ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Задача про площу криволінійної трапеції

Означення, властивості визначеного інтеграла

Означення. Криволінійною трапецією називається плоска фігура, яка обмежена неперервною кривою $y = f(x)$, прямими $x = a, x = b$ і віссю Ох. Функція $y = f(x)$ є невід'ємною на відрізку [a, b].

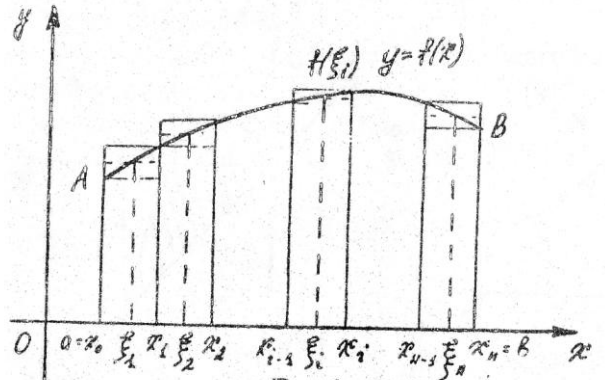

Рис.1

Щоб обчислити площу цієї фігури (рис.1), розділимо довільно відрізок [a, b] точками $a = x_0, x_1, ..., x_n = b, x_0 < x_1 < ... < x_n$ на n частинних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ довжиною $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,...., n$. У кожному з частинних відрізків довільно виберемо точку $\xi_i (x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$. Обчислимо значення функції $y = f(x)$ в цій точці, тобто $f(\xi_i)$.

Тоді площа криволінійної трапеції наближено дорівнює

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Сума $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$ називається інтегральною сумою, складеною для функції $f(x)$ при даному розбитті відрізка [a,b] і при даному виборі точок $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Якщо найбільше з Δx_i, прямує до нуля, то сума S_n прямує до числа, яке дорівнює площі криволінійної трапеції, тобто

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Означення. Границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$ при $\max \Delta x_i \to 0$ називається визначеним інтегралом від неперервної функції $f(x)$ на відрізку [a,b] і позначається

$\int_a^b f(x)dx,$ тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} f(\xi_i) \Delta x_i .$$

Тут: $f(x)$ - підінтегральна функція;

$f(x)dx$ - підінтегральний вираз;

a - нижня границя інтегрування;

b - верхня границя інтегрування.

Функція, для якої існує $\int_a^b f(x)dx,$ називається інтегрованою функцією на відрізку [a, b].

Отже,задача обчислення площі криволінійної трапеції приводить до поняття визначеного інтеграла, а для обчислення цієї площі маємо формулу

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Властивості визначеного інтеграла

1. Якщо $f(x)\equiv 0$ для $x\in[a,b]$, то

   $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b 0\cdot dx=0$$

2. Якщо $f(x)\equiv 1$ для $x\in[a,b]$, то

   $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b 1\cdot dx=b-a$$

3. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла

   $$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx, c--const$$

4. Якщо – інтегровані функції на відрізку [a, b], то на цьому відрізку інтегровані також функції , причому

   $$\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

5. Із властивостей 3-4 випливає властивість лінійності визначеного інтеграла

   $$\int_a^b (Af(x)+Bg(x))dx=A\int_a^b f(x)dx+B\int_a^b g(x)dx$$

6. Якщо $a\le c\le b$, то

   $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

7. Якщо $a<b$ і функція $f(x)$ - інтегрована на відрізку [*a, b*], причому $f(x)\ge 0$ для $x\in[a,b]$, то

   $$\int_a^b f(x)dx\ge 0$$

8. Якщо $a<b$, $f(x)\le g(x)$ для $x\in[a,b]$, функції $f(x)$, $g(x)$ - інтегровані на відрізку [*a, b*], то

   $$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$$

9. Якщо $a<b$, функції $f(x)$ - інтегрована на відрізку [*a, b*], то на цьому відрізку інтегрована і функція $|f(x)|$, причому

   $$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx$$

   Властивості 7-9 називають теоремами про інтегрування нерівностей

10. Якщо функції $f(x)$ - інтегрована на відрізку [*a, b*], то

    $$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

    Доведення властивостей 1-9 зводиться до запису аналогічних властивостей для інтегральних сум і подальшого граничного переходу при $\max\Delta x_i\to 0$

11. Оцінка визначеного інтеграла.

