Студенти хіміко-технологічного факультету заочної форми навчання вивчають у III семестрі дві теми: "Диференціальні рівняння" і "Функції кількох змінних", використовуючи літературу [1-6], а також лекції, викладені на установчій сесії. В розділі 1 "Диференціальні рівняння" наведено основні теоретичні положення і типові приклади; в розділі 2 "Функції кількох змінних" наведено лише типові приклади; в розділі ж 3 наводяться завдання для контрольної роботи 4.

1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Рівняння, яке пов'язує шукану функцію, її похідні і незалежну змінну, називається диференціальним. Порядок старшої похідної, що входить до заданого диференціального рівняння, називається порядком цього рівняння.

Таким чином, диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

Будь-яка функція $y=\varphi(x)$, яка при підстановці її в рівняння (1) перетворює його на тотожність, називається розв'язком цього диференціального рівняння.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1) називається такий його розв'язок

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \qquad (2)$$

що містить стільки незалежних довільних сталих $C_1, C_2, \ldots C_n$, кількість яких дорівнює порядку цього рівняння.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння подано в неявному вигляді

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

то він називається загальним інтегралом цього рівняння.

Будь-який розв'язок диференціального рівняння, що отримується із загального розв'язку при певному значенні довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, називається частинним. Для того, щоб із загального розв'язку отримати будь який частинний, необхідно використати якісь додаткові умови. У ролі таких додаткових умов часто виступають так звані "початкові умови", які є математичним записом початкового стану процесу, що подається даним диференціальним рівнянням. Такі початкові умови мають вигляд

$$y|_{x=x_0} = y_0, \; y'|_{x=x_0} = y_0', \; \ldots, \; y^{(n)}|_{x=x_0} = y_0^{(n)}, \qquad (3)$$

де $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n)}$ - дійсні числа.

Задачу знаходження частинного розв'язку диференціального рівняння (1), що задовольняє початковим умовам (3), називають задачею Коші.

1.1. Диференціальні рівняння першого порядку.

Ми вивчатимемо чотири типи диференціальних рівнянь першого порядку:

1) рівняння з відокремлюваними змінними;
2) рівняння з однорідною правою частиною;
3) лінійні рівняння;
4) рівняння Бернуллі.

1.1.1. Рівняння з відокремлюваними змінними.

Диференціальне рівняння першого порядку називається рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо воно має вигляд

$$y' = \varphi(x)\cdot\psi(y) \qquad (4)$$

тобто якщо його права частина є добутком двох функцій, одна з яких є функцією лише аргументу x, а друга - функцією лише аргументу y.

Розв'язати або проінтегрувати таке диференціальне рівняння

означає знайти всі його розв'язки.

Щоб розв'язати це рівняння, запишемо похідну y' через символи Ньютона-Лейбніца. Тоді рівняння (4) набуває вигляду

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\cdot\psi(y)$$

Домножуючи обидві частини цього рівняння на dx, отримуємо

$$dy = \varphi(x)\psi(y)dx.$$

Для інтегрування цього виразу необхідно, щоб у правій частині стояла функція аргументу x, а в лівій - функція аргументу y. Розділивши обидві частини рівняння на $\psi(y)$, отримуємо

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx.$$

Оскільки тепер змінні відокремлено, то інтегруючи обидві частини по відповідних змінних, дістанемо

$$\int\frac{dy}{\psi(y)} + C_1 = \int\varphi(x)dx + C_2;$$

$$\int\frac{dy}{\psi(y)} = \int\varphi(x)dx + C,$$

де $C=C_2-C_1$ - довільна стала.

ПРИКЛАД 1. Розв'язати рівняння

$$xy' - y = y^2$$

РОЗВ'ЯЗОК. Розв'язуючи рівняння відносно похідної, дістанемо

$$y' = \frac{y^2+y}{x}; \qquad y' = (y^2+y)\cdot\frac{1}{x}$$

Оскільки праву частину цього рівняння подано у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить лише від одного аргументу, то це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Записуючи y' через відношення диференціалів, отримуємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+y}{x}$$

Домножуючи обидві частини спочатку на dx, а потім на $\frac{1}{y^2+y}$, дістанемо

$$\frac{dy}{y^2+y} = \frac{dx}{x}$$

Оскільки змінні в рівнянні відокремлено, то це рівняння можна проінтегрувати

$$\int\frac{dy}{y^2+y} = \int\frac{dx}{x}.$$

Щоб обчислити інтеграл, який стоїть у лівій частині, виділимо повний квадрат $y^2+y=y^2+2\cdot y\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,

$$\int\frac{dy}{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\int\frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\ln\left|\frac{y+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{y+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right|=\ln|x|+\ln c;$$

$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right|=\ln|cx|.$$

Потенціюючи, отримуємо

$$\frac{y}{y+1}=cx,$$

і, нарешті,

$$y=\frac{cx}{1-cx}.$$

Зрозуміло, що ми отримали загальний розв'язок, оскільки він містить довільну сталу.

