Повне дослідження функції та побудова графіка.

201

Вища математика: Завдання до контрольної роботи № 3 і методичні вказівки до їх виконання для студентів I курсу ХТФ заочної форми навчання / Укл. В.І.Чередніченко, О.Б.Поліщук. - К.: КПІ, 1994. - 60 с.

Коротко викладено теоретичні відомості з питань дослідження функцій і побудови відповідних графіків, комплексних чисел та дій над ними, неозначених та означених інтегралів, їх геометричного застосування, невласних інтегралів, дані варіанти контрольної роботи № 3. До кожного завдання наведено приклади з коментуванням ходу їх розв"язування.

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ $y=f(x)$ І ПОБУДОВА ВІДПОВІДНИХ ГРАФІКІВ

Користуючись загальною схемою дослідження функції, досліджуємо її парність, непарність, періодичність; знайдемо область означення, точки розриву, точки перетину графіка функції з координатними осями; критичні точки для функції за першою похідною; інтервали монотонності; точки екстремумів; екстремуми; критичні точки для функції за другою похідною; інтервали опуклості, угнутості; точки перегину; вертикальні, похилі, горизонтальні асимптоти.

Деякі поняття розглянуто в КР-2. Зупинимось на нових.

Функція називається монотонно зростаючою /спадною/ на певному проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше /менше/ значення функції $f(x)$, тобто при $x_2 > x_1, f(x_2) > f(x_1)$ /при $x_2 > x_1$, $f(x_2) < f(x_1)$/.

Внутрішні точки області існування функції, в яких похідна дорівнює нулеві або не існує, називаються критичними для функції за першою похідною.

Критичні точки для функції $y=f(x)$ за першою похідною розбивають область існування цієї функції на інтервали, в кожному з яких перша похідна зберігає знак.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a,b]$ і має скінченну похідну на інтервалі (a,b).

Тоді:

1/ для того щоб функція $f(x)$ була постійною на $[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб $f'(x)=0$ для всіх x із (a,b);

2/ для того щоб функція $f(x)$ була зростаючою /спадною/ на $[a,b]$ в широкому смислі, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ для всіх x із (a,b);

3/ для того щоб $f(x)$ була зростаючою /спадною/ у вузькому смислі, достатньо виконання умови $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ для всіх x із (a,b).

Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі (a,b), що містить точку x_0. Точка x_0 називається точкою максимуму /мінімуму/ функції $f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, що для всіх x $(x \neq x_0)$ цього околу виконується нерівність $f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$.

Може бути і нестрога нерівність.

На рис. I зображено графік функції $y=f(x)$, для якої x_1, x_3 - точки максимуму, x_2, x_4 - точки мінімуму.

Зауважимо: якщо x_0 - точка максимуму /мінімуму/ функції $f(x)$, то приріст функції в цій точці при всіх досить малих приростах аргументу від"ємний /додатний/.

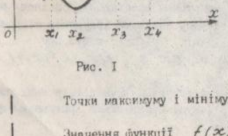

Рис. I

Точки максимуму і мінімуму функції - точки екстремуму.

Значення функції $f(x)$ в точці максимуму /мінімуму/ - максимум /мінімум/ функції, або екстремум функції.

Необхідна умова /НУ/ екстремуму функції: якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює нулеві /якщо $f(x)$ диференційовна/ або не існує /якщо не диференційовна/.

I. <u>Достатня умова /ДУ/ існування екстремуму</u>.

Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і деякому її околі, диференційовна в цьому околі, крім, можливо, самої точки x_0 та її похідна при переході через точку x_0 змінює знак з плюса на мінус, тоді x_0 - точка максимуму, якщо з мінуса на плюс, то x_0 - точка мінімуму.

2. <u>Достатня умова існування екстремуму</u>:

1/ нехай функція $f(x)$ - двічі неперервно диференційовна в точці x_0 і її околі;

2/ $f'(x_0)=0$, $f''(x_0) \neq 0$.

Тоді а/ при $f''(x_0)<0$ x_0 - точка максимуму;

б/ при $f''(x_0)>0$ x_0 - точка мінімуму.

На практиці часто зустрічаються задачі, в яких треба знайти найбільше чи найменше значення функції на відрізку $[a,b]$. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, тоді, за теоремою Вейєрштраса, вона досягає на цьому відрізку свого найменшого і найбільшого значення.

