Рекомендовано Вченою радою фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ" від 26 квітня 2012 р., протокол № 3

Укладачі: Селезньова Н.П., Селезньова Н.В., Рудик Т.О.

Завдання та методичні вказівки для самостійної роботи з основ теорії ймовірностей

У даному методичному посібнику містяться означення,теореми, формули з найбільш важливих розділів теорії ймовірностей. Наведено приклади та зразки розв'язання. Для самостійної роботи студентів складено 30 варіантів завдань з усіх розглянутих розділів теорії ймовірностей. Методичні вказівки прислужаться студентам різних факультетів «КПІ» та інших навчальних закладів, де у курсі навчання передбачено вивчення основ теорії ймовірностей. У першу чергу ці методичні розробки призначені для студентів факультету соціології та права.

Зміст

Поняття випадкової події

Більшість прикладних наук, у тому числі й економіка та соціологія, виявляють та досліджують закономірності, яким підпорядковуються реальні процеси. Ці закономірності мають не тільки теоретичну цінність, але й широко застосовуються у практиці, а саме в плануванні, прогнозуванні та управлінні.

Теорія ймовірностей це розділ математики, який вивчає закономірності випадкових явищ. Розглянемо основні поняття, на яких ґрунтується теорія ймовірностей.

Під **дослідом або експериментом** розуміємо таку сутність: дослідник зробив певні дії та отримав внаслідок цих дій певну інформацію. Наприклад підкинув монетку – подивився на неї – дізнався, що вона лежить гербом догори. Таку інформацію називають **подією**. Події можуть бути **елементарними** (не підлягають подальшому роздрібненню) та **складними чи складеними** (можуть бути подані у вигляді комбінації елементарних подій). Так, «монета випала гербом» - подія елементарна, «монета випала гербом два рази підряд» - подія складна, бо є комбінацією подій «монета випала гербом» та «монета випала гербом».

Події можуть бути ***достовірними*** - це події, що при визначених умовах обов'язково відбудуться, **неможливими** – це події, що при визначених умовах не можуть відбутись, ***випадковими*** - це події , що при визначених умовах можуть відбутись (безліч разів) або не відбутись. Випадкові події надалі позначатимемо великими латинськими літерами: A, B, C, D, $A_1, A_2, ..., A_n$.

Зауважимо, що подія, про яку відомо, що вона вже відбулася чи обов'язково відбудеться – за цим означенням є достовірною, а подія, яка могла відбутися, а могла і не відбутися, але ми не знаємо точно чи відбулася – випадкова. Тобто визначальним фактором є не фактор часу, а фактор нашої обізнаності з реальним станом справ, фіксованості конкретного можливого варіанта в реальності.

Також корисно розуміти, що при потребі достовірну подію можна розглядати як випадкову з імовірністю 1, а неможливу – як випадкову з імовірністю 0.

Приклад. Подія, яка полягає у тому, що завтра буде вихідний день, може бути достовірною чи неможливою (це залежить від того, який день тижня сьогодні, і від розпорядку роботи на даному підприємстві) і її можна вважати випадковою подією, результат розіграшу лотереї - також випадкова подія. Подія «настає кінець світу» є унікальною подією, тобто може відбутись лише один раз, не може відноситись до випадкових подій.

Події називаються **несумісними** , якщо поява однієї із них виключає появу інших в одному і тому ж досліді.

Приклад. Якщо монета випала гербом – вона точно випала не цифрою. Тому події «монета випала гербом» та «монета випала цифрою» є несумісними.

Події називаються **сумісними**, якщо поява однієї із них не виключає можливості появи інших.

Приклад. При підкиданні трьох гральних кубиків на гранях кожного кубика випадає певна кількість очок. Події A_1 - на першому кубику випало одне очко, A_2 - на другому кубику випало також одне очко, A_3 - на третьому кубику випало чотири очка в сукупності є сумісними подіями, бо при одночасному підкиданні кубиків всі ці події можуть відбутись одночасно.

Випадкові події утворюють **повну групу подій**, якщо при кожному досліді може відбутись будь-яка із цих подій і не може відбутись будь-яка інша подія, несумісна з ними.

Тепер можна кожну подію із повної групи попарно несумісних подій називати результатом даного досліду. В доповнення вище згаданому означенню, результати таких дослідів називають **елементарними подіями**. Елементарні події позначатимемо так: $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$.

Приклад. При підкиданні монети обов'язково випаде або герб або цифра, отже події A_1 - випаде цифра, A_2 - випаде герб при підкиданні монети утворюють повну групу подій (адже інших подій у даному досліді не може відбутись, подію: «монета стане на ребро» вважаємо неможливою). Події A_1 та A_2 є елементарними подіями.

Приклад. При підкиданні грального кубика можуть випасти очки від 1 до 6. Подія «випало певне очко (наприклад «3»)» є елементарною.

Події називаються **рівноможливими**, якщо за умовою досліду немає причини вважати яку-небудь із них більш можливою ніж іншу.

Приклад. Події "випаде герб", "випаде цифра" при підкиданні монети є рівноможливими, а наприклад події що у однієї жінки народиться хоча б одна дитина, народиться двійня не є рівно можливими.

Дві події, що утворюють повну групу подій називаються **протилежними**. Протилежні події позначатимемо як A та $\bar{A}$.

Приклад. Події «при підкиданні монети випаде герб - цифра» є протилежними. «Стрілець влучив - промахнувся при пострілі» також протилежні події.

Приклад. При підкиданні грального кубика можуть випасти очки від 1 до 6. Подія «випало певне очко (наприклад «3»)» є елементарною.

Простором елементарних подій Ω називається множина всіх елементарних подій при даному спостереженні. Цей простір може бути скінченним, зліченним чи незліченним. Інколи елементарні події $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ називають точками простору Ω.

Розглянемо повну групу рівно можливих несумісних випадкових подій. Такі події інколи називають результатами (чи наслідками). Ті елементарні результати, в яких подія, що нас цікавить настає, назвемо **сприятливими цій події.**

Надалі ми часто користуватимемося терміном «**навмання**». Наприклад, якщо ми навмання дістаємо кульку із урни, то це означає, що будь - яка кулька із цієї урни має однакові шанси з іншими кульками бути витягнутою із цієї урни. При цьому нас не цікавить, яким конкретно способом ми реалізували діставання кульки із урни. Головне, щоб виконувався принцип однакової можливості кожної кульки бути витягнутою із урни. Найбільші помилки в соціологічних опитуваннях полягають саме в недотриманні цього принципу, адже досить складно забезпечити однакові шанси всіх респондентів бути опитаними. Взагалі існують певні методики, організації опитування респондентів, так щоб кожен респондент мав однакові шанси бути опитаним, але це не є предметом нашої роботи.

Приклад. В урні є 6 пронумерованих куль (на кожній кулі поставлено по одній цифрі від 1 до 6). Кулі з цифрами 1,2,3,4 – білі, інші – чорні.

Навмання беруть одну кулю. Тоді маємо 4 події, які сприяють появі білої кулі (поява куль з цифрами 1,2,3,4) і дві події, які сприяють появі чорної кулі (поява куль з цифрами 5, 6).

Подію A можна ототожнити з підмножиною простору Ω, елементи якої є елементарними подіями, сприятливими події A, аналогічно подія B є підмножиною Ω, елементи якої є елементарними подіями, сприятливими події B, і т.п. Отже, сукупність усіх подій, які можуть відбутись в результаті досліду є сукупністю всіх підмножин Ω. У свою чергу Ω є подією, яка настає при будь-якому результаті досліду, а отже, є достовірною подією, порожня підмножина простору Ω є неможливою подією, бо вона не відбудеться ні при якому випробовуванні.

Одним із основних понять теорії ймовірностей є поняття міри можливості настання певної події. Існує декілька означень цього поняття. Найпростішим із них є класичне означення ймовірності, але воно має застосування тільки до досить вузького кола задач, а саме до задач, які називають задачами схеми урн та куль.

Операції над подіями

Означення. Сумою двох подій A та B називається подія C така, що відбувається тоді, коли відбуваються принаймні одна з двох подій A чи B; записують $C = A + B$ (або подія A або подія B); інтерпретуючи події як множини, можна записати: $C = A \bigcup B$.

Означення. Добутком двох подій A та B називається подія C така, що відбувається тоді, коли відбуваються дві події A та B одночасно (і подія A, і подія B); записують: $C = A \cdot B = AB$ або $C = A \bigcap B$.

Означення. Різницею двох подій A та B називається подія C така, що відбувається тоді, коли відбувається подія A та не відбувається подія B; записують: $C = A - B$, або у випадку, коли A, B, C розуміти як множини, то $C = A \setminus B$.

Означення. Подією, протилежною до події A, називається подія $\bar{A}$, яка відбувається, коли не відбувається подія A, і навпаки: $\bar{A} = \Omega - A$.

Деякі властивості операцій над подіями

1. $\bar{\bar{A}} = A.$
2. $\bar{A} = \Omega - A.$
3. $A + B = B + A;\ AB = BA.$
4. $(A + B) + C = AC + BC;\ (AB)C = A(BC).$
5. $A + A = A;\ AA = A.$
6. $A + \bar{A} = \Omega.$
7. $A \cdot \bar{A} = \varnothing.$
8. $A + \Omega = \Omega;\ A \cdot \Omega = A.$
9. $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B};\ \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}.$

Приклад. Нехай $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ - множина елементарних подій, що відповідає підкиданню шестигранного кубика один раз, $A = \{3; 6\}$ - подія, що полягає у випаданні на верхній грані числа, кратного 3, а $B = \{2; 4; 6\}$ - подія, що полягає у випаданні парного числа; $C = \{1; 3; 5\}$ - подія що полягає у випаданні непарного числа. Тоді маємо:

$A + B = A \bigcup B = \{2; 3; 4; 6\}$, тобто випаде число або кратне двом, або кратне трьом;

$A \cdot B = A \bigcap B = \{6\}$, тобто випаде парне число кратне трьом;

$C \cdot B = \varnothing$, тобто ці події не мають спільних елементів, можна ще сказати, що ці події є несумісними;

$B - A = \{2; 4\}$; $A - B = \{3\}$; $\bar{C} = B$.

Поняття ймовірності події

Класичне означення ймовірності. Імовірністю події A називають відношення числа m сприятливих подій події A до загального числа n усіх рівноможливих несумісних елементарних подій, що утворюють повну групу

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1).$$

(Імовірність події A дорівнює відношенню m та n).

Імовірність події є безрозмірною величиною, яку досить часто (зокрема, в соціологічних дослідженнях) визначають у відсотках.

Зауваження. Зрозуміло, що сприятливих подій не може бути загалом більше ніж загальна кількість всіх подій у даному досліді, отже, завжди справджується нерівність: $0 \le m \le n$. Звідси одразу випливає, що:

1) $0 \le P(A) \le 1$;

2) за таким означенням імовірність достовірної події дорівнює 1. Дійсно, якщо подія A є достовірною, то будь-який результат досліду сприяє цій події, але тоді в формулі (1) $m = n$ і, отже, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$;

3) імовірність неможливої події дорівнює нулю, адже, якщо подія A є неможливою, то ні один із результатів досліду не сприяє їй і, отже, $m = 0$.

Приклад. Якщо в групі студентів 15 дівчат та 10 хлопців, то ймовірність того що викладач, викликаючи студента навмання, викличе хлопця (подія A) визначається так:

$P(A) = \frac{10}{15+10} = \frac{2}{5} = 0,4$ або ймовірність такої події дорівнює 40%.

Окрім класичного існують й інші способи означення ймовірності. Розглянемо **аксіоматичне означення ймовірності.** Перша ідея побудови теорії ймовірностей на основі такого означення належить російському математику С. М. Бернштейну. Він в основу такого означення поклав якісне порівняння подій в залежності від більшої чи меншої їх вірогідності. На початку 1930-х років академік А.М. Колмогоров знайшов інший підхід, який пов’язував теорію ймовірностей з сучасною метричною теорією функцій та теорією множин. Таке означення на сьогоднішній день вважається найбільш прийнятним.

Аксіоми теорії ймовірностей

Кожній події A поставимо у відповідність деяке число, яке назвемо ймовірністю події A, тобто $P(A).$ Завдяки тому, що будь яку подію можна розглядати як множину, то ймовірність події можна розглядати як функцію множини. Імовірність події має задовольняти таким аксіомам:

1. Імовірність події є функція, що діє із множини подій у множину дійсних чисел відрізка $[0;1]$.

2. Імовірність будь – якої події є невід’ємною $P(A) \geq 0$.

3. Імовірність достовірної події дорівнює 1: $P(\Omega) = 1$ (Ω - повний простір подій).

4. Імовірність суми несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій (тобто, якщо $A_i \cdot A_j = 0,\ (A_i \bigcap A_j = \varnothing)$ ($\varnothing$ - порожня множина, тобто це означає, що множини A_i, A_j не перетинаються; множини A_i, A_j розуміємо як деякі події), тобто:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Наслідки:

1. $P(A) = 1 - P(\bar{A});$

2. $P(\varnothing) = 0;$

3. $P(A) \leq P(B),$ якщо $A \subset B$;

4. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB);$

5. $P(A + B) \leq P(A) + P(B).$

Елементи комбінаторики

Для того, щоб обчислювати ймовірності подій необхідно знати основні правила та формули комбінаторики. При розв'язуванні комбінаторних задач доводиться мати справу із скінченними множинами, для яких буває істотним порядок слідування елементів.

Означення. Множина називається впорядкованою, якщо кожен елемент цієї множини має певний порядковий номер.

Вибрати елемент із множини означає деяким способом позначити його як обраний. Різні способи такого позначення вважаємо рівносильними. Тобто, властивість бути обраним, може набувати лише двох значень: 0 або 1, тобто елемент або не є обраним або є обраним (повна група подій).

Всі правила комбінаторики в своїй основі базуються на таких двох принципах:

1. **Правило суми.** Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, а об'єкт B - k способами, то об'єкт «або A, або B» можна вибрати $m+k$ способами.

2. **Правило добутку.** Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, і незалежно від кожного такого вибору, об'єкт B - k способами, то пару об'єктів «A і B» можна вибрати $m \cdot k$ способами.

Досить важливим у комбінаториці є поняття факторіалу.

