Інтегральне числення: невизначений та визначений інтеграли.

Означення I. Функція $F(x)$ називається первісною /або примітивною/ функцією для даної функції $f(x)$ на проміжку $<a;b>$ /скінченному або нескінченному/, якщо у всіх точках цього проміжку функція $F(x)$ є диференційовна и виконується рівність

$$F'(x) = f(x). \qquad /1/$$

Теорема I. Якщо функція $F(x)$ є яка-небудь первісна для функції $f(x)$ на проміжку $<a;b>$, то множина всіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку $<a;b>$ міститься у формулі

$$\Phi(x) = F(x) + C, \qquad /2/$$

де C - довільна стала.

Доведення. Дійсно, для будь-якого $x \in <a;b>$ виконується рівність $\Phi'(x) = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$. Отже, функція $\Phi(x)$, визначена рівністю /2/, є первісною для функції $f(x)$ на проміжку $<a;b>$. Припустимо, що $G(x)$ - довільна первісна для функції $f(x)$ на проміжку $<a;b>$. Тоді функція $h(x) = G(x) - F(x)$ на проміжку $<a;b>$ має похідну $h'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
Тому $h(x) = C$, де C - довільна стала /за наслідком із теореми Лагранжа/. Отже, $G(x) - F(x) = C$ або $G(x) = F(x) + C$. Теорему доведено.

Означення 2. Множина всіх первісних функції $f(x)$, визначеної на проміжку $<a;b>$, називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначається $\int f(x)dx$.

Якщо $F(x)$ - яка-небудь первісна для функції $f(x)$ на проміжку $<a,b>$, то, внаслідок теореми I, множина всіх її первісних на цьому проміжку, тобто невизначений інтеграл від функції $f(x)$, буде мати вигляд

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad /3/$$

Знак $\int$ називається знаком невизначеного інтеграла, функція $f(x)$ - підінтегральною функцією, вираз $f(x)dx$ - підінтегральним виразом.

Властивості невизначеного інтеграла

I. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції.

Доведення.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу.

Доведення.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Справедливість цієї рівності доводиться диференціюванням: диференціали від обох частин останньої рівності будуть однаковими і дорівнюватимуть $dF(x)$.

4. Постійний множник можна виносити за знак інтеграла

$$\int k f(x)dx = k\int f(x)dx, \quad k = const. \qquad /4/$$

Для доведення рівності /4/ знайдемо похідні від лівої і правої її частин:

$$\left(\int k f(x)dx\right)' = kf(x),$$

$$\left(k\int f(x)dx\right)' = k\left(\int f(x)dx\right)' = kf(x).$$

Отже, похідні від лівої та правої частин рівні, тому їх різниця є постійною. В такому сенсі слід розуміти рівність /4/.

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох або кількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх інтегралів:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Доведення цієї рівності аналогічне доведенню рівності /4/.

6. Формули інтегрування мають властивість інваріантності; тобто, якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f[u(x)]\,du(x) = F[u(x)] + C$.

Приклад.

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C, \quad \int tg^6 x\, d(tgx) = \frac{tg^7 x}{7} + C.$$

Тут $u(x) = tgx$.

Таблиця основних інтегралів

I. $\int 0\cdot dx = C$. 2. $\int 1\cdot dx = x + C$.

3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$. 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.

5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. 6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

7. $\int e^x dx = e^x + C$. 7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

9. $\int \sin x\,dx = C - \cos x$. I0. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

II. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = C - ctgx$. I2. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$.

I3. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$. I4. $\int tgx\,dx = C - \ln|\cos x|$.

I5. $\int ctgx\,dx = \ln|\sin x| + C$.

I6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C, \\ C - \arccos\frac{x}{a}. \end{cases}$$

I7. $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\,arctg\frac{x}{a} + C, \\ C - \frac{1}{a}\,arcctg\frac{x}{a}. \end{cases}$$

I8. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

I9. $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C.$$

20. $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

21. $$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Приклад I.

$$\int (x^3 + x - 2\sqrt{x})dx = \int x^3 dx + \int x\,dx - 2\int \sqrt{x}\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Приклад 2.

$$\int \frac{x^5 - 6x^2 + x\cos x}{x}\,dx = \int x^4 dx - 6\int x\,dx + \int \cos x\,dx = \frac{x^5}{5} - 3x^2 + \sin x + C.$$

У даному прикладі виконано почленне ділення чисельника на знаменник.

Приклад 3.

$$\int \frac{dx}{x^2 - x^4} = \int \frac{dx}{x^2(1 - x^2)} = \int \frac{1 - x^2 + x^2}{x^2(1 - x^2)}\,dx = \int \frac{dx}{1 - x^2} + \int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| - \frac{1}{x} + C.$$

2. Основні методи інтегрування [I, гл. X, § 4, 6]

Інтегрування методом заміни змінної /метод підстановки/

Нехай $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на проміжку $<a;b>$ і функція $x = \varphi(t)$ диференційована на проміжку $<\alpha;\beta>$, причому складена функція $F[\varphi(t)]$ визначена на проміжку $<\alpha;\beta>$. Тоді функція $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ має первісну на проміжку $<\alpha;\beta>$, причому

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)] + C. \qquad /5/$$

Оскільки функція $F(x)$ визначена на тому самому проміжку $<a;b>$, що і функція $f(x)$, і складена функція $f[\varphi(t)]$ визначена на проміжку $<\alpha;\beta>$, то на проміжку $<\alpha;\beta>$ буде визначена й складена функція $F[\varphi(t)]$. За правилом диференціювання складеної функції для $t \in <\alpha;\beta>$ маємо

$$\left(F[\varphi(t)]\right)'_t = F'_x(x)\cdot\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

тобто $F[\varphi(t)]$ - первісна для функції $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ на проміжку $<\alpha;\beta>$ і рівність /5/ доведена. Її можна записати ще й так:

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\,\Big|_{x = \varphi(t)}. \qquad /6/$$

Із останньої рівності видно, що для обчислення інтеграла, який стоїть у лівій частині рівності, досить обчислити інтеграл, що стоїть у правій частині, а потім замість x підставити $\varphi(t)$.

Приклад І.

$$\int \cos 6t\, dt = \frac{1}{6}\int \cos 6t \cdot 6\, dt = \frac{1}{6}\int \cos x\, dx = $$
$$= \frac{1}{6}\sin x + C = \frac{1}{6}\sin 6t + C.$$

Приклад 2.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 3x+1 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^{2/3}} =$$
$$= t^{1/3}\Big|_{t=3x+1} + C = \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

Приклад 3.

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \\ t = \sqrt{x} \end{array} \right| = 2\int \frac{t^3+t}{t+1}\,dt =$$
$$= 2\int \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1}\right)dt = 2\int (t^2-t+2)\,dt - 4\int \frac{dt}{t+1} =$$
$$= 2\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t\right) - 4\ln|t+1| + C =$$
$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln(\sqrt{x}+1) + C.$$

Метод інтегрування частинами

Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовані на проміжку $\langle a; b\rangle$ і на цьому проміжку існує первісна для функції $v(x)u'(x)$. Тоді на проміжку $\langle a; b\rangle$ існує первісна і для функції $u(x)v'(x)$ і має місце рівність

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx. \qquad /7/$$

Дійсно, інтегруючи співвідношення $d(uv) = u\,dv + v\,du$, маємо $u \cdot v = \int u\,dv + \int v\,du$ або $\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$, що рівнозначно формулі /7/. Формула /7/ називається формулою інтегрування частинами, а метод інтегрування, що грунтується на цій формулі - методом інтегрування частинами. Інколи цю формулу потрібно застосовувати кілька разів, щоб остаточно знайти первісну основної функції.

