^{m-1}: & \\ \ldots & \\ x: & \\ 1: & \end{array} \tag{15.27}$$

Так як $P_n(\alpha) \neq 0$, то із (15.27) послідовно визначаються всі коефіцієнти $q_0, q_1, \ldots, q_m$.

Випадок 2. Параметр α є k-кратним коренем характеристичного рівняння $(k \geq 1)$, тобто

$$P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = \ldots = P_n^{(k-1)}(\alpha) = 0, P_n^{(k)}(\alpha) \neq 0. \tag{15.28}$$

В цьому випадку частинний розв'язок не можна побудувати в вигляді (15.25), так як $P_n(\alpha) = 0$. Його шукаємо у вигляді

$$y_1 = x^k Q_m(x) e^{\alpha k}, \tag{15.29}$$

де $Q_m(x)$ – поліном вигляду (15.26).

Коефіцієнти полінома визначаються шляхом підстановки (15.29) в (15.24).

$$L(y_1) = L\left(x^k Q_m(x) e^{\alpha x}\right) = L\left(\sum_{s=0}^{m} q_s x^{k+m-s} e^{\alpha x}\right) = \sum_{s=0}^{m} q_s L\left(x^{k+m-s} e^{\alpha x}\right) =$$
$$= \sum_{s=0}^{m} q_s \sum_{i=k}^{k+m-s} C_{k+m-s}^{i} P_n^{(i)}(\alpha) = x^{k+m-s-i} e^{\alpha x} = \sum_{s=0}^{m} p_s x^{m-s} e^{\alpha x}.$$

Звідси

$$\sum_{s=0}^{m} q_s \sum_{i=0}^{m-s} C_{k+m-s}^{k+i} P_n^{(k+i)}(\alpha) x^{m-s-i} = \sum_{s=0}^{m} p_s x^{m-s}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях

$$\begin{array}{r} x^m \\ x^{m-1} \\ \dots \\ x \\ 1 \end{array}\left\{\begin{array}{l} q_0 C_{k+m}^k P_n^{(k)}(\alpha) = p_0, \\ q_0 C_{k+m}^{k-1} P_n^{(k+1)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^k P_n^{(k)}(\alpha) = p_1, \\ \dots \\ q_0 C_{k+m}^{k+m-1} P_n^{(k+m-1)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k+m-2} P_n^{(k+m-2)}(\alpha) + \dots + q_{m-1} C_{k+1}^k P_n^{(k)}(\alpha) = p_{m-1}, \\ q_0 C_{k+m}^{k+m} P_n^{(k+m)}(\alpha) + q_1 C_{k+m-1}^{k+m-1} P_n^{(k+m-1)}(\alpha) + \dots + q_m C_k^k P_n^{(k)}(\alpha) = p_m. \end{array}\right. \tag{15.30}$$

Із (15.30) послідовно однозначно визначаються $q_0, q_1, \dots, q_m$, так як $P_n^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

II). Припустимо, що права частина диференціального рівняння (15.23) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_m^{(1)}(x)\cos\beta x + P_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right), \tag{15.31}$$

де $P_m^{(1)}(x), P_m^{(2)}(x)$ – відомі поліноми зі степенем $\leq m$ (хоча б один має степінь m).

Використовуючи формули Ейлера, обчислимо

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2}$$

і перепишемо функцію $f(x)$ таким чином

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_m^{(1)}(x)\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + P_m^{(2)}(x)\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2}\right) =$$
$$= \overline{P}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + \overline{P}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x},$$

де $\overline{P}_m^{(1)}(x)$ і $\overline{P}_m^{(2)}(x)$ – поліноми степені m, тобто $f(x)$ є сума двох функцій, які розглянуті вище.

Випадок 1. Число $\alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_1 = \overline{Q}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x} + \overline{Q}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x}, \tag{15.32}$$

де $\overline{Q}_m^{(1)}(x)$ і $\overline{Q}_m^{(2)}(x)$ – поліноми m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами.

Випадок 2. Якщо $\alpha+\beta i$ – k-кратний корінь характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо в вигляді

$$y_1 = x^k\left(\overline{Q}_m^{(1)}(x)e^{(a+ib)x} + \overline{Q}_m^{(2)}(x)e^{(a-ib)x}\right). \tag{15.33}$$

Зводячи (15.32) і (15.33) до дійсного вигляду, сформулюємо наступне правило знаходження частинного розв'язку для випадку правої частини вигляду (15.31).

Випадок 1. Якщо $\alpha+\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то

$$y_1 = e^{\alpha x}\left(\overline{Q}_m^{(1)}(x)\cos\beta x + \overline{Q}_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right). \tag{15.34}$$

Випадок 2. Якщо $\alpha+\beta i$ – k-кратний корінь характеристичного рівняння ($k \geq 1$), то

$$y_1 = x^k e^{\alpha x}\left(\overline{Q}_m^{(1)}(x)\cos\beta x + \overline{Q}_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right). \tag{15.35}$$

Тут $\overline{Q}_m^{(1)}(x)$ та $\overline{Q}_m^{(2)}(x)$ – поліноми m-го степеня з невизначеними коефіцієнтами.

15.4. Неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та із спеціальною правою частиною

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$y'' + py' + qu = f(x), \tag{15.36}$$

де *p, q* – задані дійсні числа, $f(x) \neq 0$ – задана функція, неперервна на деякому проміжку *(a;b).*

Загальний розв'язок такого рівняння є сумою частинного розв'язку рівняння (15.36) і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння ми вже знаходити вміємо, тому розглянемо детальніше питання про знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Насамперед слід зазначити, що частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (15.36) можна знайти в квадратурах методом варіації довільних сталих. Проте для рівнянь із спеціальною правою частиною частинний розв'язок можна знайти значно простіше, не вдаючись до операції інтегрування.

Розглянемо деякі з таких рівнянь.

I. Нехай права частина в рівнянні (15.36) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \tag{15.37}$$

де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня *n*.

Можливі такі випадки.

1) Число α не є коренем характерного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{15.38}$$

Тоді диференціальне рівняння (15.36) має частинний розв'язок виду

$$y^* = Q_n(x)e^{\alpha x} = (A_0 + A_1 x + ... + A_n x^n)e^{\alpha x}, \tag{15.39}$$

де $A_0, A_1, ..., A_n$ – невизначені коефіцієнти.

Справді, підставляючи функцію (15.39) в рівняння (15.36), після скорочення на $e^{\alpha x}$ дістанемо

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) \equiv P_n(x), \tag{15.40}$$

де $Q_n''(x)$ – многочлен степеня $n-2$, $Q_n'(x)$ – многочлен степеня $n-1$. Таким чином, зліва і справа в тотожності (15.40) є многочлени степеня *n*. Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях *n*, дістанемо систему $n+1$ невідомих коефіцієнтів A_i многочлена $Q_n(x)$.

Не зупиняючись далі на доведеннях, вкажемо форму, в якій потрібно шукати частинний розв'язок рівняння (15.40), залежно від виду правої частини $f(x)$ цього рівняння:

2) Якщо число α збігається з одним коренем характеристичного рівняння (15.38), тобто є простим коренем цього рівняння, то частинний розв'язок рівняння (15.36) треба шукати у вигляді

$$y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}. \qquad (15.41)$$

3) Якщо число α є двократним коренем рівняння (15.38), то частинний розв'язок рівняння (15.36) шукають у вигляді

$$y^* = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}. \qquad (15.42)$$

Об'єднаємо випадки 1) −3): *якщо права частина рівняння (15.36) має вигляд (15.37), то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді*

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x),$$

де $Q_n(x)$ *−многочлен з невизначеними коефіцієнтами того самого степеня, що й многочлен* $P_n(x)$, *а* r *−число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють* α. *Якщо* α *не є коренем характеристичного рівняння, то приймаємо* $r = 0$.

II. Нехай права частина в рівнянні (15.36) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x), \qquad (15.43)$$

де $P_n(x)$ − многочлен степеня *n*, $R_m(x)$ − многочлен степеня *m*; α, β − дійсні числа.

Зауваження. Функція (15.43) є окремим випадком функції (15.37) і утворюється з неї при $\beta = 0$.

Частинний розв'язок рівняння (15.36) треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x + L_s(x)\sin\beta x), \qquad (15.44)$$

де $Q_s(x)$ та $L_s(x)$ − многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами; s − найвищий степінь многочленів $P_n(x)$ та $R_m(x)$, тобто $s = \max(n, m)$, а r − число коренів характеристичного рівняння вигляду $\alpha + i\beta$.

Зокрема, якщо права частина рівняння (15.36) має вигляд

$$f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x, \qquad (15.45)$$

де $A, B-$невідомі дійсні числа, то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді

$$y^* = x^r(M\cos\beta x + N\sin\beta x) \tag{15.46}$$

де $M, N-$ невідомі коефіцієнти; $r-$число коренів характеристичного рівняння (15.38), які дорівнюють $i\beta$.

Зауваження. Якщо права частина має так званий спеціальний вигляд (наведений вище), то вигляд частинного розв'язку можна визначити за такою таблицею:

Функція $f(x)$	Корені характеристичного рівняння	Частинний розв'язок неоднорідного рівняння
$P_n(x)$ – поліном степеня n	$\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$	$Q_n(x)$ – поліном степеня n з невідомими коефіцієнтами $xQ_n(x)$ $xQ_n(x)$
$P_n(x)e^{ax}$ $P_n(x)e^{ax}$ $P_n(x)e^{ax}$ $P_n(x)e^{ax}$	$\lambda_1 \neq a$, $\lambda_2 \neq a$ $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 \neq a$ $\lambda_1 \neq a$, $\lambda_2 = a$ $\lambda_1 = \lambda_2 = a$	$Q_n(x)\exp(ax)$ $xQ_n(x)\exp(ax)$ $xQ_n(x)\exp(ax)$ $x^2Q_n(x)\exp(ax)$
$P_n(x)\sin(bx)$ $P_n(x)\sin(bx)$	$\lambda_{1,2} \neq \pm ib$ $\lambda_{1,2} = \pm ib$	$Q_n(x)\sin(bx)+R_n(x)\cos(bx)$ $x\left(Q_n(x)\sin(bx)+R_n(x)\cos(x)\right)$
$P_n(x)\cos(bx)$ $P_n(x)\cos(bx)$	$\lambda_{1,2} \neq \pm ib$ $\lambda_{1,2} = \pm ib$	$Q_n(x)\sin(bx)+R_n(x)\cos(bx)$ $x\left(Q_n(x)\sin(bx)+R_n(x)\cos(x)\right)$
$P_n(x)e^{ax}\sin(bx)$ $P_n(x)e^{ax}\sin(bx)$	$\lambda_{1,2} \neq a \pm ib$ $\lambda_{1,2} = a \pm ib$	$(Q_n(x)\sin(bx)+R_n(x)\cos(bx))\exp(bx)$ $x\left(Q_n(x)\sin(bx)+R_n(x)\cos(x)\right)\exp(bx)$
$P_n(x)e^{ax}\cos(bx)$ $P_n(x)e^{ax}\cos(bx)$	$\lambda_{1,2} \neq a \pm ib$ $\lambda_{1,2} = a \pm ib$	$(Q_n(x)\sin(bx)+R_n(x)\cos(bx))\exp(bx)$ $x\left(Q_n(x)\sin(bx)+R_n(x)\cos(x)\right)\exp(bx)$

