Функції декількох змінних.

ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ.

Означення. *Нехай маємо n змінних величин, і кожному набору їх значень $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з деякої множини X ставиться у відповідність одне цілком визначене значення змінної величини z. Тоді кажуть, що задана функція декількох змінних $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називаються незалежними змінними або аргументами, z - залежною змінною, а символ f означає закон відповідності. Множина X називається областю визначення функції.

Приклад. Знайти область визначення функції:

$$z = \sqrt{4-x^2-y^2}$$

Розв'язання. Область **визначення задається умовою:** $4-x^2-y^2 \ge 0$ **або** $x^2+y^2 \le 4$, **тобто це є круг з центром у початку координат і радіусом 2.**

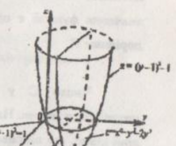

Рис. 1

В цьому розділі в основному будемо розглядати функції двох змінних, при цьому всі поняття та теореми, сформульовані для n=2, легко переносяться і на випадок n>2. Випадок двох змінних дозволяє застосовувати наглядну геометричну інтерпретацію основних понять.

Графіком функції двох змінних z=f(x,y), взагалі кажучи, є деяка поверхня у тривимірному просторі.

Для побудови графіка функції z=f(x,y) зручно розглядати функції однієї змінної $z=f(x,y_0)$ та $z=f(x_0,y)$, що є перетинами графіка z=f(x,y), площинами, паралельними координатним площинам OXZ та OYZ, тобто площинами $y=y_0$, $x=x_0$.

Приклад. Побудувати графік функції $z = x^2+y^2-2y$.

Розв'язання. Перерізи поверхні $z = x^2+y^2-2y = x^2+(y-1)^2-1$ площинами, паралельними координатним площинам OXZ та OYZ, є параболи. Графіком функції є параболоїд (Рис. 1).

Означення. Лінією рівня функції двох змінних z=f(x,y) називається множина точок на площині, таких, що в усіх цих точках значення функції є одним і тим же і дорівнює C.

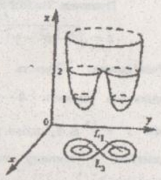

Рис.2

Число C у цьому випадку називається рівнем. На Рис. 2 зображені лінії рівня, що відповідають значенням C=1 та C=2.

Приклад. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2+y^2-2y$.

Розв'язання. Лінія рівня z=C це лінія на площині OXY, що задана рівнянням $x^2+y^2-2y=C$ або

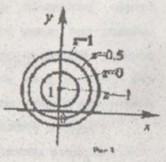

Рис. 3

$x^2+(y-1)^2 = C+1$. Це є рівняння кола з центром в точці (0;1) і радіусом $\sqrt{C+1}$ (Рис. 3).

Основні поняття

Границя та неперервність.

Означення. Число A називається границею функції $z = f(x,y)$ при $x \to x_0$ та $y \to y_0$ (або в точці (x_0, y_0)), якщо для будь-якого, навіть як завгодно малого додатнього числа $\varepsilon > 0$, існує додатнє число $\delta > 0$ (що залежить від ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$), таке що для будь-яких точок (x,y) що розміщені від точки (x_0, y_0) на відстані ρ меншій, ніж δ (тобто при $0<\rho<\delta$), має місце нерівність

$$|f(x,y)-A| < \varepsilon$$

Позначають границю так:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$$

Приклад. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **Знайти границю**

Розв'язання. Позначимо $\sqrt{x^2+y^2} = \rho$. **Умова** $x \to 0, y \to 0$ **рівносильна тому, що** $\rho \to 0$. **Запишемо границю у вигляді**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\ln(1-\rho^2)}{\rho} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\rho\to 0} \frac{\ln(1-\rho^2)'}{\rho'} = \lim_{\rho\to 0} \frac{-2\rho}{1-\rho^2} = 0$$

Означення. Функція z=f(x,y) називається неперервною у точці (x_0, y_0), якщо вона: 1) визначена у точці (x_0, y_0); 2) має

скінчену границю при $x \to x_0, y \to y_0$; 3) ця границя дорівнює значенню функції в точці (x_0, y_0), тобто

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Похідні і диференціали функції декількох змінних

Частинні похідні.

