

## Диференціальне числення.

1. Провести повне дослідження функції та побудувати її графіка:

1)  $y = 16x^3 + 12x^2 - 5$ ,

2)  $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$ ,

3)  $y = \frac{x^3 - 4}{x^2}$ ,

4)  $y = (4 - x)e^{x-3}$ ,

5)  $y = x^3 e^{-x}$ ,

6)  $y = \frac{x^2 + 4}{x - 1}$ ,

7)  $y = x^2 \ln x$ .

2. Знайти найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку:

a)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ;

b)  $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}$ ,  $1 \leq x \leq 4$ ;

c)  $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$ ,  $1 \leq x \leq 5$ .

3. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої  $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$  в точці

$x_0 = 4$ .

4. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої

$x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $t_0 = \frac{\pi}{3}$ .

5. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої

$x = 2t - t^2$ ,  $y = 3t - t^3$ ,  $t_0 = 1$ .

6. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої

$x = \ln(1 + t^2)$ ,  $y = t - \operatorname{arctg} t$ ,  $t_0 = 1$ .

Дослідити функцію на неперервність схематично зобразити на рисунку:

1)  $y = \frac{1}{5x-3}$ ; 2)  $y = \frac{1}{1 + 3\frac{1}{x}}$ ; 3)  $y = \frac{\frac{1}{4x} - 1}{\frac{1}{4x} + 1}$ ; 4)  $y = \frac{x+3}{3x-2}$ ;

5)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x}$ ; 6)  $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x+4}$ ; 7)  $y = 2^{\frac{1}{3-x}}$ ; 8)  $y = 3^{-\frac{1}{x^2}}$ .

Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{8 - 2x} - 2}{x^2 + x - 6};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 2n + 4} - \sqrt{n^2 + 11n - 5} \right);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{\operatorname{tg}^2 5x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 8}{x + 5} \right)^{\frac{x+2}{7}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x^2)}{\operatorname{arctg} 5x^2};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 5 - \frac{4}{\cos x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \ln(1 + \sqrt[3]{x}) \right)^{\frac{x}{\sin^4 \sqrt[3]{x}}};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 3x)^{\frac{1}{\ln \cos x}};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}.$$

Обчислити границі за правилом Лопіталя :

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x^2 + 2x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^3 - 5x}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \sin 7x}{\ln \sin 4x}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x^2 + 4}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x.$$

Знайти похідні функцій:

$$1) y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad 2) y = 10^{x^2 \operatorname{tg} x};$$

$$3) y = x\sqrt{1 + x^2} \sin 3x; \quad 4) y = \arcsin \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}};$$

$$5) y = (\operatorname{arctg} x)^{x^2 + 1}; \quad 6) y^2 + xy - 3e^y = 0;$$

$$7) x = 4\cos^3 t; \quad y = 4\sin^3 t, \text{ знайти } \frac{dy}{dx}; \frac{d^2y}{d^2x};$$

$$8) x = \ln t, \quad y = \operatorname{arctg} t, \text{ знайти } \frac{dy}{dx}; \frac{d^2y}{d^2x};$$

$$9) x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3, \text{ знайти } \frac{dy}{dx}; \frac{d^2y}{d^2x}.$$

Знайти похідні вищих порядків:

$$a) y = (2x^2 - 7)\ln(x - 1), \quad y^{(5)} = ?$$

$$b) y = (3 - x^2)\ln^2 x, \quad y''' = ?$$

$$c) y = \frac{1}{x} \sin 2x, \quad y''' = ?$$

$$d) y = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x, \quad y^{(4)} = ?$$

$$e) y = x \cos x^2, \quad y''' = ?$$