1.1.2. Диференціальні рівняння з однорідною правою частиною

Перш, ніж перейти до розгляду диференціальних рівнянь з однорідною правою частиною, нагадаємо, що функцію двох змінних $f(x,y)$ називають однорідною функцією порядку K, якщо виконується умова

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^K f(x,y).$$

Диференціальне рівняння першого порядку

$$y'=f(x,y)$$

називається рівнянням з однорідною правою частиною, якщо його права частина є однорідною функцією нульового порядку. Зауважимо, що у багатьох випадках однорідна функція нульового порядку подається як частка двох однорідних функцій однакового порядку.

Диференціальні рівняння з однорідною правою частиною розв'язуються з допомогою підстановки $u(x)=\frac{y(x)}{x}$; отже $y=ux$. Диференціюючи цей вираз і підставляючи його в рівняння, дістанемо

$$u'x+u=f(x,ux).$$

Виконуючи необхідні перетворення, отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Отже, диференціальне рівняння з однорідною правою частиною

згаданою підстановкою завжди зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$y'=\frac{y-x}{x}.$$

Розв'язок. Поділивши праву частину рівняння почленно на x, отримуємо

$$y'=\frac{y}{x}-1.$$

Права частина цього рівняння

$$f(x,y)=\frac{y-x}{x}$$

є функцією від частки двох однорідних функцій першого порядку; отже вихідне рівняння є рівнянням з однорідною правою частиною. Зробивши заміну , маємо

$$\frac{y}{x}=u,\quad y=ux,\quad y'=u'x+u$$

Підставляючи отримані вирази у рівняння, дістанемо

$$u'x+u=u-1;\quad u'x=-1;\quad \frac{du}{dx}\cdot x=-1.$$

Відокремлюючи змінні і інтегруючи, отримуємо

$$du=-\frac{dx}{x};\quad \int du=-\int\frac{dx}{x};\quad u=-\ln|x|+\ln c$$

$$u=\ln\left|\frac{c}{x}\right|.$$

Підставивші замість u його вираз $\frac{y}{x}$, остаточно отримуємо

$$\frac{y}{x}=\ln\left|\frac{c}{x}\right|;\quad y=x\ln\left|\frac{c}{x}\right|.$$

Оскільки знайдений розв'язок містить довільну сталу, то цей розв'язок є загальним.

1.1.3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння типу

$$A(x)y'+B(x)y=D(x). \tag{5}$$

Розділивши почленно це рівняння на функцію $A(x)$, отримуємо

$$y'+p(x)y=q(x),$$

де $p(x)=\frac{B(x)}{A(x)}$, $q(x)=\frac{D(x)}{A(x)}$.

Оскільки невідома функція y та її похідна y' входять до цього рівняння лінійно, тобто в першому степені, і відсутній добуток цих функцій, то це рівняння називається лінійним.

Існує декілька методів знаходження розв'язків лінійного рівняння. Ми розглянемо лише один з них, який називається методом Бернуллі.

Метод Бернуллі полягає в тому, що розв'язок диференціального рівняння шукають у вигляді добутку двох функцій $y(x)=u(x)\cdot v(x)$, одну з яких (а саме функцію v) вибирають довільним чином. Диференціюючи цей добуток і підставляючи результат диференціювання у розв'язуване рівняння, маємо

$$u'v+uv'+p(x)u\cdot v=q(x), \tag{6}$$

що можна подати у вигляді

$$u'v+u(v'+p(x)v)=q(x). \tag{7}$$

Оскільки функція v вибирається довільно, виберемо її таким чином, щоб вираз у дужках в рівнянні (7) обертався на нуль, тобто щоб виконувалася умова

$$v'+p(x)v=0 \tag{8}$$

Зрозуміло, що цей вираз у свою чергу є рівнянням з відокремлюваними змінними; розв'язуючи його, дістанемо

$$\frac{dv}{dx}=-p(x)v;\quad \frac{dv}{v}=-p(x)dx;\quad \int\frac{dv}{v}=-\int p(x)dx;$$

$$\ln|v|=-\int p(x)dx;\quad v=e^{-\int p(x)dx}.$$

Зауважимо, що вираз для функції v не містить довільної сталої; тобто ми вважаємо, що функція v є частинним розв'язком рівняння (8).