Класи функцій, до яких застосовується метод інтегрування частинами:

І клас

$$f(x) = x^k \sin\beta x,\ f(x) = x^k \cos\beta x,\ f(x) = x^k e^{\alpha x},$$
$$f(x) = x^k a^{\alpha x},\quad k \in N;\quad \alpha, \beta - const.$$

Тут за $u(x)$ приймаємо степеневу функцію x^k $|u(x) = x^k|$, а все інше включаємо в dv ($dv = \sin\beta x\,dx$). Застосовуємо формулу /7/ k раз, доки не позбавимось від степеневої функції.

Приклад І.

$$\int x^2 \cos x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2,\ du = 2x\,dx \\ dv = \cos x\,dx,\ v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{array} \right| =$$
$$= x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx \\ dv = \sin x\,dx,\ v = -\cos x \end{array} \right| =$$
$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

ІІ клас

Це функції, до складу яких як множники входять функції $\arcsin x, \operatorname{arctg} x, \ln x, \ln(1+x^2)$ і т.д. Тепер беремо $u(x) = \arcsin x$, $u(x) = \operatorname{arctg} x$, $u(x) = \ln x$, $u(x) = \ln(1+x^2)$ і т.д.

Приклад 2.

$$\int x \operatorname{arctg} x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x,\ du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x\,dx,\quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x +$$
$$+ \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C = \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + C.$$

ІІІ клас

Це інтеграли вигляду $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$, $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$, $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

У таких випадках спочатку використовуємо формулу інтегрування частинами, після чого знову приходимо до таких самих інтегралів. В результаті отримаємо лінійне алгебраїчне рівняння відносно шуканого інтеграла.

Приклад 3.

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{\alpha x},\quad du = \alpha e^{\alpha x}dx \\ dv = \sin\beta x\,dx,\ v = -\frac{1}{\beta}\cos\beta x \end{array} \right| =$$
$$= -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{\alpha x},\ du = \alpha e^{\alpha x}dx \\ dv = \cos\beta x\,dx,\ v = \frac{1}{\beta}\sin\beta x \end{array} \right| =$$
$$= -\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x + \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx\right).$$

Тепер отримаємо

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)}{\beta^2} + C_1,$$

або $$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} + C,$$

де $$C = \frac{\beta^2 C_1}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Приклад 4.

$$I = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} -$$
$$-\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left| \begin{array}{l} u = x,\quad du = dx \\ dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\ v = -\frac{1}{2}\int \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} \end{array} \right| =$$
$$= a^2 \cdot \arcsin\frac{x}{a} - \left(-x\sqrt{a^2-x^2} + \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx\right).$$
$$I = a^2 \cdot \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - I.$$
$$2I = a^2 \cdot \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}.$$

Тому

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

3. Інтегрування дробово-раціональних функцій
[І, гл. X, § 7-9]

Дробово-раціональною функцією називається функція вигляду $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, де $Q_m(x)$ і $P_n(x)$ - многочлени степенів відповідно m і n. Якщо $m < n$, то дробово-раціональна функція називається правильною, якщо $m \geq n$, то неправильною. Будь-яку неправильну дробово-раціональну функцію можна представити у вигляді суми цілої функції та правильної дробово-раціональної функції. Для цього використовується спосіб ділення многочлена на многочлен.

Приклад. $$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 5x + 4}{x^2 - 8x + 5}.$$

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - 3x^2 + 5x + 4 & x^2 - 8x + 5 \\
\underline{-\,x^4 - 8x^3 + 5x^2} & \overline{x^2 + 8x + 56} \\
\quad 8x^3 - 8x^2 + 5x + 4 & \\
\quad \underline{-\,8x^3 - 64x^2 + 40x} & \\
\qquad 56x^2 - 35x + 4 & \\
\qquad \underline{-\,56x^2 - 448x + 280} & \\
\qquad\quad 413x - 276 &
\end{array}$$

Отже: $$\frac{x^4 - 3x^2 + 5x + 4}{x^2 - 8x + 5} = x^2 + 8x + 56 + \frac{413x - 276}{x^2 - 8x + 5}.$$

Інтегрування елементарних дробово-раціональних функцій
[I, гл. X, § 7]

Елементарними дробово-раціональними функціями називають функції наступних чотирьох типів:

I. $\dfrac{A}{x - a}$; II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k \in N$, $k \geq 2$;

III. $\dfrac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$; IV. $\dfrac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^k}$, $k \in N$, $k \geq 2$,

де A, B, a, b, c – дійсні числа, причому $b^2 - 4ac < 0$.

I. $$\int \frac{A\,dx}{x - a} = A\int \frac{d(x-a)}{x - a} = A \cdot \ln|x - a| + C.$$

II. $$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}\, d(x-a) =$$
$$= A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

III. Третій тип елементарних дробово-раціональних функцій інтегрується в два етапи:

1/ в чисельнику виділяється диференціал знаменника $d(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)dx$. Тоді інтеграл розбивається на два інтеграли, перший із яких дорівнює $\frac{A}{2a}\ln|ax^2 + bx + c|$.

2/ у другому інтегралі в знаменнику виділяємо повний квадрат:
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Таким чином,
$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}\,dx = A\cdot\int\frac{\left(x + \frac{B}{A}\right)dx}{ax^2 + bx + c} =$$
$$= \frac{A}{2a}\int\frac{2ax + b - b + \frac{2aB}{A}}{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2 + bx + c)}{ax^2 + bx + c} +$$
$$+ \frac{A}{2a}\left(\frac{2aB}{A} - b\right)\int\frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{2a}\ln|ax^2 + bx + c| +$$
$$+ \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\cdot\int\frac{dx}{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}} =$$
$$= \frac{A}{2a}\ln|ax^2 + bx + c| + \left(\frac{B}{a} - \frac{Ab}{2a^2}\right)\int\frac{d\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}.$$

Останній інтеграл є табличним.

4-2-1569

Приклад.

$$\int\frac{3x + 4}{x^2 + 7x + 14}\,dx = \left|\begin{array}{l} d(x^2 + 7x + 14) = \\ = (2x + 7)\,dx \end{array}\right| = \int\frac{\frac{3}{2}(2x + 7) - \frac{13}{2}}{x^2 + 7x + 14}\,dx =$$
$$= \frac{3}{2}\int\frac{2x + 7}{x^2 + 7x + 14}\,dx - \frac{13}{2}\int\frac{dx}{x^2 + 7x + 14} = \frac{3}{2}\int\frac{d(x^2 + 7x + 14)}{x^2 + 7x + 14} -$$
$$- \frac{13}{2}\int\frac{dx}{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{3}{2}\ln|x^2 + 7x + 14| - \frac{13}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x + 7}{\sqrt{7}} + C.$$

Інтегрування дробово-раціональної функції

Будь-яку правильну дробово-раціональну функцію можна представити, причому єдиним способом, у вигляді суми елементарних дробово-раціональних функцій. Для цього знаменник потрібно спершу розкласти на множники слідуючим чином: $P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – у нулі многочлена $P_n(x)$. Якщо серед нулів многочлена $P_n(x)$ не всі будуть дійсними, то в розклад будуть входити множники вигляду: $x^2 + px + q$, де $p^2 - 4q < 0$.

Більш детально розглянемо випадок, коли $P_n(x)$ має один дійсний двократний нуль $x = \alpha$ і одну пару комплексно-спряжених нулів, тобто $P_4(x) = a_0(x - \alpha)^2(x^2 + px + q)$. Правильна дробово-раціональна функція в цьому випадку може бути представлена у вигляді суми елементарних дробово-раціональних функцій за допомогою методу невизначених коефіцієнтів:
$$\frac{Q_3(x)}{P_4(x)} = \frac{Q_3(x)}{(x - \alpha)^2(x^2 + px + q)} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x - \alpha} + \frac{Cx + D}{x^2 + px + q},$$
де A, B, C, D – невизначені коефіцієнти. Щоб знайти їх, спочатку проводимо дроби до спільного знаменника, додаємо їх, а потім прирівнюємо многочлени, що стоять в чисельниках лівої і правої частин рівності. Після цього, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x лівої і правої частин, отримаємо систему чотирьох лінійних рівнянь відносно невідомих A, B, C, D.

