Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля.

Студенти хіміко-технологічного факультету заочної форми навчання вивчають у IV семестрі дві теми: "Кратні, криволінійні і поверхневі інтеграли; елементи теорії поля" і "Чисельні і функціональні ряди; ряди Фур'є", використовуючи літературу [1-], а також лекції, прочитані на установчій сесії.

У розділах 1 - "Кратні, криволінійні і поверхневі інтеграли; елементи теорії поля" і 2 - "Чисельні і функціональні ряди; ряди Фур'є", наведено основні теоретичні відомості і типові приклади, в розділі 3 - завдання для контрольних робіт 5 і 6.

РОЗДІЛ 1. "КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ І ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ; ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ"

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Подвійним інтегралом функції $f(x,y)$, розповсюдженим на область $\mathcal{D}$, називають вираз типу

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy \qquad (1)$$

Теорема (про існування подвійного інтегралу). Якщо область $\mathcal{D}$ з кусково-гладкою границею $\partial\mathcal{D}$ обмежена і замкнена, а функція $f(x,y)$ неперервна в цій області, то подвійний інтеграл (1) існує.

Ми завжди будемо вважати, що умови цієї теореми виконуються.

Геометричне тлумачення подвійного інтегралу - об'єм прямого циліндроїда; частинний випадок - площа області інтегрування. Фізичне застосування - маса пластини, статичні моменти, моменти

інерції пластини відносно координатних осей.

Потрійним інтегралом функції $f(x,y,z)$, розповсюдженим на область Ω, називають вираз типу

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (2)$$

Теорема (про існування потрійного інтегралу). Якщо область Ω з кусково-гладкою границею S обмежена і замкнена, а функція $f(x,y,z)$ неперервна в цій області, то потрійний нтеграл (2) існує.

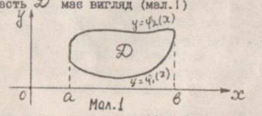
Як і раніше, ми завжди будемо вважати, що умови цієї теореми виконуються.

Геометричне тлумачення: об'єм області інтегрування Ω.

Фізичне тлумачення: маса тіла, що заповнює область Ω з густиною $f(x,y,z)$.

Обчислення подвійних і потрійних інтегралів.

Нехай область $\mathcal{D}$ має вигляд (мал.1)



Мал.1

Теорема. Нехай для функції $f(x,y)$ в області $\mathcal{D}$ існує подвійний інтеграл $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$. Нехай також для кожного x існує однократний інтеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$. Тоді існує повторний інтеграл $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ і має місце рівність

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\Big]dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Таким чином, подвійні інтеграли обчислюються шляхом зведення їх до повторних інтегралів. Для обчислення повторного інтегралу (наприклад, $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$) необхідно виконати два звичайних інтегрування:

1. Знайти внутрішній інтеграл (при фіксованому x);
2. Проінтегрувати отриману функцію аргументу x.

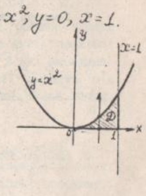
Потрійні інтеграли обчислюються аналогічно, тобто шляхом зведення їх до повторних

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \Big\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \Big[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\Big]dy\Big\}dx.$$

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_{\mathcal{D}} (x+2x^2y)\,dx\,dy,$$

де область $\mathcal{D}$ - фігура обмежена лініями $y=x^2;\ y=0,\ x=1.$

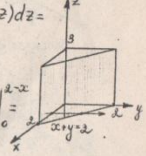


$$\iint_{\mathcal{D}} (x+2x^2y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x+2x^2y)\,dy = \int_0^1 dx \Big[xy+2x^2\frac{y^2}{2}\Big]\Big|_0^{x^2} = \int_0^1 (x^3+x^6)\,dx = \frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{7} = \frac{11}{28}.$$

Приклад 2. Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_{\Omega} (2x+3y-z)\,dx\,dy\,dz,$$

де область Ω обмежена поверхнями $x=0,\ y=0,\ x+y=2,\ z=0,\ z=3.$



$$\iiint_{\Omega} (2x+3y-z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^3 (2x+3y-z)\,dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \Big[2xz+3yz-\frac{z^2}{2}\Big]\Big|_0^3 =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \Big(6x+9y-\frac{9}{2}\Big)dy = \int_0^2 dx \Big[6xy+\frac{9y^2}{2}-\frac{9}{2}y\Big]\Big|_0^{2-x} =$$

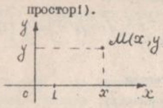
$$= \int_0^2 \Big(12x-6x^2+\frac{9}{2}(2-x)^2-9+\frac{9}{2}x\Big)dx =$$

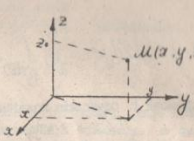
$$= \frac{12x^2}{2}-\frac{6x^3}{3}-\frac{9}{2}\frac{(2-x)^3}{3}-9x+\frac{9x^2}{4}\Big|_0^2 = 24-16+12-18+9 = 11$$

Деякі системи координат на площині та в просторі.