Підставляючи знайдений вираз для функції v у рівняння (7) і враховуючи, що вираз у дужках дорівнює нулю, отримуємо

$$u'e^{-\int p(x)dx}=q(x);\quad e^{-\int p(x)dx}\frac{du}{dx}=q(x).$$

Розділивши обидві частини цього рівняння на $e^{-\int p(x)dx}$, дістанемо

$$\frac{du}{dx}=\frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}},\quad \int du=\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx.$$

Отже

$$u=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

Знаючи u, v, остаточно отримуємо

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}+C\right).$$

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{\cos x},\quad y|_{x=0}=1.$$

Розв'язок. Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку, оскільки y і y' входять до нього в першому степені і відсутній добуток цих функцій. Тому розв'язуємо його підстановкою $y=u\cdot v$. Диференціюючи цей вираз і підставляючи його в рівняння, дістанемо

$$u'v+uv'+uv\cdot\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{\cos x},$$

$$u'v+u(v'+v\,\mathrm{tg}\,x)=\frac{1}{\cos x}.$$

Виберемо функцію v таким чином, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто з умови

$$v'+v\,\mathrm{tg}\,x=0.$$

Розв'язуючи отримане рівняння з відокремлюваними змінними, маємо

$$\frac{dv}{dx}=-v\,\mathrm{tg}\,x,\quad \int\frac{dv}{v}=\int-\mathrm{tg}\,x\,dx$$

$$\ln|v|=\ln|\cos x|,\quad v=\cos x.$$

Підставляючи знайдену функцію v у диференціальне рівняння, маємо

$$u'\cos x=\frac{1}{\cos x};\quad u'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Ми отримали диференціальне рівняння із відокремлюваними змінними відносно функції u; розв'язуючи його, дістанемо

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x};\quad \int du=\int\frac{dx}{\cos^2 x};\quad u=\mathrm{tg}\,x+C.$$

Отже загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння має вигляд

$$y = u \cdot v = (\operatorname{tg} x + c)\cos x$$

Знайдемо тепер таке значення довільної сталої, при якому виконується початкова умова задачі Коші. Підставляючи значення x і y з початкової умови, отримуємо рівняння відносно цієї довільної сталої C, яке має вигляд

$$1 = (\operatorname{tg} 0 + c)\cos 0\ ; \quad 1 = (0 + c)\cdot 1\ ; \quad c = 1.$$

Підставляючи знайдене значення довільної сталої у загальний розв'язок, отримуємо частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє заданій початковій умові, тобто розв'язок задачі Коші:

$$y = (\operatorname{tg} x + 1)\cos x.$$

1.1.4. Рівняння Бернуллі.

Рівнянням Бернуллі називається диференціальне рівняння вигляду

$$y' + P(x)y = q(x)y^n, \ (n \neq 0,\ n \neq 1).$$

Це рівняння відрізняється від лінійного тим, що до правої частини входить множник y^n.

Розв'язується рівняння Бернуллі методом Бернуллі, який було розглянуто у попередньому розділі.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = -xy^2.$$

Розв'язок. Оскільки це рівняння Бернуллі, то розв'язуємо його підстановкою $y = u \cdot v$. Підставляючи цей вираз і його похідну у рівняння, і виконуючи такі ж дії, як і в попередньому розділі, отримуємо

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = -xu^2v^2\ ; \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = -xu^2v^2$$

$$v' + \frac{v}{x} = 0\ ; \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}\ ; \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}\ ;$$

$$\ln|v| = -\ln|x|\ ; \quad \ln|v| = \ln|x|^{-1}\ ; \quad v = \frac{1}{x}.$$

$$u' \cdot \frac{1}{x} = -xu^2\left(\frac{1}{x}\right)^2; \quad \frac{du}{dx} = -u^2\ ; \quad -\int \frac{du}{u^2} = \int dx\ ;$$

$$\frac{1}{u} = x + c\ ; \quad u = \frac{1}{x+c}.$$

$$y = u \cdot v = \frac{1}{x+c} \cdot \frac{1}{x}\ ; \qquad y = \frac{1}{x^2 + cx}.$$

Ми знайшли загальний розв'язок рівняння Бернуллі, оскільки він містить довільну сталу.