Означення. Частинною похідною від функції z=f(x,y) по незалежній змінній x називається скінчена границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x,y),$$

обчислюється при сталому значенні y.

Частинною похідною по y називається скінчена границя

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x,y),$$

обчислюється при сталому значенні x.

Для частинних похідних виконуються звичайні правила і формули диференціювання.

Геометричний зміст частинних похідних функції z=f(x,y) в точці (x_0, y_0) показано на Рис. 4.

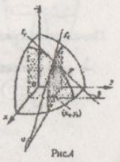

Рис.4

Нехай графік функції z=f(x,y) представляє деяку поверхню P. Тоді при $y = y_0$ ми отримаємо криву Γ_x - переріз цієї поверхні відповідною площиною.

В цьому випадку похідна z'_x є кутовим коефіцієнтом дотичної до кривої Γ_x, в заданій точці (x_0, y_0).

Приклади. Знайти частинні похідні функцій:

1) $z = x\ln y + \frac{y}{x}$, $z'_x = \ln y + y(\frac{1}{x})' = \ln y - \frac{y}{x^2}$,

$z'_y = x(\ln y)' + \frac{1}{x} y' = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}$.

2) $z = x^y$, $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln x$.

Повний диференціал.

Повним приростом функції z=f(x,y) в точці M(x,y) називається різниця $\Delta z = f(x+\Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$, де Δx та Δy - довільні прирости аргументів.

Функція z=f(x,y) називається диференційовною в точці (x,y), якщо в цій точці повний приріст можна представити у вигляді

$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, де $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Повним диференціалом функції z=f(x,y) називається головна частина повного приросту Δz, лінійна відносно приросту аргументів Δx та Δy, тобто $dx = \Delta x, dy = \Delta y$.

Повний диференціал функції u=f(x,y,z) обчислюється за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

При досить малому $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для диференційовної функції z=f(x,y) мають місце наближені рівності

$\Delta z \approx dz$; $f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + dz$.

Приклад. Знайти повний диференціал функції $u = arctg\frac{xy}{z^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^4}}\frac{y}{z^2} = \frac{z^2y}{z^4+x^2y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^4}}\frac{x}{z^2} = \frac{z^2x}{z^4+x^2y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-2}{1+\frac{x^2y^2}{z^4}}\frac{xy}{z^3} = \frac{-2xyz}{z^4+x^2y^2}$$

$$du = \frac{z^2y}{z^4+x^2y^2}dx + \frac{z^2x}{z^4+x^2y^2}dy - \frac{2xyz}{z^4+x^2y^2}dz.$$

Частинні похідні та диференціали вищих порядків.

Частинними похідними другого порядку від функції z=f(x,y) називаються частинні похідні від частинних похідних першого порядку.

Позначення частинних похідних другого порядку:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y).$$

Аналогічно визначаються і позначаються похідні третього і вищих порядків." Змішані" похідні, що відрізняються одна від одної лише послідовністю диференціювання, є рівними між собою, якщо вони неперервні, наприклад $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Диференціалом другого порядку від функції z=f(x,y) називається диференціал від її повного диференціалу, тобто $d^2z = d(dz)$. Аналогічно визначаються диференціали вищих порядків.

Якщо x та y - незалежні змінні і функція f(x,y) має неперервні частинні похідні, то диференціали вищих порядків обчислюються за формулами

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2;$$

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z,$$

остання формула формально розкривається по біноміальному закону.

Приклад. Довести, що функція $z = arctg\frac{x}{y}$ задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

Завдання.