У наведеній таблиці поліноми $P_n(x), Q_n(x)$ і $R_n(x)$ – відповідні многочлени степеня n.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = 2x + 3.$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1,$ тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$\overline{y}(x)=e^{x}(C_1+C_2x).$ Оскільки правою частиною даного рівняння є функція виду $P_1(x)e^{0\cdot x}$, причому $\alpha=0, \alpha\neq k_1, \alpha\neq k_2$, то за формулою (15.41) частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y^*=Q_1(x)e^{0\cdot x}$, тобто $y^*=A+Bx$, де A і B – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $y^{*\prime}=B, y^{*\prime\prime}=0$ та підставивши їх у рівняння, дістанемо

$$-2B+A+Bx=2x+3.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} B=2, \\ -2B+A=3, \end{cases}$$

звідки $B=2, A=7.$Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд $y^*=7+2x,$ тому $y=\overline{y}(x)+y^*(x)=e^{x}(C_1+C_2x)+2x+7-$ шуканий загальний розв'язок.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння методом невизначених коефіцієнтів

$$y''+5y'+6y=6x^2-10x+2.$$

Розв'язання. Запишемо розв'язки однорідного диференціального рівняння, розв'язавши характеристичне рівняння

$$\lambda^2-5\lambda+6=0,\ \lambda_1=2, \lambda_2=3,\ y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$$

Знаходимо розв'язки неоднорідного диференціального рівняння. Оскільки $\alpha=0$, $6x^2-10x+2-$многочлен другого порядку, тоді $y_1=Ax^2+Bx+C-$вигляд частинного розв'язку. Знаходимо невизначені коефіцієнти:

$$6Ax^2+(6B-10A)x+6C-5B+2A=6x^2-10x+2,$$

$$\begin{cases} 6A = 6, \\ 6B - 10A = -10, \\ 6C - 5B + 2A = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ C = 0. \end{cases}$$

Отже, $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x^2 -$загальний розв'язок.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y' - 2y = e^x\left(\cos x - \sin x\right).$$

Розв'язання. Для нашого випадку $\alpha = 1, \beta = 1$.

Маємо $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, $\lambda_1 = 1, \lambda_1 = -2$, $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

Оскільки $\alpha + i\beta = 1 + i$, то $y_1(x) = e^x\left(A\cos x + B\sin x\right)$. Після підстановки в початкове рівняння $y_1(x)$, прирівнявши коефіцієнтів за $\sin x, \cos x,$ отримаємо

$$y_1 = e^x(2\cos x + \sin x),$$

де $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + e^x(2\cos x + \sin x)$ – загальний розв'язок.

Завдання для самоконтролю

1. Записати та пояснити структуру загального розв′язку неоднорідного диференціального рівняння *n*-го порядку.
2. Метод Лагранжа для неоднорідного диференціального рівняння *n*-го порядку та лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку (ідея методу, його реалізація та відмінності).
3. Навести приклад методу варіації довільних сталих при розв'язуванні лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку.
4. Метод невизначених коефіцієнтів для запису частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння *n*-го порядку, якщо права частина має спеціальний вигляд $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$.

5. Метод невизначених коефіцієнтів для запису частинного розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку, якщо права частина має спеціальний вигляд $f(x)=e^{\alpha x}\left(P_m^{(1)}(x)\cos\beta x+P_m^{(2)}(x)\sin\beta x\right)$.

6. Пояснити метод невизначених невизначених коефіцієнтів для запису частинного розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку для різних випадків правої частини спеціального вигляду.

7. Розв’язати диференціальні рівняння:

1) $y''+2y'=4e^{x}(\sin x+\cos x)$; 2) $y''+10y'+25y=40+52x-240x^2-200x^3$;

3) $y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 6x$; 4) $y''+2y'+y=(12x-10)e^{-x}$;

5) $y''+y=2\cos 5x+3\sin 5x$; 6) $y''+4y'=15e^{x}$.

8. Розв’язати диференціальне рівняння методом варіації довільних констант:

1) $y''+2y'+5y=\dfrac{e^{-x}}{\sin 2x}$; 2) $y''+9y=\dfrac{1}{\cos 3x}$.

9. Розв’язати диференціальні рівняння вищих порядків:

1) $y^{Y}-6y^{IY}+9y'''=e^{x}(x^2+4)$; 2) $y^{IY}+5y''+4y=x^4+3x^2-1$;

3) $y^{IY}+10y''+9y=\cos 4x$.

Лекція 16. Системи звичайних диференціальних рівнянь

16.1. Основні поняття та означення. Задача Коші.

16.2. Теореми про достатні умови існування та єдиності розв′язку задачі Коші.

16.3. Загальний, частинний і особливий розв'язки.

16.4. Лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь.

16.4.1. Однорідні системи.

16.4.2. Лінійно незалежні розв’язки. Теореми про лінійно залежні і незалежні розв’язки.

16.4.3. Неоднорідні системи. Метод варіації довільних сталих.

16.5. Системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

16.5.1. Розв’язування однорідних систем лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

16.5.2. Розв’язування неоднорідних систем лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

16.6. Розв’язування нормальних систем методом виключення.

У багатьох науково-технічних задачах буває потрібно знайти не одну, а зразу декілька невідомих функцій, які пов’язані між собою кількома диференціальними рівняннями. Сукупність таких рівнянь утворює систему диференціальних рівнянь.

Приклад. Нехай матеріальна точка маси m має криволінійну траєкторію в просторі. Потрібно визначити закон руху точки, тобто залежність координат x, y, z від часу t, коли на неї діє сила $\overrightarrow{F}$.

Якщо $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(x; y; z)$ – радіус – вектор рухомої точки, то її швидкість і прискорення знаходяться за формулами:

$$\vec{v} = \overrightarrow{r'}(t) = (x'; y'; z'), \quad \vec{\omega} = \overrightarrow{r''}(t) = (x''; y''; z'').$$

Сила $\vec{F}$, під дією якої рухається точка, взагалі кажучи, є функцією часу, координат точки і проекцій швидкості на осі координат: $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{r}').$ Тому згідно із другим законом Ньютона диференціальне рівняння руху точки має вигляд

$$m\vec{r}'' = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{r}').$$

Це векторне рівняння еквівалентне системі трьох скалярних рівнянь:

$$\begin{cases} mx'' = F_x(t, x, y, z, x', y', z'), \\ my'' = F_y(t, x, y, z, x', y', z'), \\ mz'' = F_z(t, x, y, z, x', y', z'). \end{cases}$$

Наведені диференціальні рівняння утворюють систему трьох диференціальних рівнянь другого порядку відносно трьох невідомих функцій $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$

16.1. Основні поняття та означення. Задача Коші

Означення. Сукупність рівнянь вигляду

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') = 0, \\ \qquad\qquad ... \qquad\qquad , \\ F_n(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n') = 0, \end{cases} \tag{16.1}$$

де $y_1,...,y_n$ – шукані функції від незалежної змінної x, називається *системою диференціальних рівнянь першого порядку.*

Означення. Будемо говорити, що систему звичайних диференціальних рівнянь (16.1) записано в *нормальній формі*, якщо її можна розв′язати відносно похідних і представити в такому вигляді

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ..., y_n), \; i = 1, 2, ..., n. \tag{16.2}$$

Кількість рівнянь системи (16.2) називається порядком системи звичайних диференціальних рівнянь.

Означення. Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (16.2) лінійні за змінними $y_1,...,y_n$

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(x)y_j+f_i(x),\ i=1,..,n, \tag{16.3}$$

то система називається *лінійною*.

Означення. Сукупність n функцій

$$y_1=y_1(x),...,y_n=y_n(x), \tag{16.4}$$

визначених і неперервно диференційовних на (a,b), називається *розв'язком* системи (16.2), якщо вона перетворює всі рівняння системи (16.2) в тотожності на (a,b).

Процес знаходження розв'язків системи називається *інтегруванням.*

Задача Коші*: для системи диференціальних рівнянь (16.2) серед всіх розв'язків знайти такий*

$$y_1=y_1(x),...,y_n=y_n(x), \tag{16.5}$$

який задовольняє умови

$$y_1(x_0)=y_1^{(0)},...,y_n(x_0)=y_n^{(0)}. \tag{16.6}$$

Тут $y_1^{(0)},...,y_n^{(0)}$ – початкові значення шуканих функцій, x_0 – початкове значення незалежної змінної x. Числа $x_0, y^{(0)},...,y_n^{(0)}$ називаються *початковими даними* розв'язку (16.5), умови (16.6) – *початковими умовами*.

Геометричний зміст задачі Коші – серед всіх інтегральних кривих системи диференціальних рівнянь (16.2) знайти ту, яка проходить через точку (16.6).

Механічний зміст задачі Коші – знайти такий рух, визначений системою диференціальних рівнянь (16.2), який задовольняє початкові умови (16.6).

16.2. Теореми про достатні умови існування та єдиності розв′язку задачі Коші

Теорема 1 ***(про існування і єдиність розв'язку задачі Коші).*** *Розглянемо задачу (16.2), (16.6). Припустимо, що праві частини системи диференціальних рівнянь (16.2) визначені в області*

$$R: |x - x_0| \le a, \left| y_k - y_k{}^{(0)} \right| \le b,\ k = 1,2,\ldots,n$$

($a, b > 0$ –задані числа) і задовольняють на R умови:

1) функції $f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$, $k = 1,2,\ldots,n$ є неперервними за всіма аргументами, і, отже, обмеженими:

$$|f_k(x, y_1, \ldots, y_n)| < M,\ M > 0, k = 1,2,\ldots,n, \quad (x, y_1, \ldots, y_n) \in R;$$

2) функції $f_k(x, y_1, \ldots, y_n)$ мають обмеженні частинні похідні за змінними $y_1, \ldots, y_n$, тобто $\left| \dfrac{\partial f_k(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_l} \right| \le K,\ l, k = 1,2,\ldots,n,\ (x, y_1, \ldots, y_n) \in R\ (K > 0 -$ задане число).

При цьому існує єдиний розв′язок системи (16.2) за умови (16.6), визначений і неперервно-диференційовний на інтервалі $|x - x_0| \le h = \min\left\{ a, \dfrac{b}{M} \right\}$.

Зауваження. Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (16.2)– суто поліноми від своїх аргументів, то існує єдиний розв′язок задачі Коші (16.2), (16.6) для будь-яких початкових умов.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь в нормальній формі, але залежну від параметрів

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m),\ i = 1,2,\ldots,n, \tag{16.7}$$

праві частини якої визначенні в областях

$$R: |x - x_0| \le a, \left| y_k - y_k{}^{(0)} \right| \le b,\ k = 1,2,\ldots,n$$

та $R_\lambda : \lambda_1{}^{(0)} \le \lambda_1 \le \lambda_1{}^{(1)}, \ldots, \lambda_m{}^{(0)} \le \lambda_m \le \lambda_m{}^{(1)}$.

