Диференціальні рівняння вищих порядків

Приклад 1. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y''=50\sin^3 y\cdot\cos y,\ y(1)=\frac{\pi}{2},\ y'(1)=5.$$

Розв'язування. Задане диференціальне рівняння відноситься до рівнянь вищих порядків, що дозволяють пониження порядку, рівняння не містить x. Заміна $y'=p(y)$. Тоді $y''=p'\cdot y'=p'\cdot p$. Підставляючи у рівняння $y''=50\sin^3 y\cdot\cos y$, отримаємо $p'p=50\sin^3 y\cdot\cos y$. Це диференціальне рівняння першого порядку, змінні якого можна відокремити. Маємо

$$p\cdot\frac{dp}{dy}=50\sin^3 y\cdot\cos y\ \Rightarrow\ p\cdot dp=50\sin^3 y\cdot\cos y\cdot dy.$$

$$\int pdp=50\int\sin^3 y\cdot\cos y\cdot dy=50\int\sin^3 y\cdot d(\sin y).$$

Інтегруючи, отримаємо $\frac{p^2}{2}=50\frac{\sin^4 y}{4}+C\ \Rightarrow\ p^2=25\sin^4 y+2C$, тобто

$$(y')^2=25\sin^4 y+2C.$$

Визначимо значення C, використавши додаткові умови $y(1)=\frac{\pi}{2}$, $y'(1)=5$:

$(5)^2=25\sin^4\frac{\pi}{2}+2C$. Звідки $C=0$.

$$(y')^2=25\sin^4 y\ \Rightarrow\ y'=\pm5\sin^2 y\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\pm5\sin^2 y\ \Rightarrow\ \frac{dy}{\sin^2 y}=\pm5dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int\frac{dy}{\sin^2 y}=\pm5\int dx\ \Rightarrow\ -ctgy=\pm5x+C.$$

Згідно умові $y(1)=\frac{\pi}{2}$, маємо $-ctg\frac{\pi}{2}=\pm5\cdot1+C$, тобто $C=\mp5$.

Тоді $-ctgy=\pm5x\mp5$.

Відповідь. $ctgy=\pm5(x-1)$.

Приклад 2. Знайти розв’язок диференціального рівняння $y''\cdot y^3+9=0$, $y(0)=3,\ y'(0)=-1.$

Розв’язування. Диференціальне рівняння $y''=-\dfrac{9}{y^3}$ відноситься до рівнянь вищих порядків, що дозволяють пониження порядку, рівняння не містить змінної x. Заміна $y'=p(y)$. Тоді $y''=p'\cdot y'=p'\cdot p$. Підставляючи в рівняння $y''\cdot y^3+9=0$, отримаємо $p'\,p=\dfrac{-9}{y^3}$. Це диференціальне рівняння першого порядку, змінні якого можна відокремити.

$$p\cdot\frac{dp}{dy}=\frac{-9}{y^3}\ \Rightarrow\ p\cdot dp=\frac{-9}{y^3}\cdot dy.$$

Про інтегрувавши обидві частини

$$\int pdp=-9\int\frac{dy}{y^3}=-9\int y^{-3}\cdot d(y),$$

отримаємо

$$\frac{p^2}{2}=\frac{9}{2y^2}+C\ \Rightarrow\ p^2=\frac{9}{y^2}+2C\ \Rightarrow (y')^2=\frac{9}{y^2}+2C.$$

Для визначення параметра C, використаємо додаткові умови, а саме $y(0)=3,\ y'(0)=-1$: $(-1)^2=\dfrac{9}{3^2}+2C$. Звідки $C=0$.

$$(y')^2=\frac{9}{y^2}\ \Rightarrow\ y'=\pm\frac{3}{y}\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\pm\frac{3}{y}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ ydy=\pm3dx\ \Rightarrow\ \int ydy=\pm3\int dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{y^2}{2}=\pm3x+C\ \text{або}\ y^2=\pm6x+2C.$$

Згідно умові $y(0)=3$, маємо $9=\pm3\cdot0+C$, тобто $C=9$. Тоді $y^2=\pm6x+9$.