Означення. Факторіал – функція, яка визначена на множині цілих невід'ємних чисел і ставить у відповідність даному числу n добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно. Позначають це так: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$ За означенням вважають, що $0! = 1.$

Приклад. $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$

Нехай маємо множину A, що складається з n елементів, розглянемо структури, які можна побудувати з її елементів.

Означення. Розміщенням із n елементів по $k\,(k \le n)$ називається будь-яка впорядкована підмножина B множини A, така, що містить k елементів із даних, причому два розміщення вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли вони співпадають за складом та порядком елементів

Розміщення позначають: A_n^k або $P(n,m)$. Кількість розміщень обчислюють за такою формулою: $A_n^k = n(n-1)(n-2)....(n-k+1)$ (на першу позицію елемент із усієї сукупності елементів можна обрати n способами, на другу позицію – $(n-1)$ способами і т. д., і на кожному такому кроці вибір є незалежним від попередніх виборів елементів). Цю формулу можна також записати у такому вигляді: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Приклад. Скільки різних чотирицифрових натуральних чисел можна скласти з чисел 1,2,3,4,5 за умови, що в кожне число кожна із цих цифр входить не більше одного разу?

$A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120.$

Перестановкою з n елементів деякої множини називається будь – яка впорядкована множина з усіх цих елементів, при чому, дві такі множини вважаються різними, якщо вони відрізняються між собою порядком слідування елементів.

Досить часто зручно перестановку зобразити у вигляді таблиці, що складається з двох рядків:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{pmatrix},$$

де у нижньому рядку написано ті самі числа $1,2,...,n$, але у іншому порядку; наведена таблиця означає, що 1 переходить в i_1, 2 – в i_2 і т. д. При цьому одна і та ж сама перестановка допускає кілька різних записів, тому що важливим є те, що під чим стоїть у таблиці. Наприклад,

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&3\end{pmatrix}.$$

Із різних записів однієї і тієї ж перестановки найчастіше обирають ту, де в першому рядку числа ідуть у порядку зростання, але це не є обов'язковим.

Також існує більш компактний запис – циклічний (його люблять алгебраїсти). А саме – замість таблиці з двох рядків записують один рядок таким чином: відкрили дужку, записали одну цифру (найчастіше 1, але не обов'язково), далі записали ту цифру, в яку вона переходить і так далі, поки остання із записаних цифр не перейде знову в першу. Далі знову відкривають дужку, записують ту цифру, яка ще не була записана, і так само виписують для неї цикл. І так, поки всі цифри не будуть записані. Якщо ж цифра переходить сама у себе – її в повній циклічній формі пишуть саму в круглих дужках, а в скороченій не пишуть взагалі.

Приклад:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&5&4\end{pmatrix}=(13)(2)(45)=(13)(45)$$

Число перестановок з n елементів позначають P_n. З означення випливає, що $P_n = A_n^n = n!$.

Приклад. Скількома способами можна розставити у ряд на полиці 5 різних книжок з історії та 3 різні книжки з економіки так, щоб книжки з економіки стояли поруч?

Розв'язання: об'єднаємо книжки з економіки умовно в одну книжку. Тоді загалом маємо 6 книжок, які можна міняти місцями одна з одною 6! способами. Книжки з економіки також можна між собою міняти місцями 3! способами, після цього, за правилом добутку маємо: всього способів розставити таким чином книжки на книжковій полиці $6!\cdot 3! = 720\cdot 6 = 4320$.

Сполученням (комбінацією) з n елементів деякої множини по k $(k \le n)$ називається будь-яка підмножина B множини A, така що складається з n елементів; причому дві такі підмножини вважаються різними, якщо вони відрізняються одна від одної складом елементів.

Кількість комбінацій з n елементів по k позначається C_n^k або $\binom{n}{k}$. (останнє позначення частіше зустрічається в зарубіжних джерелах). Обчислюють кількість комбінацій за такою формулою:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Приклад. Скількома способами можна обрати 3 особи із 6:

а) на 3 однакові посади? *Розв'язання:* $C_6^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = 20.$

б) на 3 різні посади? *Розв'язання:* $A_6^3 = 6\cdot 5\cdot 4 = 120.$

Умовна ймовірність події

Означення. Імовірність події A, обчисленої за умови настання події B, називається умовною ймовірністю події A і позначається $P(A/B)$ або $P_B(A)$.

Означення. Дві події називаються незалежними, якщо поява однієї із них не змінює ймовірності настання іншої.

Умову незалежності події A від події B записують у вигляді однієї із двох еквівалентних рівностей: $P(A) = P_B(A),\ P(B) = P_A(B)$.

Теорема добутку ймовірностей. Імовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї із них на умовну ймовірність другої, знайдену в припущенні, що перша подія відбулась.

$$P(AB) = P(A)\cdot P_A(B).$$

Наслідок. Узагальнення на довільну скінчену кількість подій, при умові, що жодна із імовірностей подій не дорівнює нулю (тобто неможливі події тут не розглядаються).

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n),$$

тобто ймовірність добутку декількох подій дорівнює добутку ймовірності однієї із цих подій на умовні ймовірності інших; при цьому умовна ймовірність кожної наступної події обчислюється в припущенні, що всі попередні події відбулись.

Якщо ми маємо не дві, а більшу кількість подій, то виконання тільки однієї рівності $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$ не завжди означає незалежність цих подій. Адже при такій рівності події можуть виявитись залежними.

Приклад. У студента за розкладом протягом дня три пари: з математики, історії та фізики. Студент з однаковою ймовірністю може прогуляти першу, або другу або третю пару, або цілий день (тільки дві пари прогуляти студенту невигідно, бо деканат у цьому випадку зарахує прогул цілого дня). Якщо події полягають у тому, що A_1 - студент прогуляв математику, A_2 - історію, A_3 - фізику. Тоді $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$. Це зрозуміло з наступних міркувань: всього маємо 4 можливих варіанта:

1. пропущено першу пару;

2. пропущено другу пару;

3. пропущено третю пару;

4. пропущено всі три пари.

Події A_1 сприяє 1 -й та 4 - й випадок, аналогічно маємо сприятливі випадки для подій A_2 та A_3. Події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні, бо із того, що студент прогуляв, наприклад, математику, ніяк не випливає, прогуляв він чи не прогуляв також і історію. Аналогічно маємо:

$$P_{A_2}(A_1) = P_{A_3}(A_1) = P_{A_1}(A_2) = P_{A_3}(A_2) = P_{A_1}(A_3) = P_{A_2}(A_3) = \frac{1}{2}.$$

$P_{A_2}(A_1)$ - означає ймовірність того, що студент прогулює математику, якщо відомо, що він прогуляв історію. Ця ймовірність дорівнює $\frac{1}{2}$, тому, що всього подій є дві: прогуляти історію або всі три пари, сприятлива подія тільки - одна - прогуляти всі 3 пари.

Якщо ж одночасно відбулось дві події - студент прогуляв, наприклад, математику і історію, то третя подія – прогул фізики обов'язково відбудеться. Отже: $P_{A_1A_2}(A_3)=1$ і аналогічно, $P_{A_1A_3}(A_2)=1$, $P_{A_2A_3}(A_1)=1$; отже, ймовірність кожної із подій A_1, A_2, A_3 змінилась, і ці події в сукупності є залежними.

Означення. Події $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються **незалежними в сукупності,** якщо для будь-якого $k=1,2,3,...,n$ і для будь-якого набору різних індексів $i_1, i_2, ..., i_n$ має місце рівність: $P(A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot ... \cdot P(A_{i_n})$.

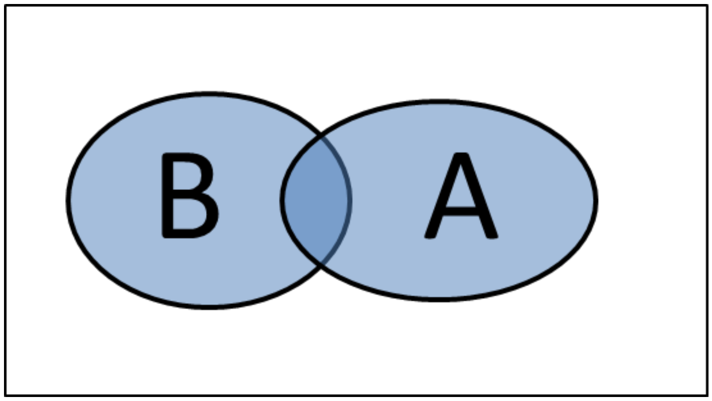
Зауваження. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ незалежні в сукупності, то вони попарно незалежні, тобто будь-які дві події A_i, A_j незалежні. Обернене твердження, в загальному випадку, є хибним: із попарної незалежності не випливає незалежність в сукупності.

При розв'язуванні задач у яких необхідно знайти ймовірність суми двох або декількох сумісних подій, застосовують теорему додавання подій.

Теорема додавання подій. Імовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без імовірності їх добутку, тобто

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Цю рівність добре демонструє відома діаграма Венна:



Наслідок 1. Якщо події A та B несумісні, то ймовірність суми таких подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $P(A+B)=P(A)+P(B).$

Наслідок 2. У випадку трьох і більше подій зручніше перейти до обчислення ймовірності протилежної події:

$B=\overline{A_1+A_2+...+A_n}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot...\cdot\overline{A}_n$ (це випливає з 9 - ї властивості операцій над подіями). Тоді $P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot...\cdot\overline{A}_n),$

тобто, ймовірність суми декількох сумісних подій $A_1+A_2+...+A_n$ дорівнює різниці між одиницею і ймовірністю добутку протилежних подій.

Формула повної ймовірності та формула Байеса (Bayes)

Формули повної ймовірності та Байеса є наслідками двох основних теорем теорії ймовірності – теореми додавання та добутку ймовірностей.

Теорема. Якщо подія A може відбутись тільки за умови того, що відбудеться одна із подій (гіпотез) $H_1,H_2,...,H_n$, які утворюють повну групу подій, то ймовірність події A дорівнює сумі добутків імовірностей кожної із цих подій (гіпотез) на відповідні умовні ймовірності події A:

$$P(A)=P_{H_1}(A)\cdot P(H_1)+P_{H_2}(A)\cdot P(H_2)+...+P_{H_n}(A)\cdot P(H_n)=\sum_{i=1}^{n}P_{H_i}(A)\cdot P(H_i). \quad (1)$$

Ця формула називається **формулою повної ймовірності**.

Наслідком теореми добутку ймовірностей та формули повної ймовірності є **формула Байеса**:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \qquad (2)$$

де $P(A)$ знаходимо за формулою (1).

Формули (1) та (2) дозволяють переоцінити ймовірності (подій) гіпотез $H_1, H_2, ..., H_n$ після того, як стане відомим результат випробування, наслідком якого є подія A, тобто формула Байеса дозволяє "поміняти місцями причину та наслідок": за відомим фактом події обчислити ймовірність того, що ця подія відбулась з певною ймовірністю завдяки відомому факту.

Значення формули Байеса полягає у тому, що при настанні події A, можна перевіряти прийняті до досліду гіпотези. Такий підхід називається Байесовським і дає можливість коректувати управлінські рішення.

Приклад. За результатами перевірки контрольних робіт студентів з математики виявилось, що в першій групі отримали позитивну оцінку 8 студентів із 15, а у другій групі – 9 із 18. Знайти ймовірність того, що навмання обрана робота, яка має позитивну оцінку, обрана із робіт другої групи.

Розв'язання: позначимо подію «контрольна робота отримала позитивну оцінку» через A, гіпотези H_1 - робота належить студенту із першої групи, H_2 - робота належить студенту із другої групи, тоді: $P(H_1) = \frac{15}{23}$, $P(H_2) = \frac{18}{23}$, $P_{H_1}(A) = \frac{8}{15}$, $P_{H_2}(A) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$. Підставивши ці ймовірності у формулу (1), маємо: $P(A) = \frac{15}{23} \cdot \frac{8}{15} + \frac{18}{23} \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{23}$. Застосувавши формулу (2), отримаємо: $P_A(H_2) = \frac{\frac{18}{23} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{17}{23}} = \frac{9}{17} = 0,529$. Отже, ймовірність того, що навмання взята контрольна робота з позитивною оцінкою належить студенту з другої групи дорівнює $\approx 53\%$.

Повторні незалежні досліди

В задачах соціології та економіки досить часто доводиться мати справу з задачами, які можна представити у вигляді подій, що багаторазово повторюються за даних сталих умов. Досить часто необхідно знайти ймовірність того, що подія A відбудеться рівно k раз серії n дослідів.

Якщо ймовірність події A в кожному досліді не змінюється в залежності від результатів інших дослідів (в серії n дослідів), то такі досліди називаються **незалежними відносно події A.**

Нехай здійснюється серія із n незалежних в сукупності дослідів і у кожному із цих дослідів подія A може відбутись з ймовірністю p і не відбутись з ймовірністю

$$q = 1 - p. \qquad (3)$$

Тоді таку серію дослідів називають **схемою Бернуллі.**

Теорема. Якщо ймовірність p настання події A в кожному досліді є сталою, то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A відбудеться рівно k раз у n незалежних дослідах обчислюється за такою формулою:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (4)$$

Ця формула носить назву **формули Бернуллі.**

Наслідок. Найімовірніше число m_0, якому в схемі Бернуллі відповідає найбільша ймовірність обчислюється із наступного співвідношення:

$$(n+1)p - 1 \le m_0 \le (n+1)p. \qquad (5)$$

Приклад. В кімнаті 4 лампочки. Для кожної лампочки ймовірність того, що вона буде працювати протягом року дорівнює 0,75.

1). Яка ймовірність того, що протягом року не вийде з ладу 3 лампочки?

2). Яка ймовірність того, що протягом року не вийдуть з ладу від однієї до трьох лампочок?

3). Яке найімовірніше число лампочок, що не вийдуть з ладу протягом року? Яка ймовірність цієї події?

Розв'язання:

1). Імовірність того, що протягом року з ладу не вийде 3 лампочки, обчислимо застосовуючи формулу (3), при цьому врахуємо, що

$n=4;\ p=0,75;\ q=1-p=1-0,75=0,25;\ k=3.$ Тоді $p_4(3)=C_4^3\cdot 0,75^3\cdot 0,25^1=0,422$.