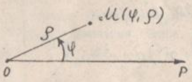
1. Декартова прямокутна система координат (на площині і в

простору).





2. Полярна система координат (на площині).



$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi$
$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \rho \ge 0.$

3. Циліндрична система координат (в просторі).

$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi$
$z = z$
$0 \le \varphi \le 2\pi, \ \rho \ge 0$

4. Сферична система координат (в просторі).

$x = \rho\cos\varphi\sin\theta$
$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$
$z = \rho\cos\theta$
$0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 \le \theta \le \pi, \ \rho \ge 0.$

Зауважимо, що іноді застосовуються і інші системи координат.

ЗАМІНА ЗМІННИХ У КРАТНИХ ІНТЕГРАЛАХ

У подвійних інтегралах перехід до полярної системи координат здійснюється за формулою

$$\iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\varphi\,d\rho.$$

У потрійних інтегралах перехід до циліндричної системи координат здійснюється за формулою

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\varphi\,d\rho\,dz,$$

а до сферичної системи координат - за формулою

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iiint_{\Omega'} f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,d\rho.$$

Виникає питання, у яких же випадках слід робити заміни змінних у кратних інтегралах? Зрозуміло, що дати якісь загальні рекомендації навряд чи можливо. Проте найчастіше у тих випадках, коли області інтегрування або підінтегральні функції залежать від виразів x^2+y^2 або $x^2+y^2+z^2$, то як правило, буває зручно переходити у такі системи координат

Якщо $f(x,y) = f(x^2+y^2)$, то у полярну систему координат;
Якщо $f(x,y,z) = f(x^2+y^2, z)$, то в циліндричну систему координат;
Якщо $f(x,y,z) = f(x^2+y^2+z^2)$, то у сферичну систему координат;

Розглянемо деякі приклади заміни змінних у кратних інтегралах.

Приклад 1.

Обчислити $\displaystyle\iint_{D} (x^2+y^2)\,dx\,dy,$

де область D обмежено лініями $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ y=x,$
$y=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$

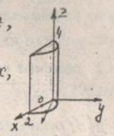
$x^2+y^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2$
$x^2+y^2 = 1 \to \rho = 1 \qquad \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$
$x^2+y^2 = 4 \to \rho = 2$

Переходимо у полярну систему координат; маємо:

$$\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_1^2 (\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)\,\rho\,d\rho = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_1^2 \rho^3\,d\rho =$$
$$= \int_0^{\pi/4} d\varphi \left(\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_1^2 = \int_0^{\pi/4} d\varphi \left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4}\varphi\Big|_0^{\pi/4} = \frac{15\pi}{16}.$$

Приклад 2.

Обчислити $\displaystyle J = \iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$



де область Ω обмежена поверхнями $x^2+y^2=2x,$
$y=0,\ y\ge 0,\ 0\le z\le 4.$
$x^2+y^2=2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2=1,\ O(1,0).$

Переходимо в циліндричну систему координат; маємо: рівняння кола $\rho = 2\cos\varphi$ тоді

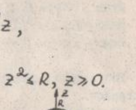
$$J = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho\,d\rho \int_0^4 z\cdot\sqrt{\rho^2}\,dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2\,d\rho \left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^4 =$$
$$= 8\int_0^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^{2\cos\varphi} = \frac{64}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{64}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{128}{9} = 14\frac{2}{9}.$$

Приклад 3.

Обчислити $\displaystyle J = \iiint_{\Omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$

де область Ω обмежено поверхнями $x^2+y^2+z^2 \le R,\ z\ge 0.$

Для області Ω: $0 \le \varphi \le 2\pi;$
$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2};$
$0 \le \rho \le R.$



Переходимо у сферичну систему координат; маємо:

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R (\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta)\,\rho^2\sin\theta\,d\rho =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta \int_0^R \rho^4\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\,d\theta\, \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^R =$$
$$= \frac{R^5}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2R^5}{15}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{4R^5\pi}{15}.$$

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Криволінійні інтеграли І-го роду

Нехай $f(x,y)$ функція, яку задано вздовж довільної спрямної

неперервної кривої K.