1.2. Рівняння другого порядку, що припускають зниження порядку

У загальному вигляді диференціальне рівняння другого порядку можна подати таким чином

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Загальний розв'язок такого рівняння містить дві довільні сталі, тобто має вигляд

$$y = \varphi(x, c_1, c_2).$$

При розв'язанні диференціальних рівнянь другого порядку нас будуть цікавити лише ті випадки, коли ці рівняння припускають зниження порядку, тобто зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку.

Відомо, що зниження порядку можливе лише у тих випадках, коли вихідне диференціальне рівняння є неповним, тобто не містить або незалежної змінної x, або шуканої функції $y(x)$, або першої похідної шуканої функції. Розглянемо ці випадки більш детально.

1.2.1. Рівняння типу $y'' = f(x)$

Зрозуміло, що це рівняння розв'язується послідовними інтегруваннями

$$y' = \int f(x)dx + c_1$$

$$y = \int \left[\int f(x)dx + c_1\right]dx + c_2.$$

Аналогічно розв'язується і рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} = f(x).$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$y'' = \frac{1}{x^2}$$

Розв'язок. Функція в правій частині залежить лише від змінної x; отже це рівняння розв'язується двома послідовними інтегруваннями

$$y' = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c_1\ ;$$

$$y = \int\left(-\frac{1}{x} + c_1\right)dx = -\int \frac{dx}{x} + c_1\int dx = -\ln|x| + c_1x + c_2.$$

1.2.2. Рівняння типу $F(x, y', y'') = 0.$

Це рівняння не містить явно шуканої функції y. Зробивши заміну $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$, отримуємо рівняння першого порядку стосовно функції p : $F(x, p, p') = 0$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$xy'' = y'\ln\frac{y'}{x} + y'.$$

Розв'язок. Оскільки рівняння не містить явно шуканої функції, то після заміни $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$ отримуємо рівняння першого порядку

$$xp' = p\ln\frac{p}{x} + p\ ; \qquad p' = \frac{p}{x}\ln\frac{p}{x} + \frac{p}{x},$$

яке після ділення обох частин на x стає рівнянням з однорідною правою частиною. Як і раніше, розв'язуємо його підстановкою $u = \frac{p}{x}$; $p = ux$; $p' = u'x + u$

$$u'x + u = u\ln u + u\ ; \quad \frac{du}{dx} = u\ln u\ ; \quad \int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x}\ ;$$

$$\int \frac{d(\ln u)}{\ln u} = \ln|x| + \ln c_1; \quad \ln|\ln u| = \ln|c_1x|; \quad \ln u = c_1x;$$

$$u = e^{c_1x}, \text{ але } u = \frac{p}{x}, \quad \frac{p}{x} = e^{c_1x}; \quad p = xe^{c_1x}.$$

Підставимо y' замість p, отримуємо

$$y' = xe^{c_1x}; \quad \frac{dy}{dx} = xe^{c_1x}\ ; \quad \int dy = \int xe^{c_1x}dx.$$

$$y = \int xe^{c_1x}dx.$$

Інтегруючи по частинах, маємо

$$\int xe^{c_1x}dx = \left|\begin{matrix} u = x, & dv = e^{c_1x}dx \\ du = dx, & v = \int e^{c_1x}dx = \frac{1}{c_1}e^{c_1x} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{c_1}xe^{c_1x} - \frac{1}{c_1}\int e^{c_1x}dx = \frac{1}{c_1}xe^{c_1x} - \frac{1}{c_1^2}e^{c_1x} + c_2.$$

$$y = \frac{1}{c_1^2}e^{c_1x}(c_1x - 1) + c_2.$$

1.2.3. Рівняння типу $F(y, y', y'') = 0.$

Рівняння цього типу не містить явно незалежної змінної x і припускає зниження порядку на одиницю, якщо покласти $y' = p(y)$, а за новий аргумент взяти саму шукану функцію y. Похідну другого порядку отримуємо за правилом диференціювання складної функції

$$y'' = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot y' = p\frac{dp}{dy} = pp'.$$

Підставивши ці вирази в рівняння, дістанемо

$$F\left(y,\ p,\ p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Отримане рівняння є рівнянням першого порядку стосовно функції p.