    Якщо $a<b$, функції $f(x)$ - неперервна на відрізку [*a, b*], *m* і *M* – найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку [*a, b*] ,то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

12. Теорема про середнє значення

Якщо функції $f(x)$ - неперервна на відрізку $[a, b]$, то існує така точка $c \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Обчислення визначеного інтеграла. Формула Ньютона – Лейбніца.

Означення. Функція $I(x) = \int_a^z f(t)dt$ називається інтегралом із змінною верхньою межею інтегрування.

Теорема 1

Похідна від інтегралу по його верхній межі дорівнює підінтегральній функції

$$I'(x) = (\int_a^z f(t)dt)' = f(x)$$

Тобто інтеграл із змінною верхньою межею є первісною для підінтегральної функції.

Теорема 2

Якщо F(x) є якою-небудь первісною для неперервної функції f(x), то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ця формула називається формулою Ньютона-Лейбніца і використовується для обчислення визначених інтегралів.

Приклад 1

$$\int_0^1 (e^x - 1)dx = (e^x - x)\Big|_0^1 = (e^1 - 1) - (e^0 - 0) = e - 2$$

Приклад 2

$$\int_1^2 (x^2 + 2x - 1)dx = (\frac{x^3}{3} + x^2 - x)\Bigg|_{=1}^2 = (\frac{2^3}{3} + 2^2 - 2) - (\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 - (-1)) = \frac{8}{3} + 4 - 2 - (-\frac{1}{3} + 1 + 1) =$$

$$= \frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{3} + 2 = \frac{9}{3} + 4 = 3 + 4 = 7$$

Приклад 3

$$\int_0^{\ln 2} e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int_0^{\ln 2} e^{3x+1}d(3x+1) = \frac{1}{3}e^{3x+1}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{3}(e^{3\ln 2+1} - e) = \frac{1}{3}(e^{3\ln 2} \cdot e - e) = \frac{e}{3}(e^{\ln 8} - 1) =$$

$$= \frac{e}{3}(8-1) = \frac{7}{3}e$$

Приклад 4

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x 2\sin x \cos x dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x d(\cos x) = -2\frac{\cos^7 x}{7}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{2}{7}(\cos^7 \frac{\pi}{2} - \cos^7 0) = -\frac{2}{7}(0-1) = \frac{2}{7}$$

Основні методи інтегрування визначеного інтеграла

I. Заміна змінної для визначеного інтеграла

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і функція $x = \varphi(t)$ неперервна зі своєю похідною першого порядку на відрізку $[\alpha, \beta]$, причому
$a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) \le \varphi(\beta) = b, \alpha \le t \le \beta$

Тоді справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta (\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

При обчисленні визначеного інтеграла за цією формулою не потрібно повертатись до старої змінної.

Приклад 1

Обчислити інтеграл

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$$

Введемо нову змінну $t = \sqrt{1+x}$, тоді $t^2 = 1 + x, x = t^2 - 1,\ dx = 2tdt,$
$t_1 = \sqrt{1+3} = 2, t_2 = \sqrt{1+8} = 3$. Отже, маємо

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)dt = 2(\frac{t^3}{3} - t)\Big|_2^3 = 2((\frac{3^3}{3} - 3) - (\frac{2^3}{3} - 2)) =$$

$$= 2(9 - 3 - \frac{8}{3} + 2) = \frac{32}{3}$$

Приклад 2

Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Введемо нову змінну $x = \sin t$, тобто $t = \arcsin x$, тоді $dx = \cos tdt, t_1 = \arcsin 0 = 0$,

$t_2 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Отже, маємо

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t\cos tdt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 tdt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2tdt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2tdt = \frac{1}{2}(t - \frac{\sin 2t}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6} - \frac{\sin 2\frac{\pi}{6}}{2} - 0 + \sin 0) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{6} - \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2}) =$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Приклад 3

Обчислити інтеграл

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$$

Введемо нову змінну $t = \frac{1}{x}$, тоді $x = \frac{1}{t}, dx = -\frac{dt}{t^2},\ t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, t_2 = \frac{1}{2}$

Отже, маємо

$$\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{-dt}{t^2\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

ІІ. Інтегрування частинами визначеного інтеграла

Теорема. Якщо функції *u(x)* і *v(x)* неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[a, b]$, то має місце формула