Теорема 2 ***(про неперервну залежність розв′язку від параметрів).*** *Припустимо, що праві частини системи диференціальних рівнянь (16.7) задовольняють умови:*

1) функції $f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m),\ k = 1, 2, \ldots, n$ *неперервні за* $x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *в області* R *і* R_λ*, і, отже, обмежені*

$$\left| f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \right| \le M,\ M > 0;$$

$$(x, y_1, \ldots, y_n) \in R,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in R_\lambda,\ (M = const);$$

2) функції $f_k(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m),\ k = 1, 2, \ldots, n$ *задовольняють умові Ліпшиця за* $y_1, \ldots, y_n$

$$\left| f_k(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) - f_k(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \ldots, \bar{\bar{y}}_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \right| \le L \sum_{i=1}^{n} \left| \bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i \right|,$$

де $(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$ *і* $(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \ldots, \bar{\bar{y}}_n)$ *– будь-які точки з* R*,* λ *– будь-яка точка з* R_λ*,* L *– постійне додатне число, незалежне від* x *та* λ*. Тоді система (16.7) має єдиний розв′язок*

$$y_i = y_i(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m),\ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (16.8)$$

який задовольняє початкові умови $y_i(x_0) = y_i^{(0)}, i = 1, \ldots, n.$

Цей розв′язок є визначеним і неперервно-дифереційовним за x на інтервалі

$$|x - x_0| \le h = \min\left\{ a, \frac{b}{m} \right\}, \qquad (16.9)$$

визначений і неперервний за $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в області R_λ та рівномірно-нерерервний за x в області (16.9), тобто, для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, що одночасно для кожного x із (16.9) виконується нерівність

$$\left| y_k(x, \lambda_1 + \Delta\lambda_1, \ldots, \lambda_m + \Delta\lambda_m) - y_k(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \right| < \varepsilon,\ k = 1, 2, \ldots, n$$

лише за умов

$$|\Delta\lambda_1| < \delta, \ldots, |\Delta\lambda_m| < \delta.$$

Теорема 3 ***(про неперервну залежність розв'язків від початкових умов).***

Якщо праві частини системи диференціальних рівнянь (16.2) задовольняють в R *умови теореми Пікара (теореми 1), то розв'язок*

$$y_k = \varphi_k(x, x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*),\ k = 1,2,\ldots,n \qquad (16.10)$$

з початковими умовами

$$y_1(x^*) = y_1^*, \ldots, y_n(x^*) = y_n^* \qquad (16.11)$$

буде неперервним за x *і початковими умовами* $x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*$, *коли*

$$|x - x_0| \le \frac{h}{2} - \omega, \qquad (16.12)$$

а $y_1(x^*) = y_1^*, \ldots, y_n(x^*) = y_n^*$ *лежать в області*

$$\left|x^* - x_0\right| \le \omega,\ \left|y_i^* - y_i^{(0)}\right| \le \frac{b}{2},\ i = 1,2,\ldots,n, \qquad (16.13)$$

де $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\},\ 0 \le \omega \le \dfrac{h}{4}.$

При цьому розв'язок (16.10) буде неперервним за $x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*$, в області (16.13), рівномірно неперервним за x із (6.12), тобто для любого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, що нерівності

$$\left|\varphi_k(x, x^* + \Delta x^*, y_1^* + \Delta y_1^*, \ldots, y_n^* + \Delta y_n^*) - \varphi_k(x, x^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)\right| < \varepsilon,\ k = 1,2,\ldots,n$$

виконується одночасно для всіх x з (6.12), коли

$$\left|\Delta x^*\right| < \delta,\ \left|\Delta y_1^*\right| < \delta.$$

16.3. Загальний, частинний і особливий розв'язки

Нехай D – область, в кожній точці якої виконуються умови теореми існування і єдиності.

Означення. Сукупність n функцій

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_n), \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, \ldots, C_n), \end{cases} \qquad (16.14)$$

визначених в деякій області зміни змінних $x, C_1, ..., C_n$, і які мають неперервні частинні похідні за x, будемо називати *загальним розв′язком системи* (16.2) в області D, якщо систему (16.14) можна розв′язати відносно $C_1, ..., C_n$

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y_1, ..., y_n), \\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad , \\ C_n = \psi_n(x, y_1, ..., y_n), \end{cases} \tag{16.15}$$

а сукупність функцій (16.14) є розв′язком диференціального рівняння (16.2) для всіх сталих, визначених співвідношеннями (16.15), коли $(x, y_1, ..., y_n) \in D$.

Якщо в (16.14) роль сталих відіграють початкові умови

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}) \\ \qquad ... \qquad , \\ y_n = \varphi_n(x, x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}) \end{cases} \tag{16.16}$$

то (16.16) називається *загальним розв′язком в формі Коші*.

Означення. Розв′язок системи диференціальних рівнянь (16.2) називається *частинним,* якщо він складається з точок єдиності розв′язку задачі Коші. Його можна отримати при конкретних сталих, включаючи $\pm\infty$.

Означення. Розв′язок системи диференціальних рівнянь (16.2) називається *особливим*, якщо в кожній точці його порушується єдиність розв′язку задачі Коші.

Розглянемо одну з рівностей (16.15)

$$\psi_i(x, y_1, ..., y_n) = C_i. \tag{16.17}$$

Функція $\psi_i(x, y_1, ..., y_n)$ на будь-якому частинному розв′язку приймає постійні значення, тобто

$$\psi_i(x, \varphi_1(x, C_1, ..., C_n), ..., \varphi_n(x, C_1, ..., C_n) = C_i.$$

Ця функція називається інтегралом.

Означення. Функція $\psi(x, y_1, ..., y_n)$, визначена на D і яка не зводиться до сталої, називається *інтегралом* системи диференціальних рівнянь (16.2) в області D, якщо при заміні $y_1,...,y_n$ будь-яким частинним розв′язком цієї системи, вона приймає постійне значення.

На частинних розв′язках системи (16.2) $d\psi \equiv 0$, тобто

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}dy_n \equiv 0 .$$

Це записується таким чином

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1(x, y_1,..., y_n)dx + ... + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n(x, y_1,..., y_n)dx \equiv 0 . \quad (16.18)$$

16.4. Лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь

16.4.1. *Однорідні системи*

Розглянемо лінійну однорідну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + ... + a_{in}y_n,\ i = 1,2,...,n , \quad (16.19)$$

або в матричній формі

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y,\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix},\ \ A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n} . \quad (16.20)$$

Тут $A(x)$ – неперервна за $a < x < b$ матриця розміру $n \times n$. Якщо функції $y^{(1)}(x),..., y^{(n)}(x)$ – вектор-розв’язки системи (16.20),то і

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y^{(i)}(x) , \quad (16.21)$$

де $C_1,...,C_n$ – довільні сталі, теж є розв’язком системи (16.20).

Дійсно, введемо оператор

$$L = \frac{d}{dx} - A, \quad (16.22)$$

який має властивості:

а) $L(cy) = cL(y)$;

$$б)\ L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

З допомогою оператора L систему диференціальних рівнянь (16.20) запишемо так

$$L(y) = 0. \qquad (16.23)$$

Якщо $L(y^{(i)}) = 0, i = 1, 2, ..., n$, то в силу властивостей а), б) функція (16.21) також є розв'язком системи (16.2).

16.4.2. ***Лінійно незалежні розв'язки. Теореми про лінійно залежні і незалежні розв'язки***

Означення. Вектор-розв'язки $y^{(1)}(x),\dots,y^{(m)}(x)$ системи диференціальних рівнянь (16.20) називаються *лінійно залежними* на (a,b), якщо існують такі сталі $C_1,...,C_m$, які не дорівнюють нулю одночасно, що

$$C_1 y^{(1)}(x) + ... + C_m y^{(m)}(x) \equiv 0,\ a < x < b,$$

в противному випадку система розв'язків називається *лінійно незалежною* на (a,b).

Теорема. *Якщо для всіх* $x_0 \in (a,b)$ *система векторів*

$$y^{(1)}(x_0),\dots,y^{(m)}(x_0) \qquad (16.24)$$

лінійно залежна, то відповідні їм розв'язки $y^{(1)}(x),\dots,y^{(m)}(x)$ *системи диференціальних рівнянь (16.20) також лінійно залежні.*

Доведення. Припустимо, що вектори (16.24) лінійно залежні, тобто

$$C_1 y^{(1)}(x_0) + ... + C_m y^{(m)}(x_0) = 0, \qquad (16.25)$$

де не всі $C_1,...,C_m$ дорівнюють нулю. Розглянемо вектор-функцію з тими ж сталими

$$y(x) = C_1 y^{(1)}(x) + ... + C_m y^{(m)}(x). \qquad (16.26)$$

Вектор $y(x)$ задовольняє системі диференціальних рівнянь (16.20) і , в силу (16.25), $y(x_0) = 0$. На основі теореми існування і єдиності отримуємо, що

$$y(x) = C_1 y^{(1)}(x) + \ldots + C_m y^{(m)}(x) \equiv 0. \qquad (16.27)$$

Співвідношення (16.27) означає, що $y^{(1)}(x), \ldots y^{(m)}(x)$ лінійно залежні.

Означення. Система n лінійно незалежних розв'язків

$$y^{(1)}(x), \ldots y^{(n)}(x) \qquad (16.28)$$

системи диференціальних рівнянь (16.20) називається ***фундаментальною системою розв'язків або базисом цієї системи рівнянь.***

Теорема. *Система звичайних диференціальних рівнянь (16.20) має фундаментальну систему розв'язків. Якщо (16.28) – фундаментальна система розв'язків системи диференціальних рівнянь (16.20), то загальний розв'язок записується у вигляді*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y^{(i)}(x), \qquad (16.29)$$

де $C_1, \ldots, C_n$ *– довільні сталі.*

16.4.3. *Неоднорідні системи. Метод варіації довільних сталих*

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \qquad (16.30)$$

яка називається *лінійною неоднорідною системою звичайних диференціальних рівнянь.*

Теорема. *Якщо* $\bar{y}(x)$ *– розв'язок неоднорідної системи, тобто* $L(\bar{y}) = f(x)$, *а* $y_1(x)$ *– розв'язок однорідної системи* $L(y_1) = 0$, *то сума* $y_1(x) + \bar{y}(x)$ *є розв'язком неоднорідної системи.*

$$L(\bar{y} + y_1) = L(\bar{y}) + L(y_1) \equiv f(x).$$

Теорема. *Загальний розв'язок неоднорідної системи (16.30) можна записати у вигляді суми загального розв'язку однорідного і частинного неоднорідного.*

Загальний розв’язок системи однорідних диференціальних рівнянь (16.20) запишемо у формі

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y^{(i)}(x), \tag{16.31}$$

де C_i – довільні сталі.

Розв’язок лінійної системи диференціальних рівнянь (16.30) шукаємо у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y^{(i)}(x), \tag{16.32}$$

де $C_i(x),\ i = 1, 2, ..., n -$ невідомі функції.

Підставляючи в систему, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y^{(i)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y^{(i)\prime}(x) = A(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y^{(i)}(x) + f(x).$$

Так як $y^{(i)\prime} = A(x) y^{(i)},\ i = 1, 2, ..., n$, то остаточно функції $C_i(x)$ шукаємо з системи диференціальних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y^{(i)}(x) = f(x). \tag{16.33}$$

Визначник системи (16.33) $W(x) \neq 0$, якщо $y^{(i)}(x), i = 1, 2, \ldots, n -$ фундаментальна система рівнянь. Із (16.33) визначаємо

$$C_i'(x) = \varphi_i(x),\ i = 1, 2, ..., n,$$

звідки $C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + C_i,\ i = 1, 2, ..., n$.

Тому

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x) dx + C_i \right) y^{(i)}(x) - \tag{16.34}$$

загальний розв’язок диференціального рівняння (16.30).

Приклад. Розв’язати систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + ay \end{cases}.$$

Розв'язання. Зведемо дану систему до диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2a\frac{dx}{dt} - (1+a^2)x\,.$$

Звідси отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2a\frac{dx}{dt} + (1+a^2)x = 0\,.$$

Запишемо та розв’яжемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 2a\lambda + (1+a^2) = 0.$$

Знайдемо $\lambda_{1,2} = a \pm i$. Тоді

$$x = e^{at}(C_1\cos t + C_2\sin t)\,,\ y = \frac{dx}{dt} - ax = e^{at}(-C_1\sin t + C_2\cos t) -$$

загальний розв’язок.