Приклад. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{x^4 - x^2 - 2x + 2}$.

Маємо: $x^4 - x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2(x^2 + 2x + 2)$. Тому
$$\frac{x^2}{x^4 - x^2 - 2x + 2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}.$$

Приводячи праву частину до спільного знаменника і прирівнюючи чисельники лівої і правої частин останньої рівності, отримаємо
$$x^2 = A(x^2 + 2x + 2) + B(x - 1)(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)(x - 1)^2,$$
$$x^2 = A(x^2 + 2x + 2) + B(x^3 + x^2 - 2) + (Cx + D)(x^2 - 2x + 1).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частинах, маємо:
$$\begin{array}{c|l}
x^3 & 0 = B + C, \\
x^2 & 1 = A + B - 2C + D, \\
x^1 & 0 = 2A + C - 2D, \\
x^0 & 0 = 2A - 2B + D.
\end{array}$$

Застосовуючи метод виключення Гаусса, знаходимо
$A = \frac{1}{5}$, $B = \frac{2}{25}$, $C = -\frac{6}{25}$, $D = \frac{2}{25}$.

Переходимо до інтегрування
$$\int\frac{x^2\,dx}{x^4 - x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{5}\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{2}{25}\int\frac{dx}{x - 1} - \frac{2}{25}\int\frac{(3x - 1)\,dx}{x^2 + 2x + 2} =$$
$$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{25}\ln|x - 1| - \frac{3}{25}\int\frac{2x + 2 - 2 - \frac{2}{3}}{x^2 + 2x + 2}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{25}\ln|x - 1| - \frac{3}{25}\int\frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}\,dx + \frac{8}{25}\int\frac{dx}{x^2 + 2x + 2} =$$
$$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{25}\ln|x - 1| - \frac{3}{25}\ln|x^2 + 2x + 2| + \frac{8}{25}\,\mathrm{arctg}(x + 1) + C.$$

4*

4. Інтегрування тригонометричних функцій
[I, гл. X, § I4]

Розглянемо інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, де $R(\sin x, \cos x)$ - раціональна функція від $\sin x$ і $\cos x$. Використаємо підстановку

$$tg\frac{x}{2} = t.$$

Маємо

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\frac{x}{2} = arctg\,t, \quad x = 2arctg\,t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Приклад I. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

Використовуємо підстановку $tg\frac{x}{2} = t$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.
Отримаємо

$$\int\frac{dx}{5-3\cos x} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int\frac{dt}{2+8t^2} = \int\frac{dt}{1+4t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{d(2t)}{1+(2t)^2} = \frac{1}{2}arctg(2t) + C = \frac{1}{2}arctg\left(2tg\frac{x}{2}\right) + C.$$

Якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ або $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тобто підінтегральна функція є непарною відносно $\sin x$ або $\cos x$, то зручно зробити заміну змінної у вигляді $\cos x = t$ або $\sin x = t$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}dx$.

У даному випадку підінтегральна функція $f(x) = \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}$ непарна відносно $\cos x$. Тому робимо заміну змінної $\sin x = t$. Маємо:

$$dt = \cos x\,dx, \quad \cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-t^2, \quad \cos^4 x = (1-t^2)^2 = 1-2t^2+t^4.$$

З урахуванням цих рівностей отримаємо:

$$\int\frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}dx = \int\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\cos x\,dx = \int\frac{1-2t^2+t^4}{t^4}dt =$$

$$= \int\left(\frac{1}{t^4} - \frac{2}{t^2} + 1\right)dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t + C =$$

$$= C - \frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x.$$

Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тобто підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$, то зручно ввести заміну змінної $tg x = t$. При цьому

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$x = arctg\,t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$.

Виконаємо заміну $tg x = t$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Тому

$$\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{a^2\cdot\frac{1}{1+t^2} + b^2\cdot\frac{t^2}{1+t^2}} = \int\frac{dt}{a^2+b^2\cdot t^2} =$$

$$= \frac{1}{b}\int\frac{b\,dt}{a^2+(bt)^2} = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{a}arctg\left(\frac{bt}{a}\right) + C = \frac{1}{ab}arctg\left(\frac{b}{a}tg x\right) + C.$$

Якщо інтеграл має вигляд $\int\sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx$, де m і n - натуральні числа, то зручно користуватись тригонометричними формулами:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x); \quad \sin x\cdot\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int\sin^4 x\cos^2 x\,dx$.

Маємо

$$\sin^2 x\cdot\cos^2 x = (\sin x\cdot\cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 4x).$$

$$\sin^4 x\cdot\cos^2 x = (\sin x\cdot\cos x)^2\sin^2 x = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}(1-\cos 2x - \cos 4x + \cos 2x\cos 4x) = \frac{1}{16}[1-\cos 2x - \cos 4x +$$

$$+ \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 6x)] = \frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}\cos 2x - \cos 4x + \frac{1}{2}\cos 6x\right).$$

Тому дістанемо

$$\int\sin^4 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{16}\int\left(1-\frac{1}{2}\cos 2x - \cos 4x + \frac{1}{2}\cos 6x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{12}\sin 6x\right) + C.$$

Інтеграли вигляду $\int\sin\alpha x\cos\beta x\,dx$, $\int\sin\alpha x\sin\beta x\,dx$, $\int\cos\alpha x\cos\beta x\,dx$ можна обчислити, якщо використати тригонометричні формули:

$$\sin\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x];$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x];$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x].$$

5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій
[I, гл. X, § II-I3]

А. Інтеграли вигляду $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx$, де R - раціональна функція від x і $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}$, r і s - цілі числа, зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою заміни змінної $\frac{ax+b}{cx+d} = t$.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$.

Виконаємо заміну $\frac{1-x}{1+x} = t^2$. Тоді $x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$, $dx = \frac{-4t\,dt}{(t^2+1)^2}$.
В результаті отримаємо

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x} = \int t\cdot\frac{t^2+1}{t^2-1}\cdot\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2} = 4\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)(t^2-1)}.$$

Це інтеграл від правильної дробово-раціональної функції. Представимо її у вигляді суми елементарних дробово-раціональних функцій

$$\frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{t+1}.$$

Зводимо до спільного знаменника і прирівнюємо чисельники лівої й правої частин. Дістанемо

$$t^2 = (At+B)(t^2-1) + C(t^2+1)(t+1) + D(t^2+1)(t-1).$$

При t = I маємо I = 4C або $C = \frac{1}{4}$. Аналогічно, при t = -I маємо I = = - 4 D або $D = -\frac{1}{4}$. Прирівнюючи коефіцієнти при t^3 і t^2, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{array}{c|l} t^3 & 0 = A + C + D, \\ t^2 & 1 = B + C - D. \end{array}$$

Її розв"язок $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$. В результаті будемо мати

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x} = 4\left[\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1} - \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}\right] =$$

$$= 2arctg\,t + \ln|t-1| - \ln|t+1| + C =$$

$$= 2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + C.$$

Б. Вираз вигляду $x^m(a+bx^n)^p dx$, де m, n, p - раціональні числа, a, b - дійсні, причому $a \neq 0$, $b \neq 0$, називається диференціальним біномом. Інтеграл вигляду $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ називається інтегралом від диференціального бінома.