Дана функція двох змінних $z = f(x,y)$ (a - стала). Доведіть, що задана функція задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1. $z = \sqrt{\sin(x+ay)}$
2. $z = \ln(x-ay) + (x+ay)^3$
3. $z = a^{-(x-ay)^2}$
4. $z = \frac{1}{(x-ay)^3}$
5. $z = \cos^2(x-ay) + \ln(x+ay)$
6. $z = \frac{1}{\sqrt{x+ay}}$
7. $z = e^{\cos(x+ay)}$
8. $z = \cos(x-ay) + \sin^2(x+ay)$
9. $z = \ln tg(x-ay)$
10. $z = \sqrt{x-ay} + e^{x+ay}$
11. $z = arctg(x-ay)^2$
12. $z = (x-ay)^2 + \sin(x+ay)$

13. $z=e^{\sqrt{x-ay}}$

14. $z=\dfrac{x}{x^2-ay^2}$

15. $z=\sin(x-ay)+\sqrt{x+ay}$

16. $z=\ln\sqrt{x+ay}$

17. $z=e^{-(x-ay)^2}$

18. $z=arcctg(x-ay)+(x+ay)^2$

19. $z=\sqrt[3]{(x-ay)^2}$

20. $z=\sin x\sin(ay+2)$

21. $z=e^{x-ay}+\ln(x+ay)$

22. $z=tg^2(x+ay)$

23. $z=\ln\sin(x+ay)$

24. $z=\dfrac{1}{(x+ay)^2}+x-ay$

25. $z=\cos(x+ay)^2$

26. $z=tg(x-ay)+x+ay$

27. $z=\sin^2(x-ay)$

28. $z=\sqrt{e^{x+ay}}$

29. $z=\dfrac{1}{x-ay}+\sqrt{x+ay}$

30. $z=\ln^2(x+ay)$

Похідна в заданому напрямку. Градієнт функції.

Похідною функції z=f(x,y) в точці M(x,y) в напрямку вектора $\bar{l}=\overline{MM_1}$ називається границя

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{|MM_1|\to 0}\frac{f(M_1)-f(M)}{|MM_1|}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}\text{, де } \rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

Якщо функція f(x,y) диференційовна, то похідна в даному

напрямку обчислюється за формулою

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

де α - кут, утворений вектором $\bar{l}$ з віссю OX.

У випадку функції трьох змінних u=f(x,y,z) похідна у заданому напрямку визначається, аналогічно, за такою формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - напрямні косинуси вектора $\bar{l}$.

Градієнтом функції u=f(x,y,z) в точці M(x,y,z) називається вектор з початком в точці M і координатами, що дорівнюють частинним похідним функції z у цій точці:

$$grad\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Градієнт функції і похідна у напрямку вектора $\bar{l}$ зв'язані формулою

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\text{пр}_{l}\,grad\,z.$$

Градієнт вказує напрямок найшвидшого зростання функції у даній точці. Похідна $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ в напрямку градієнта має найбільше значення, що дорівнює

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\text{найб}}=|grad\,z|=\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Приклад. Задано функцію z=f(x,y), Точка $A(x_0,y_0)$ і вектор $\bar{a}$. Знайти 1) grad z в точці A; 2) похідну в точці A за напрямком вектора $\bar{a}$; 3) Найбільшу швидкість зростання функції в точці A. $z=xy^2+x^2y$, $A(2,1)$, $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2+2xy,\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A=1+4=5,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2xy+x^2,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A=4+4=8,$$

$$grad\,z=5\bar{i}+8\bar{j},\ \left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{\text{найб}}=|grad\,z|_A=\sqrt{25+64}=\sqrt{89},$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}},\ \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial l}=5\frac{2}{\sqrt{13}}+8\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{34}{\sqrt{13}}.$$

Завдання. Задано функцію z=f(x,y), Точка $A(x_0,y_0)$ і вектор $\bar{a}$. Знайти 1) grad z в точці A; 2) похідну в точці A за напрямком вектора $\bar{a}$; 3) Найбільшу швидкість зростання функції в точці A.