Приклад. Розв’язати систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{t} \end{cases}, t > 0\,.$$

Розв'язання. Додамо і віднімемо почленно два рівняння, отримаємо

$$\frac{d(x+y)}{dt} = -\frac{1}{t}(x+y)\,,$$

$$\frac{d(x-y)}{dt}=\frac{1}{t}(x-y).$$

Звідки $x+y=\frac{C_1}{t}$, $x-y=C_2t$, тобто

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{t}+C_2t\right), \\ y=\frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{t}-C_2t\right), \end{cases} -$$

загальний розв'язок нашої системи.

16.5. Системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

16.5.1. *Розв'язування однорідних систем лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами*

Розглянемо *матричний метод* розв'язування лінійної однорідної системи.

Цю систему можна записати у вигляді одного матричного диференціального рівняння

$$\frac{dX}{dt}=AX, \tag{16.35}$$

де

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

Шукатимемо розв'язки системи (16.35) у вигляді

$$x_1=k_1e^{\lambda t}, \quad x_2=k_2e^{\lambda t}, \quad \dots \quad , x_n=k_ne^{\lambda t},$$

де λ = const, k_i = const (i = 1,2,…,n) – невизначені сталі, які потрібно знайти.

Підставимо значення $x_1, x_2, ..., x_n$ в систему диференціальних рівнянь і скоротивши на множник $e^{\lambda t} \neq 0$, отримаємо:

$$\begin{cases} \lambda k_1 = \alpha_{11}k_1 + \alpha_{12}k_2 + ... + \alpha_{1n}k_n; \\ \lambda k_2 = \alpha_{21}k_1 + \alpha_{22}k_2 + ... + \alpha_{2n}k_n; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda k_n = \alpha_{n1}k_1 + \alpha_{n2}k_2 + ... + \alpha_{nn}k_n, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (\alpha_{11} - \lambda)k_1 + \alpha_{12}k_2 + ... + \alpha_{1n}k_n = 0; \\ \alpha_{21}k_1 + (\alpha_{22} - \lambda)k_2 + ... + \alpha_{2n}k_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}k_1 + \alpha_{n2}k_2 + ... + (\alpha_{nn} - \lambda)k_n = 0, \end{cases} \tag{16.36}$$

тобто дістали систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $k_1, k_2, ..., k_n$. Ця система має ненульові розв'язки, тоді і тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n1} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{16.37}$$

Рівняння (16.37) називають *характеристичним рівнянням* матриці A і одночасно системи (16.35).

Можливі такі випадки:

1. *Корені характеристичного рівняння дійсні і різні.* Нехай, це характеристичне рівняння має n різних коренів λ_1, λ_2, …, λ_n, які є характеристичними числами матриці A. Кожному характеристичному числові відповідає свій власний вектор. Нехай характеристичному числу λ_p відповідає власний вектор (k_{1p}, k_{2p}, ..., k_{np}), де $p = 1, 2, …, n$. Тоді система диференціальних рівнянь має n розв'язків:

1-й розв'язок, який відповідає кореню $\lambda = \lambda_1$:

$$x_{11} = k_{11}e^{\lambda_1 t}, \quad x_{21} = k_{21}e^{\lambda_1 t}, \quad ..., \quad x_{n1} = k_{n1}e^{\lambda_1 t};$$

2-й розв'язок, який відповідає кореню $\lambda = \lambda_2$:

$$x_{12} = k_{12}e^{\lambda_2 t}, \quad x_{22} = k_{22}e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad x_{n2} = k_{n2}e^{\lambda_2 t};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

n-й розв'язок, який відповідає кореню $\lambda = \lambda_n$:

$$x_{1n} = k_{1n}e^{\lambda_n t}, \quad x_{2n} = k_{2n}e^{\lambda_n t}, \quad \ldots, \quad x_{nn} = k_{nn}e^{\lambda_n t}.$$

Дані розв'язки лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему розв'язків. Запишемо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = C_1x_{11} + C_2x_{12} + \ldots + C_nx_{1n}, \\ x_2 = C_1x_{21} + C_2x_{22} + \ldots + C_nx_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = C_1x_{n1} + C_2x_{n2} + \ldots + C_nx_{nn}. \end{cases} \tag{16.38}$$

2. *Корені характеристичного рівняння – різні, але серед них є комплексні.*

Відомо, що в цьому випадку кожній парі комплексно-спряжених коренів $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння (16.37) відповідає пара частинних розв'язків:

$$\begin{aligned} x_{j1} &= k_{j1}e^{(\alpha+i\beta)t}, \\ x_{j2} &= k_{j2}e^{(\alpha-i\beta)t}, \end{aligned} \tag{16.39}$$

де $j = \overline{1,n}$; коефіцієнти k_{j1}, k_{j2} визначаються із системи (16.36) відповідно для $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ і $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Коефіцієнти k_{j1}, k_{j2} виявляються, звичайно, комплексними числами, а відповідні їм функції x_{j1}, x_{j2} – комплексними функціями. Виділяючи уявну і дійсну частини цих функцій і використовуючи те, що для лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами уявна та дійсна частини розв'язку є також розв'язками, отримуємо пару частинних дійсних розв'язків однорідної системи.

3. *Серед коренів λ_1, λ_2, …, λ_n характеристичного рівняння* (16.37) *є кратні.*

Нехай λ – корінь кратності r характеристичного рівняння. Тоді розв'язок системи шукають у вигляді:

$$
\begin{cases}
x_1 = (k_{10} + k_{11}t + k_{12}t^2 + \ldots + k_{1r-1}t^{r-1})e^{\lambda t}, \\
x_2 = (k_{20} + k_{21}t + k_{22}t^2 + \ldots + k_{2r-1}t^{r-1})e^{\lambda t}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n = (k_{n0} + k_{n1}t + k_{n2}t^2 + \ldots + k_{nr-1}t^{r-1})e^{\lambda t}.
\end{cases}
\tag{16.40}
$$

Числа k_{ij} $(i = 1,\ldots,n, \quad j = 0,\ldots,r-1)$ знаходять так: підставляючи функції x_i і їх похідні x_i' в початкову систему та скорочуючи потім на $e^{\lambda t} \neq 0,$ прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях x в лівих і правих частинах отриманих рівностей. В результаті, із усіх чисел $k_{ij}, r -$ завжди залишаються у вигляді вільних параметрів, які приймають за довільні сталі.

16.5.2. *Розв'язування неоднорідних систем лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами*

Метод варіації довільних сталих

Нормальна неоднорідна система рівнянь в матричній формі має вигляд

$$\frac{dX}{dt} = AX + F(t), \tag{16.41}$$

де $F(t) = (f_1(t), f_2(t),\ldots, f_n(t))^{\mathrm{T}}.$

Загальний розв'язок неоднорідної системи має вигляд

$$X(t) = X_0(t) + \overline{X}(t),$$

$X_0(t) -$ загальний розв'язок відповідної однорідної системи рівнянь (формула (16.38)), а $\overline{X}(t) -$деякий частинний розв'язок неоднорідної системи рівнянь, який знаходиться наступним чином. В розв'язку (16.38) замінюємо сталі C_1, C_2, …, C_n відповідними функціями $C_1(t)$, $C_2(t)$, …, $C_n(t)$. Ці функції визначаються за допомогою даної неоднорідної системи: в неї підставляють $x_1, x_2,\ldots, x_n, \quad x_1', x_2',\ldots, x_n'$ і отримують лінійну систему n алгебраїчних рівнянь відносно $C'_1(t)$, $C'_2(t)$, …, $C'_n(t)$, розв'язок якої завжди існує і має вигляд:

$$C_1' = \varphi_1(t), \quad C_2' = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad C_n' = \varphi_n(t), \tag{16.42}$$

де $\varphi_i(t), \quad (i = \overline{1,n}) -$ відомі функції. Зінтегрувавши рівності (16.42), знаходять

$$C_i(t) = \int \varphi_i(t)dt + C_i,$$

де $C_i -$ довільні сталі. Підставляючи в розв'язок (16.38) замість $C_i = \text{const}$ знайдені значення $C_i(t)$, отримують розв'язок неоднорідної системи рівнянь.

Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо лінійну неоднорідну систему із сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + f_k(t), \quad k = \overline{1,n}. \tag{16.43}$$

Якщо функції $f_k(t)$ у системі (16.43) складаються із сум та добутків многочленів $P_m(t) = p_0 + p_1t + ... + p_mt^m$ та функцій $e^{\alpha t}, \cos\beta t, \sin\beta t$, то її розв'язок можна шукати методом невизначених коефіцієнтів.

Зокрема, якщо $f_k(t) = P_{m_k}(t)e^{\alpha t}$, де P_{m_k} –многочлен степеня m_k, то частинний розв'язок системи (16.43) потрібно шукати у вигляді

$$x_i = Q_{m+s}^i(t)e^{\alpha t} \quad i = 1,...,n, \tag{16.44}$$

де $Q_{m+s}^i(t) \quad i = 1,...,n -$многочлени степеня $m+s$ з невизначеними коефіцієнтами , $m = \max\limits_{k=1,...,n} m_k, \quad s = 0,$ якщо α не є характеристичним числом; та, відповідно, s дорівнює кратності цього числа, якщо α є характеристичним числом (тобто, число s на одиницю більше найвищого зі степенів многочленів, на які множаться експоненти $e^{\alpha t}$ у загальному розв'язку відповідної однорідної системи).

Невідомі коефіцієнти многочленів $Q_{m+s}^i(t)$ визначають прирівнюванням коефіцієнтів біля відповідних доданків після підставляння (16.44) у систему (16.43).

Аналогічно визначаються степені многочленів у випадках, коли функції $f_k(t)$ у системі (16.43) містять функції $e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad e^{\alpha t}\sin\beta t$, а число α + iβ є або не є характеристичним.

16.6. Розв'язування нормальних систем методом виключення

(*зведення системи диференціальних рівнянь до одного рівняння n-го порядку, яке містить одну невідому функцію)*

Розглянемо нормальну систему диференціальних рівнянь :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n); \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases} \tag{16.45}$$

або $x'_k = f_k(t, x_1, x_2, ..., x_n), \quad k = 1,2,..., n.$

Тобто, якщо в лівій частині рівнянь системи стоять похідні першого порядку, а праві частині зовсім не містять похідних, то така система називається *нормальною.*

Розв'язком системи (16.45) називають сукупність функцій $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$, які задовольняють кожному з рівнянь цієї системи.

Зауваження. В багатьох випадках системи рівнянь і рівняння вищих порядків можна звести до нормальної системи (16.45).

