Зразок дослідження кривих другого порядку

Приклад 27. Визначити типи кривих другого порядку, знайти основні характеристики кривих та побудувати їхні графіки

a) $x^2+y^2-2x+4y-11=0$; c) $x^2-4y^2-8y=0$;

b) $9x^2+4y^2-36x-4y+1=0$; d) $y^2+4y+3x-5=0$.

Розв'язування. Зведемо загальні рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду.

Канонічне рівняння кола має вигляд $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, де $(x_0;y_0)$– координати центра кола, а R– радіус.

Канонічне рівняння еліпса має вигляд $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$,

де a, b– півосі еліпса, параметри a,b і c ($2c$– відстань між фокусами) зв'язані співвідношенням: при $a>b$ маємо $c^2=a^2-b^2$ при цьому фокуси лежать на більшій вісі еліпса паралельній осі $0X$, при $b>a$ відповідно $c^2=b^2-a^2$ фокуси лежать на вісі паралельній осі $0Y$, $(x_0;y_0)$– координати центра симетрії еліпса.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$,

де $b^2=c^2-a^2$, фокуси гіперболи лежать на дійсній вісі гіперболи, у даному випадку на прямій $y=y_0$, паралельній $0X$.

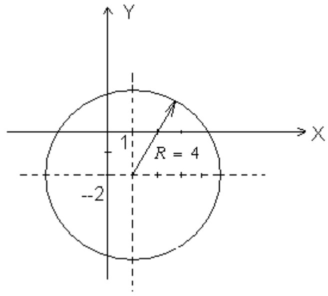
Рівняння параболи має вигляд $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$, де $(x_0;y_0)$– координати вершини параболи, p– фокальний параметр. Ця парабола розташована симетрично відносно прямої $y=y_0$, вісь параболи паралельна вісі $0X$. Рівняння $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$ задає параболу з вершиною в точці $(x_0;y_0)$ симетричну відносно прямої $x=x_0$ (вісь параболи паралельна вісі $0Y$).

Для того, щоб від загального рівняння кривої другого порядку перейти до канонічного, досить у лівій частині виділити повні квадрати по змінним x та y.

a) Розглянемо криву $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$.

Тоді $(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 11 = 0$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16.$$



Отримали канонічне рівняння кола радіуса $R = 4$, центр якого – точка $C(1;-2)$

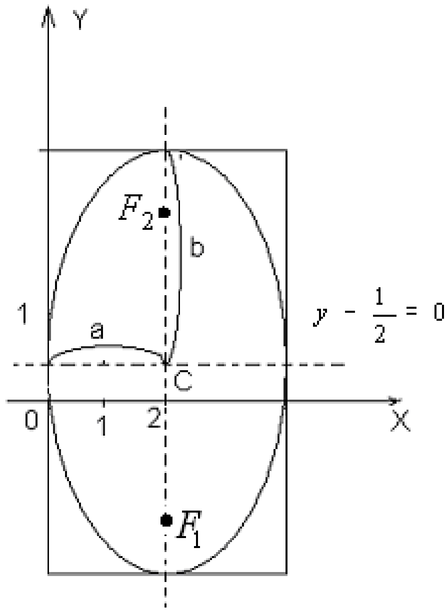
b) Розглянемо криву $9x^2 + 4y^2 - 36x - 4y + 1 = 0$. Тоді

$$9(x^2 - 4x + 4 - 4) + 4(y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + 1 = 0,$$

$$9(x-2)^2 + 4(y - \frac{1}{2})^2 = 36.$$

Поділивши рівняння на 36, отримаємо канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{9} = 1,$$