Для знаходження найбільшого /найменшого/ значення неперервної функції на $[a,b]$ треба знайти всі максимуми і мінімуми функції, значення функції на кінцях відрізка і серед всіх здобутих результатів вибрати відповідно найбільше чи найменше значення.

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в кожній точці інтервалу (a,b).

Якщо графік функції $y=f(x)$ знаходиться під /над/ дотичною, проведеною в будь-якій точці $M(x_0, f(x_0))$, де $x_0 \in (a,b)$, то графік цієї функції опуклий /угнутий/ на інтервалі (a,b) /рис. 2, 3/.

На рис. 2 графік функції опуклий, а на рис. 3 - угнутий на відповідному проміжку.

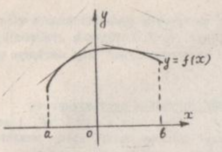

Рис. 2

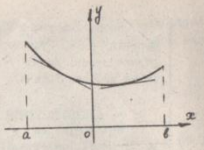

Рис. 3

Внутрішні точки області існування функції, в яких друга похідна дорівнює нулеві або не існує, називаються критичними для функції за другою похідною.

Критичні точки для функції за другою похідною поділяють область існування на інтервали, в кожному з яких друга похідна зберігає знак.

Якщо друга похідна функції $f(x)$ від"ємна /додатна/ на інтервалі (a, b), тобто $f''(x)<0$ $(f''(x)>0)$, то крива $y=f(x)$ опукла /угнута/ на цьому інтервалі.

Точка з координатами $(x_0, f(x_0))$, яка відділяє опуклу частину неперервної кривої від угнутої, називається точкою перегину кривої $y=f(x)$.

Необхідною умовою існування точки перегину $(x_0, f(x_0))$ графіка неперервної функції $y=f(x)$ є або рівність нулеві другої похідної функції при $x=x_0$, тобто $f''(x_0)=0$, або друга похідна при $x=x_0$ не існує.

Нехай крива задана рівнянням $y=f(x)$. Якщо $f''(x_0)=0$ або $f''(x_0)$ не існує і при переході через значення $x=x_0$ друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка кривої з абсцисою $x=x_0$, тобто $(x_0, f(x_0))$ – точка перегину.

Асимптотою графіка функції $y=f(x)$ називають пряму лінію l, до якої необмежено наближається точка, що рухається уздовж її графіка в нескінченність /рис. 4, 5/.

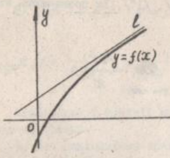

Рис. 4

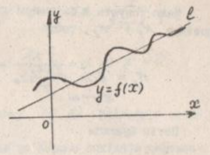

Рис. 5

Існує три види асимптот: вертикальні, похилі, горизонтальні.

Вертикальні асимптоти шукають для кривих, заданих рівнянням $y=f(x)$, якщо функції $f(x)$ мають розриви другого роду.

Зауважимо: будь-яке дослідження функції починається із знаходження області її існування.

Нехай $x=a$ – точка розриву функції $y=f(x)$. Досліджуючи наявність вертикальних асимптот графіка функції, шукаємо ліво- і правосторонню границі в точці $x=a$.

Нехай

1/ $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = +\infty \ (-\infty)$;

2/ $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty \ (-\infty)$;

3/ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \ (-\infty)$.

У першому випадку говорять, що пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою частини графіка, розміщеною ліворуч від асимптоти, в другому – праворуч, в третьому $x=a$ – вертикальна асимптота графіка функції $y=f(x)$.

Досліджуючи для функції $y=f(x)$ наявність похилої асимптоти, що має вигляд

$$y = kx + b, \qquad /1/$$

шукають

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (1'), \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}. \qquad /1''/$$

2*

Якщо існують й скінченні границі /1'/, /1"/, їх позначають відповідно k_1 і k_2, тобто

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}. \qquad /2/$$

Потім шукають

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - k_1 x] \quad (2'), \qquad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - k_2 x]. \quad /2''/$$

Якщо існують й скінченні границі /2'/ і /2"/, їх позначають відповідно b_1 і b_2, тобто

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - k_1 x], \qquad b_2 = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - k_2 x].$$

Після підстановки знайдених значень k_1, b_1 (k_2, b_2) у /1/, отримаємо $y=k_1 x + b_1$ $(y=k_2 x + b_2)$ похилі асимптоти, якщо $k_1 \neq 0$ $(k_2 \neq 0)$. Якщо $k_1 = 0$ $(k_2 = 0)$, то матимемо $y = b_1$ $(y = b_2)$ – горизонтальні асимптоти.