Загальна схема зведення до диференціального рівняння вищого порядку

Продиференціюємо за *t*, наприклад, перше з рівнянь системи (16.45):

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Підставимо в цю рівність значення похідних $x'_i, \quad i = 1,..., n$ із системи (16.45), маємо:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}f_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}f_2+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}f_n,\text{ або }\frac{d^2x_1}{dt^2}=F_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Продиференціювавши цю рівність ще раз, маємо

$$\frac{d^3x_1}{dt^3}=F_3(t,x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Продовжуючи цей процес послідовно (n – 1) раз, отримаємо систему:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n),\\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2}=F_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{(n-1)}}=F_{n-1}(t,x_1,x_2,\ldots,x_n),\\ \dfrac{d^{(n)}x_1}{dt^n}=F_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n).\end{cases}\qquad(16.46)$$

Визначимо з перших (n – 1) рівнянь системи (16.45) функції $x_2,\ldots,x_n$ через t, функцію x_1 та її похідні $x_1', x_1'',\ldots,x_1^{(n-1)}$, отримаємо:

$$\begin{cases}x_2=\varphi_2(t,x_1,x_1',x_1'',\ldots,x_1^{(n-1)}),\\ x_3=\varphi_3(t,x_1,x_1',x_1'',\ldots,x_1^{(n-1)}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n=\varphi_n(t,x_1,x_1',x_1'',\ldots,x_1^{(n-1)}).\end{cases}$$

(16.47)

Підставимо ці вирази в останнє рівняння системи (16.45), отримуємо диференціальне рівняння n-го порядку

$$\frac{d^{(n)}x_1}{dt^n}=F\left(t,x_1,\frac{dx_1}{dt},\ldots,\frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{n-1}}\right).$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо $x_1=\psi_1(t,C_1,C_2,\ldots,C_n)$, де $C_1,C_2,\ldots,C_n-$ довільні сталі. Продиференціювавши потім цей вираз (n – 1) раз та підставивши значення похідних в знайдені із системи (16.45) значення $x_i, \quad i = 1, 2, .., n$, дістанемо загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 = \psi_1(t, C_1, C_2, ..., C_n), \\ x_2 = \psi_2(t, C_1, C_2, ..., C_n), \\ x_3 = \psi_3(t, C_1, C_2, ..., C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \psi_n(t, C_1, C_2, ..., C_n). \end{cases}$$

Завдання для самоконтролю

1. Означити основні поняття для систем звичайних диференціальних рівнянь.
2. Загальний, частинний і особливий розв'язки системи, теорема Коші існування та єдиності розв'язку задачі Коші.
3. Лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь: однорідні та неоднорідні, структура їх розв'язку.
4. Розв'язування неоднорідних систем лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами: метод варіації довільних сталих та метод невизначених коефіцієнтів (навести приклади).
5. Розв'язування системи диференціальних рівнянь зведенням до одного рівняння *n*-го порядку, яке містить одну невідому функцію.
6. Розв'язати систему диференціальних рівнянь :

а) $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y + 1 + 4t, \\ \dot{y} = -x + y + \dfrac{3}{2}t^2; \end{cases}$ зведенням до диференціального рівняння вищого порядку;

б) $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y, \\ \dot{y} = x - 6y, \end{cases}$ за допомогою характеристичного рівняння.

Лекція 17. Кратні інтеграли. Подвійний інтеграл

17.1. Задача про обчислення об'єму циліндричного тіла. Означення подвійного інтеграла та властивості.

17.2.Обчислення подвійного інтеграла.

17.3. Заміна змінних інтегрування в подвійному інтегралі.

17.1. Задача про обчислення об'єму циліндричного тіла. Означення подвійного інтеграла та властивості

Розглянемо в системі $Oxyz$ тіло з циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі Oz, основою тіла є область D, що міститься на площині Oxy, а зверху тіло обмежене поверхнею $z = f(x;\, y) \geq 0$. (рис. 17.1).

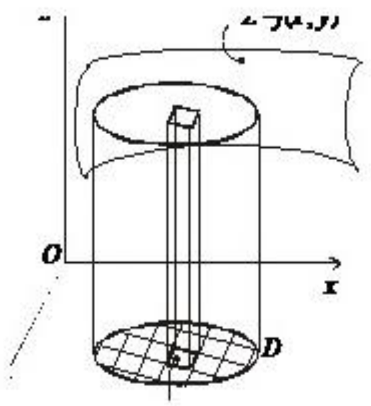

Рис. 17.1. Циліндричне тіло.

Розіб'ємо основу тіла, тобто область D, сіткою кривих на n елементарних областей $S_i, i=1,...,n.$ площу яких позначимо через ΔS_i. Виберемо точки $M_i(x_i;\, y_i) \in S_i$ і побудуємо елементарні циліндричні тіла (бруси), основи яких S_i, а висоти $- f(M_i), i=1,...,n.$ Об'єм елементарного бруса обчислюють за формулою $\Delta V_i = f(M_i) \cdot \Delta S_i, i=1,...,n.$ Складемо інтегральну суму

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta S_i.$$

Тоді об'єм циліндричного тіла можна знайти у вигляді такої границі:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(M_i\right) \cdot \Delta S_i, \tag{17.1}$$

де $\lambda -$ максимальний діаметр області $S_i, i = 1, ..., n.$.

Означення. Якщо $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(M_i\right) \cdot \Delta S_i$ існує та не залежить ні від способу розбиття області D на частини, ні від вибору точок M_i, то ця границя називається ***подвійним інтегралом*** *від функції* $z = f(x; y)$ *по області* D і позначається так:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(M_i\right) \cdot \Delta S_i = \iint\limits_{D} f\left(x; y\right) dS = \iint\limits_{D} f\left(x; y\right) dxdy. \tag{17.2}$$

Отже, подвійний інтеграл є прямим узагальненням поняття звичайного визначеного інтеграла на випадок функції двох змінних.

Властивості подвійного інтеграла

1. Сталий множник можна винести за знак подвійного інтеграла:

$$\iint\limits_{D} cf\left(x;\ \ y\right) ds = c\iint\limits_{D} f\left(x;\ \ y\right) ds.$$

2. Подвійний інтеграл від суми кількох інтегрованих функцій дорівнює сумі подвійних інтегралів від доданків:

$$\iint\limits_{D} \left(f_1\left(x;\ \ y\right) \pm f_2\left(x;\ \ y\right)\right) ds = \iint\limits_{D} f_1\left(x;\ \ y\right) ds \pm \iint\limits_{D} f_2\left(x;\ \ y\right) ds.$$

3. Якщо в області інтегрування $f(x, y) \geq 0,$ то

$$\iint\limits_{D} f\left(x;\ \ y\right) ds \geq 0.$$

4. Якщо функції $f(x, y)$ та $\varphi(x, y)$ визначені в одній і тій самій області D та $f(x, y) \geq \varphi(x, y)$, то

$$\iint\limits_{D} f\left(x; y\right) ds \geq \iint\limits_{D} \varphi\left(x; y\right) ds\ .$$

5. Адитивність стосовно області інтегрування:

$$\iint_D f(x;y)ds = \iint_{D_1} f(x;y)ds + \iint_{D_2} f(x;y)ds,$$

якщо $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.

6. *Оцінка подвійного інтеграла.* Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, яка має площу S, то

$$mS \le \iint_D f(x,y)ds \le MS,$$

де m і $M-$ відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x,y)$ в області D.

7. **Теорема *(про середнє значення функції).*** *Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, яка має площу S, то в цій області існує така точка $(x_0;y_0)$, що*

$$\iint_D f(x,y)ds = f(x_0,y_0)S.$$

Величина

$$f(x_0,y_0) = \frac{1}{S}\iint_D f(x,y)ds.$$

називається середнім значенням функції $f(x,y)$ в області D.

8. $\iint_D ds = S,\ S-$ площа області D.

17.2.Обчислення подвійного інтеграла

Щоб обчислити $\iint_D f(x;y)ds$, звернемось до задачі обчислення об’єму тіла (рис. 17.1).

Скористаємось формулою (17.2) для визначення об'єму циліндричного тіла, а отже, обчислимо відповідний подвійний інтеграл.

1. Випадок прямокутної області інтегрування.

Нехай

$$D=\left\{\left(x;\ \ y\right)\in R^2 \,\middle|\, a\le x\le b,\ \ c\le y\le d\right\}. \tag{17.3}$$

Переріжемо циліндричне тіло площиною, перпендикулярною до осі Ox.

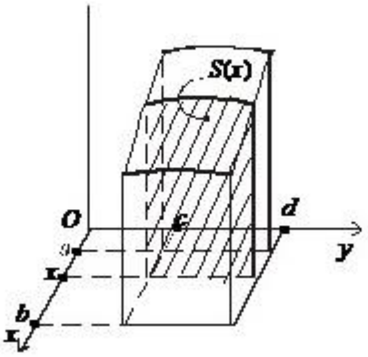

Рис. 17.2. Переріз циліндричного тіла.

У перерізі дістанемо криволінійну трапецію, площа якої $S(x)$ (рис. 17.2). Ця площа дорівнює такому визначеному інтегралу:

$$S\left(x\right)=\int_c^d f\left(x;y\right)dy. \tag{17.4}$$

Тоді об'єм циліндричного тіла дорівнює такому повторному інтегралу:

$$V=\int_a^b S\left(x\right)dx=\int_a^b\left(\int_c^d f\left(x;\ \ y\right)dy\right)dx. \tag{7.5}$$

Отже, об'єм циліндричного тіла можна обчислити за формулами (17.1), (17.5):

$$\iint_D f\left(x;\ \ y\right)ds=\int_a^b\left(\int_c^d f\left(x;\ \ y\right)dy\right)dx. \tag{17.6}$$

Зауваження. Для прямокутної області інтегрування порядок інтегрування можна міняти місцями, тобто

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x;\ y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x;\ y)\,dx \right) dy.$$

2. Випадок довільної області інтегрування.

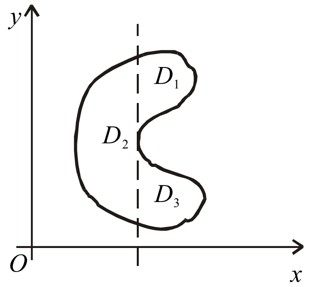

Рис. 17.3. Розбиття області на правильні.

Означення. Область D називається *правильною* щодо деякої осі, якщо будь-яка пряма, паралельна цій осі, перетинає межу області не більш ніж у двох точках.

Наприклад, область D_0 − правильна щодо осі Oy та довільна щодо осі Ox (рис. 17.3). Звичайно, неправильну область можна розкласти на такі частини, кожна з яких буде правильною щодо певної осі, наприклад, області D_1, D_2, D_3 правильні відносно осей Ox та Oy (рис. 17.3) $D_0 = D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

Розглянемо $D = \left\{ (x;\ y) \in R^2 \,\middle|\, a \le x \le b,\ \ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \right\}$, яка буде правильною відносно осі Oy.

Зауваження. Область, правильну відносно осі Oy, ще називають *контуром 1-го роду*.

Переріжемо циліндричне тіло площиною, перпендикулярною до осі Ox.

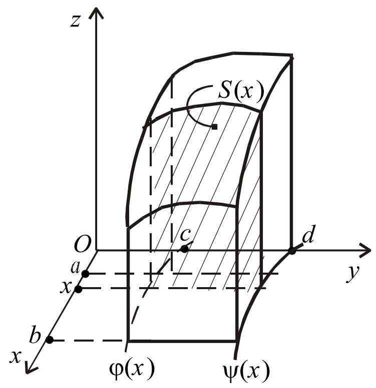

Рис.17.4. Циліндричне тіло з правильною областю.

Площа утвореного перерізу матиме вигляд (рис.17.4) $S(x)=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;\ y)dy,$ а об'єм циліндричного тіла запишеться так:

$$V=\int\limits_a^b S(x)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;\ \ y)dy=\iint\limits_D f(x;\ \ y)ds. \qquad (17.7)$$

Зауваження. Щоб поміняти порядок інтегрування у випадку довільної області *D*, треба за межами інтегрування відновити (аналітично та геометрично) область *D* і розв'язати задачу зведення подвійного інтеграла до повторного спочатку (змінюючи порядок інтегрування).

