

Екзаменаційні питання з математики. (Семестр - 1)

1. Визначники 2-го та 3-го порядку, їх властивості та обчислення.
2. Мінори та алгебраїчні доповнення елементів визначника. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця.
3. Системи лінійних рівнянь. Формули Крамера (виведення).
4. Класифікація матриць, дії над ними, властивості.
5. Обернена матриця. Побудова оберненої матриці. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь.
6. Ранг матриці: означення, обчислення. Елементарні перетворення матриць.
7. Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими. Теорема Кронекера-Капеллі.
8. Метод Гауса розв'язування систем m лінійних рівнянь з n невідомими.
9. Геометричний вектор: основні поняття. Лінійні операції над векторами, їх властивості.
10. Лінійна комбінація векторів, лінійна залежність і незалежність, найпростіші наслідки цих означень.
11. Базиси геометричних векторів.
12. Проекція вектора на вісь. Теореми про проекції.
13. Прямокутний декартовий базис. Розклад вектора на складові по осям координат.
14. Лінійні операції над векторами в координатній формі. Напрямні косинуси. Умова колінеарності векторів. Ділення відрізка в даному відношенні.
15. Скалярний добуток векторів: означення, властивості (алгебраїчні та геометричні), обчислення. Необхідна та достатня умова перпендикулярності векторів.
16. Вираз скалярного добутку через координати. Деякі застосування скалярного добутку: кут між векторами, проекція вектора на заданий напрямок, фізичний зміст скалярного добутку (робота постійної сили).
17. Векторний добуток векторів: означення, властивості, обчислення. Необхідна та достатня умова колінеарності векторів.
18. Вираз векторного добутку через координати. Геометричний та механічний зміст векторного добутку.
19. Мішаний добуток трьох векторів: означення, властивості, обчислення. Необхідна та достатня умова компланарності векторів.
20. Вираз мішаного добутку через координати. Геометричний та механічний зміст мішаного добутку.
21. Пряма лінія на площині. Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору. Загальне рівняння прямої на площині та його дослідження. Рівняння прямої у відрізках.
22. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (два варіанти). Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
23. Канонічне та параметричне рівняння прямої на площині.
24. Кут між двома прямими. Умова паралельності та перпендикулярності прямих на площині.
25. Нормальне рівняння прямої на площині. Зведення загального рівняння до нормального. Нормуючий множник. Відстань та відхилення точки від прямої.
26. Рівняння площини, що проходить через задану точку та перпендикулярно заданому вектору. Загальне рівняння площини та його дослідження.
27. Рівняння площини у відрізках.
28. Рівняння площини, що проходить через одну точку та через три задані точки.

29. Нормальне рівняння площини. Зведення загального рівняння до нормального. Відстань та відхилення точки від площини.
30. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин.
31. Пряма в просторі: канонічне та параметричне рівняння; рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (виведення).
32. Загальне рівняння прямої в просторі. Зведення загального рівняння прямої до канонічного рівняння.
33. Кут між прямими у просторі. Умова паралельності та перпендикулярності прямих. Умова, при якій дві прямі лежать в одній площині.
34. Кут між прямою та площиною. Умова паралельності і перпендикулярності прямої та площини.
35. Перетин прямої та площини. Умова належності прямої до площини.
36. Криві другого порядку. Коло: означення, канонічне рівняння, графік.
37. Еліпс: означення, його елементи, виведення канонічного рівняння, графік.
38. Дослідження форми еліпса за його канонічним рівнянням. Ексцентриситет, директриси та їх властивості.
39. Гіпербола: означення, її елементи, виведення канонічного рівняння, графік.
40. Дослідження форми гіперболи за її канонічним рівнянням. Ексцентриситет, директриси та їх властивості.
41. Парабола : означення, канонічне рівняння, графік. Дослідження форми параболи по її канонічному рівнянню.
42. Системи координат на площині.: декартова, полярна система координат, їх зв'язок.
43. Поверхні другого порядку. Циліндричні поверхні: означення, виведення рівняння циліндра. Канонічні рівняння еліптичного , параболічного та гіперболічного циліндрів.
44. Поверхні обертання: означення, виведення рівняння поверхні обертання. Конічні поверхні: означення, канонічне рівняння конусу.
45. Сфера: означення, канонічне рівняння.
46. Еліпсоїд: означення. Дослідження форми еліпсоїда методом паралельних перерізів.
47. Гіперолоїд: однопорожнинний та двохпорожнинний. Означення, канонічне рівняння.
48. Параболоїд: еліптичний, гіперболічний.
49. Множини. Операції над множинами. Числові множини. Множина дійсних чисел та їх властивості .
50. Модуль дійсного числа та його властивості.
51. Поняття функції. Способи задання , основні характеристики функції.
52. Обернена функція, складена функція. Основні елементарні функції та їх графіки.
53. Визначення границі числової послідовності, її геометричний зміст, єдиність існування границі.
54. Граничний перехід в нерівностях. Достатня умова збіжності числової послідовності. Теорема Вейерштрасса та її застосування для доведення існування виразу $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.
55. Визначення границі функції в точці та на нескінченності (три означення). Її геометрична інтерпретація. Односторонні границі.
56. Визначення нескінченно великої функції (два визначення).
57. Нескінченно малі функції: визначення та основні теореми.
58. Зв'язок між функцією, її границею і нескінченно малою функцією (пряма та обернена теореми).