2). Імовірність того, що протягом року не вийдуть з ладу від однієї до 3 лампочок:

$p_4(1\le k\le 3)=p_4(1)+p_4(2)+p_4(3)=C_4^1\cdot 0,75\cdot 0,25^3+C_4^2\cdot 0,75^2\cdot 0,25^2+C_4^3\cdot 0,75^3\cdot 0,25=0,68.$

3). Найімовірніше число лампочок, які вийдуть з ладу протягом року, обчислимо за формулою (5). При цьому $p=0,25;\ n=4.$

$$(4+1)\cdot 0,25-1\le m_0\le (4+1)\cdot 0,25;\quad 0,25\le m_0\le 1,25.$$

Отже, $m_0=1$, тобто протягом одного року найімовірніше вийде з ладу одна лампочка. Імовірність цієї події обчислимо за формулою (4).

$$p_4(1)=C_4^1\cdot 0,25\cdot 0,75^3=0,423.$$

Локальна та інтегральна формули Муавра-Лапласа

У випадках, коли необхідно обчислити ймовірність $P_n(k)$ появи події A рівно k разів при великій кількості дослідів n, наприклад $P_{830}(260)$, формулою Бернуллі (4) стає досить складно користуватись. Тому в таких випадках користуються наближеними формулами, які називають асимптотичними. Ці формули носять назву: "локальна та інтегральна формули Муавра – Лапласа" та теорема Пуассона.

Точність наближених формул для обчислення ймовірностей подій під час повторних випробовувань для великих значень n знижується з наближенням значення p до нуля (тобто p мале). У цьому випадку застосовується асимптотична формула Пуассона.

Теорема Пуассона. Якщо ймовірність p того, що подія A відбудеться у кожному досліді прямує до нуля ($p \to 0$) при необмеженому зростанні числа дослідів n ($n \to \infty$), причому добуток np прямує до сталого числа λ ($np \to \lambda$), то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A відбудеться рівно k раз в n незалежних дослідах, задовольняє граничній рівності:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = P_n(\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \qquad (6)$$

Строго кажучи, умова теореми $p \to 0$ при $n \to \infty$ так що $np \to \lambda$, суперечить припущенню в схемі Бернуллі, згідно якому, ймовірність настання події в кожному досліді $p = const$. Але, якщо ймовірність p - є сталою і малою, число дослідів n - велике і число $\lambda = np$ задовольняє такій умові: $\lambda \le 10$, то із граничної рівності (6) випливає наближена рівність:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = P_k(\lambda), \qquad (7)$$

яка носить назву **формули Пуассона**.

Приклад. В магазин привезли 800 пляшок мінеральної води. Імовірність того, що при перевезенні пляшка розіб'ється дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що магазин отримає не більше 5 розбитих пляшок.

Розв'язання. За умовою маємо: $n = 800;\ p = 0,004;\ \lambda = np = 3,2.$ Застосуємо формулу (7).

$$p_{800}(0 \le k \le 5) = p_{800}(0) + p_{800}(1) + p_{800}(2) + p_{800}(3) + p_{800}(4) + p_{800}(5) =$$
$$= 0,041 + 0,13 + 0,209 + 0,223 + 0,178 + 0,114 = 0,895.$$

Теореми Муавра – Лапласа.

Нехай у кожному із n незалежних дослідів подія A може відбутись із ймовірністю p, та не відбутись із ймовірністю $q = 1 - p$. Нехай $P_n(k)$ імовірність того, що в n дослідах подія A відбудеться рівно k раз, а $P_n(\alpha \le k \le \beta)$ - імовірність того, що число появ події A міститься між α та β.

Локальна теорема Лапласа. Якщо n є достатньо великим числом, а $p \neq 0,\ p \neq 1$, то

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (8)$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функція Гауса (для цієї функції складено таблиці, які можна знайти у будь–якому підручнику з теорії ймовірностей або див. додаток 1).

Інтегральна теорема Лапласа. Якщо n є достатньо великим числом, а $p \neq 0,\ p \neq 1$, то має місце така формула:

$$P_n(\alpha \le k \le \beta) \approx \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right)\right), \qquad (9)$$

де $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функція Лапласа (для цієї функції також складено таблиці, див. додаток 2). Для того, щоб користуватись таблицями при обчисленні значень функцій Гауса та Лапласа, корисно знати деякі властивості цих функцій:

1. $\varphi(-x) = \varphi(x);\ \Phi(-x) = -\Phi(x);$

2. При $x > 4$ $\varphi(x) \approx 0,$ а при $x > 4$ $\Phi(x) \approx 1.$

Зауваження. Обираючи формулу для обчислень за схемою Бернуллі бажано керуватись такими міркуваннями:

1. Якщо n - велике, а p - "не мале", тобто $npq \ge 20$, де q обчислюється за формулою (3), то для знаходження ймовірностей $P_n(k)$ та $P_n(\alpha < k < \beta)$ застосовують формули (8) або (9) відповідно.

2. Якщо n - велике, а p - мале настільки, що $np \le 10$, то для знаходження $P_n(k)$ застосовують формулу (7). У цьому ж випадку для обчислення $P_n(\alpha < k < \beta)$ можна застосовувати формулу $P_n(\alpha < k < \beta) \approx e^{-\lambda} \sum_{k=\alpha}^{\beta} \frac{\lambda^k}{k!}$, якщо у цій формулі фігурує невелика кількість доданків.

Наслідки з інтегральної теореми Муавра – Лапласа

1. При виконанні умов теореми Муавра – Лапласа ймовірність того, що:

а) число k настання події A відрізняється від добутку np не більше ніж на величину $\varepsilon > 0$ (за абсолютною величиною), обчислюється за такою формулою:

$$P_n(|k - np| \le \varepsilon) \approx \Phi(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}); \qquad (10)$$

б) відносна частота $\frac{k}{n}$ події A міститься в межах від α до β, тобто

$$P_n(\alpha \le \frac{k}{n} \le \beta) \approx \frac{1}{2}(\Phi(z_2) - \Phi(z_1)), \qquad (11)$$

де $z_1 = \dfrac{\alpha - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$, $z_2 = \dfrac{\beta - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$;

в) відносна частота $\frac{k}{n}$ події A відрізняється від її ймовірності p не більше ніж на величину $\Delta > 0$ (за абсолютною величиною:

$$P_n(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \Delta) \approx \Phi(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}). \qquad (12)$$

Приклад. Почайнівський монастир в середньому щодня приймає близько 100 паломників та туристів, які вдень будуть обідати. Кожен із них обирає монастирську їдальню або кафе у сусідньому містечку з рівними ймовірностями і незалежно один від одного. Власник кафе хоче, щоб з імовірністю 0,98 всі, хто прийде до його кафе могли там одночасно пообідати. Скільки місць для цього має бути в кафе?

Розв'язання. Нехай подія A полягає у тому, щоб відвідувач монастиря пообідав у кафе. За умовою задачі: $p = p(A) = 0,5, \quad n = 100.$ Нам необхідно знайти таке найменше число відвідувачів α, щоб імовірність одночасного приходу не менше ніж α відвідувачів із числа $n = 100$,з ймовірністю p приблизно дорівнювала ймовірності переповнення кафе, тобто $1 - 0,98 = 0,02.$ Отже, застосувавши формулу (8), маємо: $P_{100}(\alpha < k < 100) \approx 0,02.$Число α знайдемо із цієї наближеної рівності. $\sqrt{npq} = 5, \; z_1 = \frac{\alpha - 50}{5} = \frac{\alpha}{5} - 10, \; z_2 = \frac{100 - 50}{5} = 10.$

$$P_{100}(\alpha < k < 100) \approx \frac{1}{2}(\Phi(10) - \Phi(\frac{\alpha}{5} - 10)) \approx 0,02 \Rightarrow \Phi(\frac{\alpha}{5} - 10) \approx 0,96.$$

За таблицями для функції $\Phi(x)$ (додаток 1), знаходимо: $\frac{\alpha}{5} - 10 \approx 2,06$. Отже $\alpha \approx 60,3$, тобто в кафе має бути 61 місце.

Випадкові величини

Означення. Дискретною випадковою величиною називають таку випадкову величину, множина можливих значень якої є або скінченою або нескінченою, але обов'язково зліченною. (Зліченними називаються множини, елементам яких завжди можна поставити у відповідність множину натуральних чисел, тобто всі елементи таких множин можна пронумерувати).

Означення. Неперервною випадковою величиною називають таку випадкову величину, яка може набувати будь–яке дійсне значення із деякого скінченного чи нескінченного проміжку.

Приклади дискретних випадкових величин: сукупність оцінок, які отримали студенти з певного предмета під час сесії, кількість бракованих виробів у навмання відібраній партії із 30 виробів, кількість "гербів", що випали при десятикратному підкиданні монети.

Приклади неперервних випадкових величин: кількість опадів, що випали за певний період часу в певній місцевості, витрати пального на кілометр шляху, дальність польоту артилерійського снаряду у серії пострілів.

Перелічення всіх можливих значень випадкової величини не дає достатньо повного уявлення про неї, адже часто необхідно знати з якою частотою з'являються певні значення випадкової величини. Тільки визначивши всі можливі значення $x_1, x_2, ..., x_n$ випадкової величини X (через X позначено множину всіх значень випадкової величини $x_1, x_2, ..., x_n$, фактично X - вектор із координатами $x_1, x_2, ..., x_n$) і правило, за яким кожному значенню випадкової події $X = x_i$, $i = 1, 2, ..., n$, ставиться у відповідність певна ймовірність $P = p_i$, $i = 1, 2, ..., n$ того, що ця подія відбудеться, можна сказати, що ми маємо повну інформацію про випадкову величину.

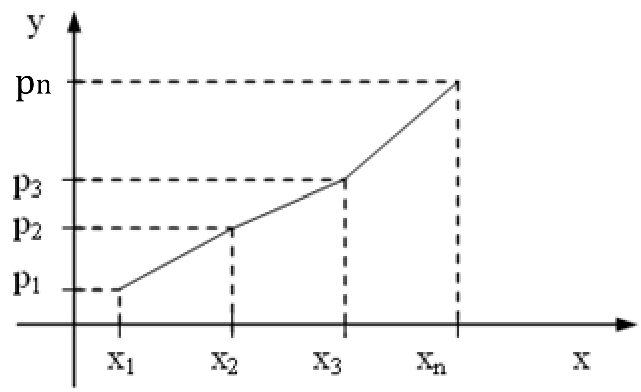
Означення. **Законом розподілу дискретної випадкової величини** називається функція на множині допустимих значень випадкової величини, яка кожному значенню випадкової величини ставить у відповідність імовірність її набуття.

Розподіл випадкової величини, так само як і в елементарній математиці функцію, можна задавати табличним способом, графічно, аналітично (за допомогою формул). При табличному заданні закону розподілу, перший рядок таблиці містить всі можливі значення випадкової величини (найчастіше в порядку зростання), а другий рядок – відповідні ймовірності.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Ця таблиця називається **рядом розподілу дискретної випадкової величини.**

Ряд розподілу можна задати графічно, якщо по осі абсцис (OX) відкласти всі можливі значення випадкової величини $x_i,\ i=1,2,...n$, а по осі ординат (OY) – імовірності цих значень $p_i,\ i=1,2,...,n.$ З'єднавши точки (x_i, p_i) послідовно відрізками прямої лінії, отримаємо ламану, яку називають многокутником імовірностей. Зауважимо, що сума ординат многокутника дорівнює одиниці. Ця властивість многокутника розподілу є визначальною. Якщо у прямокутній системі координат задано деяку ламану, що задовольняє означенню функції, яка має попередньо вказану властивість, то така ламана задає закон розподілу деякої випадкової величини.



ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Універсальним способом задання закону розподілу ймовірностей є **функція розподілу** $F(x)=P(X<x).$ (13)

Інколи функцію $F(x)$ називають інтегральною функцією розподілу.

Для дискретних випадкових величин $F(x)=\sum_{x_i<x} p(x_i),\ i=1,2,...,n.$

Властивості функції розподілу

1. Якщо $F(x)$ - функція розподілу випадкової величини X, то $0 \le F(x) \le 1$ для будь-якого x.

2. Функція розподілу $F(x)$ випадкової величини X є неспадною функцією, і для будь-яких $x_1 < x_2$ виконується рівність:

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \qquad (14)$$

3. Якщо $F(x)$ функція розподілу, то $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Якщо X . - неперервна випадкова величина, то $F(x)$ — неперервна і диференційована функція; її похідна $f(x) = F'(x)$ називається **щільністю розподілу ймовірностей**. При цьому $f(x)$ - невід'ємна функція ($f(x) \ge 0$), для якої

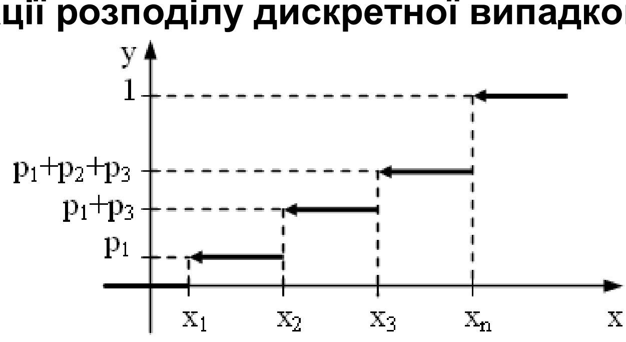
$$P(\alpha \le X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx; \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1; \qquad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (15)$$

Інколи функцію $F(x)$ називають **інтегральною функцією розподілу**.

Для дискретної випадкової величини X, яка може набувати значень $x_1, x_2, ..., x_n$, функція розподілу визначається так:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \begin{cases} 0, \ при \ \ x \le x_1; \\ p_1 \ , \ при \ \ x_1 < x \le x_2; \\ p_1 + p_2, \ \ при \ \ x_2 < x \le x_3; \\ p_1 + p_2 + p_3, \ при \ \ x_3 < x \le x_4; \\ ....; \\ p_1 + p_2 + ... + p_n = 1, \ при \ \ x > x_n. \end{cases} \qquad (16)$$

Графік функції розподілу дискретної випадкової



величини

Формула (13) є своєрідним "містком" між математичним аналізом і теорією ймовірностей, між функціями дійсної змінної і випадковими величинами. Ця формула дає можливість при дослідженні в теорії ймовірностей застосовувати апарат математичного аналізу.

Густина ймовірності

Нехай маємо неперервну випадкову величину X з неперервною та диференційованою функцією розподілу $F(x)$.