Приклад. Дослідити функцію $y = x + \dfrac{x}{3x-1}$ і побудувати її графік.

Розв"язання. 1/ Функція не існує в точці, в якій знаменник дробу $\dfrac{x}{3x-1}$ дорівнює нулеві. Отже, областю означення функції є два інтервали $(-\infty; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$ $x=\frac{1}{3}$ – точка розриву.

2/ $f(x) = x + \dfrac{x}{3x-1}$,

$$f(-x) = -x + \frac{-x}{-3x-1} = -\left(x - \frac{x}{3x+1}\right) \ \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) \neq f(-x), \\ f(x) \neq -f(-x). \end{array}$$

Ця функція є ні парна, ні непарна, не є періодична, тобто маємо функцію загального вигляду.

3/ При $x=0$ $y=0$, при $y=0$ $x + \dfrac{x}{3x-1} = 0$.

$$x\left(1 + \frac{1}{3x-1}\right) = x\,\frac{3x-1+1}{3x-1} = \frac{3x^2}{3x-1} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Графік даної функції має єдину точку $(0, 0)$ спільну з координатними осями.

4/ Для знаходження критичних точок за першою похідною диференціюємо дану функцію:

$$y' = \left(x + \frac{x}{3x-1}\right)' = 1 + \frac{3x-1-3x}{(3x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(3x-1)^2};$$

$$y'=0 \text{ при } 1 - \frac{1}{(3x-1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{(3x-1)^2-1}{(3x-1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$(3x-1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} (3x-1)-1=0, \\ (3x-1)+1=0. \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 3x-2=0, \\ 3x=0. \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=\frac{2}{3}, \\ x=0. \end{array} \right.$$

Отже, в точках $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$ $y'=0$.

У точці $x = \frac{1}{3}$ похідна не існує, але ця точка не входить в область означення функції. Тому критичними точками для даної функції за першою похідною є $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$. Ці точки розбивають область означення на інтервали, в кожному з яких перша похідна зберігає знак.

5/-7/ Запишемо інтервали монотонності функції, з"ясуємо характер монотонності на кожному інтервалі, внаслідок чого автоматично виділяються точки екстремумів, та знайдемо екстремуми функції.

При $x=-1$ з інтервалу $(-\infty, 0)$. $y'(-1) = 1 - \dfrac{1}{(-3+1)^2} > 0$.

При $x=\frac{1}{6}$ з інтервалу $(0; \frac{1}{3})$ $y'(\frac{1}{6}) = 1 - \dfrac{1}{(\frac{3}{6}-1)^2} < 0$.

3-1333

При $x = \frac{1}{2}$ з інтервалу $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2} < 0.$

При $x = 1$ з інтервалу $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ $y'(1) = 1 - \frac{1}{(3-1)^2} > 0.$

При переході першої похідної через внутрішню точку $x = 0$ із області означення функції перша похідна змінила знак з плюса на мінус. Отже, при $x = 0$ за I ДУ існування екстремуму дана функція досягає максимуму. Знайдемо

$$y_{max}\Big|_{x=0} = \left[x + \frac{x}{3x-1}\right]_{x=0} = 0.$$

Перша похідна при переході через внутрішню точку $x = \frac{2}{3}$ області означення функції змінила знак з мінуса на плюс. Отже, при $x = \frac{2}{3}$ за тією самою ознакою існування екстремуму функція досягає мінімуму. Знайдемо

$$y_{min}\Big|_{x=\frac{2}{3}} = \left[x + \frac{x}{3x-1}\right]_{x=\frac{2}{3}} = \left[\frac{2}{3} + \frac{2/3}{3\cdot\frac{2}{3}-1}\right] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

8/ Шукаємо другу похідну функції

$$y'' = \left[1 - \frac{1}{(3x-1)^2}\right]' = \left[1-(3x-1)^{-2}\right]' = 0-(-2)(3x-1)^{-3}3 = \frac{6}{(3x-1)^3}.$$

Друга похідна не дорівнює нулеві всюди в області існування функції; $x = \frac{1}{3}$, при якому друга похідна не існує, не є внутрішньою точкою області означення. Отже, критичних точок за другою похідною для функції нема.