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D (x^2+y)ds,$ де

$$D=\left\{(x;\ y)\in R^2 \middle| -1\le x\le 2,\quad x^2\le y\le x+2\right\}.$$

Розв'язання. Область *D* правильна щодо осі *Oy* (рис. 17.5),

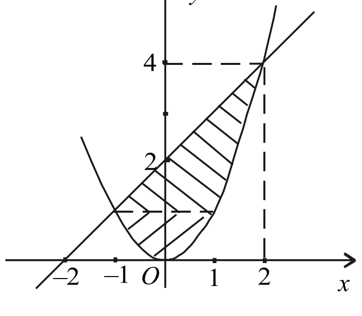

Рис.17.5. Область інтегрування.

тому

$$\iint\limits_D \left(x^2+y\right)ds=\int\limits_{-1}^{2}dx\int\limits_{x^2}^{x+2}\left(x^2+y\right)dy=\int\limits_{-1}^{2}\left(\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{x+2}\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{2}\left(x^2\left(x+2\right)+\frac{1}{2}\left(x+2\right)^2-\left(x^2\cdot x^2+\frac{1}{2}\left(x^2\right)^2\right)\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{2}\left(-\frac{3}{2}x^4+x^3+\frac{5}{2}x^2+2x+4\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{3}{10}x^5+\frac{x^4}{4}+\frac{5}{6}x^3+x^2+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=-0,3\cdot 32+4+\frac{20}{3}+4+4-\left(0,3+\frac{1}{4}-\frac{5}{6}+1-2\right)=10,35.$$

Ця сама область D (рис.17.5) неправильна щодо осі Ox, тому, якщо змінити порядок інтегрування, то розглядуваний інтеграл можна звести до таких повторних інтегралів, розбивши область інтегрування на дві правильні області:

$$\iint\limits_D \left(x^2+y\right)ds=\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\left(x^2+y\right)dx+\int\limits_{1}^{4}dy\int\limits_{y-2}^{\sqrt{y}}\left(x^2+y\right)dx\,.$$

17.3. Заміна змінних інтегрування в подвійному інтегралі

Нехай у подвійному інтегралі (17.2) треба зробити перехід від змінних $\left(x,y\right)$ до змінних $\left(u,v\right)$, тобто перейти від декартової системи координат Oxy до довільної системи координат Ouv за формулами $x=\varphi\left(u,v\right),\ y=\psi\left(u,v\right)$, які відомі.

Для цього необхідно обчислити елементарну площу ds в новій системі координат Ouv.

Диференціал радіуса-вектора в системі $Oxyz$ має вигляд: $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz = d_x\vec{r} + d_y\vec{r} + d_z\vec{r}.$

Отже, елементарну площу ds у декартовій системі координат можна знайти як модуль векторного добутку векторів:

$$ds = \mathrm{mod}\left(d_x\vec{r} \times d_y\vec{r}\right) = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \end{vmatrix} = dxdy.$$

У довільній системі координат $d\vec{r} = d_u\vec{r} + d_v\vec{r} = \left(\vec{i}\,\frac{\partial x}{\partial u} + \vec{j}\,\frac{\partial y}{\partial u}\right)du +$

$+\left(\vec{i}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \vec{j}\,\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv,$ а елементарна площа буде такою:

$$ds = \mathrm{mod}\left(d_u\vec{r} \times d_v\vec{r}\right) = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} dudv =$$

$$= \mathrm{mod}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv. \qquad (17.8)$$

Визначник $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ називається *визначником Якобі*, або *якобіаном*.

Теорема. *Якщо функція* $f(x, y)$ *неперервна в області* D, *а функції* $x = \varphi(u, v),\ \ y = \psi(u,\ v) -$ *диференційовні і встановлюють взаємно однозначну та неперервну відповідність між областю* D *в системі Oxy та областю* D' *у* *системі Ouv, а їхній якобіан зберігає незмінним свій знак в області D, то виконується формула:*

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \iint_{D'} f\left(\varphi(u,\ v);\ \psi(u,\ v)\right)\mathrm{mod}\, Idudv. \qquad (17.9)$$

У разі переходу до системи полярних координат за формулами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad (17.10)$$

якобіан переходу буде таким:

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi - \rho\sin\varphi \\ \sin\rho - \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho > 0. \qquad (17.11)$$

У цьому випадку формула (17.9) матиме такий вигляд:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f\left(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho d\varphi. \qquad (17.12)$$

Зауваження. Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ береться на орієнтованому проміжку $[a; b]$, адже $b > a$. Якщо у випадку подвійних інтегралів розглядати орієнтовані області, площа яких залежно від їхньої орієнтації може бути відповідно додатною або від'ємною, то знак модуля для якобіана у формулі (17.9) можна зняти. Орієнтацію області D можна задати певним вибором обходу межі області D.

Приклад. Обчислити $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy$:

$$D = \left\{(x,\ y) \in R^2 \middle| 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}\right\}.$$

Розв'язання. Область інтегрування D зображено на рис. 17.6.

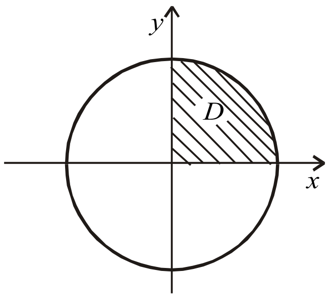

Рис. 17.6. Область інтегрування – чверть круга.

Перейдемо в цьому інтегралі до полярних координат (17.10), тоді область D' визначатиметься такими нерівностями: $\begin{cases} 0 \le \rho \le 1, \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$

З урахуванням формули (17.12) маємо:

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_{D'} \sqrt{1-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi}\,\rho d\rho d\varphi = \iint_{D'} \sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(-\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,d\left(1-\rho^2\right) \right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{2}{3}\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}} \right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3}(0-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Розглянути задачу про обчислення об'єму циліндричного тіла.

2. Описати фізичну задачу, яка приводить до поняття подвійного інтеграла.

3. Означити подвійний інтеграл та записати його основні властивості.

4. Вивести теорему про середнє значення функції двох змінних та пояснити її зміст.

5. Записати формули обчислення подвійного інтеграла в залежності від області інтегрування.

6. Записати і пояснити формулу обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат та випадки її доцільного використання.

7. Подати подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ у вигляді повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням за x та із зовнішнім інтегруванням за y, якщо область D обмежують вказані лінії:

1) $x=0, y-1=0, y-4=0, x+y=0$; 2) $x=0, y=0, y-1=0, x=\sqrt{4-y^2}$.

8. Обчислити подвійний інтеграл по області D, обмеженій указаними лініями.

1) $\iint\limits_D \left(x^3+3y\right)dxdy, D: x+y-1=0, y=x^2-1\left(x\ge 0\right)$;

2) $\iint\limits_D (x+1)y^2dxdy, D: y-3=0, y=3x^2$.

9. Обчислити подвійний інтеграл у полярній системі координат.

1) $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \cos\left(x^2+y^2\right)dy$; 2) $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\left(x^2+y^2\right)dy$.

10. Обчислити середнє значення густини $\gamma=\gamma(x,y)$ неоднорідної пластини D, обмеженої заданими лініями.

1) $\gamma=x, D: y^2=x, x=3$; 2) $\gamma=x^2, D: x=0, y=0, x+y=1$.

Лекція 18 . Потрійний інтеграл

18.1. Поняття потрійного інтеграла. Умови його існування та властивості.

18. 2. Обчислення потрійного інтеграла.

18.3. Заміна змінних у потрійному інтегралі.

18.4. Деякі застосування потрійного інтеграла.

18.4.1. Обчислення об’ємів.

18.4.2. Застосування у механіці.

18.1. Поняття потрійного інтеграла. Умови його існування та властивості

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена в обмеженій замкненій області $G \subset R_3$. Розіб’ємо область G сіткою поверхонь на n частин G_i, які не мають спільних внутрішніх точок і об’єми яких дорівнюють ΔV_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. У кожній частині G_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ і утворимо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\Delta V_i, \tag{18.1}$$

яка називається інтегральною сумою для функції $f(x, y, z)$ за областю G.

Нехай $\lambda = \max d(G_i), 1 \le i \le n -$ найбільший із діаметрів областей G_i.

Якщо інтегральна сума (18.1) при $\lambda \to 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області G на частини $G_i, i = 1, ..., n$, ні від вибору в них точок $P_i, i = 1, ..., n$, то ця границя називається потрійним інтегралом і позначається одним із таких символів:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dV \text{ або} \iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz.$$

Таким чином, за означенням

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)\Delta V_i, \tag{18.2}$$

де $f(x,y,z)$ – функція, інтегровна в області G; G – область інтегрування; *x, y* та *z*– змінні інтегрування; ΔV (або $dxdydz$) – елемент об'єму.

Якщо на тілі G розподілено масу з об'ємною густиною $\gamma = \gamma(x,y,z)$ в точці $(x,y,z) \in G$, то маса m цього тіла знаходиться за формулою

$$m = \iiint\limits_G \gamma(x,y,z)dxdydz. \qquad (18.3)$$

Формула (18.3) може розглядатися як механічний зміст потрійного інтеграла, коли підінтегральна функція невід'ємна в області *G*. Якщо всюди в області покласти $f(x,y,z) \equiv 1$, то із формули (18.2) випливає формула для обчислення об'єму V тіла G:

$$V = \iiint\limits_G dxdydz. \qquad (18.4)$$

Потрійний інтеграл є безпосереднім узагальненням подвійного інтеграла на тривимірний простір. Теорія потрійного інтеграла аналогічна теорії подвійного інтеграла, тому в більшості випадків ми обмежимося лише формулюваннями тверджень і короткими поясненнями.

Теорема (***достатня умова інтегрованості функції***). *Якщо функція* $f(x,y,z)$ *неперервна в обмеженій замкненій області* G, *то вона в цій області інтегровна.*

Властивості потрійних інтегралів

1. Сталий множник можна винести за знак потрійного інтеграла:

$$\iiint\limits_G Cf(x,y,z)dxdydz = C\iiint\limits_G f(x,y,z)dV.$$

2. Потрійний інтеграл від суми кількох інтегровних функцій дорівнює сумі потрійних інтегралів від доданків:

$$\iiint\limits_G [f(x,y,z) \pm \varphi(x,y,z)]dV = \iiint\limits_G f(x,y,z)dv \pm \iiint \varphi(x,y,z)dV.$$

3. Якщо в області інтегрування $f(x,y,z) \ge 0$, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV \ge 0.$$

4. Якщо функції $f(x,y,z)$ та $\varphi(x,y,z)$ визначені в одній і тій самій області G і $f(x,y,z) \geq \varphi(x,y,z)$, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV \geq \iiint\limits_G \varphi(x,y,z)dV.$$

5. Якщо область інтегрування G функції $f(x,y,z)$ розбити на області G_1 і G_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)dV.$$

6. *Оцінка потрійного інтеграла.* Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, яка має об'єм V, то

$$mV \leq \iiint\limits_G f(x,y,z)dV \leq MV,$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x,y,z)$ в області G.

7. **Теорема *(про середнє значення функції).*** *Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G, яка має об'єм V, то в цій області існує така точка $(x_0;y_0;z_0)$, що*

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV = f(x_0,y_0,z_0)V.$$

Величина

$$f(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{V}\iiint\limits_G f(x,y,z)dV$$

називається середнім значенням функції $f(x,y,z)$ в області G.