Означення. Криволінійним інтегралом І-го роду від функції $f(x,y)$ по кривій K називається вираз типу

$$\int_K f(x,y)\,dl.$$

Обчислення криволінійного інтегралу І-го роду

1. Нехай криву задано параметричними рівняннями $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ де функції $\varphi(t), \psi(t)$ неперервні разом із своїми похідними. Нехай також точці A кривої K відповідає значення параметра t_1, а точці B - значення параметра t_2, причому довжина дуги зростає з ростом параметра t. Тоді маємо

$$\int_K f(x,y)\,dl = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

Підкреслимо, що завжди нижня межа інтегрування повинна бути менша за верхню.

2. Нехай криву задано явним рівнянням $y = g(x)$. Нехай також точці A кривої K відповідає значення аргумента a, а точці B - значення аргумента b, причому довжина дуги зростає з ростом аргумента x. Тоді маємо

$$\int_K f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x, g(x))\sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx.$$

Приклад 1.

Обчислити $\displaystyle J = \int_K \sqrt{2y}\,dl,$

де крива K подається рівняннями $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

$x' = 1 - \cos t,\ y' = \sin t,\ dl = \sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}\,dt =$
$= \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = \sqrt{2 \ \ 2\cos t}\,dt.$

$$J = \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\sqrt{2-2\cos t}\,dt = \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos t)\,dt =$$
$$= (2t - 2\sin t)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

Приклад 2.

Обчислити $J=\int\limits_K x\,dl$,

де крива K -парабола $y=x^2$ від точки $A(1,1)$ до точки $B(2,4)$.

$$y'=2x,\quad dl=\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

$$J=\int\limits_1^2 x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{1}{8}\int\limits_1^2(1+4x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+4x^2)=$$

$$=\frac{1}{8}\,\frac{(1+4x^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_1^2=\frac{1}{12}\left(17^{3/2}-5^{3/2}\right)=\frac{1}{12}\left(\sqrt{17^3}-\sqrt{5^3}\right).$$

Криволінійні інтеграли ІІ-го роду.

Нехай, як і раніше, задано незамкнену неперервну криву K; вздовж неї задано функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$.

Означення. Криволінійним інтегралом ІІ-го роду по кривій K називається вираз

$$\int\limits_K (P(x,y)dx+Q(x,y)dy).$$

Обчислення криволінійного інтеграла ІІ-го роду

1. Нехай криву K задано параметричними рівняннями $x=\varphi(t), y=\psi(t)$, де функції $\varphi(t),\psi(t)$ неперервні разом із своїми похідними. Нехай також точці A кривої K відповідає значення параметра t_1, а точці B – значення параметра t_2. Тоді маємо

$$\int\limits_K Pdx+Qdy=\int\limits_{t_1}^{t_2}\big(P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\big)dt.$$

2. Нехай криву задано неявним рівнянням $F(x,y)=0$, причому $y=g(x)$ $(x=h(y))$. Нехай також точці A кривої K відповідає значення аргумента x_1 (або аргумента y_1), а точці B – значення аргумента x_2 (або аргумента y_2). Тоді маємо

$$\int\limits_K Pdx+Qdy=\int\limits_{x_1}^{x_2}\big[P(x,g(x))+Q(x,g(x))g'(x)\big]dx=$$

$$=\int\limits_{y_1}^{y_2}\big[P(h(y),y)h'(y)+Q(h(y),y)\big]dy.$$

Зауваження.

Якщо AB – пряма, паралельна вісі OY, то $x=c,\ dx=0$.

$$\int\limits_K P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{y_1}^{y_2}Q(c,y)dy.$$

Відповідно, якщо AB – пряма паралельна вісі OX, то $y=c,\ dy=0$.

$$\int\limits_K P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{x_1}^{x_2}P(x,c)dx.$$

Приклад 1.

Обчислити криволінійний інтеграл ІІ-го роду

$$J=\int\limits_K(xy-x^2)dx+x\,dy,$$

де K -дуга параболи $y=2x^2$ від точки $O(0,0)$ до точки $A(1,2)$.

Оскільки $dy=4x\,dx$, маємо

$$J=\int\limits_0^1(x\cdot 2x^2-x^2)dx+x\cdot 4x\,dx=\int\limits_0^1(2x^3+3x^2)dx=$$

$$=\left(2\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}+1=1,5.$$

Приклад 2.

Обчислити криволінійний інтеграл ІІ-го роду

$$J=\int\limits_K y\,dx+x\,dy$$

де K – чверть дуги кола $x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ t_1=0,\ t_2=\frac{\pi}{2}$.

Оскільки $dx=-2\sin t\,dt,\ dy=2\cos t\,dt$, маємо

$$J=\int\limits_0^{\pi/2}2\sin t(-2\sin t\,dt)+2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}4(\cos^2t-\sin^2t)dt=4\int\limits_0^{\pi/2}\cos 2t\,dt=2\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}=0.$$

Криволінійний інтеграл ІІ-го роду по замкненому контуру.