Теорема Чебишева. Інтеграл від диференціального бінома зводиться до інтеграла від раціональної функції в таких трьох випадках:

I/ p - ціле число; підстановка $x = t^S$, де S - спільний знаменник чисел m і n;

2/ $\frac{m+1}{n}$ - ціле число; підстановка $a + bx^n = t^s$, де s - знаменник числа p;

3/ $\frac{m+1}{n} + p$ - ціле число; підстановка $a + bx^n = x^n t^s$, або $ax^{-n} + b = t^s$, де s - знаменник числа p.

П.Л.Чебишев показав, що у всіх інших випадках /тобто коли всі три числа p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ не є цілими числами/, інтеграл від диференціального бінома не виражається у скінченному вигляді.

Приклад I. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Записавши цей інтеграл у вигляді $\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx$, маємо: $m = -\frac{I}{2}$, $n = \frac{I}{4}$, $p = \frac{I}{3}$, $a = I$, $b = I$. Обчислимо $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$ - ціле число. Отже, маємо другий випадок теореми Чебишева. Тому виконаємо підстановку

$$1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3,\ t = \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}},\ x^{\frac{1}{4}} = t^3 - 1,\ x = (t^3-1)^4,$$

$$x^{-\frac{1}{2}} = \left[(t^3-1)^4\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(t^3-1)^2};\ dx = 4(t^3-1)^3 3t^2 dt = 12(t^3-1)^3 t^2 dt.$$

В результаті отримаємо

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{(t^3-1)^2}\, t \cdot 12(t^3-1)^3 t^2 dt =$$

$$= 12\int t^3(t^3-1)\,dt = 12\int (t^6 - t^3)\,dt = 12\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + C =$$

$$= 12t^4\left(\frac{t^3}{7} - \frac{1}{4}\right) + C = 12\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\left(\frac{1+\sqrt[4]{x}}{7} - \frac{1}{4}\right) + C.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Оскільки $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{4}}$, то знаходимо $m = 0$, $n = 4$ і $p = -\frac{I}{3}$.

Тоді $\frac{m+1}{n} = \frac{I}{4}$, $p = -\frac{I}{4}$, $\frac{m+1}{n} + p = \frac{I}{4} + \left(-\frac{I}{4}\right) = 0$ - ціле число. Це означає, що маємо третій випадок. Використовуємо підстановку $x^{-4} + 1 = t^4$ або $x = \frac{1}{(t^4-1)^{\frac{1}{4}}}$. Очевидно, $x^{-5}dx = -t^3 dt$. Перетворимо підінтегральну функцію

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \frac{1}{x\sqrt[4]{x^{-4}+1}} = x^{-1}\left(x^{-4}+1\right)^{-\frac{1}{4}} = x^4\left(x^{-4}+1\right)x^{-5}.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^4(x^{-4}+1)^{-\frac{1}{4}} x^{-5} dx = -\int \frac{1}{t^4-1}\, t^{-1} t^3 dt = -\int \frac{t^2 dt}{t^4-1}.$$

Отримали інтеграл від правильної дробово-раціональної функції. Очевидно

$$\frac{t^2}{t^4-1} = \frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t+1}.$$

Тому

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1} + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1} - \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\, dx$.

Маємо $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1} = x^{\frac{1}{2}}\left(1 + x^{3/4}\right)^{-1}$, тобто $m = \frac{I}{2}$, $n = \frac{3}{4}$, $p = -I$.

Отже, це перший випадок. Використовуємо підстановку $x = t^4$, де 4 - спільний знаменник чисел $\frac{I}{2}$ і $\frac{3}{4}$. Очевидно,

Тому $\sqrt{x} = t^2$, $1 + \sqrt[4]{x^3} = 1 + t^3$, $dx = 4t^3 dt$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\, dx = \int \frac{t^2}{t^3+1}\, 4t^3 dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\, dt,$$

$$\frac{t^5}{t^3+1} = t^2 - \frac{t^2}{t^3+1},$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\, dx = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\, dt = 4\int\left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt =$$

$$= 4\left(\int t^2 dt - \int\frac{t^2 dt}{t^3+1}\right) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\int\frac{d(t^3+1)}{t^3+1} =$$

$$= \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \ln\sqrt[3]{\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)^4} + C.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int x^2\cdot\sqrt[3]{1+x^2}\, dx$.

У даному випадку $m = 2$, $n = 2$, $p = \frac{I}{3}$. Очевидно, що всі три числа p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ не є цілими. Це означає, що цей інтеграл не виражається у скінченному вигляді через елементарні функції.

В. Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.

Інтеграли такого типу можна звести до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановок Ейлера:

I/ $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$, якщо $a > 0$.

2/ $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$, якщо $c > 0$.

3/ $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$, якщо тричлен ax^2+bx+c має дійсні нулі α і $\beta > \alpha$. Знаки "+" і "-" можна брати у будь-якій комбінації.

Часто при обчисленні таких інтегралів зручно використовувати тригонометричні підстановки.

Приклад I. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}}$.

Використовуємо підстановку $x = \frac{\sqrt{5}}{\cos t}$, $dx = \sqrt{5}\,\frac{\operatorname{tg} t}{\cos t}\, dt$,

$$x^2 - 5 = \frac{5}{\cos^2 t} - 5 = 5\operatorname{tg}^2 t,\ \sqrt{x^2-5} = \sqrt{5}\cdot\operatorname{tg} t.$$

Тоді

$$\int \frac{dx}{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}} = \int \frac{\sqrt{5}\cdot\frac{\operatorname{tg} t}{\cos t}\, dt}{5\operatorname{tg}^2 t\cdot\sqrt{5}\operatorname{tg} t} = \frac{1}{5}\int\frac{dt}{\cos t\cdot\operatorname{tg}^2 t} =$$

$$= \frac{1}{5}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\, dt = C - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sin t}.$$

З рівності $x = \frac{\sqrt{5}}{\cos t}$ маємо $\cos t = \frac{\sqrt{5}}{x}$,

$$\cos^2 t = \frac{5}{x^2},\ \sin^2 t = 1 - \frac{5}{x^2} = \frac{x^2-5}{x^2};\ \sin t = \frac{\sqrt{x^2-5}}{x};$$

тому остаточно

$$\int \frac{dx}{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}} = C - \frac{1}{5}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$.

Робимо підстановку $x = 3\operatorname{tg} t$, $dx = \frac{3}{\cos^2 t}\, dt$,

$$x^2 + 9 = 9\operatorname{tg}^2 + 9 = 9(\operatorname{tg}^2 t + 1) = \frac{9}{\cos^2 t};\ \sqrt{x^2+9} = \frac{3}{\cos t}.$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}=\int\frac{3\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{9}{\cos^2 t}\cdot\frac{3}{\cos t}}=\frac{1}{9}\int\cos t\,dt=\frac{1}{9}\sin t+C.$$

З підстановки $x=3\,tg\,t$, маємо $tg\,t=\frac{x}{3}$,

$$\sin t=tg\,t\cdot\cos t=\frac{tg\,t}{\sqrt{1+tg^2 t}}=\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}}=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$$

В результаті отримаємо

$$\int\frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}=\frac{1}{9}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+C.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$.

Використаємо підстановку $t=\frac{1}{x-1}$. Тоді

$$x-1=\frac{1}{t},\quad x=1+\frac{1}{t},\quad dx=-\frac{dt}{t^2},$$

$$1+x-x^2=1+1+\frac{1}{t}-1-\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}=1-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-t-1}{t^2}.$$

В результаті знаходимо

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{t^2-t-1}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-t-1}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}=C-\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|=$$

$$=C-\ln\left|\frac{2t-1+2\sqrt{t^2-t-1}}{2}\right|=C-\ln\left|\frac{\frac{2}{x-1}-1+2\sqrt{\frac{1+x-x^2}{(x-1)^2}}}{2}\right|=$$

$$=C-\ln\left|\frac{2-x+1+2\sqrt{1+x-x^2}}{2(x-1)}\right|=C-\ln\left|\frac{3-x+2\sqrt{1+x-x^2}}{2(x-1)}\right|.$$

Аналогічно можна обчислити інтеграли вигляду $\int(x-\alpha)^n\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$, де n - натуральне число.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int(x+1)\sqrt{x^2+4x-5}\,dx$.