59. Арифметичні операції над границями: основні теореми про границі та їх наслідки.
60. Ознаки існування границь: теорема про границю проміжної функції та теорема про границю монотонної функції.
61. Перша чудова границя.
62. Друга чудова границя. Наслідок : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e$.
63. Порівняння нескінченно малих функцій.
64. Еквівалентні нескінченно малі і основні теореми про них. Найважливіші еквівалентності.
65. Неперервність функції в точці. (три визначення) Основні теореми про неперервність функції. Неперервність елементарних функцій.
66. Неперервність функції в інтервалі і на відрізку. Властивості функції неперервної на відрізку: теореми Вейерштрасса, Больцано –Коші та наслідки з них.
67. Визначення похідної функції, її геометричний та механічний зміст. Рівняння дотичної та нормалі до кривої.
68. Основні правила диференціювання функції. Похідна суми, різниці, добутку, частки; похідна складеної та оберненої функції.
69. Теорема про зв'язок між неперервністю та диференційовністю функції. Необхідна умова існування похідної.
70. Степенева функція $y = x^n$, її графіки, властивості. Виведення формули похідної степеневих функцій.
71. Показникова функція $y = a^x$, $a > 0, a \neq 0$, її графіки, властивості. Виведення формули похідної показникової функції.
72. Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$, її графіки, властивості. Виведення формули похідної логарифмічної функції.
73. Тригонометричні функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Їх графіки, властивості. Виведення формул похідних тригонометричних функцій.
74. Обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccot} x$. Їх графіки, властивості. Виведення формул похідних обернених тригонометричних функцій.
75. Гіперболічні функції $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$. Їх графіки, означення, властивості. Виведення формул для обчислення похідних гіперболічних функцій.
76. Диференціювання неявних функцій.
77. Функції, які задані параметрично. Приклади: циклоїда, астроїда, еліпс. Диференціювання параметрично заданих функцій.
78. Логарифмічне диференціювання та його застосування.
79. Похідні вищих порядків явно заданої функції, неявно заданої функції та параметрично заданої функції.
80. Диференціал функції: визначення, геометричний зміст, властивості (основні теореми про диференціали).
81. Застосування диференціалу в наближених обчисленнях.
82. Диференціали вищих порядків.
83. Теорема Ферма: доведення, геометричне тлумачення. Необхідна умова існування екстремуму. Визначення стаціонарних точок.
84. Теорема Ролля: доведення, геометричне тлумачення.
85. Теорема Коші про відношення приростів функцій. Доведення.

86. Теорема Лагранжа: доведення, геометричне тлумачення, наслідки з неї.
87. Правило Лопітала. Теорема Лопітала розкриття невизначеностей вигляду $\frac{\infty}{\infty}$ та $\frac{0}{0}$.
88. Диференціальні ознаки монотонності функції. Необхідна та достатня умова монотонності (дві теореми).
89. Локальний екстремум. Необхідна умова існування локального екстремуму. Визначення стаціонарних або критичних точок.
90. Достатня умова існування локального екстремуму: правило першої похідної, правило другої похідної.
91. Найбільше та найменше значення функції на відрізку. Абсолютний екстремум.
92. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину. Достатня умова опуклості-вгнутості графіка функції. Доведення.
93. Необхідна та достатня умова існування точки перегину (дві теореми).
94. Асимптоти графіка функції: означення, класифікація, спосіб знаходження.
95. Формула Тейлора та Маклорена. Розклади по формулі Маклорена деяких елементарних функцій: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.
96. Функції двох змінних. Основні поняття, геометричний зміст. Границя функції двох змінних: означення, геометричний зміст, вастивості границь.
97. Неперервність функції двох змінних: означення (два означення). Властивості функції двох змінних неперервних в обмеженій замкненій області.
98. Частинні похідні першого порядку функції двох змінних: означення, геометричний зміст.
99. Частинні похідні вищих порядків функції двох змінних. Теорема Шварца.
100. Диференційовність та повний диференціал функції двох змінних. Теорема про необхідну та достатню умову диференційовності функції двох змінних.
101. Застосування повного диференціалу функції двох змінних до наближених обчислень.
102. Диференціали вищих порядків функції двох змінних.
103. Похідна складеної функції двох змінних. Повна похідна.
104. Інваріантність форми повного диференціалу функції двох змінних.
105. Диференціювання неявної функції двох змінних. Теорема про існування неявної функції двох змінних.
106. Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст повного диференціалу.
107. Екстремум функції двох змінних. Основні поняття. Необхідні та достатні умови екстремуму функції двох змінних.
108. Найбільше та найменше значення функції двох змінних в замкненій області.