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Приклад 1

Обчислити інтеграл

$$\int_a^{e-1}\ln(x+1)dx$$

Виберемо $u = \ln(x+1)$, $dv = dx$, тоді $du = \frac{dx}{x+1}$, $v = x$ Отже, маємо

$$\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx = x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1}\frac{xdx}{x+1} = (e-1)\ln(e-1+1) - 0 - \int_0^{e-1}(1-\frac{1}{x+1})dx =$$

$$(e-1)\ln e - (x - \ln(x+1))\Big|_0^{e-1} = e-1-(e-1-\ln(e-1+1)-0) = e-1-e+1+1 = 1$$

Приклад 2

Обчислити інтеграл

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\sin^2 x}$$

Виберемо $u = x$, $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$, тоді $du = dx$, $v = -ctgx$. Отже, маємо

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\sin^2 x} = -xctgx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctgxdx = -(\frac{\pi}{3}ctg\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}ctg\frac{\pi}{4}) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos xdx}{\sin x} =$$

$$= -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{4} + \ln\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{4} + \ln\sin\frac{\pi}{3} - \ln\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

Приклад 3

Обчислити інтеграл

$$\int_1^8 \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}dx$$

Введемо нову змінну $t=\sqrt[3]{x}$,тоді $x=t^3$, $dx=3t^2dt$, $t_1=\sqrt[3]{1}=1$, $t_2=\sqrt[3]{8}=2$.
Отже, маємо

$$\int_1^8 \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}dx=\int_1^2 \frac{e^t}{t}3t^2dt=3\int_1^2 te^t dt$$

Далі виберемо $u=t$, $dv=e^t dt$, тоді $du=dt$, $v=e^t$. Отже,

$$3\int_1^2 te^t dt=3te^t\Big|_1^2-3\int_1^2 e^t dt=3(2e^2-e)-3e^t\Big|_1^2=6e^2-3e-3(e^2-e)=3e^2$$

Застосування визначеного інтеграла

1. Обчислення площі плоских фігур

Площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)(f(x)\geq 0)$, вертикальними прямими $x=a, x=b$ *і* відрізком $[a, b]$ осі Ox (рис.2) обмислюється за формулою

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

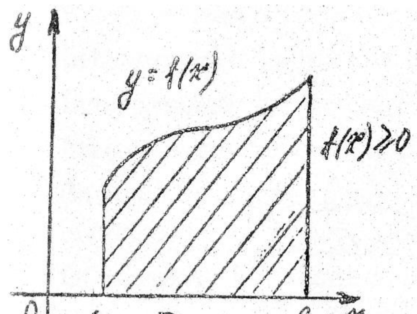

Рис.2

Якщо в інтегралі підінтегральна функція $f(x)\leq 0$ (рис.3), то площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою

$$S=-\int_a^b f(x)dx$$

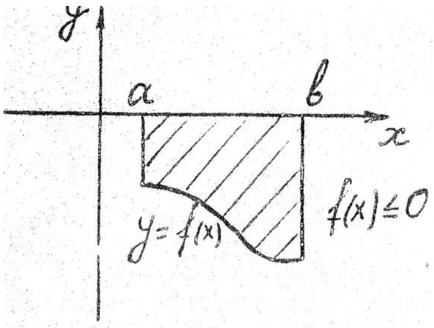

Рис.3

Якщо криволінійна трапеція обмежена зверху і знизу неперервними на відрізку $[a, b]$ кривими $y=f_2(x)$, $y=f_1(x)$, $f_1(x>f_2(x))$ і прямими $x=a, x=b$ (рис.4), то площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою

$$S=\int_a^b (f_1(x)dx-f_2(x))dx$$

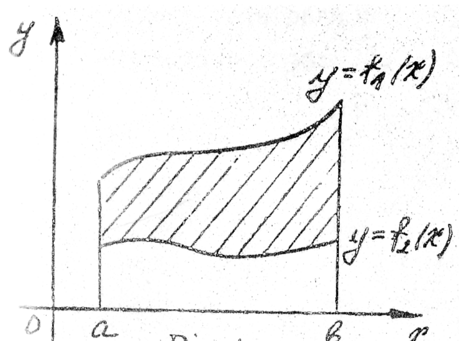

Рис.4

Якщо функція $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ міняє знак, наприклад, у точках $x = c, x = d$ (рис.5), то площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою

