МКР4 ”Диференціальні рівняння вищих порядків”

Структура кожного варіанту контрольної роботи:

1. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку – 2 бали.
2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами – 1 бал.
3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Задача Коші для ЛНДР n-го порядку – 2 бали.

Оцінка за контрольну роботу – 5 балів.

Основні відомості:

1. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку:

a) Рівняння типу $y'' = f(x)$, $y^{(n)} = f(x)$.

Ці рівняння розв’язуються послідовним інтегруванням

b) Рівняння типу $F(x, y', y'') = 0$.

Ці рівняння не містять явно шуканої функції y. Зробивши заміну $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$, отримаємо рівняння першого порядку відносно функції p : $F(x, p, p') = 0$.

c) Рівняння типу $F(y, y', y'') = 0$.

Рівняння цього типу не містить явно незалежної змінної x і допускає зниження порядку за одиницю, якщо покласти , а новий аргумент взяти саму шукану функцію y. Похідну другого порядку отримуємо за правилом диференціювання складної функції

$$p = p(y), \qquad y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = p\frac{dp}{dy} = pp' \;\; => \;\boxed{y'' = pp'}$$

Підставивши ці вирази в рівняння, отримаємо $F(y, p, pp') = 0$. Отримане рівняння є рівнянням першого порядку відносно функції

$p = p(y)$, $\left(p' = \frac{dp}{dy}\right)$.

2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0\,, a_i \in \mathbf{R}\,.$$

Загальний розв'язок ЛОДР шукаємо у вигляді:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$, $y_1, y_2, \cdots y_n -$ фундаментальна система розв'язків, де $y_i = e^{k_i x}$, $k_i -$ корені характеристичного рівняння

$(i = 1,2, \cdots, n)$.

3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),\ a_i \in \mathbf{R}\,,$$

$f(x)$ - права частина спеціального вигляду:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\ ).$$

Загальний розв'язок ЛНДР $y = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$ =>

=> $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y_{\text{ч.н.}}$, де $y_1, y_2, \cdots y_n -$ фундаментальна система розв'язків відповідного ЛОДР. Частинний розв'язок ЛНДР $(y_{\text{ч.н.}})$ підбираємо по вигляду правої частини ЛНДР.

Задача Коші для ЛНДР n-го порядку: знайти частинний розв'язок ЛНДР, який задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ y''(x_0) = y_0'', \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$