Якщо шлях інтегрування є замкнена крива, то додатним напрямом обходу контура є такий, при якому область, обмежена цим контуром, залишається зліва.

Приймемо таку домовленість. Під криволінійним інтегралом

ІІ-го роду по замкненому контуру вигляду

$$\oint\limits_K P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

де K – замкнена крива, ми завжди будемо розуміти інтеграл, по додатному напряму обходу контуру. Якщо напрям обходу контуру змінено за умовою задачі, то перед інтегралом ставиться знак "мінус".

Для криволінійних інтегралів ІІ-го роду по замкненому контуру має місце формула Гріна:

$$\oint\limits_K P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

де D область, обмежена контуром K.

При цьому ми вважаємо, що частинні похідні, які входять у праву частину цієї формули, існують і є неперервними.

Приклад. Обчислити $J=\int\limits_K(x+y)dx+(xy-x-y)dy$,

$K:\ x^2+y^2=4.$

Оскілки крива замкнена, то застосовуємо формулу Гріна. Враховуючи, що $\frac{\partial Q}{\partial x}=y-1,\ \frac{\partial P}{\partial y}=1$ маємо

$$J=\iint\limits_D(y-2)dxdy,$$

де D – круг. Переходимо до полярної системи координат

$$J=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2(\rho\sin\varphi-2)\rho d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{\rho^3}{3}\sin\varphi-2\frac{\rho^2}{2}\right)\Big|_0^2=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{8}{3}\sin\varphi-4\right)d\varphi=\left(-\frac{8}{3}\cos\varphi-4\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=-\frac{8}{3}(\cos 2\pi-\cos 0)-8\pi=$$

$$=-8\pi.$$

ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Поверхневий інтеграл І-го роду.

Нехай у просторі нам задано деяку функцію $u=u(x,y,z)$, яку ми вважаємо неперервною по всіх аргументах. Нехай також у просторі задано деяку гладку поверхню S, рівняння якої має вигляд $F(x,y,z)=0$.

Означення. Поверхневим інтегралом І-го роду (за площею поверхні) від функції $u(x,y,z)$ по поверхні S називають вираз

типу

$$\iint\limits_S u(x,y,z)d\sigma.$$

Зауваження. Для елементу довжини дуги dl і елементу площі поверхні $d\sigma$ часто використовуються однакові позначення, які треба розрізняти.

Обчислення поверхневих інтегралів І-го роду.

Ми розглянемо лише випадок, коли рівняння поверхні можна подати у вигляді $z=f(x,y)$. Оскільки при цьому має місце співвідношення

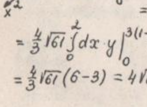
$$d\sigma=\sqrt{(z'_x)^2+(z'_y)^2+1}\,dxdy,$$

то

$$\iint\limits_S u(x,y,z)d\sigma=\iint\limits_D u(x,y,f(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy,$$

де D – проекція поверхні S на площину XOY.

Приклад. Обчислити $J=\iint\limits_S\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)d\sigma$ де S – частина площини $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, що розташовано у першому октанті.



З рівняння площини $z=4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$ тоді

$z'_x=-2,\ z'_y=-\frac{4}{3},\ d\sigma=\sqrt{1+4+\frac{16}{9}}\,dxdy=\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$

$$J=\iint\limits_D\left(4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)+2x+\frac{4}{3}y\right)\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{61}}{3}\iint\limits_D 4\,dxdy=\frac{4}{3}\sqrt{61}\int\limits_0^2dx\int\limits_0^{3(1-\frac{x}{2})}dy=$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{61}\int\limits_0^2dx\cdot y\Big|_0^{3(1-\frac{x}{2})}=\frac{4}{3}\sqrt{61}\int\limits_0^2\left(3-\frac{3}{2}x\right)dx=\frac{4}{3}\sqrt{61}\left(3x-\frac{3}{4}x^2\right)\Big|_0^2=$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{61}(6-3)=4\sqrt{61}.$$

Поверхневі інтеграли ІІ-го роду (за координатами).

При розгляді поверхневих інтегралів ІІ-го роду ми обмежимося лише випадком замкненої поверхні. Такі поверхні найчастіше орієнтують за правилом зовнішньої нормалі, тобто спрямовують нормаль до поверхні у зовнішність простору.

Нехай також задано три функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$. Поверхневі інтеграли II-го роду по замкненій поверхні S визначаються таким чином

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

Для поверхневих інтегралів II-го роду по гладкій замкненій поверхні, орієнтованій за правилом зовнішньої нормалі, має місце формула Гаусса-Остроградського

$$\oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz,$$

де Ω область, обмежена замкненою поверхнею S.