$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

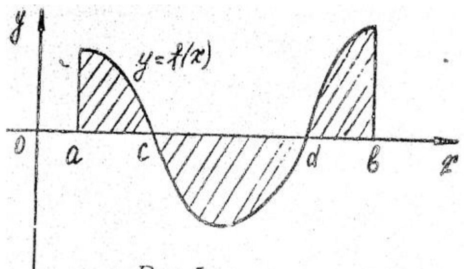

Рис.5

Якщо крива $y = f(x)$ на $[a, b]$ задана параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t)$, причому $a = x(t_1), b = x(t_2), dx = x'(t)dt, t_1 \le t \le t_2$, тоді площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

В полярній системі координат площу криволінійного сектора, обмеженого кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ (рис.6) можна обчислити за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi$$

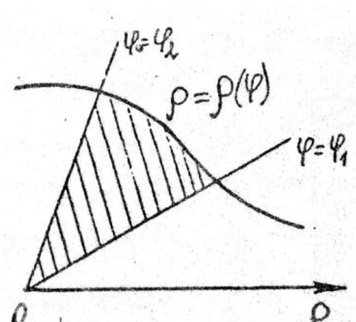

Рис.6

Приклад 1

Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = 2x - x^2, x + y = 0$ (рис.7).

Знайдемо точки перетину параболи і прямої

$y = 2x - x^2, y = -x : 2x - x^2 = -x, 3x - x^2 = 0, x(x-3) = 0, x_1 = 0, x_2 = 3.$

Звідси

$$S=\int_0^3(2x-x^2+x)dx=(\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_0^3=\frac{27}{6}$$

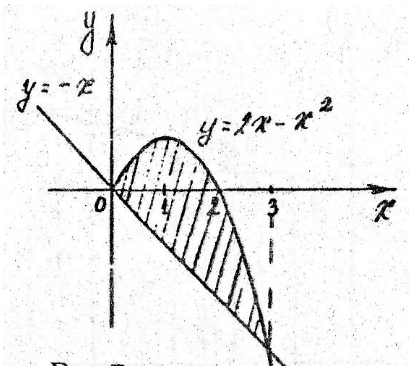

Рис.7

Приклад 2

Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y=|\lg x|$ і прямим $y=0, x=0{,}1; x=10$ (рис.8)

Так як $\lg x\le 0, x\in[0{,}1;1]$ і $\lg x\ge 0, x\in[1;10]$, то

$$S=\int_{0,1}^{10}|\lg x|dx=\int_{0,1}^{1}-\lg xdx+\int_1^{10}\lg xdx=\int_1^{0,1}\lg xdx+\int_1^{10}\lg xdx$$

Обчислимо інтеграл $\int\lg xdx$. Інтегруючи частинами, виберемо $u=\lg x$, $dv=dx$

Тоді $du=\frac{dx}{x\ln 10}, v=x$. Отже,

$$\int\lg xdx=x\lg x-\int x\cdot\frac{dx}{x\ln 10}=x\lg x-x\lg e$$

Тоді $S=(x\lg x-x\lg e)\Big|_1^{0,1}+(x\lg x-x\lg e)\Big|_1^{10}=0{,}1\lg 0{,}1-0{,}1\lg e-\lg 1+\lg e+$
$+10\lg 10-10\lg e-\lg 1+\lg e=-0{,}1+10-8{,}1\lg e=9{,}9-8{,}1\lg e.$

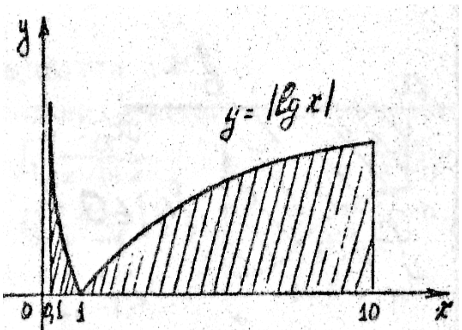

Рис.8

Приклад 3

Знайти площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), a>0$ і віссю Ox (рис,9).

Знайдемо точки перетину циклоїди із віссю Ox. Якщо $y=0$, то $\cos t=1, t_1=0, t_2=2\pi$ (для однієї арки), $x(0)=0, x(2\pi)=2\pi a$. Тоді

$$S=\int_0^{2\pi}y(t)x'(t)dt=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=$$

$$=a^2(t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi}+\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt=2\pi a^2+\frac{a^2}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi}=2\pi a^2+\pi a^2=3\pi a^2$$

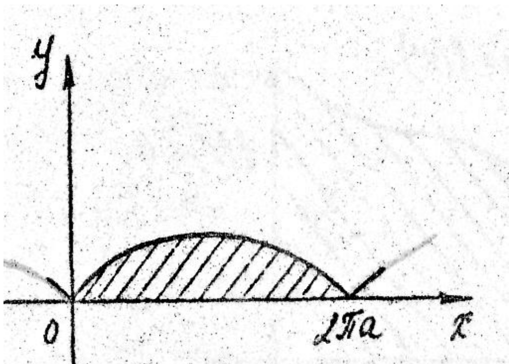

Рис.9

Приклад 4

Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho^2+\varphi^2=1$.