18. 2. Обчислення потрійного інтеграла

Обчислення потрійного інтеграла зводять до обчислення повторних інтегралів, тобто до інтегрування за кожною змінною окремо.

Нехай область D обмежена знизу і зверху поверхнями $z = z_1(x,y)$ і $z = z_2(x,y)$, а з боків − циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz.

Позначимо проекцію області G на площину Oxy через D (рис. 18.1) і вважатимемо, що функції $z_1(x,y)$ і $z_2(x,y)$ неперервні в D.

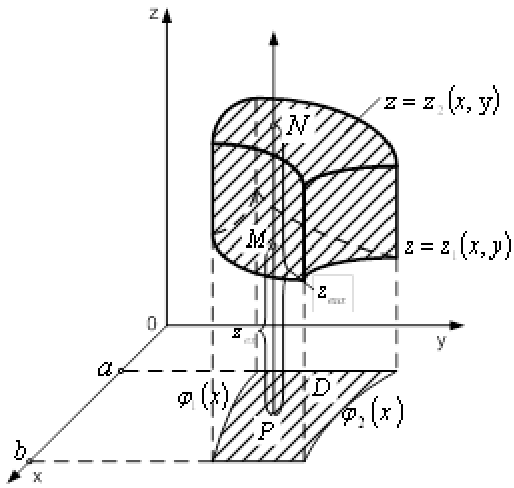

Рис. 18.1. Інтегровне тіло в просторі.

Якщо при цьому область D є правильною, то область G називається правильною у напрямі осі Oz.

Припустимо, що кожна пряма, що проходить через кожну внутрішню точку $(x;y;0)\in D$ паралельно осі $Oz,$ перетинає межу області G у точках M і N. Точку M назвемо точкою входу в область $G,$ а точку $N-$ точкою виходу з області $G,$ а їх аплікати позначимо відповідно через $z_{вх}$ і $z_{вих}$. Тоді $z_{вх}=z_1(x,y)$, $z_{вих}=z_2(x,y)$ і для будь-якої неперервної в області G функції $f(x,y,z)$ застосовна формула

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dV=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,. \tag{18.5}$$

Зміст формули (18.5) такий. Щоб обчислити потрійний інтеграл, потрібно спочатку обчислити інтеграл $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz=I(x,y)$ за змінною z, вважаючи x та y сталими. Нижньою межею цього інтеграла є апліката точки M входу

$z_{вх} = z_1(x, y),$ а верхньою – апліката $z_{вих} = z_2(x, y)$ точки виходу N. Внаслідок інтегрування отримаємо функцію $I(x, y)$ від змінних x та y.

Якщо область D, наприклад, обмежена кривими $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x), \quad a \le x \le b$, де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – неперервні функції, тобто

$$G = \{z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y), \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b\},$$

то, переходячи від подвійного інтеграла $\iint\limits_D I(x, y)dxdy$ до повторного, отримаємо формулу

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz, \qquad (18.6)$$

яка зводить обчислення потрійного інтеграла до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів.

Порядок інтегрування може бути й іншим, тобто змінні x, y і z у правій частині формули (18.6) за певних умов можна міняти місцями.

Якщо, наприклад, область G правильна в напрямі осі Ox

$$G = \{x_1(y, z) \le x \le x_2(y, z), \varphi_1 \le z \le \varphi_2(y), c \le y \le d\},$$

де $x_1(y, z), x_2(y, z), \varphi_1(y), \varphi_2(y)$ – неперервні функції, то

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dz \int\limits_{x_1(x,y)}^{x_2(x,y)} f(x, y, z)dx.$$

Зокрема, якщо областю інтегрування є паралелепіпед

$$G = \{a \le x \le b, c \le y \le d, k \le z \le l\},$$

то

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_k^I f(x, y, z)dz. \qquad (18.7)$$

У цьому разі інтегрування виконується в будь-якому порядку, оскільки область G правильна у напрямі всіх трьох координатних осей Ox, Oy, Oz.

Приклад. Обчислити $\iiint\limits_G xdxdydz,$ якщо область G обмежена координатними площинами та площинами $y=3,\ x+y=2.$

Розв'язання.

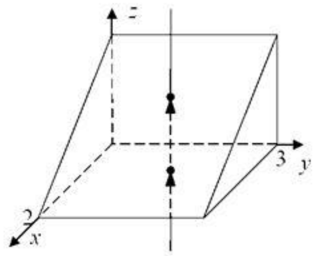

Рис. 18.2. область G в просторі.

Область G проектується на площину Oxy у прямокутник $D=\{0\le x\le 2; 0\le y\le 3\}$. Оскільки $z_1=0$ (вхід), $z_2=2-x$ (вихід), то маємо

$$\iiint\limits_G xdxdydz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{2-x} xdz=\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^3\left(z\Big|_0^{2-x}\right)dy=\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^3(2-x)dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left(x\cdot(2-x)\cdot y\Big|_0^3\right)dx=3\int\limits_0^2\left(2\cdot x-x^2\right)dx=3\cdot\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=3\cdot\left(4-\frac{8}{3}\right)=4.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_{\Pi}(x+y-z)dxdydz$ де Π – паралелепіпед, обмежений площинами $x=-1, x=1,\ y=1, y=0,\ z=0,\ z=2$ (рис.18. 3).

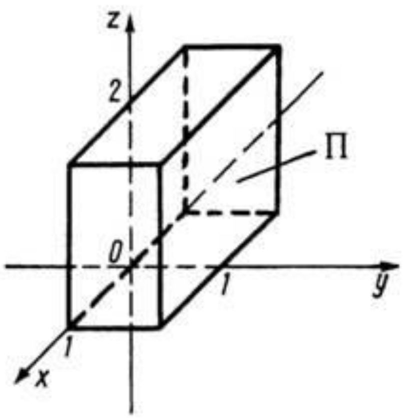

Рис. 18.3. Паралелепіпед.

Розв'язання. За формулою (18.7) маємо

$$\iiint_{\Pi} x+y-z)dxdydz = \int_{-1}^{1} dx\int_{0}^{1} dy\int_{0}^{2} (x+y-z)dz = \int_{-1}^{1} dx\int_{0}^{1} (xz+yz-\frac{z^2}{2})\Big|_0^2 dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx\int_{0}^{1} (2x+2y-2)dy = \int_{-1}^{1} (2xy+y^2-2y)\Big|_0^1 dx = \int_{-1}^{1} (2x-1)dx = -2.$$

18.3. Заміна змінних у потрійному інтегралі

Заміну змінної в потрійному інтегралі виконують за таким правилом: якщо обмежена замкнена область G взаємно однозначно відображується на область G^* за допомогою неперервно-диференційовних функцій $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$, якобіан J в області G^* не дорівнює нулю:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} & \frac{dx}{dw} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} & \frac{dy}{dw} \\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} & \frac{dz}{dw} \end{vmatrix} \neq 0$$

і $f(x,y,z) -$ неперервна в G, то справедлива формула

$$\iiint_{G} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G^*} f(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot |J|\, dudvdw. \qquad (18.8)$$

На практиці найуживанішими є циліндричні та сферичні координати. При переході від прямокутних координат x, y, z до циліндричних ρ, φ, z (рис. 18.4. а), пов'язаних з x, y, z співвідношеннями

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z;$$
$$0 \le \rho < +\infty, 0 \le \varphi \le 2\pi, -\infty < z < +\infty,$$

якобіан перетворення має вигляд

$$J = \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho.$$

.

З формули (18.8) отримуємо потрійний інтеграл у циліндричних координатах:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, \mathrm{z})\rho d\rho d\varphi dz. \qquad (18.9)$$

Назва «циліндричні координати» пов'язана з тим, що координатна поверхня $\rho = \mathrm{const}$ є циліндром, прямолінійні твірні якого паралельні осі *Oz*.

При переході від прямокутних координат x, y, z до сферичних ρ, φ, θ (рис. 18.4. б), які пов'язані з x, y, z формулами

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, y = \rho\sin\theta\sin\varphi, z = \rho\cos\theta$$
$$0 \le \rho < +\infty, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \theta < \pi.$$

якобіан перетворення має вигляд

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta.$$

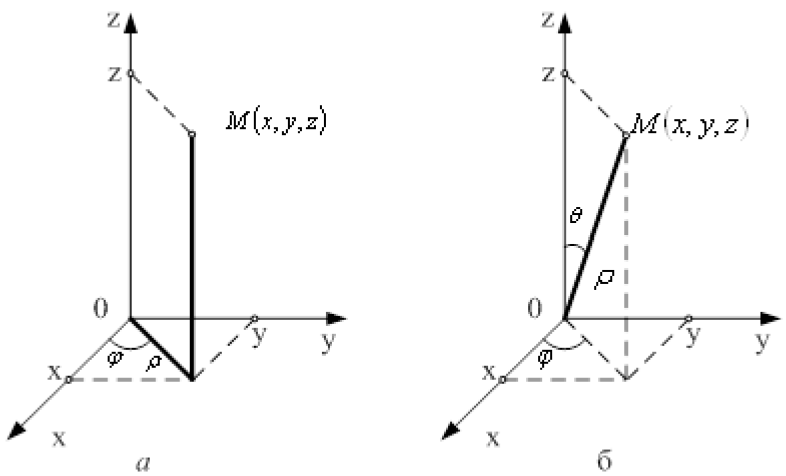

Рис 18.4. Криволінійні координати: а) циліндричні; б) сферичні.

З формули (18.8) знаходимо потрійний інтеграл у сферичних координатах:

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{G*} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

(18.10)

Назва «сферичні координати» пов'язана з тим, що координатна поверхня $\rho = \mathrm{const}$ є сферою. При обчисленні потрійного інтеграла в циліндричних чи сферичних координатах область G^*, як правило, не будують, а межі інтегрування знаходять безпосередньо за областю G, користуючись геометричним змістом нових координат. При цьому рівняння поверхонь $z_1(x, y)$ та $z_2(x, y)$, які обмежують область G, записують у нових координатах.

Зокрема, якщо область G обмежена циліндричною поверхнею $x^2 + y^2 = R^2$ та площинами $z = a, z = b, a < b,$ то всі межі інтегрування в циліндричній системі координат сталі:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho d\rho \int\limits_0^b f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz$$

і не змінюються при зміні порядку інтегрування. Те саме буде у сферичних координатах у випадку, коли G – сфера $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ або кільце.

Наприклад, якщо G – кільце з внутрішньою сферою $x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$ то рівняння цієї сфери у сферичних координатах має вигляд

$$(\rho\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\rho\cos\theta)^2 = r^2$$

або $(\rho\sin\theta)^2 \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + (\rho\cos\theta)^2 = r^2,$ звідки $\rho = r.$ Аналогічно, $\rho = R$ – рівняння зовнішньої сфери, тому

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_r^R f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2 d\rho.$$

У випадку, коли G – куля $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,$ у цій формулі потрібно покласти $r = 0.$ Інших будь-яких загальних рекомендацій, коли необхідно переходити до тієї чи іншої системи координат, дати неможливо. Це залежить і від області інтегрування, і від підінтегральної функції. Іноді потрібно написати інтеграл у різних системах координат і лише після цього вирішити, в якій з них обчислення буде найпростішим.

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \iiint\limits_G ((x+y)^2 - z)dxdydz,$ якщо область G обмежена поверхнями $z=0$ і $(z-1)^2 = x^2+y^2.$

Розв'язання.

Область G є конусом (рис. 18.5).