Зрозуміло, ми вважаємо, що функції P, Q і R мають неперевні частинні похідні.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Означення. Якщо в кожній точці координатного простору (або у деякій його частині) однозначно визначена деяка скалярна величина u то цей простір (або його частина) називається скалярним полем величини u.

Означення. Якщо у кожній точці координатного простору (або у деякій його частині) визначена векторна функція $\vec{F}$, то цей простір (або його частина) називається векторним полем.

Зрозуміло, що задання векторної функції $\vec{F}(x,y,z)$ рівносильне заданню трьох скалярних функцій від змінних (x,y,z), тобто

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Градієнт скалярного поля - це вектор, який визначаєьтся таким чином

$$\overrightarrow{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

За допомогою градієнта кожному скалярному полю можна поставити у відповідність векторне поле (але не навпаки).

Дивергенція векторного поля. - це скаляр, який визначається формулою

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Потік векторного поля $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ через поверхню S у напрямку, який визначається одиничним вектором нормалі $\vec{n}_0$, подається поверхневим інтегралом I-го роду

$$\Pi = \iint_S (\vec{F}, \vec{n}_0)d\sigma.$$

Якщо S - замкнена поверхня, яка обмежує об'єм Ω, то згідно з формулою Гауса-Остроградського

$$\Pi = \oiint_S (\vec{F}, \vec{n}_0)d\sigma = \iiint_\Omega div\,\vec{F}\,dv, \text{ так як}$$

$$(\vec{F}, \vec{n}_0)d\sigma = (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma = $$
$$= Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Приклад.

Обчислити потік векторного поля $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + 2x\vec{k}$ через замкнену поверхню $x^2+y^2=9$, $z=0$, $z=2$. (нормаль зовнішня).

Оскільки поверхня замкнена, то за формулою Гауса-Остроградського

$$div\,\vec{F} = y+z$$

$$\Pi = \iiint_\Omega (y+z)dxdydz = \left| \begin{matrix} x=\rho\cos\varphi & 0\le\varphi\le 2\pi \\ y=\rho\sin\varphi & 0\le\rho\le 3 \\ z=z & 0\le z\le 2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho d\rho \int_0^2 (\rho\sin\varphi + z)dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho d\rho \left(\rho\sin\varphi z + \frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (2\rho^2\sin\varphi + 2\rho)d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(2\frac{\rho^3}{3}\sin\varphi + \rho^2\right)\Big|_0^3 = \int_0^{2\pi}(18\sin\varphi + 9)d\varphi = (-18\cos\varphi + 9\varphi)\Big|_0^{2\pi} = 18\pi.$$

 $-18 + 18\pi + 18$

Ротором векторного поля називається вектор, який визначається таким чином:

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Зрозуміло, ми вважаємо, що функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ є неперервними і мають неперервні частинні похідні.

Векторне поле $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ називається потенціальним, якщо $\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = 0$, і соленоїдальним, якщо $div\,\vec{F} = 0$.

РОЗДІЛ 2. РЯДИ
І.ЧИСЛОВІ РЯДИ

Нескінченим рядом або просто рядом називається вираз типу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots .$$

Величини $a_1, a_2, a_3, \ldots$ називаються членами ряду. Якщо члени ряду деякі числа, то ряд називається чисельним (числовим).

Член a_n ряду називається загальним членом. Ряд вважається заданим, якщо відомий загальний член ряду, який подано як деяку функцію його номеру.

Збіжність ряду.

Частковою сумою ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають величину

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Кожному ряду можна поставити у відповідність нескінчену послідовність його часткових сум

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} : S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots .$$

Ця послідовність або має границю, або ні.

Означення. Ряд називається збіжним, якщо послідовність його часткових сум має скінчену границю. Ця границя і називається сумою ряду. Якщо ця границя дорівнює нескінченості або взагалі не існує, то ряд називається розбіжним.

Якщо ряд збігається, то різниця між сумою ряду S і його частковою сумою S_n називається залишком ряду і позначається символом R_n. Залишок ряду є тою похибкою, яка утворюється, якщо замість точного значення суми ряду взяти часткову суму перших членів цього ряду.

Якщо ряд збіжний, то суму цього ряду завжди можна обчислити як завгодно точно, безпосереднім додаванням його перших членів. З цього випливає, що першою задачею теорії рядів є дослідження рядів на збіжність. Задача ж знаходження суми збіжного ряду є другорядною, оскільки легко розв'язується безпосередніми обчисленнями.

Основні властивості рядів.

1.Збіжні ряди можна почленно додавати. Тобто, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, то $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B$.