Означення. Густиною ймовірності $f(x)$ називається похідна від функції розподілу випадкової величини $F(x)$:

$$f(x) = F'(x). \qquad (17)$$

Функція $f(x)$ характеризує густину, з якою розподіляються значення випадкової величини в даній точці. Досить часто $f(x)$ називають **диференціальною функцією розподілу**, або диференціальним законом розподілу.

Термін "щільність розподілу" є доцільним при механічній інтерпретації розподілу, адже $f(x)$ буквально характеризує щільність розподілу маси по осі OX, тобто лінійну щільність.

Крива, що відображає щільність розподілу випадкової величини називається **кривою розподілу.**

Властивості щільності розподілу

1. Щільність розподілу – невід'ємна функція, яка розміщена над віссю OX (тобто, $f(x) \geq 0$).
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$
3. **Теорема**. Імовірність того, що неперервна випадкова величина x набуває якого-небудь значення з інтервалу $(a;b)$ обчислюється за такою формулою:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Зауваження: функція розподілу $F(x)$, як і будь-яка ймовірність, є величина безрозмірна. Розмірність щільності розподілу є оберненою до розмірності випадкової величини.

4. Зв'язок між густиною ймовірності та функцією розподілу:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Числові характеристики випадкових величин

Закон розподілу випадкової величини дає загалом вичерпну інформацію про цю випадкову величину, тому, що дозволяє обчислити ймовірності будь–яких подій, пов'язаних з цією величиною. Але такий закон розподілу не завжди дає можливість в компактній формі представити істотні особливості випадкової величини.

Характеристики випадкової величини, які є не функціями а числами, називають **числовими характеристиками** або **точковими оцінками**. Вони у стислій формі визначають найбільш важливі риси розподілу. Такими числовими характеристиками є математичне сподівання, дисперсія, моменти різних порядків і т. п.

Розглянемо деякі найбільш важливі числові характеристики та їх основні властивості.

Математичне сподівання. Походження терміну математичне сподівання пов'язане з початковим періодом виникнення теорії ймовірностей, коли її застосування обмежувалось азартними іграми. Гравця цікавило середнє значення очікуваного виграшу, тобто математичне сподівання виграшу. Якщо припустити, що кожна матеріальна точка з абсцисою x_i має масу рівну p_i $(i=1,2,...,n)$, а вся одинична маса $(\sum_{i=1}^{n} p_i)$ розподілена між цими точками, то математичне сподівання є абсцисою центру мас системи матеріальних точок.

Означення. Математичним сподіванням, або середнім значенням $M(X)$ дискретної випадкової величини, називається сума добутків всіх її значень на відповідні їм імовірності:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Для неперервної випадкової величини математичне сподівання обчислюють за такою формулою:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій:

$$M(C)=C,\ C-const.$$

2. Сталий множник можна винести за знак математичного сподівання:

$$M(kX)=kM(X).$$

3. Математичне сподівання алгебраїчної суми скінченого числа випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M(X\pm Y)=M(X)\pm M(Y).$$

4. Математичне сподівання добутку скінченого числа незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(XY)=M(X)M(Y).$$

5. Якщо значення випадкової величини збільшити чи зменшити на одну і ту ж сталу C, то на цю ж сталу C зросте чи зменшиться математичне сподівання цієї випадкової величини:

$$M(X \pm C) = M(X) \pm C.$$

6. Математичне сподівання відхилення випадкової величини від її математичного сподівання дорівнює нулю:

$$M(X - M(X)) = 0.$$

Дисперсія випадкової величини. На практиці досить часто зустрічаються випадкові величини, які мають однакові математичні сподівання, але при цьому значення, яких вони набувають, суттєво відрізняються. Тобто математичне сподівання не завжди повністю відображає характеристику випадкової величини, тому розглядають таку числову характеристику випадкової величини як дисперсія. Механічна інтерпретація дисперсії - це момент інерції заданого розподілу мас відносно центра мас.

Означення. Математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання $M(X)$ називають **дисперсією випадкової величини** X та позначають як $D(X)$:

$$D(X) = M((X - M(X))^2).$$

У випадку неперервної випадкової величини дисперсію обчислюють за такою формулою:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx.$$

Введення такої характеристики випадкової величини пояснюється тим, що $D(X)$ має властивість мінімальності, тобто:

$$D(X) = \min_c (M((X - c)^2)).$$

Основні властивості дисперсії

1. Дисперсія алгебраїчної суми двох незалежних випадкових величин X та Y дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

2. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю:

$$D(C) = 0,\ C - const.$$

3. Сталий множник C випадкової величини X можна виносити за знак дисперсії у другому степені:

$D(CX) = C^2 D(X).$

4. Дисперсія випадкової величини X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини і квадратом її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

У неперервному випадку застосовують таку формулу:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2.$$

Математичне сподівання випадкової величини X характеризує центр розсіяння, а дисперсія є мірою розсіяння випадкової величини X навколо її математичного сподівання. Але, якщо випадкова величина і її математичне сподівання мають одну і ту ж розмірність, то дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини. Цього недоліку можна уникнути, якщо скористатись **середнім квадратичним відхиленням** $\sigma(X)$ випадкової величини, яким є арифметичний корінь із дисперсії. Отже:

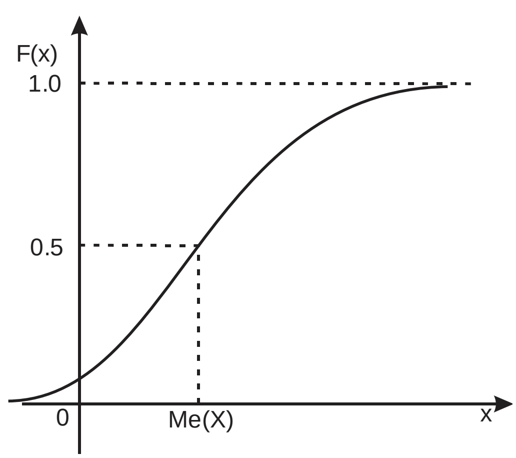
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Мода та медіана випадкової величини

Означення. **Медіаною** $Me(X)$ **неперервної випадкової величини** X називається таке число x_{me}, для якого виконується рівність: $F(x_{me})=\frac{1}{2}$, або $P(X<x_{me})=P(X>x_{me})=\frac{1}{2}$.

Це означає, що ймовірність того, що випадкова величина матиме значення більше або менше за медіану дорівнює одному і тому ж числу $\frac{1}{2}$.

Якщо функція розподілу $F(x)$ є строго монотонною, то медіана визначається однозначно. Якщо ж на певному відрізку $[x_1, x_2]$ $F(x)=const$, то медіана має безліч значень, які належать деякому відрізку. З точки зору теорії ймовірностей ці значення медіани не розглядаються (як правило). З геометричної точки зору, вертикальна пряма $x=x_{me}$ ділить площу фігури під кривою диференціальної функції розподілу на дві рівні частини.



Для **дискретної випадкової величини** медіаною називають те значення випадкової величини, яка ділить множину значень випадкової величини на дві частини з рівною кількістю значень випадкової величини. Якщо кількість значень випадкової величини є непарною. ($n=2k+1$), то $x_{me}=x_{k+1}$, у випадку парної кількості – ($n=2k$) медіану визначають так: $x_{me}=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$.

Наприклад, якщо випадкова величина $X=\{2,3,4,6,7\}$, то $x_{me}=4$, а якщо $X=\{2,3,4,5,6,7\}$, то $x_{me}=\frac{4+5}{2}=4,5$.

Означення. **Модою** $Mo(X)$ **випадкової величини** X називається найбільш імовірне її значення (для якого відповідна ймовірність p_i або густина ймовірності $f(x)$ досягає свого максимуму).

Розподіли, що мають більше однієї моди називаються мультимодальними. Як правило, мультимодальність вказує на те, що набір даних не підпорядковується нормальному закону розподілу. Мода, як один із середніх показників, застосовується частіше для даних, що мають нечислову природу. Наприклад, експерти за допомогою моди визначають найпопулярніші типи продуктів, а це вже можна врахувати при прогнозі продажів чи плануванні випуску продукції.

Приклад. Нехай задано розподіл імовірності того, що студент певної групи здасть певну кількість іспитів із 4 іспитів на сесії:

Табл. 1

Число зданих іспитів X	0	1	2	3	4	Сума ймовірностей
Імовірності P	0,067	0,033	0,1	0,167	0,633	1

Обчислити математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, моду та медіану, побудувати функцію розподілу аналітично та графічно.

Розв'язання. $M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i = 0\cdot 0{,}067+1\cdot 0{,}033+2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}167+4\cdot 0{,}633=3{,}266.$ Для того, щоб обчислити $D(X)$ спочатку обчислимо $M(X^2)$. Ці обчислення допоможе провести наступна таблиця:

Табл. 2

X^2	0	1	4	9	16	Сума ймовірностей
Імовірності P	0,067	0,033	0,1	0,167	0,633	1

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,067 + 1 \cdot 0,033 + 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,167 + 16 \cdot 0,633 = 12,064.$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 12,064 - (3,266)^2 = 12,064 - 10,667 = 1,397.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\sqrt{1,397} = 1,182.$$

Отже, іспитів буде здано студентами даної групи в середньому – 3, відхилення від цієї величини це $\sigma(X)$, тобто в кращому випадку в середньому буде складено 4 іспити, а у гіршому випадку – 2.

Із таблиці 1 одразу визначимо моду: $Mo = 4$, бо відповідна ймовірність $p = 0,633$ є найбільшою. $Me = 2$. (Випадкова величина має непарну кількість значень $n = 5$; $Me = \frac{0+1+2+3+4}{5} = 2$).

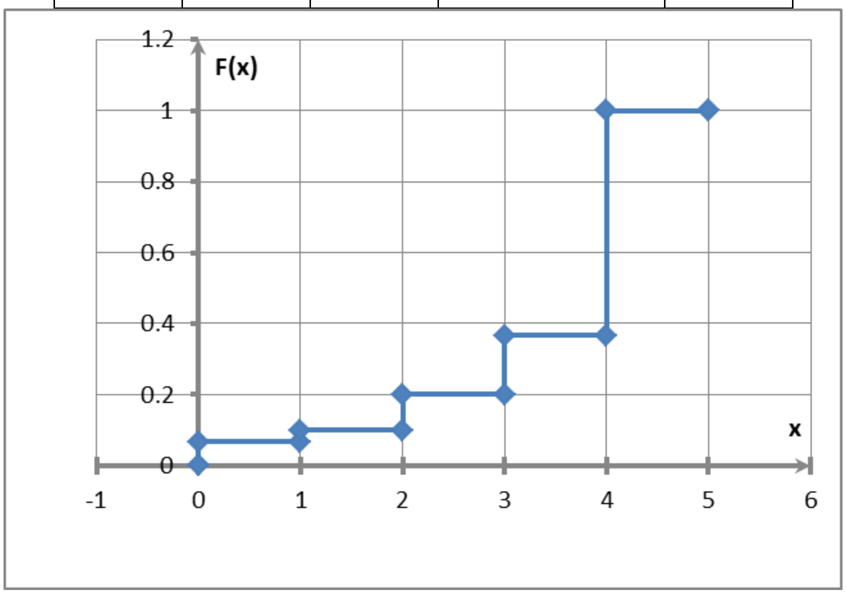
$$F(x) = \begin{cases} 0;\ x \le 0, \\ 0,067;\ 0 < x \le 1, \\ 0,067 + 0,033 = 0,1;\ 1 < x \le 2, \\ 0,1 + 0,1 = 0,2;\ 2 < x \le 3, \\ 0,2 + 0,167 = 0,367;\ 3 < x \le 4, \\ 0,367 + 0,633 = 1;\ x > 4. \end{cases}$$

Наступна таблиця є допоміжною для побудови графіка функції $F(x)$ в MS EXCEL за допомогою майстра діаграм «точечная».

Таблиця 3.

Xi	p	F(X)	X	Y
0	0.067	0	-0.00000001	0
1	0.033	0.067	0	0.067

2	0.1	0.1	0.9999999	0.067
3	0.167	0.2	1	0.1
4	0.633	0.367	1.9999999	0.1
		1	2	0.2
		1	2.9999999	0.2
			3	0.367
			3.9999999	0.367
			4	1
			4.9999999	1
			5	1



Серед числових характеристик випадкових величин особливе значення мають **моменти** – початкові та центральні.

Означення. Початковим моментом k - того порядку випадкової величини X називається математичне сподівання k - того степеня цієї величини:

$$\nu_k = M(X^k).$$

Означення. Центральним моментом k - того порядку випадкової величини X називається математичне сподівання k - того степеня відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання:

$$\mu_k = M(X - M(X))^k, \text{ або } \mu_k = M(X - a)^k, \text{ де } a = M(X).$$

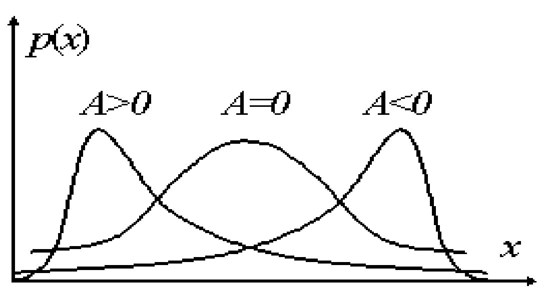
Формули для обчислення моментів, як дискретних,, так і неперервних випадкових величин занесемо до наступної таблиці:

Таблиця 4.

Момент	Випадкова величина	
	Дискретна	Неперервна
Початковий	$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$	$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$
Центральний	$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^k p_i$	$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^k f(x)dx$

Очевидно, що при $k=1$, перший початковий момент випадкової величини X є її математичним сподіванням, а при $k=2$ - другий центральний момент є дисперсією. Третій центральний момент μ_3 є характеристикою асиметрії (скошеності) розподілу. Він має розмірність кубу випадкової величини. Для того, щоб отримати безрозмірну величину, її ділять на σ^3, де σ - середнє квадратичне відхилення випадкової величини X. Таку величину називають **асиметрією випадкової величини** і позначають A.

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

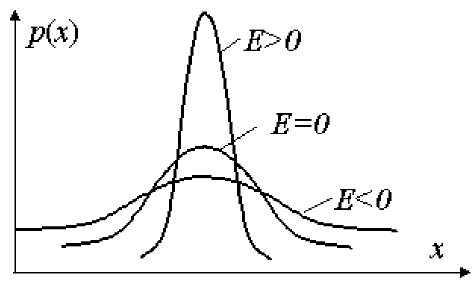


Якщо розподіл є симетричним відносно математичного сподівання, то $A=0$.

