Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут»

Вища математика

Застосування визначеного інтеграла

Методичні вказівки та завдання

до виконання розрахункової роботи

для студентів хіміко-технологічного факультету

денної форми навчання напрямів підготовки

6.051301 – «Хімічна технологія»,

6.050202 – "Автоматизація та

комп'ютерно-інтегровані технології"

Рекомендовано Вченою радою

Фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»

Київ

НТУУ «КПІ»

2014

Вища математика. Застосування визначеного інтеграла: методичні вказівки та завдання до виконання розрахункової роботи для студентів хіміко-технологічного факультету денної форми навчання / Укладачі: О.Б.Качаєнко, О.О. Коваль, О.Б. Поліщук, В.І. Стогній. – К.:НТУУ «КПІ»,2014. – 44 с.

Вища математика

Застосування визначеного інтеграла

Методичні вказівки та завдання

до виконання розрахункової роботи

для студентів хіміко-технологічного факультету

денної форми навчання напрямів підготовки

6.051301 – «Хімічна технологія»,

6.050202 – "Автоматизація та

комп'ютерно-інтегровані технології"

Укладачі: Качаєнко О.Б., Коваль О.О., Поліщук О.Б., Стогній В.І.

Відповідальний

редактор С.Д. Івасишен, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент Н.О. Вірченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.

1. ВСТУП

Самостійна робота студентів є визначальною для засвоєння апарату вищої математики. Одним з елементів самостійної роботи є виконання індивідуальних типових розрахунків, основна мета яких - навчити студентів застосовувати набуті знання для самостійного розв'язання запропонованих задач і вміти користуватися додатковою літературою.

Вивчення студентами першого курсу хіміко-технологічного факультету першого розділу кредитного модуля «Інтегральне числення та диференціальні рівняння» завершується виконанням розрахункової роботи «Застосування визначеного інтеграла».

Методичні вказівки містять теоретичні питання до розділу, розрахункову частину – завдання та приклади розв'язання типових задач, у додатках наведено рівняння та графічні зображення основних поверхонь другого порядку, відомості про полярну систему координат, а також основні формули, необхідні для розв'язання задач розрахункової роботи.

Теоретичні питання складені відповідно до навчальної програми кредитного модуля «Інтегральне числення та диференціальні рівняння» і є загальними для всіх студентів. Задачі - індивідуальні для кожного студента групи, подані у вигляді 25 варіантів (номер варіанта відповідає номеру прізвища студента у списку групи). Кожний варіант містить задачі на геометричне застосування визначених інтегралів (обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги кривої, об'єму просторового тіла) і дослідження на збіжність невласних інтегралів.

Для виконання розрахункової роботи доцільно повторити відповідний теоретичний матеріал, використовуючи конспект лекцій та наведену наприкінці методичних вказівок науково-методичну літературу.

2. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ДО ТЕМИ «ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ» РОЗДІЛУ «ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ»

1. Поняття визначеного інтеграла.
2. Основні властивості визначеного інтеграла.
3. Теорема про оцінку визначеного інтеграла.
4. Теорема про середнє значення функції на відрізку.
5. Теорема про похідну від інтеграла зі змінною верхньою межею.
6. Формула Ньютона ─ Лейбніца.
7. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі.
8. Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
9. Властивість інтеграла від парної (непарної) функції.
10. Рекурентна формула для обчислення інтегралів $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$
11. Невласні інтеграли першого роду.
12. Невласні інтеграли другого роду.
13. Обчислення площ плоских фігур, обмежених лініями, заданими рівняннями у декартових координатах.
14. Обчислення площ плоских фігур, обмежених лініями, заданими параметричними рівняннями.
15. Обчислення площ плоских фігур, обмежених лініями, заданими рівняннями в полярній системі координат.
16. Обчислення об’єму тіла за площами паралельних перерізів.
17. Обчислення об’єму тіла обертання.
18. Обчислення довжини дуги лінії, заданої рівнянням у декартових координатах.
19. Обчислення довжини дуги лінії, заданої параметричними рівняннями.
20. Обчислення довжини дуги лінії, заданої в полярній системі координат.
21. Фізичне застосування визначеного інтеграла.

3. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайти площу фігури , обмеженої кривими $x = 2 - y^2$ і $y = -x$.