2.Якщо всі члени збіжного ряду помножити на будь-яке стале число, то ряд залишається збіжним, а його сума домножується на це число.

3.Границя загального члену збіжного ряду дорівнює нулю.

Зауваження. Ця властивість дає необхідну умову збіжності ряду (невиконання цієї умови гарантує розбіжність ряду, але виконання умови не гарантує збіжності!).

4. Ряд і його залишок одночасно або збігаються, або розбігаються.

Наслідок. При дослідженні ряду на збіжність можна відкидати будь-яку скінчену кількість його перших членів.

Знакосталі ряди. Ознаки порівняння.

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається знакосталим, якщо всі його члени одного знаку (додатні або від'ємні).

Означення. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

знакосталі ряди. Якщо

$$a_n \le b_n, \quad n=1,2,\ldots$$

то кажуть, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є мажорантним для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – мінорантним для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Перша ознака порівняння. Із збіжності мажорантного ряду випливає збіжність мінорантного, а із розбіжності мінорантного ряду випливає розбіжність мажорантного.

Зауваження. Зрозуміло, що із розбіжності мажорантного ряду ми не можемо зробити ніякого висновку про поведінку мінорантного ряду, і навпаки, із збіжності мінорантного ряду не випливає збіжність або розбіжність мажорантного.

Друга ознака порівняння. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – знакосталі ряди. Якщо існує скінчена і відмінна від 0 границя відношення однакових за номером членів цих рядів, то ці ряди одночасно або збігаються або розбігаються.

Розглянуті вище ознаки порівняння мають той недолік, що при їх використанні вихідний ряд необхідно порівнювати із якимось іншим рядом. Найчастіше у ролі рядів для порівняння обираються ряди типу $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, які збігаються при $\alpha > 1$ і розбігаються при $\alpha \le 1$.

Приклади. Дослідити ряди на збіжність

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n+3}$

Перевіряємо необхідну ознаку збіжності

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{10n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10+3/n} = \frac{1}{10}$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$, ряд розбігається.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+2}$

Порівнюючи з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ і застосовуючи першу ознаку порівняння, маємо

$$a_n = \frac{n}{n^3+2} \le \frac{1}{n^2} = b_n$$

Оскільки $\alpha = 2 > 1$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+2}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{4n^3+5n}$, $a_n = \frac{n^2+3}{4n^3+5n}$

Порівнюючи з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ і застосовуючи другу ознаку порівняння, маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+3}{4n^3+5n}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n}{4n^3+5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{5}{n^2}} = \frac{1}{4}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \ne 0$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається, то розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{4n^3+5n}$.

Від розглянутих вище ознак порівняння слід відрізняти ознаки збіжності, які побудовані на дослідженні лише заданих рядів. Ми розглянемо три такі ознаки.

1. Ознака Даламбера. Нехай знакосталий ряд такий, що існує границя

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Тоді, якщо $D<1$, то ряд збігається, якщо $D>1$ – розбігається; якщо ж $D=1$ – ознака незастосовна.

2. Ознака Коші. Нехай знакосталий ряд такий, що існує границя

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Тоді, якщо $K<1$ то ряд збігається, якщо $K>1$ – розбігається; якщо ж $K=1$ – ознака незастосовна.

3. Інтегральна ознака збіжності Коші.

Означення. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і деяка функція $f(x)$ пов'язані таким чином, що для будь-якого n виконується умова $f(n)=a_n$ то функція $f(x)$ називається твірною функцією ряду.

Інтегральна ознака збіжності Коші. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ має неперервну, додатню і спадаючу твірну функцію. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і невласний інтеграл $\int_{b}^{\infty} f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Приклади. Дослідити ряди на збіжність.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$, $a_n = \frac{2^n}{(n+1)!}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$

За ознакою Даламбера

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+2)!\,2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)!}{(n+1)!(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+2} = 0.$$

Оскільки $D<1$, то ряд збіжний.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$, $a_n = \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$

За ознакою Коші

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = \operatorname{arctg} 0 = 0.$$

Оскільки $K<1$, то ряд збіжний.

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

$a_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, тоді $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$ твірна функція.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{\ln x}\,\Big|_2^b = \lim_{b\to\infty} (2\sqrt{\ln b} - 2\sqrt{\ln 2}) = +\infty.$$

Інтеграл розбігається; отже, за інтегральною ознакою Коші розбігається і ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

Знакозмінні ряди.

Розглянемо знакозмінний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (A)$$

де числа a_n можуть бути як додатними, так і від'ємними. Якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \qquad (B)$$

складений із абсолютних величин ряду (A), то ряд (A) називають абсолютно збіжним. Якщо ж ряд (A) збігається, а ряд (B) розбігається, то ряд (A) називають умовно збіжним.