Четвертий центральний момент μ_4 є характеристикою гостровершинності чи плосковершинності розподілу.

Означення. Ексцесом (або коефіцієнтом ексцесу) випадкової величини називається число, яке обчислюється за такою формулою:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$



Закони розподілів випадкових величин

Приклади дискретних розподілів

1. **Біноміальний закон розподілу. Означення**. Дискретна випадкова величина X має біноміальний закон розподілу з параметрами n, p, якщо вона набуває значень $0,1,2,...,m,...,n$ з імовірностями $P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m},$ де $0 < p < 1,\ q = 1 - p.$ Цей закон розподілу є законом розподілу числа $X = m$ настання події A в n незалежних дослідах, в кожному із яких подія може відбутись з однією і тією ж ймовірністю p рівно m раз.

Ряд розподілу біноміального закону має такий вигляд:

x_i	0	1	2	…	m	…	n
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

Математичне сподівання та дисперсію для біноміального закону розподілу можна обчислити за такими формулами:

$$M(X) = np;\ D(X) = npq.$$

2**. Закон розподілу Пуассона. Означення.** Дискретна випадкова величина X має закон розподілу Пуассона з параметром $\lambda > 0$, якщо вона набуває значень $0,1,2,...,m,...$ (нескінченна і при тому злічення кількість значень) з ймовірностями: $P(X=m)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}=P_m(\lambda).$ (У кожному окремому досліді подія відбувається рівно m раз.) Ряд розподілу Пуассона задають такою таблицею:

x_i	0	1	2	…	m	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{m!}$	…	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	…

Цей розподіл є граничним випадком біноміального закону. Так як при цьому ймовірність p події A в кожному окремому досліді є малою, то закон розподілу Пуассона часто називають законом рідкісних явищ.

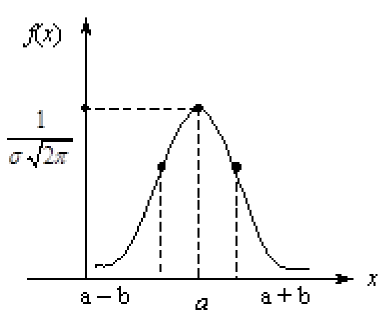
Закон розподілу Пуассона має широке застосування в задачах статистичного контролю якості, у теорії надійності, теорії масового обслуговування. За цим же законом розподілена кількість вимог щодо виплати страхових сум.

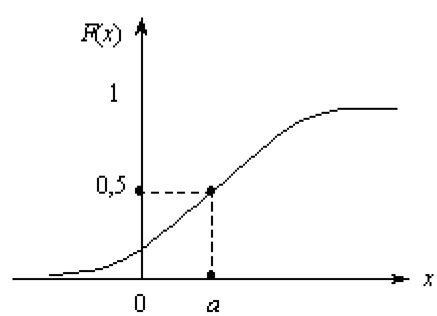
Для цього закону розподілу мають місце такі рівності: $M(X)=D(X)=\lambda.$

Приклади неперервних законів розподілу

1. Нормальний закон (закон Гауса):

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; \qquad F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$





Параметри a і σ, які входять до виразу щільності розподілу, є, відповідно, математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням випадкової величини. Нормальний закон розподілу широко застосовується в математичній статистиці.

Властивості випадкової величини, розподіленої за нормальним законом

1. Для обчислення ймовірності потрапляння випадкової величини, розподіленої нормально, на проміжок $[\alpha, \beta]$ використовується така формула:

$$P\left(\alpha \le X \le \beta\right) = \frac{1}{2}(\Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)),$$

де $\Phi(x)$ - функція Лапласа.

2. Імовірність того, що відхилення випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, від її математичного сподівання a не перевищить величину $\varepsilon > 0$ (за абсолютною величиною), дорівнює

$$P(\left|X - a\right| \le \varepsilon) = \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}).$$

3. При обчисленні ексцесу число «3» віднімається із відношення $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$ тому, що для нормального розподілу відношення $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3.$ Отже, для нормального закону розподілу : $E = 0$, також $A = 0$ (E - ексцес, A - асиметрія).
4. Графік функції щільності нормального розподілу є симетричним відносно математичного сподівання випадкової величини, і при цьому мають місце такі рівності:

$$M(X) = Me(X) = Mo(X),$$

де $M(X)$ - математичне сподівання, $Me(X)$ - медіана, $Mo(X)$ - мода випадкової величини.

5. Відмітимо таку властивість нормального закону розподілу: якщо випадкова величина X має нормальний закон розподілу з параметрами a та σ, то практично достовірним є те, що її значення лежать в проміжку $(a-3\sigma; a+3\sigma)$. Тобто ймовірність того, що значення нормально розподіленої випадкової величини X відхиляються від її середнього значення a менше ніж на 3σ, приблизно дорівнює одиниці (ймовірність такої події дорівнює 0,9973). Ця властивість носить назву **правила трьох сігм**.

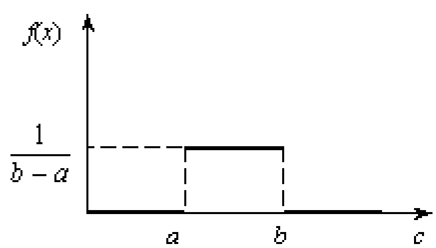
Закон нормального розподілу, - один з найпоширеніших законів. Це фундаментальний закон у теорії ймовірностей і в її застосуванні. Нормальний розподіл найчастіше зустрічається у вивченні природних і соціально-економічних явищ. Інакше кажучи, більшість статистичних сукупностей у природі і суспільстві підпорядковується закону нормального розподілу. Відповідно можна сказати, що сукупності значної частини великих за обсягом вибірок підпорядковуються закону нормального розподілу. Ті із сукупностей, які відхиляються від нормального розподілу в результаті спеціальних перетворень, можуть бути наближені до нормального. У зв'язку з цим слід пам'ятати, що принципова особливість цього закону стосовно до інших законів розподілу полягає в тому, що він є законом границі, до якої наближаються інші закони розподілу в певних (типових) умовах.

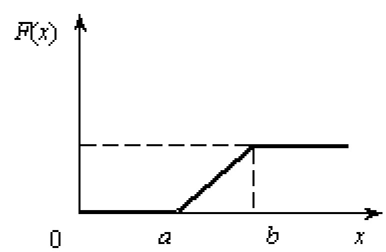
Також слід відмітити, що термін "нормальний розподіл" має умовний зміст, як загальноприйнятий у математичній і статистико-математичній літературі термін. Твердження, що та чи інша ознака будь-якого явища підпорядковується закону нормального розподілу, зовсім не означає непохитність норм, ніби притаманних досліджуваному явищу, а віднесення останнього до іншого виду закону не означає якусь анормальність даного явища. У цьому розумінні термін "нормальний розподіл" не зовсім вдалий.

Нормальний розподіл (закон Гаусса-Лапласа) є типом неперервного розподілу. Де Муавр (1773, Франція) вивів нормальний закон розподілу ймовірностей. Основні ідеї цього відкриття були використані в теорії помилок вперше К. Гауссом (1809, Німеччина) і А.Лапласом (1812, Франція), які внесли вітчутний теоретичний вклад у розробку самого закону. Зокрема, К.Гаусс у своїх розробках виходив з визнання найбільш імовірним значенням випадкової величини-середню арифметичну. Загальні умови виникнення нормального розподілу встановив А.М.Ляпунов. Ним було доведено, що якщо досліджувана ознака є результатом сумарної дії багатьох факторів, кожен з яких мало пов'язаний з більшістю решти, і вплив кожного фактора на кінцевий результат набагато перекривається сумарним впливом всієї решти факторів, то розподіл стає близьким до нормального.

2. **Рівномірний розподіл** маємо, коли ймовірність того, що випадкова величина потрапить в проміжок $[a,b]$ є пропорційною довжині цього проміжку і не залежить від розташування проміжку на осі. Щільність такого розподілу та функція розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x\notin(a;b),\\ \dfrac{1}{b-a},\ x\in[a;b].\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0,\ x\le a;\\ (x-a)(b-a);\ a<x\le b;\\ 1;\ \ x>b.\end{cases}$$





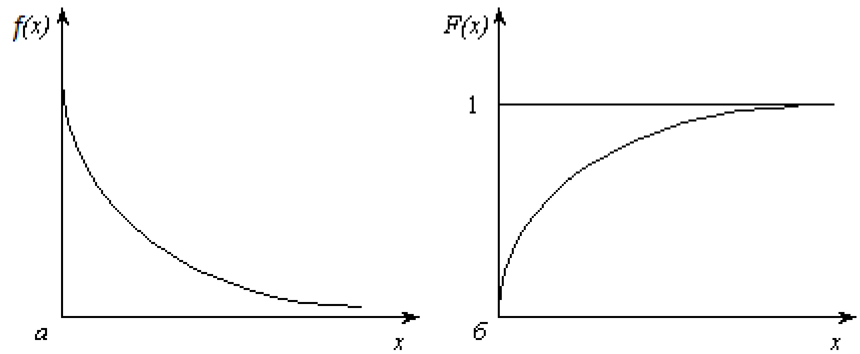
Числові характеристики розподілу:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

3. **Показниковий (експоненційний) закон розподілу**:

$$f(x)=\begin{cases}0,\ \ x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x},\ x\ge 0.\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0,\ x<0;\\ 1-e^{-\lambda x},\ x\ge 0.\end{cases}$$

Випадкові величини з таким законом розподілу широко застосовуються в задачах з теорії надійності та теорії масового обслуговування.



Числові характеристики:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Приклад. Закон розподілу неперервної випадкової величини X задано функцією розподілу ймовірностей $F(x)$, знайти:

а) невідому сталу A;

б) диференціальну функцію розподілу $f(x)$;

в) математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$;

г) $P(0<X<1,5)$;

д) побудувати графіки функцій $f(x),\ F(x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0; \ x\le -1, \\ A(x+1)^2; \ 0<x\le 2, \\ 1; \ x>2. \end{cases}$$

Розв'язання. а). $F(2)=1 \Rightarrow A(2+1)^2=9A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{9}$;

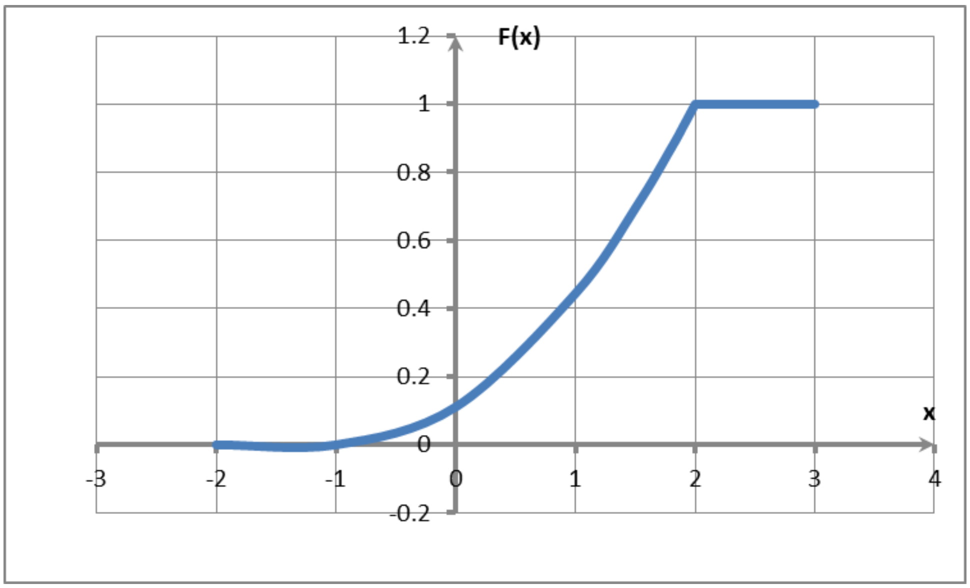
б). завдяки формулі (14) маємо: $f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0; \ x\le 0, \\ \frac{2}{9}(x+1); \ 0<x\le 2; \\ 0; \ x>2. \end{cases}$

в). $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{-1}^{2}\frac{2x}{9}(x+1)dx+\int\limits_{-1}^{\infty} 0dx=\frac{2}{9}\int\limits_{-1}^{2}(x^2+x)dx=$

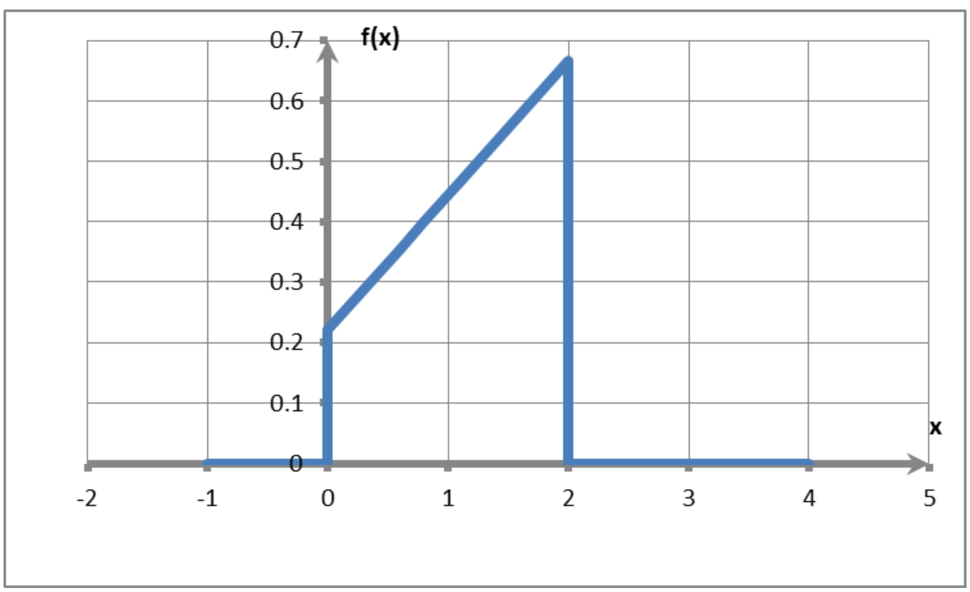
$=\frac{2}{9}(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2})\Big|_{-1}^{2}=1;$

$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2=\frac{2}{9}\int\limits_{-1}^{2}(x^3+x^2)dx=\frac{2}{9}(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{2}-1=1,5.$

г). $P(0<X<1,5)=\int\limits_{0}^{1,5}\frac{2}{9}(x+1)dx=\frac{2}{9}(\frac{x^2}{2}+x)\Big|_{0}^{1,5}\approx 0,583.$



д)



Приклад. Задано диференціальну функцію розподілу $f(x)$. Обчислити:

а). Невідому сталу A.