Розв'язування. Відомо, що площу плоскої фігури, обмеженої неперервними кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, $f_2(x) \geq f_1(x)$ та прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 1) обчислюють за формулою

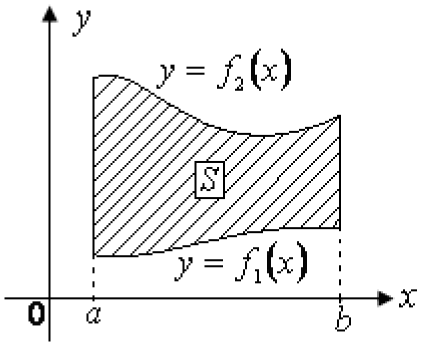
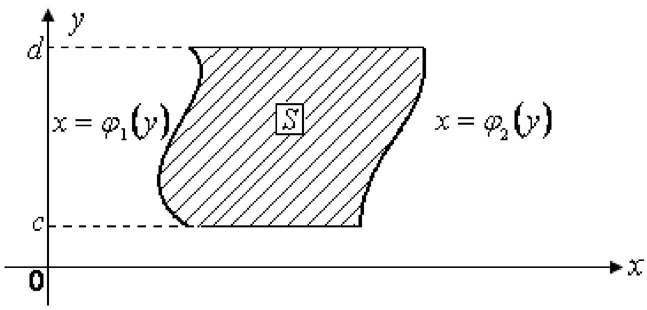


Рис. 1.

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx, \tag{3.1}$$

або за формулою



$$S = \int_c^d \left(\varphi_2(y) - \varphi_1(y) \right) dy, \tag{3.2}$$

Рис. 2.

якщо ця фігура обмежена неперервними кривими $x = \varphi_1(y)$ і $x = \varphi_2(y)$ і прямими $y = c,\ y = d$ (рис. 2).

Зобразимо плоску фігуру, обмежену параболою $x = 2 - y^2$ і прямою $y = -x$ (рис. 3).

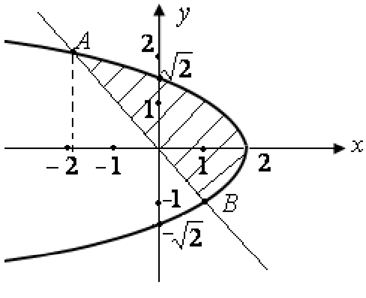


Рис. 3.

Згідно з рис. 3, доцільно використовувати формулу (3.2).

Для визначення меж інтегрування розв'яжемо систему $\begin{cases} x = 2 - y^2; \\ y = -x, \end{cases}$

звідки $x_1 = -2,\ x_2 = 1;\ y_1 = 2,\ y_2 = -1.$

Отже , парабола $x = 2 - y^2$ і пряма $y = -x$ перетинаються в точках $A(-2;2)$ і $B(1;1)$, що визначають межі інтегрування $c = -1$ і $d = 2$, звідки

$$S = \int_{-1}^{2} \left(2 - y^2 - (-y)\right) dx = \int_{-1}^{2} (2 - y^2 + y)dy = \left(2y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4 - \frac{8}{3} + 2 - (-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{9}{2}.$$

Задача 2. Обчислити площу фігури
$D = \{(x, y): x,\ y \in R,\ x^2 + y^2 \geq 2y,\ x^2 + y^2 \leq 4y,\ -x\sqrt{3} \leq y \leq x\}.$

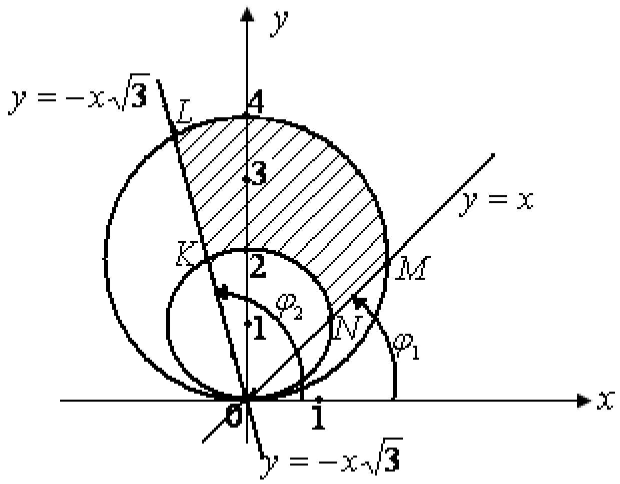


Рис.4.

Розв'язування. Зобразимо область D (рис.4), наперед проаналізувавши криві, якими вона обмежена.

Виділяючи повні квадрати, отримаємо рівняння зміщених кіл:

$x^2 + y^2 - 2y = 0 \iff x^2 + (y-1)^2 = 1,$ де $O_1(0;1), R_1 = 1;$

$x^2 + y^2 - 4y = 0 \iff x^2 + (y-2)^2 = 4,$ де $O_2(0;2), R_1 = 2,$

а прямі $y = x$ і $y = -x\sqrt{3}$, що проходять через початок координат, з відповідними кутовими коефіцієнтами: $k_1 = 1, k_2 = -\sqrt{3}.$

У результаті отримуємо фігуру *KLMN*, площу якої зручно обчислювати в полярних координатах.

Відомо, що площу узагальненого криволінійного сектора (рис.5) у полярній системі координат обчислюють за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\varphi_2} \left(\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)\right) d\varphi. \qquad (3.3)$$

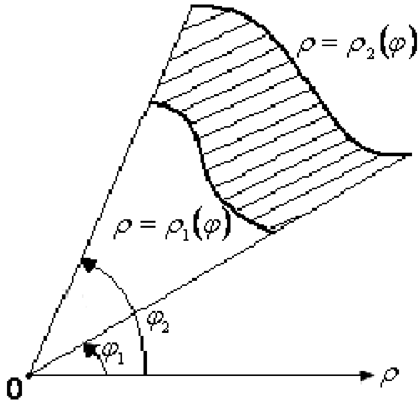


Рис.5.