Маємо $d(x^2+4x-5)=(2x+4)dx$. Очевидно

$$x+1=\frac{1}{2}(2x+2)=\frac{1}{2}(2x+4-2)=\frac{1}{2}(2x+4)-1;$$

$$x^2+4x-5=x^2+4x+4-9=(x+2)^2-9.$$

Тому

$$\int(x+1)\sqrt{x^2+4x-5}\,dx=\frac{1}{2}\int(2x+4)\sqrt{x^2+4x-5}\,dx-$$

$$-\int\sqrt{x^2+4x-5}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+4x-5}\,d(x^2+4x-5)-$$

$$-\int\sqrt{(x+2)^2-9}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x-5)^3}-\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x-5}+$$

$$+\frac{9}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right|+C=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x-5)^3}-$$

$$-\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x-5}+\frac{9}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right|+C,$$

де була використана формула

$$\int\sqrt{u^2-a^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$$

при $u=x+2$, $a=3$.

Остаточно маємо

$$\int(x+1)\sqrt{x^2+4x-5}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+4x-5)^3}-\frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x-5}+\frac{9}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right|+C.$$

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

6. Задача обчислення площі криволінійної трапеції. Означення, властивості визначеного інтеграла

[I, гл. XI, § I-3]

Нехай функція $y=f(x)$ є неперервною і невід"ємною на відрізку $[a;b]$. Плоска фігура, яка обмежена прямими $x=a$, $x=b$,

7-2-1569

$y=0$ і графіком функції $f(x)$, називається криволінійною трапецією /рис. I/. З цього рисунка видно, що наближене значення площі S можна виразити формулою $S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\tau_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,n$, $x_{i-1}<\tau_i<x_i$.

Рис. I

Сума $\sum_{i=1}^{n}f(\tau_i)\Delta x_i$ називається інтегральною сумою, складеною для функції $f(x)$ при даному розбитті відрізка $[a;b]$ і при даному виборі точок $\tau_i\in[x_{i-1},x_i]$.

Означення. Границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n}f(\tau_i)\Delta x_i$ при $\max\Delta x_i\to 0$ називається визначеним інтегралом від неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається $\int_a^b f(x)\,dx$, тобто

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\tau_i)\Delta x_i.$$

Отже, бачимо, що задача обчислення площі криволінійної трапеції приводить до поняття визначеного інтеграла, а для обчислення цієї площі маємо формулу

$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Властивості визначеного інтеграла

1. Якщо $f(x)\equiv 0$ для $x\in[a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b 0\cdot dx=0.$

2. Якщо $f(x)\equiv 1$ для $x\in[a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b 1\cdot dx=b-a.$

3. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла

$$\int_a^b C\cdot f(x)\,dx=C\cdot\int_a^b f(x)\,dx,\quad C=const.$$

4. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ - інтегровні функції на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку будуть також інтегровними функції $f(x)\pm g(x)$, причому $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx.$

5. Якщо $a\le c\le b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Властивість 5 називається адитивною властивістю відносно відрізка інтегрування.

6. Якщо $a<b$ і функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$, причому $f(x)\geqslant 0$ для $x\in[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0.$

7. Якщо $a<b$ і функції $f(x)$ і $g(x)$ - інтегровні на відрізку $[a;b]$, причому $f(x)\le g(x)$ для $x\in[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx.$$

8. Якщо $a<b$ і функція $f(x)$ - інтегровна на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку інтегровна і функція $|f(x)|$, причому

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx.$$

Властивості 6-8 також називають теоремами про інтегрування нерівностей.

7*

9. Якщо $f(x)$ – інтегровна функція на відрізку $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Доведення властивостей І-9 зводиться до запису аналогічних властивостей для інтегральних сум і подальшого граничного переходу при $\max \Delta x_i \to 0$.

І0. Оцінка визначеного інтеграла. Якщо $a < b$, функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a),$$

де m і M – найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

ІІ. Теорема про середнє значення.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то існує така точка $c \in [a; b]$, що $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Обчислення визначеного інтеграла.
Формула Ньютона – Лейбніца
[I, гл. XI, § 4]

Функція $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ називається інтегралом із змінною верхньою межею інтегрування.

Теорема І. Якщо $f(x)$ – неперервна функція і $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, то справедлива рівність $\Phi'(x) = f(x)$.

Теорема 2. Якщо $F(x)$ є якою-небудь первісною для неперервної функції $f(x)$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad /8/$$

Вона називається формулою Ньютона – Лейбніца на честь засновників диференціального і інтегрального числення. Для зручності користування формулу /8/ часто записують у такому вигляді

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad /9/$$

Приклад І.

$$\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$$

Приклад 2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1.$$

Основні методи інтегрування визначеного інтеграла
[I, гл. XI, § 5, 6]

А. Заміна змінної для визначеного інтеграла

Теорема. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і функція $x = \varphi(t)$ неперервна разом зі своєю похідною першого порядку на відрізку $[\alpha, \beta]$, причому $a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) \le \varphi(\beta) = b$ для $\alpha \le t \le \beta$. Тоді справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \qquad /10/$$

Зауваження. При обчисленні визначеного інтеграла за формулою /10/ не потрібно повертатись до старої змінної.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

Маємо

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \\ \sqrt{x} = t \\ 1+\sqrt{x} = 1+t \\ t_1 = 1;\ t_2 = 2 \end{matrix} \right| = \int_1^2 \frac{t \cdot 2t\,dt}{1+t} =$$

$$= 2\int_1^2 \frac{t^2 dt}{1+t} = 2\int_1^2 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\left[\int_1^2 t\,dt - \int_1^2 dt + \int_1^2 \frac{dt}{t+1}\right] =$$

$$= 2\left[\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right]\Big|_1^2 = 2\left(2 - \frac{1}{2} - 2 + 1 + \ln 3 - \ln 2\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2}\right) = 1 + \ln\frac{9}{4}.$$

Формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла

Теорема. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[a; b]$, то має місце формула

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

або

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \arcsin x\,dx$.

Маємо

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x, & du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x \cdot \arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \cdot \arcsin x\Big|_0^1 + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 =$$

$$= 1 \cdot \arcsin 1 - 0 \cdot \arcsin 0 + \sqrt{1-1} - \sqrt{1-0} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

7. Невласні інтеграли із нескінченними
проміжками інтегрування
[I, гл. XII]

Нехай функція $f(x)$ означена на проміжку $[a; +\infty)$ і інтегровна на відрізку $[a; b]$ при всякому $b > a$. Тоді визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує при всякому $b > a$ і є деякою функцією від b: $I(b) = \int_a^b f(x)dx$, визначеною на проміжку $[a, +\infty)$.

Якщо функція $I(b)$ має скінченну границю при $b \to +\infty$, то цю границю називають невласним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку $[a; +\infty)$ і позначають $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. У цьому випадку вважають, що інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається /або існує/. Якщо ж функція $I(b) = \int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ не має скінченної границі, то символ

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ також називають невласним інтегралом, однак в даному випадку вважають, що цей невласний інтеграл розбігається. Такому невласному інтегралу не приписують ніякого значення. Аналогічно вводиться поняття невласного інтеграла $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$. Тоді невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ можна представити у вигляді:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx,$$

де c – деяке дійсне число $-\infty < c < +\infty$.