Оскільки ряд (B) є знакосталим, то для дослідження його на збіжність можна застосовувати всі відомі ознаки збіжності знакосталих рядів.

У загальному випадку із розбіжності ряду (B) не випливає розбіжність ряду (A).

Важливу роль серед знакозмінних рядів відіграють ряди типу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots, \quad a_n > 0.$$

члени яких почергово змінюють знак; характерною ознакою цих рядів є наявність у виразі загального члена множника $(-1)^n$ або множника $\cos(\pi n)$. Дослідження альтерновних рядів на умовну

збіжність здійснюється за теоремою Лейбніца.

Теорема Лейбніца. Якщо альтерновний ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$$

задовольняє таким умовам

1) члени ряду по модулю монотонно спадають, тобто

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots,$$

2) границя загального члену дорівнює нулю

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

то ряд збігається умовно, а залишок ряду можна оцінити таким чином $R_n < a_{n+1}$.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Оскільки ряд альтерновний, перевіряємо умови теореми Лейбніца

1. $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt{n}} > \ldots$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Отже ряд збігається умовно.

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Нехай ми маємо деяку послідовність функцій із спільною областю визначення. Вираз типу

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

називається функціональним рядом.

Функціональні ряди є об'єктами значно складнішої природи і тому вивчення їх ми почнемо з найпростіших понять.

Зрозуміло, що при кожному фіксованому значенні аргумента x функціональний ряд обертається на звичайний числовий ряд, для якого ми вже визначили поняття збіжності і розбіжності. Так само зрозуміло, що при деяких значеннях x ряд збігається, а при інших – розбігається.

Означення. Множина чисельних значень аргумента, при яких функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається, називається областю збіжності ряду.

Одними з найпростіших функціональних рядів є степеневі ряди, які у загальному вигляді можна подати таким чином:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

Зрозуміло, що лінійною заміною змінних ми зводимо ряд до вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Тому надалі ми будемо розглядати степеневі ряди саме в такому вигляді $a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$.

Легко бачити, що загальний член степеневого ряду, його часткові суми і взагалі сума ряду (якщо вона існує), є функціями аргументу x.

Область збіжності степеневого ряду має досить просту структуру. Вона складається або з однієї точки 0 (де будь-який степеневий ряд збігається), або являє собою проміжок (відкритий чи замкнений), симетричний відносно точки 0, чи, нарешті, це вся числова вісь.

Дамо означення проміжка (інтервалу) збіжності степеневого ряду.

Означення. Проміжком (інтервалом) збіжності степеневого ряду називається проміжок числової вісі, симетричний відносно точки 0, такий, що в кожній точці цього проміжку степеневий ряд збігається абсолютно, а в кожній точці, розташованій за межами замкненого проміжку, тобто при $|x|>R$ степеневий ряд розбігається.

Число R називається радіусом збіжності степеневого ряду, а точку 0 - центром збіжності.

На межах інтервалу збіжності, тобто у точках $\pm R$ ряд може збігатися абсолютно, умовно, або взагалі розбігатися.

Зрозуміло, що кожний степеневий ряд має інтервал збіжності. Для визначення радіусу збіжності степеневих рядів застосовуються такі формули

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \qquad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Приклад. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 3^n}$.

$$a_n = \frac{1}{n\cdot 3^n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}.$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\cdot 3^n}}{\frac{1}{(n+1)3^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^{n+1}}{n\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(1+\frac{1}{n}\right) = 3.$$

Покладемо тепер $x=-3$; маємо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$,

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

тобто при $x=-3$ - ряд збігається умовно (за теоремою Лейбніца).

Покладемо тепер $x=3$; маємо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,

тобто при $x=3$ ряд розбігається ($\alpha = 1$). Тоді область збіжності має вигляд $[-3, 3)$.

Зауважимо, що степеневі ряди можна почленно інтегрувати і диференціювати.

Розклад функцій у степеневі ряди.

Означення. Розкласти функцію у степеневий ряд у деякому проміжку змінювання (a, b) означає подати її у цьому проміжку у вигляді суми степеневого ряду, тобто у вигляді

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n + \dots$$

або

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots .$$

Має місце таке твердження: якщо функція може бути розкладена в степеневий ряд, то цим розкладом є її ряд Тейлора, причому цей розклад єдиний. Нескладно показати, що ряд Тейлора для функції має вигляд

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots$$

або

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots .$$

Наведемо приклади розкладу деяких функцій у ряд Тейлора.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, (-\infty < x < +\infty).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, (-\infty < x < +\infty).$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad (-1 < x < 1).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots, \ (-1 < x < 1).$$

Застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях.