У рівняннях кривих, що обмежують фігуру *KLMN*, перейдемо до полярних координат за формулами $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,$ звідки відповідно маємо $\rho_1 = 2\sin\varphi$ і $\rho_2 = 4\sin\varphi.$ Межі інтегрування за змінною φ знаходимо з рівнянь прямих:

$$y = x \ \Rightarrow\ k_1 = tg\varphi_1 = 1 \ \Rightarrow\ \varphi_1 = \frac{\pi}{4};$$

$$y = -x\sqrt{3} \ \Rightarrow\ k_2 = tg\varphi_2 = -\sqrt{3} \Rightarrow\ \varphi_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

тобто,

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}.$$

Тоді для площі фігури *KLMN* за формулою (3.3) маємо

$$S = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(16\sin^2\varphi - 4\sin^2\varphi\right)d\varphi = 6\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin^2\varphi d\varphi = 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(1-\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= 3\left(\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\right) = 3\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1\right)\right) =$$

$$= \frac{5\pi}{4} + \frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2} = \frac{5\pi + 3\sqrt{3} + 6}{4}.$$

Задача 3. Обчислити довжину дуги петлі кривої $\begin{cases} x = t^2; \\ y = t - \dfrac{t^3}{3}. \end{cases}$

Розв'язування. Оскільки криву задано параметричними рівняннями, щоб знайти довжину дуги використаємо формулу

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt. \tag{3.4}$$

Побудуємо криву, попередньо аналізуючи її рівняння. Очевидно, область визначення функції: $0\le x<\infty,$ а область значень: $-\infty<y<+\infty.$ Знайдемо точки перетину з координатними осями. З віссю Ox : із $y=0$ отримаємо $t-\frac{t^3}{3}=0,$ звідки $t\left(1-\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{t}{\sqrt{3}}\right)=0.$ Отже, за значень параметра $t_1=0,\quad t_2=\sqrt{3},\quad t_3=-\sqrt{3}\qquad y=0$, величина x, відповідно, набуває значень $x(t_1)=x(0)=0,\ x(t_2)=x\left(\sqrt{3}\right)=3,\ x(t_3)=x\left(-\sqrt{3}\right)=3,$ відтак точки перетину з віссю Ox – $M_1(0{,}0),\ M_2(3{,}0).$ Аналогічно з віссю Oy: із $x=0$ отримаємо $t^2=0,\ \ t=0,$ $y(t)=y(0)=0,$ тобто знову маємо точку $M_1(0{,}0).$

Для побудови кривої складемо таблицю значень x та y за деяких значень параметра t (табл. 1).

Таблиця 1

t	-3	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2	3
x	9	4	3	1	0	1	3	4	9
y	6	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	-6

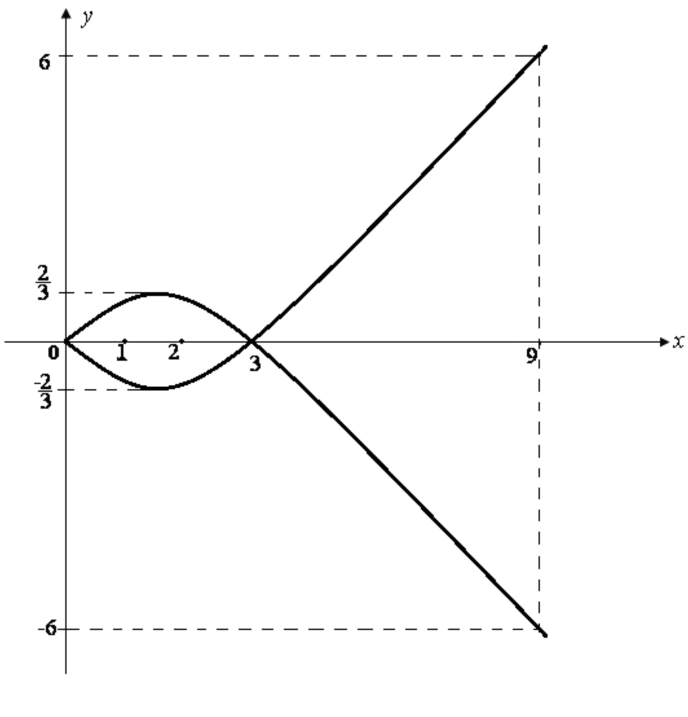


Рис.6.