б). Інтегральну функцію розподілу $F(x)$.

в). Математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$.

$$f(x)=\begin{cases}0;\ x<-2,\\ Ax^3;\ -2\le x\le 0;\\ 0;\ x>0.\end{cases}$$

а). Для того, щоб знайти невідому сталу A, застосуємо таку властивість функції $f(x)$: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$ Отже: $\int\limits_{-2}^{0} Ax^3dx=A\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}=A(0-4)=-4A=1\Rightarrow A=-\frac{1}{4}.$

б). $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=-\frac{1}{4}\int\limits_{-2}^{x} x^3dx=-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{x}=-\frac{1}{16}(x^4-16)=1-\frac{x^4}{16}.$

$$F(x)=\begin{cases}0;\ x\le -2,\\ 1-\dfrac{x^4}{16};\ -2<x\le 0,\\ 1;\ x>0.\end{cases}$$

В). $M(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int\limits_{-2}^{0}-\frac{1}{4}x^4dx=-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_{-2}^{0}=-\frac{8}{5}.$

$$M(X^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int\limits_{-2}^{0}-\frac{1}{4}x^5dx=-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^6}{6}\Big|_{-2}^{0}=\frac{8}{3}.$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{8}{3}-\frac{64}{25}=\frac{8}{75}.$$

Завдання для самостійної роботи з теорії ймовірностей

Задача 1. Розподіл службовців компанії за віком, освітою та строком роботи в компанії наведено в таблиці:

n-номер варіанта

Вік	Менше 5 років у компанії		Більше 5 років у компанії	
	Вища освіта	Середня освіта	Вища освіта	Середня освіта
«молоді» ≤ 35	n+2	5	n+3	5
«старі» >35	n+3	25	n	15

Навмання обирається один службовець.

1. Яка ймовірність того, що обрана особа має вищу освіту?
2. Якщо обрана особа працює у компанії більше 5 років, яка ймовірність того, що її вік є більшим за 35 років?
3. Нехай А та В – такі події:
   А= {вибрана особа має вищу освіту}

   В={вибрана особа є старшою 35 років}.

   Чи будуть події А та В залежними?
4. Скільки «молодих» службовців з вищою освітою необхідно додатково прийняти до компанії, щоб ймовірність обрати навмання із усіх службовців співробітників з вищою освітою збільшилась на 10%?
5. Скільки «старих» службовців з середньою освітою необхідно звільнити для досягнення такого ж результату?

Задача 2. (В задачах 2 та 3 – « n» - номер варіанту, який слід дописати до вказаних чисел.)

Зроблено два досить ризикованих вклади: 10n тис. гр. од. в компанію А та 15n тис. гр. од. в компанію В. Компанія А обіцяє 50% річних, але може збанкрутіти з ймовірністю 0.0n. Компанія В обіцяє 40% річних, але може збанкрутіти з ймовірністю 0.0(n+2). Скласти закон розподілу випадкової величини - загальної суми прибутків (збитків), отриманих від двох компаній через рік, знайти її математичне сподівання , середнє квадратичне відхилення, моду та медіану, побудувати функцію розподілу (аналітично та графічно).

Задача 3

За статистичними даними в середньому 62% студентів, що поступили на перший курс по закінченню навчання отримують диплом магістра. Знайти ймовірність того, що із 100n студентів частка тих, що отримали диплом магістра буде

а) міститись у межах від 0.85 до 0.9;

б) буде відрізнятись від імовірності цієї події не більше, ніж на 0.00n (за абсолютною величиною).

У варіантах 1-18 завдання № 1 (а;б): неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти:

а) невідому сталу A;

б) диференціальну функцію розподілу $f(x)$;

в) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення;

г) $P(\alpha < X < \beta)$ - ?;

д) побудувати схематичні графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Вар. 1.

1. $\alpha = 0,5;\ \beta = 1,5.$

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 1 \\ A \cdot (x^2 - x); & 1 < x \le 2 \\ 1; & x > 2 \end{cases}$$

2. Під час тестування з математики студент має дати правильні відповіді на 7 запитань. Імовірність того, що він дасть вірну відповідь на одне запитання в середньому дорівнює 0,6. На скільки питань найімовірніше

дасть вірну відповідь студент? Знайти ймовірність того, що студент дасть вірні відповіді найімовірніше число раз.

3. В трьох урнах містяться кулі. В першій – 3 білих та 4 чорних, у другій – 2 чорних та 2 білих, у третій – тільки білі. Навмання обирається урна, потім із неї виймається куля. Знайти ймовірність того, що вийняли білу кулю.

Вар. 2.

1. $\alpha = 0;\ \beta = \dfrac{\pi}{6}.$

$$F(x) = \begin{cases} 0; \quad x \le 0 \\ A\sin x; \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{3} \\ 1; \ x > \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

2. Імовірність для кожного окремого саджанця черешні прийнятись навесні , дорівнює 0, 75. Знайти найімовірніше число саджанців, які проростуть навесні, та обчислити ймовірність того, що найімовірніше число саджанців проросте навесні.

3. Із урни, в якій 3 білі та 4 чорні кулі, загубили одну кулю. Для того щоб визначити склад куль в урні, навмання дістали 2 кулі, які виявились білими. Визначити ймовірність того, що загублено білу кулю.

Вар. 3.

1. $\alpha = 0{,}5;\ \beta = 1{,}5.$

$$F(x) = \begin{cases} 0; \quad x \le 1 \\ A\cdot(x^2 + x - 2); \quad 1 < x \le 2 \\ 1; \ x > 2 \end{cases}$$

2. Імовірність отримати виграш по одному лотерейному білету дорівнює 0,01. Скільки необхідно придбати лотерейних білетів, щоб найімовірніше число виграшних серед них дорівнювало трьом. Знайти ймовірність того, що із 5 лотерейних білетів принаймні 2 були виграшними?

3. На складі отримали 3 коробки деталей, виготовлених заводом № 1 та 2 коробки, виготовлених заводом № 2. Ймовірність того, що деталь із заводу № 1 є стандартною дорівнює 0.8, а з заводу №2 – 0.9. Навмання дістали деталь із навмання обраної коробки. Знайти ймовірність того, що обрана деталь є стандартною.

Вар. 4.

1. $\alpha = 0;\ \beta = 0,8.$

$$F(x) = \begin{cases} 0; \quad x \le 0 \\ 0.5 \cdot (x^3 + x^2); \quad 0 < x \le 1 \\ 1;\ x > 1 \end{cases}$$

2. На автобазі є 15 пасажирських автобусів. Імовірність того, що на маршрутну лінію вийде автобус в середньому дорівнює 0,9. Знайти імовірність того, що автобаза працюватиме в нормальному режимі, якщо для цього необхідно, щоб на маршрутну лінію виїхало не менше 12 автобусів. Знайти найімовірніше число автобусів, які виїдуть на маршрутну лінію із наявних 15.

3. Імовірність влучення в ціль для першого стрільця дорівнює 0.8, а для другого – 0.6. Один із стрільців вистрілив, але не влучив у ціль. Знайти ймовірність того, що це був перший стрілець.

Вар. 5.

1. $\alpha = -\dfrac{\pi}{6};\ \beta = 0.$

$$F(x) = \begin{cases} 0; \quad x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ A\cos 2x; \quad -\dfrac{\pi}{4} < x \le 0 \\ 1;\ x > 0 \end{cases}$$

2. В майстерні працюють 6 моторів. Для кожного мотору імовірність перегріву за день роботи дорівнює 0,8. Знайти найбільш імовірне число моторів, що не перегріються за день та ймовірність цієї події.

3. У ящику 3 деталі. Всі припущення про кількість стандартних серед трьох деталей однаково ймовірні. Навмання взята деталь виявилась стандартною. Визначити ймовірність того, що у ящику було 2 стандартні та 1 нестандартна деталь.

Вар. 6.

1. $\alpha = 0;\ \beta = 0,5.$

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ Ax\sqrt[3]{x}; & 0 < x \le 1 \\ 1; & x > 1 \end{cases}$$

2. Імовірність виграшу за одним білетом грошової лотереї дорівнює $\frac{1}{9}$. Яка імовірність того, що серед 5 придбаних білетів не більше двох програшних? Яка найімовірніша кількість виграшних білетів серед 5?

3. Число вантажних автомобілів, що їдуть по шосе, на якому стоїть автозаправка, відноситься до числа легкових машин, що їдуть по тому ж шосе як 3:2. Ймовірність того, що вантажна машина заїде заправлятись, дорівнює 0.1; для легкової машини ця ймовірність дорівнює 0.2. До автозаправки під'їхала машина. Знайти ймовірність того, що ця машина є вантажною.

Вар. 7.

1. $\alpha = 0;\ \beta = 0,3.$

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ A(3x^2 + 2x); & 0 < x \le \frac{1}{3} \\ 1; & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

2. В сім’ї 7 дітей. Вважаючи імовірності народження дівчинки чи хлопчика рівними між собою, визначити імовірність того, що в даній сім’ї не менше трьох хлопчиків. Визначити найбільш імовірне число дівчаток у сім’ї, в якій семеро дітей.

3. До спеціалізованої лікарні потрапляють у середньому 50% хворих грипом, 30% - бронхітом, 20% - пневмонією. Ймовірність повністю одужати від грипу дорівнює 0.98; від бронхіту та пневмонії відповідно - 0.91 та 0.92. Хворий, що потрапив до лікарні був виписаним здоровим. Знайти ймовірність того, що хворий був з бронхітом.

Вар. 8.

1 $\alpha = 0;\ \beta = 1{,}5.$

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 1 \\ A\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right); & 1 < x \le 2 \\ 1; & x > 2 \end{cases}$$

2. В середньому по 15% угод страхова компанія виплачує страхову суму. Знайти ймовірність того, що із десяти угод із настанням страхового випадку буде пов'язано із виплатою страхової суми не менше двох угод. Знайти найбільш імовірне число наявних угод, які будуть пов'язані з виплатою страхової суми.

3. Три стрільці одночасно вистрілили по мішені. Дві кулі влучили в мішень. Знайти ймовірність того, що третій стрілець влучив у мішень, якщо ймовірності влучення у мішень першим, другим та третім стрільцями відповідно дорівнюють: 0.6; 0.5; 0.4.

Вар. 9.

1. $\alpha = 1;\ \beta = 2.$

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 1 \\ A(x-1)^2; & 1 < x \le 3 \\ 1; & x > 3 \end{cases}$$

2. На старт марафону вийшло 8 спортсменів. Знайти імовірність того, що не більше трьох із них не дійдуть до фінішу, якщо імовірність зійти з дистанції для кожного спортсмена дорівнює 0,2.

3. Маємо 2 набори інструментів з однаковою кількістю інструментів. Імовірність того, що інструмент з першого набору є стандартним

дорівнює 0.8, а з другого 0.9. Знайти ймовірність того, що навмання обраний інструмент є стандартним.

Вар. 10.

1. $\alpha = -0,5;\ \beta = 0.$

$$F(x) = \begin{cases} 0; \quad x \le -1 \\ A(x^2 + 4x + 3); \quad -1 < x \le 0 \\ 1;\ x > 0 \end{cases}$$

2. В ящику міститься 1000 однотипних деталей. Із них 900 – стандартних, решта – браковані. Деталі виймають із ящика навмання по одній з поверненням. Так було здійснено 6 експериментів. Обчислити ймовірність того, що стандартна деталь з'явиться хоча б один раз. Знайти найімовірніше число нестандартних із 6 деталей.

3. Продукт виготовляється двома виробниками. Один випускає 70%, а другий 30% всієї продукції. Перший виробник дає 90% продукту I ґатунку, другий – 80% продукту I ґатунку. Яка ймовірність того, що взята навмання одиниця продукції буде II ґатунку?

Вар. 11.

1. $\alpha = 2;\ \beta = 2,5.$

$$F(x) = \begin{cases} 0; \quad x \le 2 \\ A(x^3 - 4x); \quad 2 < x \le 3 \\ 1;\ x > 3 \end{cases}$$

2. В кімнаті 4 лампочки. Для кожної лампочки імовірність того, що вона буде працювати протягом року дорівнює $\frac{5}{6}$. Яка імовірність того, що протягом року буде змінено не менше двох лампочок? Яка найімовірніша кількість лампочок буде замінена протягом року?

3. Імовірність влучення в ціль першого стрільця дорівнює 0.8, а другого – 0.6. Один із стрільців зробив постріл, а в ціль не влучив. Визначити ймовірність того, що це був перший стрілець.

Вар. 12.

1. $\alpha = 2,5;\ \beta = 3.$

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 2 \\ A(x-2)^3; & 2 < x \le 3 \\ 1; & x > 3 \end{cases}$$

2. 31% продукції, що виготовляє кондитерська фабрика не містить ГМО (генно-модифіковані продукти). Скільки одиниць такої продукції найімовірніше не містить ГМО серед 12 одиниць цієї продукції? Знайти імовірність найімовірнішого числа продукції, що не містить ГМО серед 12 одиниць цієї продукції.

3. В групі 25 студентів, які за успішністю розділились на три підгрупи. Ймовірність дати вірну відповідь на запитання з елементарної математики у 15; 8; 2 студентів відповідно дорівнює 0.01; 0.02; 0.8. Навмання викликаний студент дав вірну відповідь на поставлене запитання. Знайти ймовірність того, що цей студент відноситься до другої підгрупи.

Вар. 13.

1. $\alpha = 1;\ \beta = 1,5.$

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \le 1 \\ A(x^3-1); & 1 < x \le 2 \\ 1; & x > 2 \end{cases}$$

2. Імовірність того, що покупцеві, який відвідав взуттєвий магазин потрібні туфлі 42-го розміру в середньому дорівнює 0,3. Яка ймовірність того, що серед 5 покупців взуття цього розміру потрібне не менше ніж двом покупцям? Знайти найімовірніше число покупців (із 5), яким потрібне взуття 42 розміру.