Приклад І. Функція $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ інтегровна на будь-якому відрізку $[a; b]$, $b > 0$, причому $\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} b$.

Тому

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to +\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$.

Маємо $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \sin x\,dx =$

$$= \lim_{b \to +\infty} (-\cos x)\Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} (1 - \cos b) = 1 - \lim_{b \to +\infty} \cos b.$$

Але $\cos b$ при $b \to +\infty$ не прямує ні до якої границі, коливаючись від -І до +І. Тому цей інтеграл розбігається.

Приклад 3. Розглянемо інтеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $p > 0$.

Нехай $p \neq$ І. Тоді

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-p}\left[b^{1-p} + a^{1-p}\right].$$

При $p < 1$ інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ розбігається:

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{1-p}\left[b^{1-p} - a^{1-p}\right] = +\infty.$$

При $p > 1$ інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ збігається і дорівнює $\frac{a^{p-1}}{p-1}$.

При $p = 1$ маємо

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} [\ln b - \ln a] = +\infty.$$

Таким чином, інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \le 1$.

Розглянемо достатні ознаки збіжності невласних інтегралів.

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ – дві невід"ємні функції на проміжку $[a; +\infty]$, інтегровні на відрізку $[a; b]$ при всякому $b > a$ і якщо $f(x) \le Cg(x)$ для $a \le a_1 \le x \le +\infty$, де C – константа, то із збіжності невласного інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ випливає збіжність невласного інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ /або, що те саме, із розбіжності невласного інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ випливає розбіжність невласного інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$/.

Теорема 2. Якщо при $x \to +\infty$ маємо $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, причому $k > 0$, $k \ne \infty$ і $g(x) \ne 0$ для всіх досить великих x, то невласні інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ і $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Приклад 4. Дослідити збіжність слідуючих невласних інтегралів:

а/ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+9x+6}}$; б/ $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+4x+5}}$.

Обидва інтеграли запишемо у вигляді суми двох інтегралів, у першому із яких відрізок інтегрування є $[0; 1]$, в другому – $[1; +\infty)$. На відрізку $[0; 1]$ обидва інтеграли є скінченними числами. Для порівняння на проміжку $[1; +\infty)$ беремо функцію $g(x) = \frac{1}{x^p}$. Для інтеграла а/ маємо: $\sqrt{x^3+9x+6} = x^{3/2}\sqrt{1+\frac{9}{x^2}+\frac{6}{x^3}}$. Аналогічно для інтеграла б/ маємо $\sqrt[3]{x^2+4x+5} = x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}$. Щоб отримати скінченну границю, для інтеграла а/ треба взяти $p = \frac{3}{2}$, для інтеграла б/ – $p = \frac{2}{3}$. Тому інтеграл а/ збігається, інтеграл б/ розбігається.

8. Невласні інтеграли від необмежених функцій [1, гл. XII]

Нехай функція $f(x)$ визначена і необмежена на піввідрізку $[a; b)$ і інтегровна на кожному відрізку $[a; b-\varepsilon)$, де $0 < \varepsilon < b-a$ /це буде, наприклад, якщо функція $f(x)$ неперервна на піввідрізку $[a; b)$ і необмежена на ньому/. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x) \cdot dx$, то її називають невласним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначають $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$. У цьому випадку вважають, що невласний інтеграл збігається /або існує/, в противному випадку він розбігається /або ж не існує/.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Очевидно, це невласний інтеграл. Отримаємо

$$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 2. Розглянемо інтеграл $\int\limits_a^{b} \frac{dx}{(b-x)^p}$, де p – дійсне число.

Маємо

$$\int\limits_a^{b} \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\varepsilon \to +0} \begin{cases} \frac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{b-\varepsilon}, & p \ne 1 \\ \ln|b-x|\Big|_a^{b-\varepsilon}, & p = 1. \end{cases}$$

Із останньої рівності випливає, що невласний інтеграл $\int\limits_a^{b} \frac{dx}{(b-x)^p}$ збігається при $p < 1$ і розбігається при $p \ge 1$.

Зустрічаються також невласні інтеграли від необмеженої функції, що має декілька точок розриву другого роду. Тоді такий інтеграл необхідно представити у вигляді суми інтегралів, в кожному із яких підінтегральна функція має тільки одну точку розриву, і невласний інтеграл вводиться таким чином. Нехай $x = c$, $a < c < b$ – єдина точка розриву другого роду функції $f(x)$ на відрізку $a < c < b$. За означенням маємо

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left[\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx\right],$$

$$0 < \varepsilon_1 < c-a, \quad 0 < \varepsilon_2 < b-c,$$

якщо інтеграли справа існують і є скінченними.

Приклад 3. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$. Маємо

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int\limits_{-1}^{0-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int\limits_{0+\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to +0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\varepsilon_2}^{1}.$$

Кожна із цих границь дорівнює нескінченності. Тому інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ розбігається. Якщо цей інтеграл обчислювати безпосередньо, не звертаючи увагу на точку розриву $x = 0$ для підінтегральної функції $f(x) = \frac{1}{x^2}$, то отримаємо неправильний результат

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2.$$

Для невласних інтегралів від необмежених функцій мають місце теореми порівняння, аналогічні теоремам 1 і 2.

Приклад 4. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\ln x}$. При $x \to 1$ маємо $\frac{1}{\ln x} \sim \frac{1}{x-1}$ /еквівалентні нескінченно великі величини/, оскільки

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Інтеграл $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{x-1}$ розбігається, оскільки $p = 1$. Отже, розбігається також інтеграл $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{\ln x}$.

Приклад 5. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+x^2}$. Очевидно, виконується нерівність $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+x^2} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ для всіх $x \in (0; 1]$. Невласний інтеграл $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^{2/3}}$ збігається. Тому збігається також інтеграл $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+x^2}$.

Приклад 6. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{x^2-x-2}$. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x^2-x-2}$ має розрив другого роду в точці $x = 2 \in [0; 3]$, тобто даний інтеграл є невласним інтегралом від необмеженої функції

$$\int\limits_0^{2} \frac{dx}{x^2-x-2} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \left[\int\limits_0^{2-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2-x-2} + \int\limits_{2+\varepsilon_2}^{3} \frac{dx}{x^2-x-2}\right].$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to 2}\left(\frac{1}{x^2-x-2} : \frac{1}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$,

то інтеграли $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{x^2-x-2}$ і $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{x-2}$ одночасно або збігаються, або одночасно розбігаються. Але інтеграл $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{x-2}$ розбігається /$p = 1$/. Тому інтеграл $\int\limits_0^{3} \frac{dx}{x^2-x-2}$ також розбігається.

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

9. Обчислення площі плоских фігур

Площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, вертикальними прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком $[a; b]$ осі OX, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad /11/$$

Площа фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, де $f_1(x) \leq f_2(x)$, вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$, визначається за формулою

$$S = \int_a^b [\, f_2(x) - f_1(x)\,]\,dx. \qquad /12/$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою, вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ та відрізком $[a; b]$ осі OX, визначається за формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt, \qquad /13/$$

де t_1 і t_2 визначаються із рівнянь $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$ $(y(t) \geq 0$ при $t_1 \leq t \leq t_2)$.

Площа криволінійного сектора, обмеженого кривою, заданою в полярних координатах рівнянням $r = f(\varphi)$ і двома полярними радіусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\beta > \alpha$, обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2\,d\varphi. \qquad /14/$$

Приклад 1. Знайти площу фігури, обмеженої двома вітками кривої $(y - x)^2 = x^3$ і прямою $x = 1$ /рис. 2/.