Очевидно, петля (рис.6), яку утворює крива, симетрична відносно осі *Ox*, тому

достатньо обчислити довжину половини петлі за $y > 0$, при цьому $0 \le t \le \sqrt{3}$,

що і визначає межі інтегрування. Враховуючи формулу (3.4) , запишемо інтеграл для знаходження довжини дуги кривої:

$$L = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\left(t^2\right)'\right)^2 + \left(\left(t - \frac{t^3}{3}\right)'\right)^2}\, dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + \left(1 - t^2\right)^2}\, dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4}\, dt =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}\, dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(t^2 + 1\right)^2}\, dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(t^2 + 1\right) dt = 2\left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = 2\left(\frac{3\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\right) =$$

$$= 4\sqrt{3}.$$

Задача 4. Обчислити довжину дуги кривої (конхоїда)

$$\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}, a > 0.$$

Розв’язування. Оскільки криву задано рівнянням у полярних координатах, для знаходження довжини дуги використаємо формулу

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi. \tag{3.5}$$

Для побудови кривої проаналізуємо її рівняння. Область визначення знаходимо з умови

$$\sin \frac{\varphi}{3} \ge 0,$$

звідки $0 + 2\pi k \le \dfrac{\varphi}{3} \le \pi + 2\pi k,$ або $0 + 6\pi k \le \varphi \le 3\pi + 6\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

Отже, основний період функції дорівнює 6π.

За $k = 0$ отримаємо першу область $0 \le \varphi \le 3\pi$. Якщо $k = 1$, маємо область $6\pi \le \varphi \le 9\pi$, яка збігається з першою областю. Аналогічно обчислюють наступні значення k. Таким чином, область визначення функції: $0 \le \varphi \le 3\pi$.

Найменшого значення функція набуває за $\varphi = 0$ і $\varphi = 3\pi$, а найбільшого – за $\dfrac{\varphi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$, тобто $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$.

Побудуємо таблицю значень ρ для деяких значень кута φ (табл. 2).

Таблиця 2

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	3π
ρ	0	$\frac{a}{8}$	$\frac{\sqrt{2}a}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}a}{8}$	a	$\frac{3\sqrt{3}a}{8}$	$\frac{\sqrt{2}a}{4}$	$\frac{a}{8}$	0

Графік кривої матиме вигляд, як показано на рис. 7.

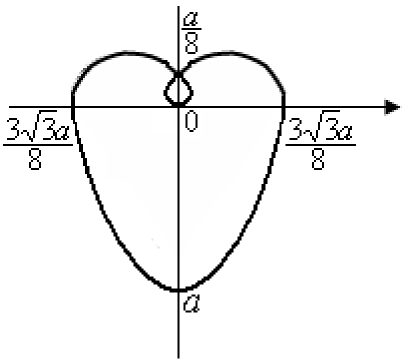


Рис. 7.

Перед використанням формули (3.5) для обчислення довжини дуги конхоїди доцільно знайти:

$$\rho'(\varphi) = \left(a\sin^3\frac{\varphi}{3}\right)' = a\cdot 3\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3} = a\cdot\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3};$$

$$\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2 = \left(a\sin^3\frac{\varphi}{3}\right)^2 + \left(a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\right)^2 = a^2\sin^6\frac{\varphi}{3} + a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3} =$$

$$a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\left(\sin^2\frac{\varphi}{3} + \cos^2\frac{\varphi}{3}\right) = a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}.$$

Враховуючи, що область визначення функції забезпечує межі інтегрування, складаємо інтеграл:

$$L = \int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi = a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi = a\int_0^{3\pi}\frac{1-\cos\frac{2\varphi}{3}}{2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left(1-\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{3\pi} = \frac{a}{2}\left(3\pi - \frac{3}{2}\sin 2\pi\right) = \frac{3\pi a}{2}.$$

Задача 5. Обчислити об'єм еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

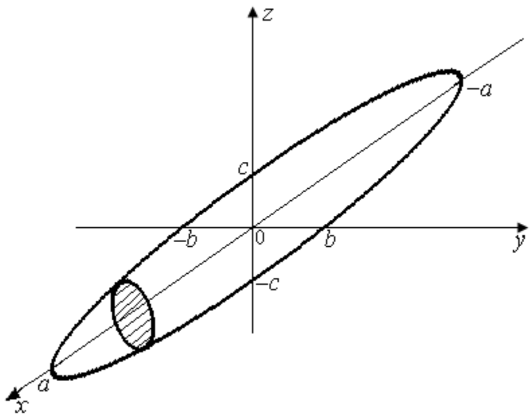


Рис.8.

Розв'язування. Якщо задано тіло в просторі і відомі площі фігур, утворених перерізами площин, перпендикулярних до осі *Ox*, які є неперервними функціями $S(x)$ на відрізку$[a,b]$, то об'єм цього тіла, обмеженого зліва площиною $x=a$ і справа площиною $x=b$, обчислюють за формулою

$$V=\int_a^b S(x)\,dx. \tag{3.6}$$

Перетнемо еліпсоїд площиною перпендикулярно до осі *Ox*. Отримаємо плоску фігуру, обмежену еліпсом.