3. В урні 7 білих та 5 чорних куль. Навмання вибрали 2 кулі. Після цього вибрали ще одну кулю. Яка ймовірність того, що вона біла?

Вар. 14.

1. $\alpha = 2;\ \beta = 2,5.$

$$F(x) = \begin{cases} 0; \quad x \le 2 \\ A(x^2 - 4); \quad 2 < x \le 3 \\ 1; \ x > 3 \end{cases}$$

2. Оптова база обслуговує 10 магазинів. Від кожного із них може надійти заявка на черговий день обслуговування з ймовірністю 0,8, незалежно від заявок, які можуть надійти від інших магазинів. Обчислити ймовірність того, що заявки надійдуть за день не менше ніж з трьох магазинів. Знайти найімовірніше число заявок, які надійдуть протягом дня.

3. В ящику 4 деталі. Всі припущення про кількість стандартних деталей серед них однаково ймовірні. Навмання вибрана деталь виявилась стандартною. Визначити ймовірність того, що в ящику половина деталей стандартна.

Вар. 15.

1. $\alpha = 1,5;\ \beta = 2.$

$$F(x) = \begin{cases} 0; \quad x \le 1 \\ A(x^2 - 1); \quad 1 < x \le 2 \\ 1; \ x > 2 \end{cases}$$

2. На заводі виготовлено партію із 90 виробів. В цій партії найбільш імовірна кількість першосортних виробів становить 82. Яка ймовірність, що із взятих навмання 8 виробів першосортних буде не менше 4? Яка найбільш імовірна кількість першосортних виробів із 8?

3. В першому ящику 20 деталей, з них 15 стандартних, у другому – 30 деталей, з них 24 стандартних, в третьому 10 деталей, з них 6 стандартних. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь із навмання вибраного ящика – стандартна.

Вар. 16.

1. $\alpha = 2;\ \beta = 3.$

$$F(x)=\begin{cases}0; \quad x\le 0\\ Ax\sqrt{x}; \quad 0<x\le 4\\ 1; \; x>4\end{cases}$$

2. Скільки разів потрібно підкинути гральний кубик, щоб найбільш імовірна кількість випадання 6 дорівнювала 3. Яка ймовірність такої події?

3. В урні 4 білі та 5 чорних куль. Вибрали 3 кулі. Після цього вибрали ще одну кулю. Яка ймовірність того, що вона є чорною?

Вар. 17.

1. $\alpha=1;\ \beta=2.$

$$F(x)=\begin{cases}0; \quad x\le 1\\ A(x^2+5x-6); \quad 1<x\le 3\\ 1; \; x>3\end{cases}$$

2. Скільки раз потрібно підкинути монету, щоб найбільш імовірна кількість випадання герба дорівнювала 3? Знайти ймовірність такої події.

3. На фабриці шиють чоловічі костюми. Цехи А, В, С шиють відповідно 25%, 35%, та 40% всіх костюмів. Бракована продукція складає відповідно 5%, 4%, та 2%. Навмання вибраний костюм виявися бракованим. Яка ймовірність того, що він був пошитий у цеху А?

Вар. 18.

1. $\alpha=0;\ \beta=0{,}5.$

$$F(x)=\begin{cases}0; \quad x\le 0\\ A(x^2+x); \quad 0<x\le 1\\ 1; \; x>1\end{cases}$$

2. Імовірність нічиєї в чемпіонаті України з футболу дорівнює 0,3. Яка найбільш можлива кількість нічиїх у другому колі, яке складається з 36 матчів? Яка ймовірність того, що нічиїх буде не більше у трьох із 8 матчів?

3. В торгівельну фірму завезли телевізори від трьох постачальників у відношенні 1:4:5. Практика показала, що телевізори, що завезли від 1-го, 2-го, 3-го постачальників не потребують ремонту протягом гарантійного строку відповідно в 98%, 88% та 92% випадків. Проданий телевізор потребував ремонту протягом гарантійного строку. Яка ймовірність того, що він надійшов від першого постачальника?

У наступних варіантах (19-30) виконати такі завдання:

1. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією $f(x)$. Знайти:

а) число A

б) інтегральну функцію $F(x)$;

в) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення;

г) $P(\alpha < X < \beta)$ - ?;

д) побудувати схематичні графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Вар. 19.

$\alpha = 0,\ \beta = 0,5;$

1. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ A(x^2 + x); & 0 < x \le 1; \\ 0; & x > 1 \end{cases}$

2. Випадковий чоловік на вулиці з ймовірністю 0,3 – шатен, 0,4 – блондин, 0,1 – лисий. Яка ймовірність того, що серед 6 – ти випадкових чоловіків на вулиці хоча б один – лисий? Яка найімовірніша кількість серед цих чоловіків блондинів?.

3. За результатами перевірки контрольних робіт виявилось, що в першій групі отримали позитивну оцінку 20 студентів із 30, а у другій – 15 із 25. Знайти ймовірність того, що навмання обрана робота, що має позитивну оцінку, написана студентом першої групи.

Вар. 20.

$\alpha = 0,\ \beta = 0,5;$

1. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \le -1 \\ A(2 + x - x^2); & -1 < x \le 2; \\ 0; & x > 2 \end{cases}$

2. В середньому 15% пакетів акцій продаються на аукціонах по заявленій спочатку ціні. Знайти ймовірність того, що із 6 пакетів акцій в результаті торгів по початковій ціні буде продано хоча б 2 пакети. Знайти найімовірніше число пакетів акцій, які будуть продані по початковій ціні.

3. В даний район вироби завозяться трьома фірмами у співвідношенні 5:8:7. Серед продукції I –ї фірми стандартні вироби складають 90%, II -ї – 85%, III - ї– 75%. Знайти ймовірність того, що куплений виріб виявиться нестандартним.

Вар. 21.

$\alpha = 0,\ \beta = 0,5;$

1. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ \frac{3}{4} - A(x-1)^2; & 0 < x \le 2; \\ 0; & x > 2 \end{cases}$

2. Імовірність малому підприємству стати банкрутом за час t дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що із 8 підприємств за час t не збанкрутує не більше 2 підприємств. Знайти найбільш імовірне число збанкрутілих підприємств за цей час.

3. В одній урні 5 білих та 4 чорних кулі. У другій урні 4 чорні та 3 білі кулі. Навмання з першої до другої урни переклали 2 кулі. Після чого з другої урни вийняли 3 кулі. Яка ймовірність того що всі три вийняті кулі чорні?

Вар. 22.

$\alpha = 0,\ \beta = 0,5;$

1. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ Ax(1-x); & 0 < x \le 1; \\ 0; & x > 1 \end{cases}$

2. В середньому п’ята частина автомобілів, що поступають у продаж є некомплектними. Знайти ймовірність того, що серед десяти автомобілів є некомплектними не більше трьох. Знайти найбільш імовірне число комплектних автомобілів серед 15.

3. В урні 7 білих та 3 чорних кулі. Без повернення дістають три кулі. Відомо, що серед них є чорна куля. Яка ймовірність того, що, дві інші кулі білі?

Вар. 23.

$\alpha = 0,\ \beta = 1;$

1. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ A(2x+1); & 0 < x \le 2; \\ 0; & x > 2 \end{cases}$

2. Виконують залп із 6 установок по деякому об’єкту. Імовірність влучення з кожної установки дорівнює 0,6. Знайти ймовірність ліквідації об’єкта, якщо для цього необхідно не менше 4 влучень. Знайти найімовірніше число залпів, необхідних для знищення цілі.

3. В одній із студентських груп навчаються 20 дівчат та 10 юнаків. До практичного заняття з теорії ймовірностей не підготували домашнє завдання 4 дівчини та 3 юнаки. Навмання опитаний студент виявився непідготовленим до заняття. Яка ймовірність того, що відповідати викликали юнака?

Вар. 24.

$\alpha = 0,\ \beta = 1{,}5;$

1. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 1 \\ A(2x-1); & 1 < x \le 2; \\ 0; & x > 2 \end{cases}$

2. Два рівносильних супротивники грають у теніс. (Як відомо у тенісі не буває нічиєї). Що є більш вірогідним: виграти 2 партії з 4 чи 3 з 6?

3. В сітці лежать 20 футбольних м'ячів, із яких 12 нових, 8 - такі, якими хоча б раз грали. Із сітки навмання дістають 2 м'ячі для гри і після гри

повертають у сітку. Після цього з сітки знову беруть 2 м'ячі для наступної гри. Знайти ймовірність того, що обидва останні м'ячі будуть новими.

Вар. 25.

$\alpha = 0, \; \beta = 1;$

1. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ A(1 - \frac{x}{2}); & 0 < x \le 2; \\ 0; & x > 2 \end{cases}$

2. В групі навчається 12 студентів. Імовірність того, що день народження студента припаде на певний день року дорівнює $\frac{1}{365}$. Знайти найбільш імовірне число студентів, що народились 7 липня та знайти ймовірність такої події.

3. Три сестри (старша, середня та молодша) по черзі прибирають на кухні. Старша сестра витрачає 40% часу на цю роботу, інші дві – по 30% кожна. Ймовірності розбити при митті посуду хоча б одну тарілку складають для дівчат відповідно 0.02; 0.03; 0.04. Невідомо хто напередодні мив посуд, але одна тарілка виявилась розбитою. Знайти ймовірність того, що посуд мила старша сестра.

Вар. 26.

$\alpha = 0, \; \beta = 1;$

1. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ Ax(x-2); & 0 < x \le 2; \\ 0; & x > 2 \end{cases}$

2. Скільки деталей необхідно взяти, щоб найімовірніше число не бракованих деталей дорівнювало 50, якщо ймовірність того, що взята навмання деталь буде бракованою дорівнює 0,1? Яка ймовірність того, що із 6 взятих навмання деталей не бракованих буде більше половини?

3. Завод A завозить до магазину 75% усіх акумуляторів, що продаються, а завод B - 25%. Відсоток бракованих акумуляторів дорівнює 1% та 2% відповідно для заводів A та B. Клієнт купив у магазині акумулятор. Він

виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його виготовували на заводі A**?**

Вар. 27.

$\alpha = 0, \ \beta = 1;$

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ A(x-1)^2; & 0 < x \le 2; \\ 0; & x > 2 \end{cases}$$

2. Контрольну роботу з теорії ймовірностей з першого разу задовільно виконують в середньому 30% студентів. Знайти ймовірність того, що не менше трьох студентів із десяти виконають задовільно контрольну роботу. Знайти найімовірніше число студентів із 10, що виконають задовільно цю роботу.

3. Є три партії комп'ютерів, що складаються відповідно з 20, 30, та 50 штук. Ймовірності того, що виготовлені на різних заводах комп'ютери будуть працювати без ремонту заданий час, відповідно, для цих партій, дорівнюють – 0.7; 0.8; 0.9. Яка ймовірність того , що навмання обраний комп'ютер пропрацює без ремонту заданий час?

Вар. 28.

$\alpha = 0, \ \beta = 0,5;$

1. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ A(x^3+1); & 0 < x \le 1; \\ 0; & x > 1 \end{cases}$

2. Ймовірність того, що пасажир запізниться на поїзд дорівнює 0,01. Знайти найбільш імовірне число пасажирів, що запізнились на поїзд із 98 пасажирів. Знайти ймовірність такої кількості запізнень на поїзд.

3. В урні 3 помаранчеві та 4 сині кулі. Навмання дістали 2 кулі. Потім дістали ще 2. Останні кулі виявились синіми. Яка ймовірність того, що перед цим дістали 2 помаранчеві кулі?

Вар. 29.

$\alpha = 0,\ \beta = 0,5;$

1. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ Ax(1 - x^2); & 0 < x \le 1; \\ 0; & x > 1 \end{cases}$

2. Ймовірність за результатами аналізів вірно розпізнати певну хворобу у пацієнта в середньому дорівнює 0,8. Лікар провів дослідження аналізів 8 пацієнтів. У скількох пацієнтів найімовірніше буде вірно виявлено на основі аналізів хворобу? Знайти ймовірність виявлення такої кількості хворих.

3. Студент підготував до іспиту 20 питань із 30. В екзаменаційному білеті 3 питання. Для задовільної здачі іспиту потрібно відповісти правильно хоча б на два питання. Студент задовільно здав іспит. Яка ймовірність того, що він знав відповідь на перше та третє питання ?

Вар. 30.

$\alpha = 0,\ \beta = 0,5;$

1. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ A(x^2 + 1); & 0 < x \le 1; \\ 0; & x > 1 \end{cases}$

2. Відомо, що 10% нових малих підприємств, які тільки відкрились, припиняють свою діяльність в середньому через два роки. Яка ймовірність того, що із шести малих підприємств не більше двох припинять свою діяльність через два роки? Знайти найімовірніше число підприємств, які не припинять свою діяльність через два роки після відкриття.

3. Клієнт розмістив свої вклади у двох банках: 30% коштів у І-му банку, а 70% - у ІІ-му. Ймовірність того, що стане банкрутом перший банк дорівнює 0.1, а другий – 0.01. Яка ймовірність того, що клієнт не загубить своїх коштів через банкрутство хоча б одного із банків?

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ

Розділ 1. Випадкові події.

Тема 1.1 Класифікація подій. Класичне, статистичне, геометричне та аксіоматичне означення ймовірності. Дії над подіями.

Тема 1.2. Умовна ймовірність, незалежні події. Теорема добутку залежних та незалежних подій.

Тема 1.3. Формула повної ймовірності та формула Байеса. Теоретико - множинна трактовка основних понять.

Розділ 2. Дискретні випадкові величини.

Тема 2.1. Повторні незалежні досліди: формули Бернуллі, Пуассона, локальна та інтегральна теореми Муавра - Лапласа.

Тема 2.2. Випадкові величини: Поняття випадкової величини, математичні операції над випадковими величинами, основні характеристики дискретної випадкової величини.

Розділ 3. Неперервні випадкові величини та деякі закони їх розподілу.

*Тема 3.1***.** Неперервні випадкові величини. Основні характеристики: густина ймовірності, мода, медіана, моменти випадкових величин, асиметрія, ексцес.

Тема 3.2. Основні закони розподілу: біноміальний, Пуассона, рівномірний, показниковий, нормальний.

Розділ 4. Закон великих чисел та граничні теореми.

Тема 4.1. Закон великих чисел та граничні теореми: нерівність Маркова, Нерівність Чебишева, Теорема Бернуллі, центральна гранична теорема.

Розділ 5. Багатовимірні випадкові величини.