Відповідь. $y^2=\pm6x+9$.

Приклад 3. Відомо, що при $x \neq 0$ функції $y_1 = \frac{1}{x}$ та $y_2 = x^6$ є частинними розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння з функціональними коефіцієнтами. Переконатися, що ці розв'язки утворюють фундаментальну систему та вказати один з виглядів можливого диференціального рівняння.

Розв'язування. Запишемо визначник Вронського даної системи розв'язків. Якщо визначник Вронського скрізь в області X відмінний від нуля, то дані функції лінійно незалежні, тобто будуть утворювати фундаментальну систему розв'язків.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \Rightarrow W = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & x^6 \\ \frac{-1}{x^2} & 6x^5 \end{vmatrix} = 6x^4 - \left(-x^4\right) = 7x^4 \neq 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Розв'яжемо задачу про відновлення диференціального рівняння

$$y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = 0$$

за відомою його фундаментальною системою розв'язків. Нехай задано лінійно незалежну систему функцій y_1, y_2.

Система функцій y_1, y_2 є фундаментальною системою розв'язків. Тоді загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння має вигляд $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, де C_1, C_2 довільні сталі. Система функцій y_1, y_2, y є лінійно залежною. Тоді

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = x^6$, тоді $\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & x^6 & y \\ \frac{-1}{x^2} & 6x^5 & y' \\ \frac{2}{x^3} & 30x^4 & y'' \end{vmatrix} = 0$, або $\frac{1}{x} \cdot x^4 \begin{vmatrix} 1 & x^2 & y \\ \frac{-1}{x} & 6x & y' \\ \frac{2}{x^2} & 30 & y'' \end{vmatrix} = 0$.

Якщо розкласти визначник за елементами третього стовпчика, то одержимо

$$x^3\left(y\begin{vmatrix}\frac{-1}{x} & 6x\\ \frac{2}{x^2} & 30\end{vmatrix}-y'\begin{vmatrix}1 & x^2\\ \frac{2}{x^2} & 30\end{vmatrix}+y''\begin{vmatrix}1 & x^2\\ \frac{-1}{x} & 6x\end{vmatrix}\right)=0.$$

Оскільки $x\neq 0$, то

$$y\left(\frac{-30}{x}-\frac{12}{x}\right)-y'(30-2)+y''(6x+x)=0.$$

$7xy''–28y'–\frac{42}{x}y=0$. Після скорочення на 7, отримаємо $xy''–4y'–\frac{6}{x}y=0$,

тобто $x^2y''–4xy'–6y=0$ або $y''–\frac{4}{x}y'–\frac{6}{x^2}y=0$.

Відповідь. розв’язки утворюють фундаментальну систему.

$y''–\frac{4}{x}y'–\frac{6}{x^2}y=0$ – один з виглядів можливого диференціального рівняння.

Приклад 4. Знайти загальний розв’язок неоднорідного рівняння $y'''+2y''=12x-2+9e^x-32\sin 2x$.

Розв’язування. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння третього порядку з постійними коефіцієнтами та спеціальною правою частиною (многочлен $f_1(x)=12x-2$, показникова функція $f_2(x)=9e^x$ та тригонометрія $f_3(x)=–32\sin 2x$).

Для однорідного рівняння $y'''+2y''=0$, що відповідає заданому неоднорідному, складаємо характеристичне рівняння $k^3+2k^2=0$. Останнє рівняння має два дійсні корені, причому одне має кратність два, а саме $k_1=k_2=0$ та $k_3=–2$. Загальний розв’язок однорідного рівняння запишемо у вигляді $y_{одн}=e^{0x}(C_1+C_2x)+C_3e^{-2x}$, тобто $y_{одн}=C_1+C_2x+C_3e^{-2x}$.

Частковий розв’язок неоднорідного рівняння будемо шукати згідно принципу суперпозиції розв’язків.