Рівняння еліпса

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2},$$

може бути перетворене як

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1$$

з півосями $b_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad c_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$

Враховуючи формулу площі $S = \pi ab$ для еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ матимемо

$S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$

Згідно з формулою (3.6) об'єм еліпсоїда

$$V = \int_{-a}^{a} \pi abc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Примітка. Якщо $a = b = c = R$, то еліпсоїд перетворюється в кулю і в цьому разі $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Задача 6. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями

$y = x^2, \quad y = 2x$

Розв'язування. Із системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2; \\ y = 2x, \end{cases}$$

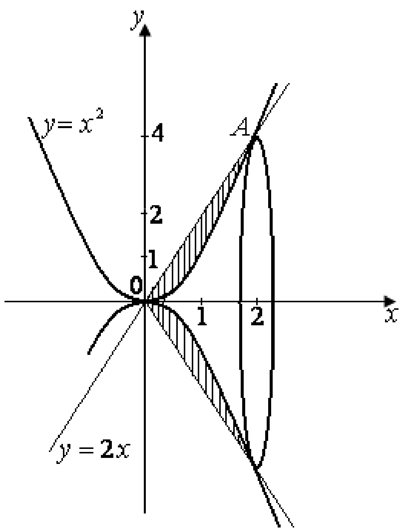


Рис. 9.

знайдемо координати точок перетину заданих ліній *O*(0;0) та *A*(2;4), після чого побудуємо задані лінії і заштрихуємо осьовий переріз тіла.

Очевидно, що шуканий об'єм

$$V = V_2 - V_1,$$

де V_2 – об'єм конуса, утвореного обертанням навколо осі *Ox* трикутника, обмеженого віссю Ox, прямими $y= 2x$, $x= 2$; V_1 – об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі фігури, обмеженої віссю Ox, параболою $y = x^2$ і прямою $x = 2$.

Згадаємо, що об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $x = a$ та $x = b$, причому $a < b$, знаходять за формулою

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx, \tag{3.7}$$

тому відповідно до формули (3.7) матимемо

$$V_2 = \pi\int_0^2 (2x)^2 dx = 4\pi\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{32}{3}\pi,$$

$$V_1 = \pi\int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi\cdot\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 = \frac{32\pi}{5},$$

$$V = V_2 - V_1 = \frac{32}{3}\pi - \frac{32\pi}{5} = \frac{64\pi}{5}.$$

4. Зразок варіанту

1.1. Обчислити площу фігури, обмеженої заданими кривими:

$$y = \sin|x|, \quad y = |x| - \pi.$$

1.2. Знайти площу фігури:

D ={ (x,y): $x, y \in R, \; x^2 + y^2 \geq 4y, \quad x^2 + y^2 \leq 10y, \; y \leq \sqrt{3}x, \quad y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}$ } .

2.1. Обчислити довжину дуги кривої $y = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$

2.2. Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t); \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$

2.3. Обчислити довжину дуги кривої $\rho = 4(1 + \sin\varphi), \quad -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq 0.$

3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, \; z = 0, \quad z = 1.$$

4. Знайти об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Ox фігури, обмеженої заданими лініями: $y = \sin\frac{\pi x}{2}, \; y = x^2.$

5. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

5.1. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

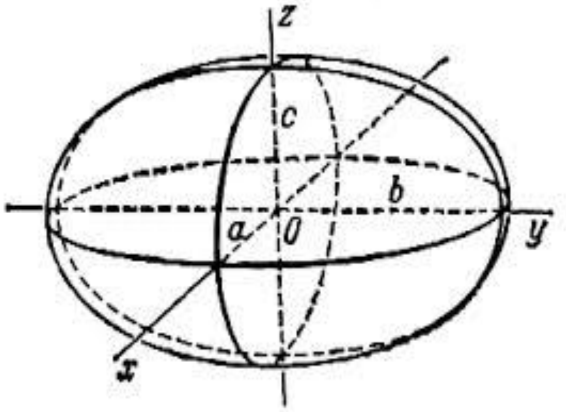
5.2. $\int\limits_4^5 \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 8x - 15}}.$

5. ДОДАТКИ

Додаток 1. Деякі поверхні другого порядку та їх рівняння

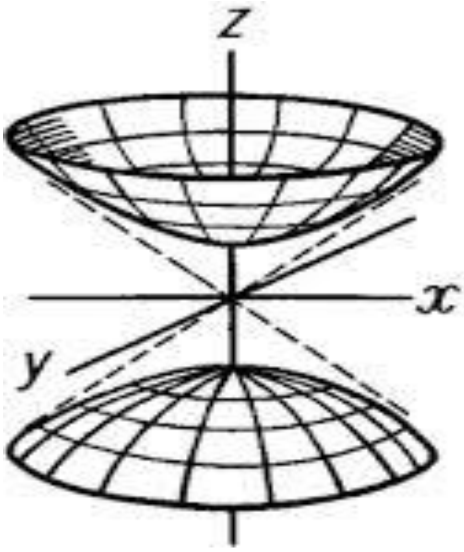
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