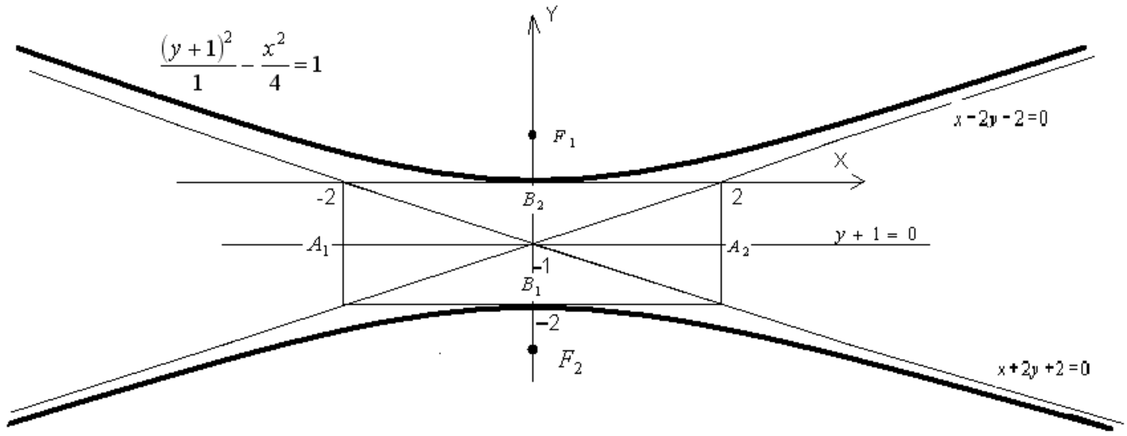


де $a^2 = 4$, $b^2 = 9$ $(a = 2,\ b = 3)$, $b-$ більша вісь еліпса, яка лежить на прямій $x - 2 = 0$, центр еліпса – точка $C\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

Фокуси знаходяться на більшій вісі еліпса, тобто на прямій $x - 2 = 0$, координати фокусів: $F_1\left(2; \frac{1}{2} - c\right)$, $F_2\left(2; \frac{1}{2} + c\right)$, $2c-$ відстань між фокусами F_1F_2 (фокальна відстань).

Параметри еліпса a, b, c зв'язані співвідношенням $c^2 = b^2 - a^2$, тобто $c^2 = 9 - 4 = 5$, маємо $c = \sqrt{5}$. Запишемо координати фокусів еліпса $F_1\left(2; \frac{1}{2} - \sqrt{5}\right)$, $F_2\left(2; \frac{1}{2} + \sqrt{5}\right)$. Знайдемо ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$. Геометрично ексцентриситет виражає міру стискання еліпса.

c) Розглянемо криву $x^2 - 4y^2 - 8y = 0$. Тоді $x^2 - 4(y^2 + 2y + 1 - 1) = 0$, $x^2 - 4(y+1)^2 = -4$. Канонічне рівняння гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{1} = -1$, або $\frac{(y+1)^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$, де $a^2 = 4$, $b^2 = 1$ ($a = 2$, $b = 1$).



Гіпербола складається з двох гілок, розташованих симетрично відносно центру $C(0;-1)$ і прямих $x = 0$ (вісь $0Y$) і $y + 1 = 0$ (вісі гіперболи). Дійсна вісь гіперболи – вісь $0Y$, точки $B_1(0;-2)$ і $B_2(0;0)$– вершини гіперболи, $B_1B_2 = 2b = 2$. Уявна вісь гіперболи – пряма $y + 1 = 0$, $A_1A_2 = 2a = 4$. Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких $x - 2y - 2 = 0$(пряма проходить через точки $(0;-1)$ і $(2;0)$) і

$x+2y+2=0$ (пряма проходить через точки $(0;-1)$ і $(-2;0)$). Фокуси гіперболи розташовані на дійсній вісі $F_1(0;-1-c)$ і $F_2(0;-1+c)$, де $2c$ – відстань між фокусами F_1F_2. Параметри гіперболи a,b,c зв'язані співвідношенням $c^2=a^2+b^2$. Тобто $c^2=1+4=5$, маємо $c=\sqrt{5}$. Отже, координати фокусів гіперболи $F_1\left(0;-1-\sqrt{5}\right)$, $F_2\left(0;-1+\sqrt{5}\right)$. Знайдемо ексцентриситет гіперболи $\varepsilon=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}>1$.

d) Розглянемо криву $y^2+4y+3x-5=0$.

Тоді $(y^2+4y+4)-4+3x-5=0$, $(y+2)^2=-3x+9$, $(y+2)^2=-3(x-3)$. Отримали канонічне рівняння параболи. Вершина параболи – точка $C(3;-2)$; $2p=-3$; $p=\dfrac{-3}{2}$ – фокальний параметр ($\dfrac{p}{2}$ – відстань від фокуса параболи до вершини). Рівняння директриси $x=-\dfrac{p}{2}+x_0$ параболи $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$, тому директриса нашої параболи має рівняння $x=\dfrac{3}{4}+3$, $x=\dfrac{15}{4}$ або $4x-15=0$. Ця парабола розташована симетрично відносно прямої $y+2=0$ (вісь параболи). Парабола перетинає вісь OY в точках $y_1=1$ і $y_2=-5$ при $x=0$; вісь OX – в точці $x=\dfrac{5}{3}$ при $y=0$. Фокус знаходиться на вісі параболи, тобто на прямій $y+2=0$, таким чином, координати фокуса – $F\left(3+\dfrac{p}{2};-2\right)$. Тоді $\dfrac{p}{2}=-\dfrac{3}{4}$ і $F=\left(3-\dfrac{3}{4};-2\right)$, отримуємо $F\left(\dfrac{9}{4};-2\right)$.