Із умови $\rho^2=1-\varphi^2$ отримаємо $1-\varphi^2\ge 0, \varphi^2-1\le 0, (\varphi-1)(\varphi+1)\le 0, -1\le\varphi\le 1$. Обчислимо площу

$$S=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\rho^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-\varphi^2)d\varphi=\frac{1}{2}(\varphi-\frac{\varphi^3}{3})\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$$

2. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Якщо плоска крива $y=f(x)$ на відрізку $[a, b]$ є гладкою, тобто похідна $y'=f'(x)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$, то довжину дуги цієї кривої знаходимо за формулою

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$$

Якщо плоска крива задача параметричними рівняннями $x=x(t), y=y(t)$, де $x(t), y(t)$ - неперервно диференційовані функції $t_1\le t\le t_2$, то довжина дуги кривої обчислюється за формулою

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

Якщо гладка крива задана у полярних координатах рівнянням $\rho=\rho(\varphi)^2, \alpha\le\varphi\le\beta$, то довжина кривої обчислюється за формулою

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}d\varphi$$

Приклад 1

Обчислити довжину дуги кривої $y=\frac{e^x}{4}+e^{-x}, 0\le x\le\ln 2$

$$l=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+(y'(x))^2}dx=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+(\frac{e^x}{4}-e^{-x})^2}dx=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+(\frac{e^x}{4}-\frac{1}{e^x})^2}dx=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\frac{e^{2x}}{16}-2\frac{e^x}{4}\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}}dx=$$

$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{e^{2x}}{16}+\frac{1}{e^{2x}}}dx=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\frac{8e^{2x}+e^{4x}+16}{16e^{2x}}}dx=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\frac{(e^{2x}+4)^2}{4e^x}}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}+4}{4e^x}dx=$$

$$=\int_0^{\ln 2}(\frac{e^x}{4}+e^{-x})dx=(\frac{e^x}{4}-e^{-x})\Big|_0^{\ln 2}=\frac{e^{\ln 2}}{4}-e^{-\ln 2}-\frac{e^0}{4}-e^0=\frac{1}{4}\cdot 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$$

Приклад 2

Знайти довжину дути кривої $\rho = a\varphi, 0 \le \varphi \le 2\pi, a \ge 0$ (виток спіралі Архімеда). Крива задана в полярній системі координат, отже

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1})\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{a}{2}\left(2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1})\right)$$

3. Обчислення об'ємів тіл

1) Об'єм тіла з відомим поперечним перерізом

Якщо об'єм тіла V існує і $S = S(x)$, $(a \le x \le b)$ - площа перерізу тіла площиною, перпендикулярного до осі Ox, то об'єм тіла обчислюється за формулою

$$V_x = \int_a^b S(x)dx$$

2) Об'єм тіла обертання

Якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою $y = f(x) f(f(x) \ge 0)$ і прямими $y = 0, x=a\ \ x=b$, обертається довкола осі Ox, то об'єм тіла обертання знаходимо за формулою

$$V_x = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx = \pi\int_a^b y^2(x)dx$$

Якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою $x = \varphi(y)$ прямими $x=0, y=c$, $y=d$, обертається довкола осі Oy то об'єм тіла обертання знаходимо за формулою

$$V_y = \pi\int_c^d x^2(y)dy$$

або

$$V_y = 2\pi\int_a^b xy(x)dx$$

або

$$V_y = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)x'(t)dt$$

Якщо фігура, обмежена кривими $y = f_1(x), y = f_2(x), 0 \le f_1(x) \le f_2(x))$, і прямими $x=a$ $x=b$, обертається навколо осі Ox, то об'єм тіла обертання дорівнює

$$V_x = \pi\int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx$$

Об'єм тіла одержанного при обертанні криволінійного сектора $\rho = \rho(\varphi), \varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ навколо полярної осі (або променя $\varphi = \frac{\pi}{2}$) обчислюється за формуло.