Однією з причин, які пояснюють широку розповсюдженість степеневих рядів, є їх застосування у наближених обчисленнях.

Степеневі ряди найчастіше використовуються у таких задачах теорії наближених обчислень:

а) обчислення інтегралів;

б) побудова наближених розв'язків диференціальних рівнянь.

Приклад. Обчислити з похибкою $\delta = 0,001$ $\int_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$.

$$e^{-3x^2} = 1 + \frac{-3x^2}{1!} + \frac{(-3x^2)^2}{2!} + \frac{(-3x^2)^3}{3!} + \dots + \frac{(-3x^2)^n}{n!} + \dots =$$

$$= 1 - \frac{3x^2}{1!} + \frac{9x^4}{2!} - \frac{27x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{3^n\cdot x^{2n}}{n!} + \dots .$$

Отже,

$$\int_0^{0,2} \left(1 - 3x^2 + \frac{9}{2}x^4 - \frac{27}{6}x^6 + \dots + (-1)^n \frac{3^n}{n!}x^{2n} + \dots\right)dx =$$

$$= \left[x - \frac{3x^3}{3} + \frac{9x^5}{10} - \frac{9x^7}{14} + \dots + (-1)^n \frac{3^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \dots\right]\Big|_0^{0,2} =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{125} + \frac{9}{31250} - \frac{9}{14\cdot 5^7} + \dots + (-1)^n \frac{3^n}{n!}\frac{1}{5^{2n+1}(2n+1)} + \dots =$$

$$\approx \frac{1}{5} - \frac{1}{125} = \frac{24}{125}, \quad \text{бо} \quad R_2 < \frac{9}{31250} = 0,000288 < \delta.$$

Наближений розв'язок диференціальних рівнянь з допомогою рядів.

Ми розглянемо один з методів знаходження наближеного розв'язку, який засновано на розкладі розв'язку у ряд Тейлора. Цей метод застосовується до побудови наближених розв'язків задачі Коші

для звичайних диференціальних рівнянь. Ідею цього методу краще пояснити на прикладі.

Приклад. Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння

$$y' = 2\cos x - xy^2, \quad y(0) = 1.$$

Розв'язок. Безпосередньо з рівняння знаходимо

$$y'(0) = 2\cos 0 - 0\cdot 1 = 2.$$

Диференціюючи рівняння, маємо:

$$y'' = -2\sin x - x'y^2 - x\cdot(y^2)' = -2\sin x - y^2 - x\cdot 2yy'.$$

Знов диференціюючи, маємо:

$$y''' = -2\cos x - 2yy' - 2yy' - x\cdot 2y'y' - x\cdot 2y\cdot y''.$$

Отже

$$y''(0) = -2\sin 0 - 1 - 0\cdot 2\cdot 1\cdot 2 = -1.$$

$$y'''(0) = -2\cos 0 - 2\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 2 - 0\cdot 2\cdot 4 - 0\cdot 2\cdot 1\cdot 2 = -2 - 4 - 4 = -10.$$

Підставляючи все це в розклад, маємо

$$y(x) \approx 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{-10}{3!}x^3 =$$

$$= 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{10}{6}x^3 = 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{3}x^3.$$

Тригонометричні ряди Фур'є

Нехай на відрізку задано неперервну періодичну з періодом 2π функцію. Треба подати цю функцію тригонометричним рядом Фур'є, який має вигляд

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Коефіцієнти ряду Фур'є знаходяться за формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Теорема Діріхле. Нехай на відрізку $[-\pi, \pi]$ задано обмежену функцію, яка задовольняє на цьому відрізку таким умовам:

1)функція $f(x)$ є кусково-неперервною, тобто має на цьому відрізку лише скінчену кількість точок розриву I роду типу стрибка;

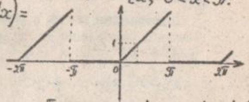
2)функція $f(x)$ є кусково-монотонною, тобто відрізок можна розбити на скінчену кількість відрізків, на кожному з яких функція монотонно або зростає, або спадає, або залишається сталою.

Тоді функція може бути розкладена в ряд Фур'є, причому сума цього ряду пов'язана з функцією таким чином:

а) $S(x) = f(x)$, де x - точка неперервності функції;

б) $S(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ де x - точка розриву I-го роду функції.

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0, \\ x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cdot\cos nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx = \begin{vmatrix} u=x, & du=dx, \\ dv=\cos nx\,dx, & \\ v=\frac{1}{n}\sin nx & \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sin\pi n - 0 + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}(\cos\pi n - \cos 0) = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u=x & dv=\sin nx\,dx \\ du=dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos\pi n + 0 + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n^2}\sin\pi n - 0\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right].$$

$(-1)^1 \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$