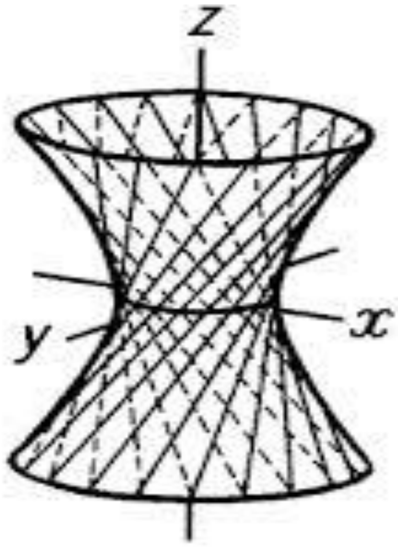
Еліпсоїд



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

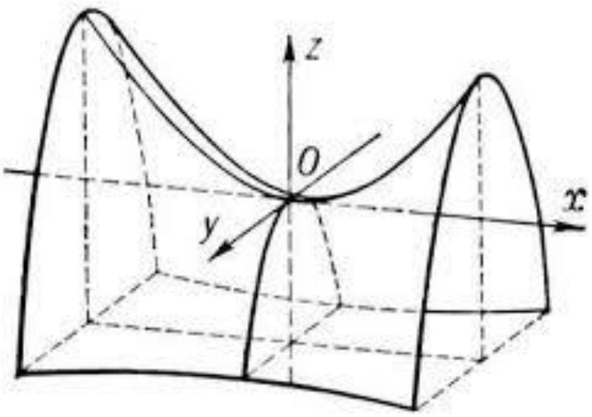
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$





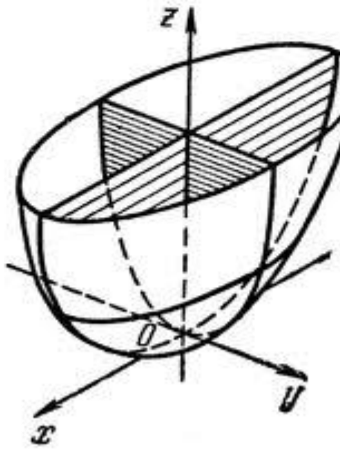
Двопорожнинний гіперболоїд *Однопорожнинний гіперболоїд*