*Тема 5.1***.** Багатовимірні випадкові величини: Поняття багатовимірної випадкової величини і закон її розподілу, функція розподілу двовимірної випадкової величини, густина ймовірності, умовні закони розподілу. Числові характеристики двовимірної випадкової величини.

Тема 5.2. Поняття стохастичної залежності. Коефіцієнт кореляції.

ТЕМАТИКА ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Основною метою проведення практичних занять з теорії ймовірностей є прищеплення студентам навичок розв'язування задач з теорії ймовірностей, на прикладі яких демонструються стохастичні моделі соціологічних досліджень.

1. Елементи комбінаторики: перестановки, розміщення, сполучення.
2. Випадкові події.
3. Дискретні випадкові величини.
4. Неперервні випадкові величини та деякі закони їх розподілу.
5. Закон великих чисел та граничні теореми.
6. Багатовимірні випадкові величини.

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

ОСНОВНА ЛІТЕРАТУРА

1. Б.Л. ван дер Варден. Математическая статистика. – М.:изд.-во иностранной литературы, 1960 – 434 с.
2. Гаральд Крамер. Математические методы статистики. – М.: «МИР», 1975 – 648 с.
3. Рудик О.Б. Початки алгебри, аналізу, аналітичної геометрії і теорії ймовірностей. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 416 с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.:-"ВЫСШАЯ ШКОЛА", 1998 - 400 с.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.:-"ВЫСШАЯ ШКОЛА", 1998 - 480 с.
6. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.:- "ЮНИТИ", 2006 - 574 с.
7. Істер О. С. Комбінаторика, біном Ньютона та теорія ймовірностей у школі. - Київ: - "Факт", 1997 - 183 с.

8. Салманов О.Н. Математическая экономика с применением "Mathcad u Excel" - "БХВ-Петербург", 2003 - 452 с.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В., А.Я Хинчин. Элементарное введение в теорию вероятностей.- М.: - "НАУКА", 1976 - 165 с.
2. Калинина В.Н., Панкин В.Ф. Математическая статистика. – М.:- «ВЫСШАЯ ШКОЛА», 1998 - 335с.
3. Хэмди А., Таха Введение в исследование операций. - Москва, Санкт-Петербург, Киев: Издательский дом "Вильямс", 2001 - 912 с.
4. Суходольский Г.В. Математика для гуманитариев. – Харьков: Изд.-во Гуманитарный центр, 2007. – 256 с.

ДОДАТОК 1

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА

Таблиця значень функції Лапласа – це ймовірність того, що випадкова величина набуває значення, яке належить заданому інтервалу. При розв’язуванні задач з теорії ймовірностей досить часто вимагається знайти значення функції Лапласа за відомим значенням аргументу, або навпаки, по відомому значенню функції Лапласа вимагається знайти значення аргументу.

Функція Лапласа

$$\Phi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t}^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

При різних значеннях t: $\Phi(-t)=-\Phi(t);\ \ \Phi(0)=0;\ \ \Phi(t\geq 4)\approx 1.$

t	$\Phi(t)$
0.00	0.00000
0.01	0.00798
0.02	0.01596

t	$\Phi(t)$
1.00	0.68269
1.01	0.68750
1.02	0.69227

t	$\Phi(t)$
2.00	0.95450
2.01	0.95557
2.02	0.95662

t	$\Phi(t)$
3.00	0.99730
3.01	0.99739
3.02	0.99747

0.03	0.02393
0.04	0.03191
0.05	0.03988
0.06	0.04784
0.07	0.05581
0.08	0.06376
0.09	0.07171
0.10	0.07966
0.11	0.08759
0.12	0.09552
0.13	0.10348
0.14	0.11134
0.15	0.11924
0.16	0.12712
0.17	0.13499
0.18	0.14285
0.19	0.15069
0.20	0.15852
0.21	0.16633
0.22	0.17413

1.03	0.69699
1.04	0.70166
1.05	0.70628
1.06	0.71086
1.07	0.71538
1.08	0.71986
1.09	0.72429
1.10	0.72867
1.11	0.73300
1.12	0.73729
1.13	0.74152
1.14	0.74571
1.15	0.74986
1.16	0.75395
1.17	0.75800
1.18	0.76200
1.19	0.76595
1.20	0.76986
1.21	0.77372
1.22	0.77754

2.03	0.95764
2.04	0.95865
2.05	0.95964
2.06	0.96060
2.07	0.96155
2.08	0.96247
2.09	0.96338
2.10	0.96427
2.11	0.96514
2.12	0.96599
2.13	0.96683
2.14	0.96765
2.15	0.96844
2.16	0.96923
2.17	0.96999
2.18	0.97074
2.19	0.97148
2.20	0.97219
2.21	0.97289
2.22	0.97358

3.03	0.99755
3.04	0.99763
3.05	0.99771
3.06	0.99779
3.07	0.99786
3.08	0.99793
3.09	0.99800
3.10	0.99806
3.11	0.99813
3.12	0.99819
3.13	0.99825
3.14	0.99831
3.15	0.99837
3.16	0.99842
3.17	0.99848
3.18	0.99853
3.19	0.99858
3.20	0.99863
3.21	0.99867
3.22	0.99872

0.23	0.18191
0.24	0.18967
0.25	0.19741
0.26	0.20514
0.27	0.21284
0.28	0.22052
0.29	0.22818
0.30	0.23582
0.31	0.24344
0.32	0.25103
0.33	0.25860
0.34	0.26614
0.35	0.27366
0.36	0.28115
0.37	0.28862
0.38	0.29605
0.39	0.30346
0.40	0.31084
0.41	0.31819
0.42	0.32552

1.23	0.78130
1.24	0.78502
1.25	0.78870
1.26	0.79233
1.27	0.79592
1.28	0.79945
1.29	0.80295
1.30	0.80640
1.31	0.80980
1.32	0.81316
1.33	0.81648
1.34	0.81975
1.35	0.82298
1.36	0.82617
1.37	0.82931
1.38	0.83241
1.39	0.83547
1.40	0.83849
1.41	0.84146
1.42	0.84439

2.23	0.97425
2.24	0.97491
2.25	0.97555
2.26	0.97618
2.27	0.97679
2.28	0.97739
2.29	0.97798
2.30	0.97855
2.31	0.97911
2.32	0.97966
2.33	0.98019
2.34	0.98072
2.35	0.98123
2.36	0.98172
2.37	0.98221
2.38	0.98269
2.39	0.98315
2.40	0.98360
2.41	0.98405
2.42	0.98448

3.23	0.99876
3.24	0.99880
3.25	0.99855
3.26	0.99889
3.27	0.99892
3.28	0.99896
3.29	0.99900
3.30	0.99903
3.31	0.99907
3.32	0.99910
3.33	0.99913
3.34	0.99916
3.35	0.99919
3.36	0.99922
3.37	0.99925
3.38	0.99928
3.39	0.99930
3.40	0.99933
3.41	0.99935
3.42	0.99937

0.43	0.33280
0.44	0.34006
0.45	0.34729
0.46	0.35448
0.47	0.36164
0.48	0.36877
0.49	0.37587
0.50	0.38292
0.51	0.38995
0.52	0.39694
0.53	0.40389
0.54	0.41080
0.55	0.41768
0.56	0.42452
0.57	0.43132
0.58	0.43809
0.59	0.44481
0.60	0.45149
0.61	0.45814
0.62	0.46474

1.43	0.84728
1.44	0.85013
1.45	0.85294
1.46	0.85571
1.47	0.85844
1.48	0.86113
1.49	0.86378
1.50	0.86639
1.51	0.86696
1.52	0.87149
1.53	0.87398
1.54	0.87644
1.55	0.87886
1.56	0.88124
1.57	0.88358
1.58	0.88589
1.59	0.88817
1.60	0.89040
1.61	0.89260
1.62	0.89477

2.43	0.98490
2.44	0.98531
2.45	0.98571
2.46	0.98611
2.47	0.98649
2.48	0.98686
2.49	0.98723
2.50	0.98758
2.51	0.98793
2.52	0.98826
2.53	0.98859
2.54	0.98891
2.55	0.98923
2.56	0.98953
2.57	0.98983
2.58	0.99012
2.59	0.99040
2.60	0.99068
2.61	0.99095
2.62	0.99121

3.43	0.99940
3.44	0.99942
3.45	0.99944
3.46	0.99946
3.47	0.99948
3.48	0.99950
3.49	0.99952
3.50	0.99953
3.51	0.99955
3.52	0.99957
3.53	0.99958
3.54	0.99960
3.55	0.99961
3.56	0.99963
3.57	0.99964
3.58	0.99966
3.59	0.99967
3.60	0.99968
3.61	0.99969
3.62	0.99971

0.63	0.47131
0.64	0.47783
0.65	0.48431
0.66	0.49075
0.67	0.49714
0.68	0.50350
0.69	0.50981
0.70	0.51607
0.71	0.52230
0.72	0.52848
0.73	0.53461
0.74	0.54070
0.75	0.54675
0.76	0.55275
0.77	0.55870
0.78	0.56461
0.79	0.57047
0.80	0.57629
0.81	0.58206
0.82	0.58778

1.63	0.89690
1.64	0.89899
1.65	0.90106
1.66	0.90309
1.67	0.90508
1.68	0.90704
1.69	0.90897
1.70	0.91087
1.71	0.91273
1.72	0.91457
1.73	0.91637
1.74	0.91814
1.75	0.91988
1.76	0.92159
1.77	0.92327
1.78	0.92492
1.79	0.92655
1.80	0.92814
1.81	0.92970
1.82	0.93124

2.63	0.99146
2.64	0.99171
2.65	0.99195
2.66	0.99219
2.67	0.99241
2.68	0.99263
2.69	0.99285
2.70	0.99307
2.71	0.99327
2.72	0.99347
2.73	0.99367
2.74	0.99386
2.75	0.99404
2.76	0.99422
2.77	0.99439
2.78	0.99456
2.79	0.99473
2.80	0.99489
2.81	0.99505
2.82	0.99520

3.63	0.99972
3.64	0.99973
3.65	0.99974
3.66	0.99975
3.67	0.99976
3.68	0.99977
3.69	0.99978
3.70	0.99978
3.71	0.99979
3.72	0.99980
3.73	0.99981
3.74	0.99982
3.75	0.99982
3.76	0.99983
3.77	0.99984
3.78	0.99984
3.79	0.99985
3.80	0.99986
3.81	0.99986
3.82	0.99987

0.83	0.59346
0.84	0.59909
0.85	0.60468
0.86	0.61021
0.87	0.61570
0.88	0.62114
0.89	0.62653
0.90	0.63188
0.91	0.63718
0.92	0.64243
0.93	0.64763
0.94	0.65278
0.95	0.65789
0.96	0.66294
0.97	0.66795
0.98	0.67291
0.99	0.67783

1.83	0.93275
1.84	0.93423
1.85	0.93569
1.86	0.93711
1.87	0.93852
1.88	0.93989
1.89	0.94124
1.90	0.94257
1.91	0.94387
1.92	0.94514
1.93	0.94639
1.94	0.94762
1.95	0.94882
1.96	0.95000
1.97	0.95116
1.98	0.95230
1.99	0.95341

2.83	0.99535
2.84	0.99549
2.85	0.99563
2.86	0.99576
2.87	0.99590
2.88	0.99602
2.89	0.99615
2.90	0.99627
2.91	0.99639
2.92	0.99650
2.93	0.99661
2.94	0.99672
2.95	0.99682
2.96	0.99692
2.97	0.99702
2.98	0.99712
2.99	0.99721

3.83	0.99987
3.84	0.99988
3.85	0.99988
3.86	0.99989
3.87	0.99989
3.88	0.99990
3.89	0.99990
3.90	0.99990
3.91	0.99991
3.92	0.99991
3.93	0.99992
3.94	0.99992
3.95	0.99992
3.96	0.99992
3.97	0.99993
3.98	0.99993
3.99	0.99993

Додаток 2

Таблиця значень функції Пуассона $P_k(\lambda) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

k \λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1	1,5	2
0	0,90	0,818	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4493	0,3678	0,2231	0,135
1	0,09	0,163	0,2222	0,2681	0,3032	0,3292	0,3594	0,3678	0,3346	0,270
2	0,00	0,016	0,0333	0,0536	0,0758	0,0987	0,1437	0,1839	0,2510	0,270
3	0,00	0,001	0,0033	0,0071	0,0126	0,0197	0,0383	0,0613	0,1255	0,180
4	0,00	0,000	0,0002	0,0007	0,0015	0,0029	0,0076	0,0153	0,0470	0,090
5	0	0,000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0012	0,0030	0,0141	0,036
6	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0035	0,012
7	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0007	0,003
8	0	0	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0001	0,000
9	0	0	0	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,000
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0000	0,000
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

k\λ	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
0	0,082	0,049	0,030	0,018	0,011	0,006	0,004	0,002	0,001	0,000
1	0,205	0,149	0,105	0,073	0,049	0,033	0,022	0,014	0,009	0,006
2	0,256	0,224	0,184	0,146	0,112	0,084	0,061	0,044	0,031	0,022
3	0,213	0,224	0,215	0,195	0,168	0,140	0,113	0,089	0,068	0,052
4	0,133	0,168	0,188	0,195	0,189	0,175	0,155	0,133	0,111	0,091
5	0,066	0,100	0,132	0,156	0,170	0,175	0,171	0,160	0,145	0,127
6	0,027	0,050	0,077	0,104	0,128	0,146	0,157	0,160	0,157	0,149
7	0,009	0,021	0,038	0,059	0,082	0,104	0,123	0,137	0,146	0,149
8	0,003	0,008	0,016	0,029	0,046	0,065	0,084	0,103	0,118	0,130
9	0,000	0,002	0,006	0,013	0,023	0,036	0,051	0,068	0,085	0,101
10	0,000	0,000	0,002	0,005	0,010	0,018	0,028	0,041	0,055	0,070
11	0,000	0,000	0,000	0,001	0,004	0,008	0,014	0,022	0,032	0,045
12	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,003	0,006	0,011	0,017	0,026
13	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,005	0,008	0,014
14	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,004	0,007
15	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,003
16	0	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001
17	0	0	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
18	0	0	0	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
19	0	0	0	0	0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
20	0	0	0	0	0	0	0,000	0,000	0,000	0,000
21	0	0	0	0	0	0	0	0,000	0,000	0,000
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000	0,000
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0