У даному випадку функція $y = y(x)$ визначена як неявна функція тільки при $x \geq 0$, оскільки ліва частина невід"ємна. Знаходимо рівняння двох віток кривої: $y - x = \pm x\sqrt{x}$, $y_1 = x - x\sqrt{x}$, $y_2 = x + x\sqrt{x}$, $y_2(x) \geq y_1(x)$. При цьому $y_1 = 0$, якщо $x = 0$ і $x = 1$, тобто крива $y_1 = x - x\sqrt{x}$ перетинає вісь Ox у двох точках: 0 і 1. Крива $y_2 = x + x\sqrt{x}$ проходить через початок координат і більше вісь Ox не перетинає. Для обчислення площі плоскої фігури, обмеженої кривими $y_1 = x - x\sqrt{x}$, $y_2 = x + x\sqrt{x}$ і вертикальною

прямою $x = 1$, використаємо формулу /12/. Отримаємо

$$S = \int_0^1 [\,y_2(x) - y_1(x)\,]\,dx =$$

$$= \int_0^1 (x + x\sqrt{x} - x + x\sqrt{x})\,dx = 2\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx = \frac{4}{5}\,x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{5} \text{ кв. од.}$$

Приклад 2. Знайти площу фігури /рис. 3/, обмеженої однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, і віссю OX.

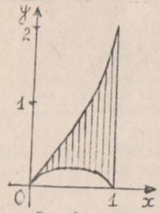

Рис. 2

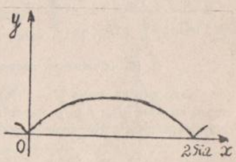

Рис. 3

Знайдемо точки перетину циклоїди із віссю OX. Якщо $y = 0$, то $\cos t = 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$ /для однієї арки/. Вісь OY крива не перетинає $x(0) = 0$, $x(2\pi) = 2\pi a$. Обчислимо площу даної плоскої фігури, використовуючи формулу /13/. Маємо

$$S = \int_0^{2\pi} y(t)\,x'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\,a(1 - \cos t)\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt = a^2(t - 2\sin t)\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+ \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 + \cos 2t)\,dt = 2\pi a^2 + \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2 \text{ кв. од.}$$

10-2-1569

Приклад 3. Знайти площу фігури, обмеженої полярною віссю і першим витком спіралі Архімеда $r = a\varphi$, $a > 0$ /рис. 4/.

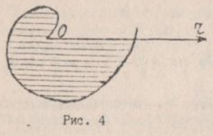

Рис. 4

Перший виток спіралі Архімеда отримаємо, коли параметр φ змінюється від 0 до 2π. Для обчислення площі отриманої плоскої фігури використаємо формулу /14/. У результаті отримаємо

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\varphi^2\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{6}(2\pi)^3 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \text{ кв. од.}$$

10. Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Якщо плоска крива $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ є гладкою, тобто похідна $y' = f'(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то довжину відповідної дуги цієї кривої знаходимо за формулою

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx. \qquad /15/$$

Якщо плоска крива задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, де $x(t)$ і $y(t)$ – неперервно диференційовані функції, то довжина дуги кривої при монотонній зміні параметра t в межах від t_1 до t_2 обчислюється за формулою

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x_t']^2 + [y_t']^2}\,dt. \qquad /16/$$

Якщо гладка крива задана у полярних координатах рівнянням $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то тоді довжина дуги кривої визначається за формулою

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + [r_\varphi']^2}\,d\varphi. \qquad /17/$$

Приклад 1. Знайти довжину дуги півкубічної параболи $y^2 = x^3$ від $x = 0$ до $x = 1$, $y \geq 0$.

Знаходимо похідну як від неявно заданої функції $2y \cdot y' = 3x^2$, $y' = 3x^2/2y$:

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x^4}{4y^2}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9x^4}{4x^3}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) =$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - \frac{8}{27} = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right).$$

Приклад 2. Обчислити довжину астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$.

Крива симетрична відносно обох координатних осей /рис. 5/. Тому можна обчислити довжину її четвертої частини, яка розміщена в першому квадранті, де $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, а потім знайдений результат помножити на 4. Для похідних функцій $x(t)$ і $y(t)$ маємо такі вирази:

$$x_t' = -3a\cos^2 t \cdot \sin t; \quad y_t' = 3a\sin^2 t\cos t.$$

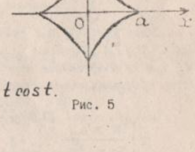

Рис. 5

Згідно з формулою /16/ отримаємо

$$\ell = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \cos t\,dt =$$

$$= 12a \cdot \frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 12a\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 6a.$$

Приклад 3. Обчислити довжину /рис. 6/ лінії $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ /конхоїда/, коли $a > 0$.

10ᴷ

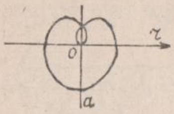

Рис. 6

Знаходимо область визначення цієї функції. Оскільки $r \geq 0$, то повинна виконуватись нерівність $\sin\frac{\varphi}{3} \geq 0$. Тому $6\pi k \leq \varphi \leq 3\pi + 6\pi k$, де $k \in Z$, період функції $\sin\frac{\varphi}{3}$ дорівнює 6π. При $k = 0$ отримаємо $0 \leq \varphi \leq 3\pi$. Крива замкнута, виходить з початку координат і повертається до нього. Знаходимо

$$r' = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}; \quad \sqrt{r^2+[r']^2} = a\sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3}+\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}} = a\sin^2\frac{\varphi}{3}.$$

$$l = \int_0^{3\pi}\sqrt{r^2+[r']^2}\,d\varphi = a\int_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi = \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left(1-\cos^2\frac{\varphi}{3}\right)d\varphi =$$
$$= \frac{a}{2}\left(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{3\pi} = \frac{3\pi a}{2}.$$

II. Обчислення об"ємів тіл обертання

Якщо криволінійна трапеція, обмежена кривою $y = f(x)$ /або $x = g(y)$/ і прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$ /або $x = 0$, $y = c$, $y = d$/, обертається довкола осі OX /або довкола осі OY/, то об"єм тіла обертання можна знайти за формулами:

$$V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx; \qquad /18/$$

$$V_y = \pi\int_a^b x\,|y(x)|\,dx; \qquad /19/$$

$$V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2\,dy = \pi\int_c^d x^2(y)\,dy. \qquad /20/$$

Якщо фігура обмежена кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, де $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$, прямими $x = a$, $x = b$, обертається довкола осі Ox, то об"єм тіла обертання дорівнює

$$V_x = \pi\int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\,dx. \qquad /21/$$

<u>Приклад</u>. Знайти об"єм тіла /рис. 7/, отриманого обертанням довкола осі OX криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}$, $0 \leq x \leq a$, $y = 0$.

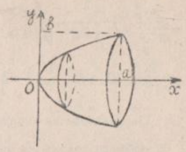

Рис. 7

Об"єм тіла обертання знаходимо за формулою /18/:

$$V_x = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx = \pi b^2 a^{-4/3}\int_0^a x^{4/3}\,dx = \frac{3}{7}\pi b^2 a^{-4/3} x^{7/3}\Big|_0^a = \frac{3}{7}\pi a b^2 \text{ куб. од.}$$

I2. Обчислення площі поверхні обертання

Якщо дуга гладкої кривої $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, обертається довкола осі OX, то площа поверхні обертання обчислюється за формулою

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+[y']^2}\,dx = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad /22/$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, то маємо

$$S_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{[x'_t]^2+[y'_t]^2}\,dt. \qquad /23/$$

<u>Приклад</u>. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги кубічної параболи $y = x^3$ довкола осі OX від початку координат до точки із абсцисою $x = 1$ /рис. 8/.