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$



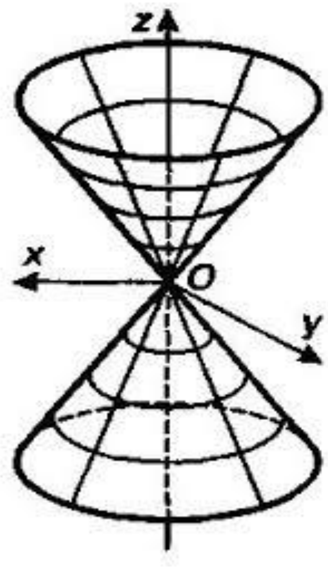
Гіперболічний параболоїд

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$



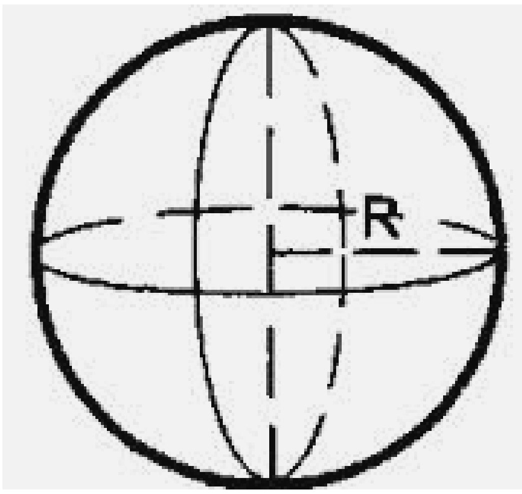
Еліптичний параболоїд

$$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$



Еліптичний конус

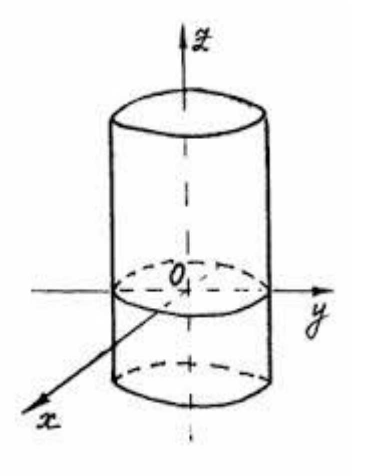
$$x^2+y^2+z^2=R^2$$



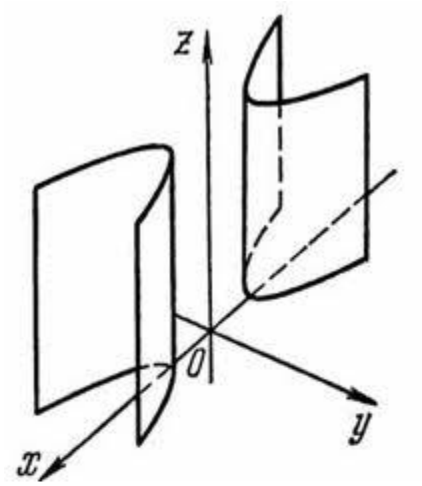
Сфера

Циліндричні поверхні

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

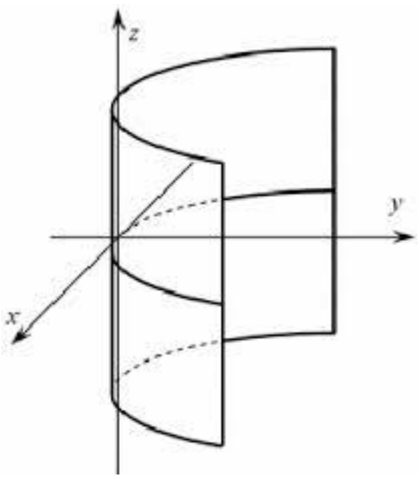


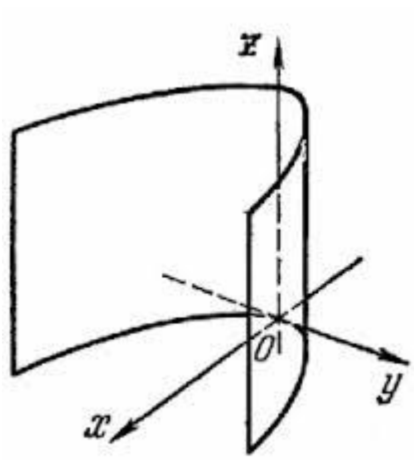
Еліптичний циліндр



Гіперболічний циліндр

$$y^2 = 2px \qquad\qquad x^2 = 2py$$





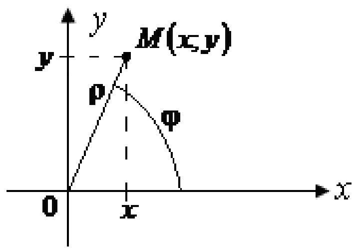
Параболічні циліндри

Додаток 2. Криволінійні системи координат

Деякі задачі математики зручно розв’язувати в інших, криволінійних системах координат, до яких належать полярна та узагальнена полярна система координат.

Полярна система координат

Полярна система координат (ПСК) задається полюсом точкою O і полярною віссю OP . Координати довільної точки M у цій системі визначаються парою чисел (ρ,φ), де ρ (полярний радіус) – відстань від полюса до заданої точки; φ (полярний кут) – кут між полярною віссю і полярним радіусом, причому $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Якщо полюс полярної системи сумістити з початком прямокутної декартової системи координат, а полярну вісь – з додатним напрямом осі абсцис, то отримаємо зв’язок між полярною та декартовою системами координат:



$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi.$$

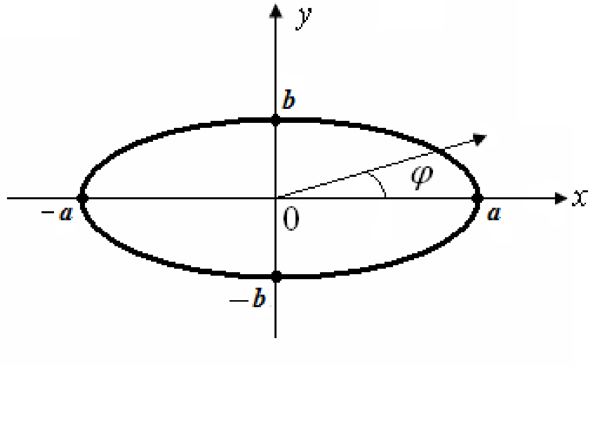
Узагальнена полярна система координат

Узагальнена полярна система координат (УПСК) вводиться аналогічно до ПСК для еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ на площині Oxy. Зв’язок між узагальненою полярною та декартовою системами координат задається формулами:

$$x = a\rho\cos\varphi;$$
$$y = b\rho\sin\varphi.$$

Зауважимо, що $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в УПСК $\rho = 1$.



