МКР2. ”Диференціальні рівняння вищих порядків”

Питання до модульної контрольної роботи:

1. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку.
2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами.
3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Задача Коші для ЛНДР n-го порядку.
4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод Лагранжа.

ККР2. ”Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку” .

Структура кожного варіанту контрольної роботи:

1. Рівняння типу $y'' = f(x)$, $y^{(n)} = f(x)$ - 3 бали.
2. Рівняння не містять явно шуканої функції y, тобто рівняння типу $F(x, y', y'') = 0$ - 4 бали.
3. Рівняння не містить явно незалежної змінної x, тобто рівняння типу

   $F(x, y', y'') = 0$ - 5 балі.

Оцінка за контрольну роботу – 12 балів.

<u>Основні відомості:</u>

1. Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку:

a) Рівняння типу $y'' = f(x)$, $y^{(n)} = f(x)$.

   Ці рівняння розв’язуються послідовним інтегруванням

b) Рівняння типу $F(x, y', y'') = 0$.

Ці рівняння не містять явно шуканої функції y . Зробивши заміну $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$, отримаємо рівняння першого порядку відносно функції p : $F(x, p, p') = 0$.

c) Рівняння типу $F(y, y', y'') = 0$.

Рівняння цього типу не містить явно незалежної змінної x і допускає зниження порядку за одиницю, якщо покласти , а новий аргумент взяти саму шукану функцію y. Похідну другого порядку отримуємо за правилом диференціювання складної функції

$$p = p(y), \qquad y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = p\frac{dp}{dy} = pp' \;\; => \;\; \boxed{y'' = pp'}$$

Підставивши ці вирази в рівняння, отримаємо $F(y, p, pp') = 0$. Отримане рівняння є рівнянням першого порядку відносно функції

$p = p(y),\ \left(p' = \frac{dp}{dy}\right).$

ККР3. ”Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків ” – 12 балів.

Структура кожного варіанту контрольної роботи:

1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами – 3 бали.
2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Задача Коші для ЛНДР – 4 бали.
3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод Лагранжа – 5 балів.

Оцінка за контрольну роботу – 12 балів.

<u>Основні відомості:</u>

1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \,, a_i \in \mathbf{R} \,.$$

Загальний розв’язок ЛОДР шукаємо у вигляді:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$, $y_1, y_2, \cdots y_n -$ фундаментальна система розв’язків, де $y_i = e^{k_i x}$, $k_i -$ корені характеристичного рівняння

$(i = 1,2, \cdots, n)$.

2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),\ a_i \in \mathbf{R},$$

$f(x)$ - права частина спеціального вигляду:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x).$$

Загальний розв'язок ЛНДР $y = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$ =>

=> $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y_{\text{ч.н.}}$, де $y_1, y_2, \cdots y_n -$ фундаментальна система розв'язків відповідного ЛОДР. Частинний розв'язок ЛНДР ($y_{\text{ч.н.}}$) підбираємо по вигляду правої частини ЛНДР.

Задача Коші для ЛНДР n-го порядку: знайти частинний розв'язок ЛНДР, який задовольняє початковим умовам

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ y''(x_0) = y_0'', \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод Лагранжа.

ЛНДР 2-го порядку має вигляд

$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x),\ a_1, a_2 \in \mathbf{R}$, $f(x)$ - довільна права частина.

Загальний розв'язок відповідного ЛОДР $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ шукаємо у вигляді $y_{\text{з.о.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, $y_1, y_2 -$ фундаментальна система розв'язків, де $y_i = e^{k_i x}$, $k_i -$ корені характеристичного рівняння ($i = 1,2$).

Використовуємо метод Лагранжа (метод варіації довільної сталої) і загальний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$y_{\text{з.н.}} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, де $C_1(x),\ C_2(x)$ - невідомі функції, які знаходимо із системи

$(*)\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$. Система$(*)$ лінійна відносно невідомих функцій $C_1'(x), C_{2(x)}'$, розв'яжемо її методом Крамера: $C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, де

$\Delta = w(y_1, y_2) = w(x)$ визначник Вронського

$$\Delta = w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = -y_2 f(x)$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = y_1 f(x)$. Тоді за формулами Крамера

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} \ ; \ C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} \ =>$$

$$=> C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx + C_1 \ ; \quad C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx + C_2 \ .$$

Загальний розв'язок ЛНДР 2-го порядку запишемо у вигляді

$$y = \left(-\int \frac{y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx + C_1\right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx + C_2\right) y_2 =>$$

$$=> \boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx},$$

де $y_{\text{ч.н.}} = -y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx$ – частинний розв'язок ЛНДР, а $y_{\text{з.о.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ - загальний розв'язок відповідного ЛОДР.