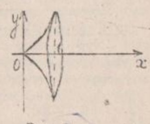

Рис. 8

Обчислимо площу поверхні обертання за формулою /22/:

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+[y']^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{18}\int_0^1\sqrt{1+9x^4}\,d(1+9x^4) = \frac{\pi}{18}\cdot\frac{2}{3}(1+9x^4)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1) \text{ кв. од.}$$

I3. Знаходження координат центра мас. Теореми Гульдена

Координати центра мас однорідної дуги плоскої кривої $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, знаходимо за допомогою формул

$$x_c = \frac{1}{l}\int_a^b x\,dl, \qquad y_c = \frac{1}{l}\int_a^b y\,dl,$$

де $dl = \sqrt{1+[y']^2}\,dx$, l – довжина лінії.

Інтеграли в x_c і y_c називаються статичними моментами дуги: $M_x = \int_a^b x\,dl$ і $M_y = \int_a^b y\,dl$ відносно осей OY і OX відповідно.

Координати центра мас однорідної криволінійної трапеції обчислюються за формулами

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b x\,dS, \qquad y_c = \frac{1}{S}\int_a^b y\,dS,$$

де S – площа фігури, $dS = y(x)\,dx$.

<u>Перша теорема Гульдена</u>. Площа поверхні, отриманої від обертання плоскої кривої довкола осі, яка лежить в площині цієї кривої і не перетинає її, дорівнює довжині дуги цієї кривої, помноженій на довжину кола, описаного центром мас цієї дуги.

<u>Друга теорема Гульдена</u>. Об"єм тіла, отриманого при обертанні плоскої фігури навколо осі, яка не перетинає її і розміщена в площині фігури, дорівнює добутку площі цієї фігури на довжину кола, описаного центром мас фігури.

<u>Приклад</u>. Знайти координати центра мас тієї частини астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, яка міститься в першому квадранті /рис. 9/, $a > 0$, $a = const$.

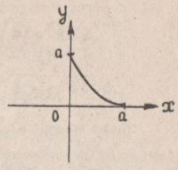

Рис. 9

Із міркувань симетрії приходимо до висновку, що $x_c = y_c$. Знаходимо y' за правилом диференціювання неявно заданої функції:

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y' = 0, \quad y' = -y^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$$

або

$$1+[y']^2 = \left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)x^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}.$$

Тому

$$\sqrt{1+[y']^2} = a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}.$$

Далі маємо

$$l = \int_a^b\sqrt{1+[y']^2}\,dx = \int_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\,dx = a^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^a = \frac{3}{2}a.$$

$$x_c = y_c = \frac{1}{l}\int_a^b x\sqrt{1+[y']^2}\,dx = \frac{2}{3}a^{-\frac{2}{3}}\int_0^a x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{3}}\Big|_0^a = \frac{2}{5}a.$$

<u>Приклад</u>. Знайти координати центра мас дуги кривої $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $-\alpha \leq t \leq \alpha$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Дуга симетрична відносно осі OX. Тому центр мас $C(x_c; y_c)$ у даному випадку знаходиться на осі OX, тобто $y_c = 0$. Довжина дуги кола дорівнює $l = 2a\alpha$. Тому

$$M_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} x(t)\sqrt{[x'_t]^2+[y'_t]^2}\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} a\cos t\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}\,dt =$$
$$= a^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos t\,dt = a^2\sin t\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 2a^2\sin\alpha.$$

$$x_c = \frac{M_y}{l} = \frac{2a^2\sin\alpha}{2a\alpha} = a\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Таким чином, $x_c = a\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, $y_c = 0$.

<u>Приклад</u>. Знайти координати центра мас однорідної плоскої фігури, розміщеної в першому квадранті, і обмеженої осями координат та дугою еліпса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Маємо

$$x_c=\frac{1}{S}\int_a^b xy\,dx=\frac{1}{S}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}a\cos t\cdot b\sin t\,(-a\sin t)\,dt=$$

$$=\frac{a^2b}{S}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cdot\cos t\,dt=\frac{a^2b}{S}\cdot\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2b}{3S}.$$

Площа фігури, обмеженої еліпсом $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, дорівнює πab. Тому площа четвертої частини дорівнює $S=\frac{\pi ab}{4}$. Отже

$$x_c=\frac{4a^2b}{3\pi ab}=\frac{4a}{3\pi}.$$

Аналогічно знаходимо

$$y_c=\frac{1}{2S}\int_0^a y^2\,dx=\frac{1}{2S}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}b^2\sin^2 t\,(-a\sin t)\,dt=$$

$$=\frac{2ab^2}{\pi ab}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2 t)\,d(\cos t)=\frac{2b}{\pi}\left(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=$$

$$=\frac{2b}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4b}{3\pi}.$$

Таким чином $x_c=\frac{4a}{3\pi}$, $y_c=\frac{4b}{3\pi}$.

І4. Обчислення роботи і тиску

Робота змінної сили $F(x)$, яка діє у напрямі осі OX на відрізку $[a;b]$, обчислюється за формулою

$$A=\int_a^b F(x)\,dx.$$

Для обчислення сили тиску рідини на занурену в неї пластину використовується закон Паскаля, згідно з яким ця сила дорівнює площі S пластини, помноженій на глибину h її занурення, густину ρ рідини та прискорення вільного падіння, тобто

$$P=\rho g h S.$$

Приклад І. Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягнути пружину на 4 см, якщо сила І Н розтягує її на І см /рис. І0/.

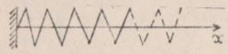

Рис. І0

Реакція F пружної пружини, один кінець якої закріплений, виражається згідно з законом Гука $F=cx$, де c – коефіцієнт жорсткості пружини, x – деформація.

Оскільки для деформації пружини на І см потрібно прикласти силу І Н, то сталу c знаходимо з умови

$$1=c\cdot 0{,}01,\quad c=100,\quad F(x)=100x.$$

Тоді

$$A=\int_0^{0{,}04}100x\,dx=50x^2\Big|_0^{0{,}04}=0{,}08\ Дж.$$

Приклад 2. Знайти роботу, яку необхідно виконати при викачуванні води з корита, що має форму півциліндра, довжина якого a, радіус r /рис. ІІ/.

Об"єм елементарного шару води, що знаходиться на глибині x і має довжину a, ширину $2\sqrt{r^2-x^2}$ /з рівняння кола $(x^2+y^2=r^2)$, товщину dx, дорівнює $dV=2a\sqrt{r^2-x^2}\,dx$.

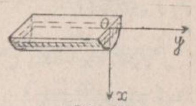

Рис. ІІ

Елементарна робота, яку потрібно виконати для підняття цього шару води на висоту x, дорівнює: $dA=2\rho g a x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$, де ρ – густина води. Отже,

$$A=2a\rho g\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,dx=-a\rho g\frac{2}{3}(r^2-x^2)^{3/2}\Big|_0^r=\frac{2}{3}\rho g a r^3.$$

Приклад 3. Знайти силу тиску рідини на пластину, що має форму рівнобічної трапеції з основами $DC=a$, $AB=b$ та висотою h, у випадку, коли пластина занурена в рідину на глибину c /рис. І2/.

Площа елементарної смужки дорівнює $dS=(a+2\ell)dx$, де $\ell=\frac{b-a}{2h}(x-c)$ /ℓ знаходимо із подібності трикутників/. Тоді сила тиску буде дорівнювати

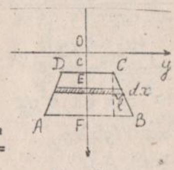

Рис. І2

$$P=\rho g\int_0^{c+h}\left[a+\frac{b-a}{h}(x-c)\right]x\,dx=$$

$$=\rho g\left[\frac{ax^2}{2}+\frac{b-a}{h}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{cx^2}{2}\right)\right]\Big|_0^{c+h}=$$

$$=\rho g\left[\frac{a+b}{2}ch+\frac{h^2}{6}(a+2b)\right].$$