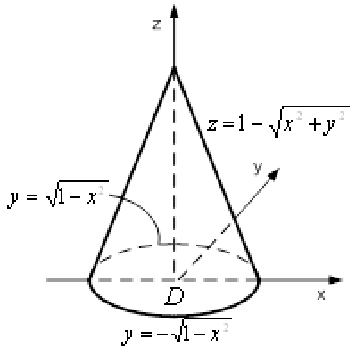

Рис. 18.5. Вказаний конус.

Рівняння конічної поверхні, що обмежує область G, можна записати у вигляді $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, а саму область G подати таким чином:

$$G = \left\{(x,y,z):(x,y) \in D, 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2}\right\},$$

де D – круг радіуса 1 із центром $O(0,0).$ Тому цей потрійний інтеграл можна звести до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів у прямокутних координатах:

$$I = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{0}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} ((x+y)^2 - z)dz.$$

Проте зручніше перейти до циліндричних координат

$$(\rho, \varphi, z): x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z.$$

Тоді прообразом круга D є прямокутник $\{(\rho,\varphi): 0 \le \rho \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, прообразом конічної поверхні – плоска поверхня $z = 1-\rho,$ а прообразом області G – область G^*. Якобіан переходу до циліндричних координат дорівнює $\rho,$ підінтегральна функція в циліндричних координатах дорівнює

$\rho^2(1+\sin 2\varphi)-z$. Зводячи потрійний інтеграл за областю G^* до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів, отримаємо

$$I=\iiint\limits_{G^*}\left(\rho^2(1+\sin 2\varphi)-z\right)\rho d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 d\rho\int\limits_0^{1-\rho}\left(\rho^2(1+\sin 2\varphi)-z\right)\rho dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(\rho^3(1-\rho)(1+\sin 2\varphi)-\frac{1}{2}\rho(1-\rho)^2\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{20}(1+\sin 2\varphi)-\frac{1}{24}\right)d\varphi=\frac{\pi}{60}.$$

Зазначимо, що розставляння меж інтегрування в циліндричних координатах, як правило, виконують, розглядаючи не область G^*, а зміну циліндричних координат в області G. Наочно бачимо, що в області D змінна φ змінюється від 0 до 2π, при кожному значенні φ змінна ρ змінюється від 0 до 1, а для кожної точки (ρ,φ) області D змінна z змінюється в області G від 0 (значення z в області D) до $1-\sqrt{x^2+y^2}=1-\rho$ (значення z на конічній поверхні).

Приклад. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_G(x^2+y^2+z^2)dxdydz,$ де $G-$ сфера $x^2+y^2+z^2\le R^2$ (рис. 18.6).

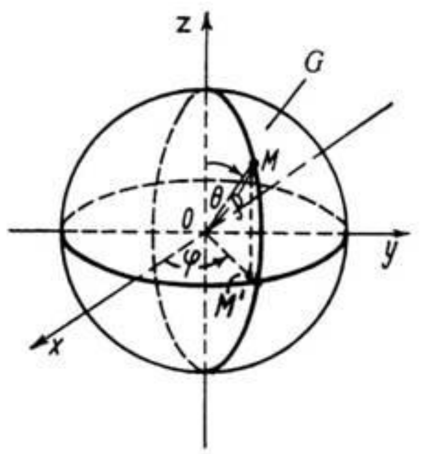

Рис. 18.6. Сфера в просторі.

Розв'язання. У даному випадку зручніше перейти до сферичних координат:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \; y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \; z = \rho \cos\theta.$$

Із рис. 18.6 випливає, що координати ρ, θ, φ змінюються в таких межах:

$$0 \le \rho \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi.$$

Оскільки підінтегральна функція $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, то за формулою (18.10) маємо

$$\iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = \int_0^R d\rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot p^2 \sin\theta d\varphi =$$
$$= \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^\rho \sin\theta d\theta =$$
$$= 4\pi \int_0^R \rho^4 d\rho = 4\pi \left. \frac{\rho^5}{5} \right|_0^R = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

18.4. Деякі застосування потрійного інтеграла

18.4.1. *Обчислення об'ємів*

Якщо деяке тіло є обмеженою і замкненою областю G, що має об'єм V, то згідно з формулою (18.4)

$$V = \iiint_G dxdydz. \tag{18.11}$$

Доведення цієї формули випливає з означення потрійного інтеграла:

$$\iiint_G dxdydz = \lim_{\lambda \to \to 0} \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \lim_{\lambda \to \to 0} V = V.$$

18.4.2. *Застосування у механіці*

Нехай G – обмежена замкнена область простору R^3, яку займає деяке матеріальне тіло з густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, де $\gamma(x, y, z)$ – неперервна функція в області G, тоді:

а) *маса* цього тіла

$$m = \iiint\limits_G \gamma dV; \qquad (18.12)$$

б) *моменти інерції* I_x, I_y, I_z тіла *відносно координатних осей Ox, Oy, Oz* відповідно дорівнюють

$$I_x = \iiint\limits_G (y^2 + z^2)\gamma dV;\ I_y = \iiint\limits_G (x^2 + z^2)\gamma dV; I_z = \iiint\limits_G (x^2 + y^2)\gamma dV; \qquad (18.13)$$

в) *моменти інерції* I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} тіла *відносно координатних площин Ox, Oy, Oz* обчислюються за формулами

$$I_{xy} = \iiint\limits_G z^2\gamma dV,\ I_{xz} = \iiint\limits_G y^2\gamma dV,\ I_{yz} = \iiint\limits_G x^2\gamma dV; \qquad (18.14)$$

та *момент інерції* тіла *відносно початку координат*

$$I_0 = \iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)\gamma dV; \qquad (18.15)$$

г) *статичні моменти* M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} тіла *відносно координатних площин Oxy, Oxz, Oyz* за формулами

$$M_{xy} = \iiint\limits_G z\gamma dV;\ M_{xz} = \iiint\limits_G y\gamma dV;\ M_{yz} = \iiint\limits_G x\gamma dV; \qquad (18.16)$$

д) *координати* x_c, y_c, z_c *центра маси* тіла визначаються за формулами

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\iiint\limits_G x\gamma dV}{\iiint\limits_G \gamma dV};\ y_c = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iiint\limits_G y\gamma dV}{\iiint\limits_G \gamma dV};\ z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint\limits_G z\gamma dV}{\iiint\limits_G \gamma dV}. \qquad (18.17)$$

Приклад 5. Обчислити масу тіла *m*, обмежену координатними площинами і площинами $x + y + z = 2, x = 1, y = 1,$ якщо його густина $\gamma(x, y, z) = x + 2z$ (рис. 18.7).

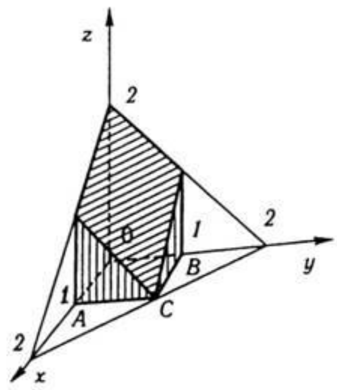

Рис. 18.7. Тіло в просторі.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (18.12), отримаємо

$$m=\iiint\limits_G (x+2z)dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{2-x-y}(x+2z)dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 (xz+z^2)\Big|_0^{2-x-y}dy=\int_0^1 dx\int_0^1 (y^2+xy-4y-2x+4)dy=$$

$$=\int_0^1\left(-\frac{3}{2}x+\frac{7}{3}\right)dx=\frac{19}{12}.$$

Завдання для самоконтролю

1. Описати фізичну задачу, яка приводить до поняття потрійного інтеграла.

2. Означити потрійний інтеграл та записати його основні властивості.

3. Записати формули обчислення потрійного інтеграла в залежності від області інтегрування.

4. Вивести формули обчислення потрійного інтеграла в циліндричній та сферичній системі координат.

5. Обчислити повторні інтеграли:

1) $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (x+y+z)dz;$ 2) $\int_0^q dx\int_0^x dy\int_0^y xyzdz.$

6. Обчислити:

1) $\iiint\limits_V (x+y-z)dxdydz, \quad V: 0 \le x \le 4, 1 \le y \le 2, -1 \le z \le 5;$

2) $\iiint\limits_V (x+2y+3z^2)dxdydz, \quad V: -1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, 1 \le z \le 2.$

7. Обчислити потрійний інтеграл в прямокутній системі координат або за допомогою циліндричних чи сферичних координат:

1) $\iiint\limits_V zdxdydz, \quad V: x+y+z=a, x=0, y=0, z=0 \ (a>0).$

2) $\iiint\limits_V (2x+y)dxdydz, \quad V: y=x, y=0, x=1, z=1, z=1+x^2+y^2.$

3) $\iiint\limits_V \sqrt{(x^2+y^2+z\ )^5}dxdydz, \quad V: x^2+y^2+z^2=4, y=0 \ (y \ge 0).$

Додаток 1

Табличне диференціювання

I. Таблиця похідних основних функцій

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.

2. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$.

3. $(\sin x)' = \cos x$.

4. $(\cos x)' = -\sin x$.

5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$.

8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$.

9. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

10. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

11. $(a^x)' = a^x \ln a$.

12. $(e^x)' = e^x$.

13. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$.

14. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x} \quad (x > 0,\ a > 0)$.

15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

17. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

18. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

II. Основні правила знаходження похідної. Якщо C – постійна величина і $u = \varphi(x),\ v = \psi(x)$ – диференційовні функції, тоді

1) $(C)' = 0$;

2) $(x)' = 1$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(Cu)' = Cu'$;

5) $(uv)' = u'v + uv'$;

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0)$;

7) $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$.

III. Правило диференціювання складеної функції. Якщо $y = f(u),\ u = \varphi(x)$, тобто $y = f[\varphi(x)]$, де функції y і u мають похідні, тоді

$$y_x' = y_u' \cdot u_x'$$

або в інших позначеннях

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Додаток 2

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \left(\int dx = x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \right).$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

8. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| tg\, \frac{x}{2} \right| + C.$

12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$

13. $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C.$

14. $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C.$

15. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C.$

16. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + C.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C.$

19. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C.$

20. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

21. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$

22. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

Список рекомендованої літератури

1. Берман Г.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Наука, 1985. – 439 с.

2. Васильченко І.П. та ін. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Навч посібник: У двох книгах. Книга 2/ І.П. Васильченко, В.Я. Данилов, А.І. Лобанов, Є.Ю. Таран. – друге видання зі змінами. – К.: Либідь, 1994. – 280 с.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. II. Учеб. пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 1997. – 416 с.

4. Дубовик В.П. Вища математика./ В. П. Дубовик, І.І. Юрик / Навч. посібник. — К.: Вища шк., 1993. − 648 с.

5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1985. – Т.2. – 560 с.

6. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Ч.2. – Київ, 1981. –456 с.

7. Кушлик О. І. Диференціальні рівняння та їх системи. / О.І. Кушлик, Б.П. Орел, Н.В. Поліщук / Методичні вказівки до виконання розрахункових завдань з вищої математики. − Київ, «Політехніка», 2001. −28 с.

8. Кушлик-Дивульська О. І. Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи кредитного модуля "Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння" для напрямів підготовки 6.051501 "Видавничо-поліграфічна спарва", 6.050503 "Машинобудування" для студентів Видавничо-поліграфічного інституту [Електронний ресурс] / НТУУ "КПІ"; Уклад. О. І. Кушлик-Дивульська. − Електронні текстові дані (1 файл: 2,64 Мбайт).− Київ: НТУУ "КПІ", 2013. − 117с. − Назва з екрана. − Доступ http://ela.kpi.ua/handle/123456789/2838.

Зміст