Спочатку знайдемо частковий розв’язок рівняння $y'''+2y''=12x-2$. Оскільки права частина неоднорідного рівняння є многочленом першого степеня $f_1(x)=12x-2$, то подібний до нього вираз також буде многочленом степеня один $\tilde{f}_1(x)=Ax+B$. Коренем подібності буде число $\lambda=0$, що співпадає з коренем однорідного рівняння, який має кратність 2 (тобто $r=2$). Оскільки $y_{част}=\tilde{f}_1(x)\cdot x^r$, тому $y_{част}=(Ax+B)\cdot x^2$ або ж $y_{част}=Ax^3+Bx^2$.

Оскільки частковий розв’язок повинен задовольняти неоднорідне рівняння, то знаходимо всі потрібні нам похідні та підставляємо все в неоднорідне рівняння. Маємо $y=Ax^3+Bx^2$. Тоді $y'=3Ax^2+2Bx$, $y''=6Ax+2B$, $y'''=6A$ та маємо $6A+2(6Ax+2B)=12x-2$. Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x маємо систему $\begin{cases} x^1: \quad 12A=12, \\ x^0: \quad 6A+4B=-2, \end{cases}$

з якої отримаємо $A=1$, $B=-2$. Тобто $y_1=x^3-2x^2$.

Тепер знаходимо частковий розв’язок рівняння $y'''+2y''=9e^x$. Оскільки права частина неоднорідного рівняння є показниковою функцією $f_2(x)=9e^x$, то подібною до нього також буде показникова функція $\tilde{f}_2(x)=Ae^x$. Коренем подібності буде число $\lambda=1$, що не співпадає з коренем однорідного рівняння, тобто $r=0$, тому $y_{част}=\tilde{f}_1(x)\cdot x^r$ представляє собою $y_{част}=Ae^x\cdot x^0$ або $y_{част}=Ae^x$. Оскільки частковий розв’язок повинен задовольняти неоднорідне рівняння, то знову знаходимо всі потрібні нам похідні та підставляємо все в неоднорідне рівняння. Маємо $y=Ae^x$. Тоді $y'=Ae^x$, $y''=Ae^x$, $y'''=Ae^x$ та маємо $Ae^x+2Ae^x=9e^x$. Отримаємо $A=3$. Тобто $y_2=3e^x$.

Нарешті знайдемо частковий розв’язок рівняння $y'''+2y''=-32\sin 2x$. Оскільки правою частиною неоднорідного рівняння є тригонометрична функція $f_3(x)=-32\sin 2x$, то подібною до нього буде тригонометрія $\tilde{f}_3(x)=A\sin 2x+B\cos 2x$. Коренем подібності буде число $\lambda=0\pm 2i$, що не співпадає з коренем однорідного рівняння, тому $r=0$. Тоді з виразу $y_{част}=\tilde{f}_1(x)\cdot x^r$ враховуючи, що $x^0=1$ отримаємо $y_{част}=A\sin 2x+B\cos 2x$. Частковий розв’язок повинен задовольняти неоднорідне рівняння, тому знаходимо всі потрібні нам похідні та підставляємо все в неоднорідне рівняння. Маємо $y=A\sin 2x+B\cos 2x$. Тоді

$$y'=2A\cos 2x-2B\sin 2x,$$

$$y''=-4A\sin 2x-4B\cos 2x,$$

$$y'''=-8A\cos 2x+8B\sin 2x.$$

Підставляючи знайдені похідні в рівняння $y'''+2y''=-32\sin 2x$, отримаємо

$$-8A\cos 2x+8B\sin 2x+2(-4A\sin 2x-4B\cos 2x)=-32\sin 2x.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових тригонометричних функціях, отримаємо систему $\begin{cases}\cos 2x: & -8A-8B=0,\\ \sin 2x: & 8B-8A=-32,\end{cases}$ з якої знаходимо $A=2$, $B=-2$. Тобто $y_3=2\sin 2x-2\cos 2x$.