Приклад 7. Розв'язати задачу Коші

$$2(y')^2 = y''(y-1),$$

$$y|_{x=1} = 2\ ; \qquad y'|_{x=1} = -1.$$

Розв'язок. Оскільки рівняння не містить явно змінної x покладаємо

$$y' = p(y), \quad y'' = p\frac{dp}{dy}.$$

Підставляючи ці вирази у вихідне рівняння, матимемо

$$2p^2 = p\frac{dp}{dy}(y-1)\ ; \quad 2p = \frac{dp}{dy}(y-1).$$

Ми отримали рівняння з відокремлюваними змінними. Розділяючи змінні і інтегруючи, дістанемо

$$\frac{dP}{P}=\frac{2dy}{y-1};\quad \int\frac{dP}{P}=2\int\frac{dy}{y-1};\quad \ln|P|=2\ln|y-1|+\ln c_1$$

$$\ln|P|=\ln(y-1)^2+\ln c_1;\quad P=c_1(y-1)^2$$

Оскільки $P=y'$, маємо

$$y'=c_1(y-1)^2;\quad \frac{dy}{dx}=c_1(y-1)^2;\quad \int\frac{dy}{(y-1)^2}=c_1\int dx;$$

$$-\frac{1}{y-1}=c_1x+c_2;\quad y-1=-\frac{1}{c_1x+c_2};\quad y=1-\frac{1}{c_1x+c_2}$$

$$y=\frac{c_1x+c_2-1}{c_1x+c_2}.$$

Ми отримали загальний розв'язок диференціального рівняння. Для знаходження частинного розв'язку використаємо початкові умові. Підставляючи $x=1$ і $y=2$ в загальний розв'язок, маємо

$$2=\frac{c_1+c_2-1}{c_1+c_2};\quad 2=1-\frac{1}{c_1+c_2};\quad c_1+c_2=-1$$

Ми одержали одне рівняння з двома невідомими. Використовуючи другу початкову умову, отримуємо і друге рівняння цієї системи : $x=1,\ y=2,\ y'=-1$:

$$-1=c_1(2-1)^2;\quad c_1=-1$$

Розв'язуючи систему двох рівнянь з двома невідомими, знаходимо значення довільних сталих

$$c_1=-1;\quad c_2=0$$

Отже розв'язок задачі Коші має вигляд

$$y=\frac{-x-1}{-x}\quad \text{або}\quad y=1+\frac{1}{x}.$$

1.3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

Лінійне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами має вигляд

$$y''+py'+qy=f(x)$$

де p і q – дійсні числа.

Функція y та її похідні y', y'' входять до цього рівняння лінійно. Якщо $f(x)=0$, то лінійне рівняння називається однорідним;

якщо ж $f(x)\neq 0$, то лінійне рівняння називається неоднорідним.

1.3.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку /ЛОДР/

Як випливає з означення, ЛОДР другого порядку має вигляд

$$y''+py'+qy=0 \qquad (9)$$

Розв'язок ЛОДР будемо шукати у вигляді

$$y=e^{kx}.$$

Підставляючи цей вираз у вихідне рівняння і виконуючи необхідні перетворення, отримуємо

$$k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0.$$

Враховуючи, що e^{kx} не дорівнює нулю, маємо

$$k^2+pk+q=0.$$

Отримане рівняння називається характеристичним. При його розв'язуванні можливі три випадки.

1. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні $k_1\neq k_2$; тоді загальний розв'язок ЛОДР має вигляд

$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}.$$

2. Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні $k_1=k_2$; , тоді загальний розв'язок ЛОДР має вигляд

$$y=e^{k_1x}(c_1+c_2x).$$

3. Корені характеристичного рівняння комплексні, тобто $k_1=a+ib,\ k_2=a-ib$; тоді загальний розв'язок ЛОДР має вигляд

$$y=e^{ax}(c_1\cos bx+c_2\sin bx).$$

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок ЛОДР

$$y''-4y'+13y=0$$

Розв'язок. Складаємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені $k^2-4k+13=0$

$$D=16-4\cdot 13=16-52=-36$$

$$k_1=\frac{4+\sqrt{-36}}{2}=\frac{4+6\sqrt{-1}}{2}=\frac{4+6i}{2}=2+3i;\quad k_2=\frac{4-\sqrt{-36}}{2}=2-3i$$

$$k_1=2+3i,\qquad k_2=2-3i$$

Тоді загальний розв'язок ЛОДР має вигляд

$$y=e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x).$$

1.3.2. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння/ЛНДР/ другого порядку із сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною (метод невизначених коефіцієнтів)