Додаток 3. Основні формули

1.***Площа фігури в прямокутній системі координат.*** Площу плоскої фігури, розташованої в смузі значень $a \le x \le b$ і обмеженої зверху графіком неперервної функції $y=f_2(x)$, а знизу - графіком неперервної функції $y=f_1(x)$, знаходять за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx, \tag{5.1}$$

зокрема, якщо фігура обмежена знизу віссю *OX* ($f_1(x)=0$), формула (5.1) набуває вигляду

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{5.2}$$

Примітка. Інколи зручніше площу плоскої області, яка прилягає до вісі *OY*, обчислювати відносно цієї вісі. Так, якщо фігура обмежена графіком неперервної функції $x=\varphi(y)$, $c \le y \le d$, тоді її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy, \tag{5.3}$$

а у випадку, коли фігура обмежена зліва і справа графіками неперервних функцій, відповідно $x=\varphi_1(y)$ і $x=\varphi_2(y)$, $c \le y \le d$, площу знаходять за формулою

$$S = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]dy. \tag{5.4}$$

2. ***Площа фігури, обмеженої кривою, заданою параметрично.*** Якщо плоска фігура обмежена кривою, заданою параметрично :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t_1 \le t \le t_2,$$

де $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ – неперервні на $[t_1, t_2]$ функції, причому $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$, тоді для обчислення площі, достатньо в інтегралі (5.2) зробити заміну змінної: $x=x(t)$, $dx=x'(t)dt$ і використати формулу

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt. \tag{5.5}$$

Примітка. Іноді, в залежності від задачі, зручно робити заміну змінної в інтегралі (5.3): $y=y(t)$, $dy=y'(t)dt$, $y(t_1)=c$, $y(t_2)=d$ і обчислювати площу фігури за формулою:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} x(t)y'(t)dt\,.$$

3. ***Площа фігури, обмеженої кривою, заданою в полярній системі координат.*** Площа криволінійного сектора, обмеженого променями $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ і графіком неперервної на $[\varphi_1, \varphi_2]$ функції $\rho=\rho(\varphi)$, знаходиться за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi\,.$$

4. Довжина дуги кривої, заданої рівнянням в декартовій системі координат. Якщо $f(x), f'(x)$ – неперервні на $[a, b]$ функції, тоді довжина дуги кривої $y=f(x)$, $a\le x\le b$ знаходиться за формулою:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx\ .$$

5. ***Довжина дуги кривої, заданої параметрично.*** Якщо крива задана параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1\le t\le t_2$, де $x(t), y(t), x'(t), y'(t)$ – неперервні на $[t_1, t_2]$ функції, причому $x(t_1)=a$, $x(t_2)=b$, тоді довжина дуги такої кривої знаходиться за формулою:

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

6. Довжина дуги кривої, заданої рівнянням в полярних координатах. Якщо $\rho(x)$, $\rho'(x)$ – неперервні на $[\varphi_1, \varphi_2]$ функції, тоді довжина дуги кривої $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$ знаходиться за формулою:

$$L=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

7. ***Об'єм довільного тіла Т.*** Якщо неперервна на $[a, b]$ функція $S(x)$ визначає площу будь – якого перерізу тіла Т площиною, перпендикулярною до вісі OX, тоді об'єм тіла Т знаходиться за формулою:

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

Примітка. Іноді, в залежності від задачі, зручно використовувати одну з наступних формул

$$V = \int_c^d S(y)dy \ , \quad V = \int_r^t S(z)dz$$

Вибір формули залежить від того чи розглядається переріз тіла площиною, перпендикулярною до вісі *OY*, чи площиною, перпендикулярною до вісі *OZ*.

8. Об'єм тіла обертання. Якщо криволінійна трапеція обмежена зверху графіком неперервної функції $y= f(x)$, а знизу – віссю *OX*, $a \le x \le b$, тоді об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо вісі *OX:*

$$V_{ox} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $x=\varphi(y)$,

$c \le y \le d$ і віссю *OY*, тоді об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо вісі *OY* знаходиться за формулою:

$$V_{oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy$$

Додаток 4. Правила оформлення титульної сторінки

НТУУ “КПІ”

ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Розрахункова робота

з вищої математики

студента І курсу групи ХП–91

Тарасенка Сергія Васильовича

Тема: ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Варіант № 2

Протокол виконання роботи

1.1	1.2	2.1	2.2	2.3	3	4	5.1	5.2

Роботу перевірив доцент

кафедри математичної фізики

Шостак Микола Іванович

Київ 2014

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ООО “Издательство “Мир и Образование”, 2005. – 304с. – 10000 экз. – ISBN 5-488-00113-1.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик . – К.: Ігнатекс – Україна, 2011. – 648с. – 500 пр. – ISBN 978-966-97049-3-1.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: АСТ,Астрель, 2001. – 656с. – 10000 экз. – ISBN 5-17-004601-4.
4. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1973. – 640с. – 85000 экз.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. – СПб.: Мифрил. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1996. – Т.1 – 416с. – 6000 экз. – ISBN 5-86457-020-6.
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис – пресс, 2007. – 608с. – ISBN 978-5-8112-2928-4.
7. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник. – К.: Вища шк.,1986. – 512с. – 3000 пр.

Додаткова література

8. Батунер Л.М., Позин М.Е. Математические методы в химической технике / Л.М. Батунер, М.Е. Позин. – Л.: “Химия”, 1971. – 824с. – 10500 экз.
9. Неділько С.А. Математичні методи в хімії / С.А. Неділько. – К.: Либідь, 2005. - 256с. – ISBN 966-06-0384-3.