9/ У зв"язку з цим з"ясуємо знак другої похідної в кожному з інтервалів, що входять в область означення функції.

При $x = 0$ з інтервалу $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ $y''(0) = \frac{6}{(-1)^3} < 0.$

При $x = 1$ з інтервалу $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ $y''(1) = \frac{6}{(3-1)^3} > 0.$

Отже, на інтервалі $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ крива опукла, на інтервалі $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ – угнута.

I0/ Оскільки $x = \frac{1}{3}$ не входить в область означення функції, точка з абсцисою $x = \frac{1}{3}$ не є точкою перегину, хоча при переході через неї опуклість кривої змінюється на угнутість.

II/ З"ясуємо питання наявності асимптот, $x = \frac{1}{3}$ – точка розриву функції. Шукаємо односторонні границі в точці $x = \frac{1}{3}$.

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}-0}\left(x + \frac{x}{3x-1}\right) = -\infty,$$ бо $(3x-1)$ при $x \to \frac{1}{3}$ ліворуч є нескінченно мала зі знаком "-", а її обернена величина є нескінченно велика зі знаком "-". Аналогічно міркуючи, знаходимо:

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}+0}\left(x + \frac{x}{3x-1}\right) = +\infty.$$

Отже, $x = \frac{1}{3}$ вертикальна асимптота графіка досліджуваної функції.

Похила асимптота має вигляд $y = kx + b$. Шукаємо $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + \frac{x}{3x-1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty}\left(1 + \frac{1}{3x-1}\right) = 1;$$

$\frac{1}{3x-1}$ – нескінченно мала при $x \to \pm\infty$, бо є оберненою величиною до нескінченно великої з відповідним знаком "+", "-". Шукана границя дорівнює одиниці, існує скінченна, тому $k =$ I. Визначаємо $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$.

$$\lim_{x \to \pm\infty}\left(x + \frac{x}{3x-1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{3x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{3 - 1/x} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}.$$

Підставимо в рівняння похилої асимптоти знайдені значення для k, b /$y = x + \frac{1}{3}$ – рівняння похилої асимптоти/. Оскільки $k \neq 0$, горизонтальної асимптоти нема.

Для полегшення побудови графіка функції результати досліджень доцільно записати за такою схемою:

I/ область означення функції $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$;

2/ функція загального вигляду;

3/ $O(0;0)$ – точка, спільна для графіка функції і координатних осей;

4/ $y' = 1 - \frac{1}{(3x-1)^2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$ – критичні точки для функції за першою похідною

	$(-\infty; 0)$	0	$\left(0; \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$
y'	>0		<0	<0		>0
		T_{max}			T_{min}	
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$

5/ $y'' = \frac{6}{(3x-1)^3}$, критичних точок за другою похідною нема;

	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$
y''	<0	>0
Графік y	$\frown$	$\smile$

7/ точок перегину нема;

8/ $x = \frac{1}{3}$ – вертикальна асимптота, $y = x + \frac{1}{3}$ – похила асимптота, горизонтальних асимптот нема /рис. 6/.

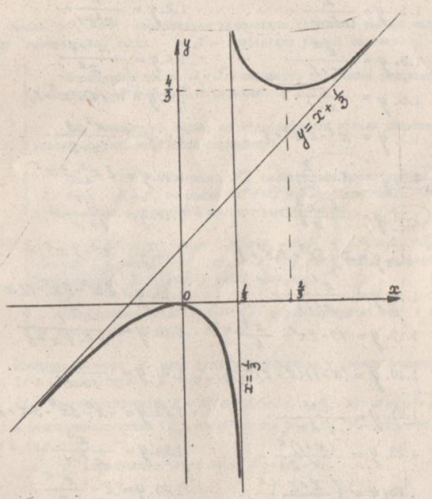

Рис. 6