Розглянемо ЛНДР другого порядку із сталими коефіцієнтами

$$y''+py'+qy=f(x). \qquad (10)$$

Можна показати, що загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y=y_{з.о.}+y_{ч.н.},$$

де $y_{з.о.}$ – загальний розв'язок ЛОДР, що відповідає даному ЛНДР; $y_{ч.н.}$ – будь який частинний розв'язок ЛНДР.

Знаходження загального розв'язку ЛНДР було розглянуто раніше, тому розглянемо знаходження будь-якого частинного розв'язку ЛНДР методом невизначених коефіцієнтів. Зауважимо, що цей метод застосовується лише для рівнянь із спеціальною правою частиною вигляду

$$f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x], \qquad (11)$$

де $P_n(x)$ і $P_m(x)$ – многочлени відповідно степенів n і m ;

Якщо права частина має вигляд (11), то частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.}=e^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x+Q_2(x)\sin\beta x]x^r,$$

де $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ – повні многочлени з невизначеними коефіцієнтами степеня l, який дорівнює більшому із степенів n і m ;

r – число, яке дорівнює кратності числа $\alpha+i\beta$, як кореня характеристичного рівняння.

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$2y''-y'-y=4xe^{2x}$$

Розв'язання. Це рівняння є ЛНДР другого порядку із сталими коефіцієнтами. Шукаємо його загальний розв'язок у вигляді

$$y=y_{з.о.}+y_{ч.н.}$$

Для знаходження $y_{з.о.}$ розглянемо ЛОДР

$$2y''-y'-y=0,$$

що відповідає даному ЛНДР. Його характеристичне рівняння

$$2k^2-k-1=0$$

має корені $k_1=1$ і $k_2=-\frac{1}{2}$; відповідно, загальний розв'язок ЛОДР має вигляд

$$y_{з.о.}=c_1e^{x}+c_2e^{-\frac{1}{2}x}.$$

В праву частину ЛНДР входить многочлен першого степеня; отже, частинний розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.}=(Ax+B)e^{2x}\cdot x^r.$$

Щоб знайти значення параметра r, необхідно розглянути комплексне число $\alpha+i\beta$, взявши α і β з правої частини рівняння. В нашому прикладі $\alpha=2$ (коефіцієнт при аргументі x у показнику степеня функції e^{2x}), а $\beta=0$ (β – це коефіцієнт при x в аргументі синуса або косинуса, що стоять у правій частині ; оскільки ж в нашому прикладі синус і косинус входять до правої частини з нульовим аргументом, то покладаємо $\beta=0$). Отже комплексне число $\alpha+i\beta$, яке визначається правою частиною розглядуваного ЛНДР, складається лише з дійсної частини і дорівнює 2

Перейдемо тепер до визначення параметра r. Оскільки серед коренів характеристичного рівняння нема числа 2, то кратність цього числа, як кореня характеристичного рівняння, дорівнює 0; тобто $r=0$. Отже, остаточно, частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.}=(Ax+B)e^{2x}.$$

Обчислюючи першу і другу похідні функції $y_{ч.н.}$ і підставляючи $y_{ч.н.}, y'_{ч.н.}, y''_{ч.н.}$ у задане ЛНДР, отримуємо

$$2e^{2x}(4Ax+4A+4B)-e^{2x}(2Ax+A+2B)-e^{2x}(Ax+B)=4xe^{2x},\ \text{де} \qquad (12)$$

$$y'_{ч.н.}=(Ax+B)'e^{2x}+(Ax+B)(e^{2x})'=Ae^{2x}+(Ax+B)e^{2x}\cdot 2=$$
$$=e^{2x}(A+2Ax+2B);$$
$$y''_{ч.н.}=(e^{2x})'(A+2Ax+2B)+e^{2x}\cdot(A+2Ax+2B)'=2e^{2x}(A+2Ax+2B)+$$
$$+e^{2x}(2A)=e^{2x}(4Ax+4A+4B).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в (12), отримуємо систему двох рівнянь з двома невідомими відносно невизначених коефіцієнтів

$$\begin{array}{l|l} x & 8A-2A-A=4 \\ x^0 & 8A+8B-A-2B-B=0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5A=4 \\ 7A+5B=0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо

$$A=\frac{4}{5}; \quad B=-\frac{28}{25}.$$

Підставляючи знайдені значення у частинний розв'язок, остаточно отримуємо

$$y_{ч.н.}=\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right)e^{2x}.$$

Отже, загальний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-\frac{1}{2}x}+\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right)e^{2x}.$$