Згідно принципу суперпозиції розв’язків, запишемо частковий розв’язок неоднорідного рівняння $y_{част}=x^3-2x^2+3e^x+2\sin 2x-2\cos 2x$. Тоді загальний розв’язок неоднорідного рівняння можна записати у вигляді $y=y_{одн}+y_{част}=\left(C_1+C_2x+C_3e^{-2x}\right)+\left(x-2+3e^x+2\sin 2x-2\cos 2x\right)$.

Відповідь. $y=C_1+C_2x+C_3e^{-2x}+x-2+3e^x+2\sin 2x-2\cos 2x$.

Приклад 5. Відомо, що при $x \neq 0$ функції $y_1 = x$ є частинним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + \frac{3}{x} y' - \frac{3}{x^2} y = 0$. Знайти загальний розв'язок цього диференціального рівняння.

Розв'язування. Скористаємося формулою $y = y_1 \left(\int \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int a(x)dx} dx + C_1 \right)$, де $a(x) = \frac{3}{x}$, $y_1 = x$. Тоді враховуючи $\int \frac{3dx}{x} = 3\ln|x|$, отримаємо

$$y = x\left(\int \frac{1}{x^2} Ce^{-3\ln|x|} dx + C_1 \right) = x\left(\int \frac{1}{x^2} C \frac{1}{x^3} dx + C_1 \right) = x\left(C \int \frac{1}{x^5} dx + C_1 \right) =$$

$= x\left(C \frac{-1}{4x^4} + C_1 \right) = C_1 x + C_2 \frac{1}{x^3}$, де $C_2 = -\frac{C}{4}$.

Відповідь. $y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x^3}$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами і довільною правою частиною. Метод Лагранжа.

Приклад 6. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4, \qquad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

Розв'язування: Розв'яжемо відповідне ЛОДР $y'' + 4y = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$ має тільки комплексні корені $k_{1,2} = \pm 2i$. Отже, розв'язок ЛОДР $y_{з.о.} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Застосовуємо метод Лагранжа. Тоді загальний розв'язок ЛНДР: $y = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x$, де $C_1(x)$, $C_2(x)$ - невідомі функції, які знаходимо із системи

$(*)\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$ де $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$.

Тоді $y_1' = -2\sin 2x$, $y_2' = 2\cos 2x$.

З неоднорідного рівняння маємо $f(x) = \frac{4}{\sin 2x}$. Система(*) лінійна відносно невідомих функцій $C_1'(x), C_{2(x)}'$, розв'яжемо її методом Крамера:

$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, де

$$\Delta = w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \frac{4}{\sin 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \frac{4}{\sin 2x} \end{vmatrix} = \frac{4\cos 2x}{\sin 2x}.$$

Тоді $C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{4}{2} = -2,$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4\cos 2x}{2\sin 2x} = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x},$$

.

Інтегруючи, знаходимо функцій $C_1'(x), C_{2(x)}'$:

$$C_1'(x) = -2\int dx + C_1 = -2x + C_1,$$

$$C_2'(x) = 4\int \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} dx = \int \frac{d\sin 2x}{\sin 2x} + C_2 = \ln|\sin 2x| + C_2.$$

Тоді загальний розв'язок ЛНДР $y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$ перепишемо

$$y = (-2x + C_1)\cos 2x + (\ln|\sin 2x| + C_2)\sin 2x.$$

Використовуючи початкові умови $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 - 4, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, знайдемо коефіцієнти C_1, C_2. Для цього знайдемо похідну $y_{з.н}'$:

$$y' = -\cos 2x + (-2x + C_1)(-2\sin 2x) + \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}\sin 2x + (\ln|\sin 2x| + C_2)2\cos 2x$$

Тоді $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \Rightarrow -4 = C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = -4}$,

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \Rightarrow 2 = \left(C_1 - \frac{\pi}{2}\right)(-2) \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{\pi}{2} - 1}.$$

Отримаємо розв'язок задачі Коші:

$$y = \left(-2x + \frac{\pi}{2} - 1\right)\cos 2x + (\ln|\sin 2x| - 4)\sin 2x.$$

Відповідь: $y = \left(-2x + \frac{\pi}{2} - 1\right)\cos 2x + (\ln|\sin 2x| - 4)\sin 2x.$