<u>Приклад 10.</u> Знайти розв'язок задачі Коші для ЛНДР.

$$y''+y=7\sin x,$$
$$y|_{x=0}=1; \quad y'|_{x=0}=\frac{1}{2}.$$

Розв'язуючи характеристичне рівняння $k^2+1=0$, дістанемо $k_1=i$, $k_2=-i$; звідки $y_{з.о.}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Оскільки комплексне число $\alpha+i\beta$, яке визначається правою частиною, має вигляд $0+i$, то і розв'язок ЛНДР будемо шукати у вигляді

$$y_{ч.н.}=(A\cos x+B\sin x)x^{r}.$$

Для знаходження значення параметра r, врахуємо, що знайдене комплексне число $\alpha+i\beta=i$ є коренем характеристичного рівняння; отже, покладаємо $r=1$. Тоді частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.}=(A\cos x+B\sin x)x.$$

Диференціюючи двічі цей вираз і підставляючи знайдені похідні

у рівняння, отримуємо

$$y'_{ч.н.}=(-A\sin x+B\cos x)x+(A\cos x+B\sin x);$$
$$y''_{ч.н.}=(-A\cos x-B\sin x)x+(-A\sin x+B\cos x)-A\sin x+B\cos x=$$
$$=(-A\cos x-B\sin x)x-2A\sin x+2B\cos x;$$

$$(-A\cos x-B\sin x)x-2A\sin x+2B\cos x+(A\cos x+B\sin x)x=7\sin x,$$
$$-(A\cos x+B\sin x)x-2A\sin x+2B\cos x+(A\cos x+B\sin x)x=7\sin x,$$
$$-2A\sin x+2B\cos x=7\sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при синусі і косинусі, маємо

$$\begin{array}{l|l} \sin x & -2A=7 \\ \cos x & 2B=0 \end{array} \quad \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{7}{2} \\ B=0. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y_{ч.н.}=-x\cdot\frac{7}{2}\cos x,$$

а загальний розв'язок – вигляд

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{7}{2}x\cos x. \qquad (*)$$

Для знаходження розв'язку задачі Коші використаємо початкові умови. Обчислимо

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x-\frac{7}{2}\cos x+\frac{7}{2}x\sin x. \qquad (**)$$

Підставляючи $x=0$, $y=1$, $y'=\frac{1}{2}$ в рівності (*), (**), маємо

$$\begin{cases} 1=C_1\cos 0+C_2\sin 0-0 \\ \frac{1}{2}=-C_1\sin 0+C_2\cos 0-\frac{7}{2}\cos 0+0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=C_1 \\ \frac{1}{2}=C_2-\frac{7}{2} \end{cases}$$

Розв'язуючи отриману систему, дістанемо

$$C_1=1, \quad C_2=4.$$

Отже, шуканий розв'язок задачі Коші для ЛНДР має вигляд

$$y=\cos x+4\sin x-\frac{7}{2}x\cos x.$$

2. Функції кількох змінних.

2.1. Застосування диференціалів у наближених обчисленнях.

Нехай задано функцію $z=z(x,y)$. Для обчислення наближеного значення цієї функції у точці $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ застосовується формула

$$z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=z(x_0,y_0)+z'_x(x_0,y_0)\Delta x+z'_y(x_0,y_0)\Delta y,$$

де $z'_x(x_0,y_0)$, $z'_y(x_0,y_0)$ значення частинних похідних функції відповідно по аргументах x і y у точці (x_0,y_0).

<u>Задача 1.</u> Обчислити наближено

$$1{,}03^{1{,}98}$$

<u>Розв'язок.</u> Зрозуміло, що функція $z=x^y$. Покладемо $x_0=1$, $y_0=2$; тоді $\Delta x=0{,}03$, $\Delta y=-0{,}02$.

Обчислюючи значення функції і її частинних похідних у точці $(1,2)$, маємо

$$z(1,2)=1^2=1;$$
$$z'_x=yx^{y-1}, \quad z'_x(1,2)=2\cdot 1^{2-1}=2;$$
$$z'_y=x^y\ln x, \quad z'_y(1,2)=1^2\cdot\ln 1=0.$$

Підставляючи знайдені значення у наведену вище формулу, дістанемо

$$1{,}03^{1{,}98}\approx 1+2\cdot 0{,}03+0\cdot(-0{,}02)=1+0{,}06=1{,}06.$$

2.2. Дослідження функцій двох змінних на екстремум.

Методика дослідження функції двох змінних $z=z(x,y)$ на екстремум полягає в наступному:

1) знайти частинні похідні першого порядку z'_x і z'_y, прирівняти їх до нуля і розв'язати систему рівнянь

$$z'_x=0, \quad z'_y=0.$$

Кожна пара дійсних коренів цієї системі визначає одну стаціонарну точку досліджуваної функції. Нехай $P_0(x_0,y_0)$ – одна з них.

2) знайти частинні похідні другого порядку z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} і обчислити їх значення в кожній стаціонарній точці.

Позначимо

$$A=z''_{xx}\big|_{P_0(x_0,y_0)}; \quad B=z''_{xy}\big|_{P_0(x_0,y_0)}; \quad C=z''_{yy}\big|_{P_0(x_0,y_0)};$$

3) скласти і обчислити визначник другого порядку

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2;$$

4) якщо в досліджуваній стаціонарній точці $P_0(x_0,y_0)$ $\Delta>0$, то функція $z=z(x,y)$ у цій точці має екстремум, а саме максимум, якщо $A<0$, і мінімум, якщо $A>0$. Якщо $\Delta<0$, то в досліджуваній точці екстремуму немає. Якщо ж $\Delta=0$, то питання про екстремум функції вимагає додаткового дослідження.

<u>Задача 2.</u> Дослідити на екстремум функцію

$$z=-4+6x-x^2-xy-y^2.$$

Розв'язок. Знаходимо стаціонарні точки заданої функції

$$z'_x=6-2x-y; \quad z'_y=-x-2y$$

Розв'язавши систему $\begin{cases} 6-2x-y=0 \\ -x-2y=0, \end{cases}$

отримуємо $x=4$, $y=-2$.

Отже, задана функція має лише одну стаціонарну точку $P_0(4,-2)$.

Знаходимо тепер частинні похідні другого порядку і їх значення в точці

$$A=z''_{xx}\big|_{(4,-2)}=-2; \quad B=z''_{xy}\big|_{(4,-2)}=-1; \quad C=z''_{yy}\big|_{(4,-2)}=-2.$$

Склавши визначник і обчисливши його значення, маємо

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=4-1=3.$$

Оскільки $\Delta>0$ і $A<0$, то в точці $(4,-2)$ задана функція має максимум, значення якого дорівнює

$$z_{max}=z(4,-2)=-4+24-16+8-4=8.$$

2.3. Знаходження градієнта скалярного поля і похідної за напрямком.

Градієнтом скалярного поля $u=u(x,y,z)$ називається вектор

$$\overrightarrow{grad}\,u = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}.$$

Похідна функції $u=u(x,y,z)$ за напрямком, що характеризується вектором $\vec{l}$, в точці (x_0,y_0,z_0) обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = u'_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha + u'_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta + u'_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

Задача 3. Дано функцію $u = x^2y + xz^2 - 2y$, вектор $\vec{l}(1,2;-2)$ і точку $A(-1,0,3)$.

Знайти градієнт і похідну за напрямком вектора $\vec{l}$ цієї функції у точці A.

Розв"язок.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = 2xy + z^2, \quad u'_x(-1,0,3) = 9;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y = x^2 - 2; \quad u'_y(-1,0,3) = -1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u'_z = 2xz; \quad u'_z(-1,0,3) = -6;$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{1^2+2^2+(2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|} = \frac{1}{3}; \quad \cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|} = \frac{2}{3}; \quad \cos\gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|} = -\frac{2}{3}.$$

$$\overrightarrow{grad}\,u = 9\vec{i} - \vec{j} - 6\vec{k};$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 9\cdot\frac{1}{3} - 1\cdot\frac{2}{3} - 6\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = 3 - \frac{2}{3} + 4 = 7 - \frac{2}{3} = 6\frac{1}{3}.$$