1. $z=x^2-y^2$, $A(1;1)$, $\bar{a}=\bar{i}+\sqrt{3}\,\bar{j}$.
2. $z=\ln(x^2+y^2)$, $A(3;4)$, $\bar{a}=3\bar{i}+4\bar{j}$.
3. $z=x^2-xy+y^2$, $A(1;1)$, $\bar{a}=6\bar{i}+8\bar{j}$.
4. $z=\ln(4x^2+5y^2)$, $A(1;-1)$, $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}$.
5. $z=arctg\dfrac{y}{x}$, $A(-1;1)$, $\bar{a}=\bar{i}-2\bar{j}$.
6. $z=3x^4+2xy^2$, $A(1;2)$, $\bar{a}=3\bar{i}-4\bar{j}$.
7. $z=\ln(x+\frac{1}{4}y^2)$, $A(1;1)$, $\bar{a}=4\bar{i}+3\bar{j}$.
8. $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $A(-3;4)$, $\bar{a}=\bar{i}-\bar{j}$.
9. $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, $A(1;-2)$, $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}$.
10. $z=arctg\dfrac{x^2}{y}$, $A(-1;1)$, $\bar{a}=6\bar{j}$.
11. $z=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$, $A(1;1)$, $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}$.

12. $z=\dfrac{x^2}{2y}$, $A(3;4)$, $\bar{a}=-3\bar{i}+4\bar{j}$.
13. $z=\arcsin\dfrac{x^2}{y}$, $A(1;2)$, $\bar{a}=5\bar{i}-12\bar{j}$.
14. $z=x^3+y^3-3xy$, $A(1;2)$, $\bar{a}=4\bar{i}-3\bar{j}$.
15. $z=\sqrt{x^3+y^3}$, $A(1;1)$, $\bar{a}=3\bar{i}+4\bar{j}$.
16. $z=\arcsin(xy)$, $A(\frac{2}{3};\frac{4}{3})$, $\bar{a}=\bar{i}-\bar{j}$.
17. $z=\ln(x^3+y^3)$, $A(2;1)$, $\bar{a}=-3\bar{i}+\bar{j}$.
18. $z=e^{\frac{x}{y}}$, $A(-1;1)$, $\bar{a}=\sqrt{3}\,\bar{i}+\bar{j}$.
19. $z=\ln(x^2+xy+y^2)$, $A(2;2)$, $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}$.
20. $z=x^y$, $A(3;4)$, $\bar{a}=12\bar{i}+5\bar{j}$.
21. $z=\sin(x^2+y^2)$, $A(1;1)$, $\bar{a}=4\bar{i}-3\bar{j}$.
22. $z=x^3y-y^3x$, $A(3;2)$, $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}$.
23. $z=arctg(xy)$, $A(2;1)$, $\bar{a}=\bar{i}+\sqrt{3}\,\bar{j}$.
24. $z=arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$, $A(2;-1)$, $\bar{a}=\bar{i}+3\bar{j}$.
25. $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$, $A(3;4)$, $\bar{a}=-3\bar{i}-4\bar{j}$.
26. $z=\ln(x+\dfrac{y}{2x})$, $A(1;2)$, $\bar{a}=12\bar{i}+5\bar{j}$.
27. $z=\sin(x^2+y^3)$, $A(1;1)$, $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}$.
28. $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$, $A(3;2)$, $\bar{a}=3\bar{i}+4\bar{j}$.
29. $z=e^{arctg\frac{y}{x}}$, $A(2;1)$, $\bar{a}=\bar{i}-\bar{j}$.
30. $z=\ln(5x^2+3y^2)$, $A(1;1)$, $\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{j}$.

Екстремум функції двох незалежних змінних.

Означення екстремума функції. Функція f(x,y) має максимум (мінімум) f(a,b) в точці P(a,b), якщо для всіх відмінних від P точок з достатньо малого околу точки P виконується нерівність f(a,b)>f(x,y) (або відповідно f(a,b)<f(x,y)). Максимум або мінімум функції називається її екстремумом. Аналогічно визначається екстремум функції трьох і більшого числа змінних.

Необхідні умови екстремума. Точки, в яких диференційовна функція f(x,y) може досягати екстремума (стаціонарні точки) знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь

$$f'_x(x,y)=0,\quad f'_y(x,y)=0 \tag{1}$$

(необхідні умови екстремума). В загальному випадку в точці екстремума P(a,b) функція f(x,y) або df(a,b) не існує.

Достатні умови екстремума. Нехай P(a,b) -екстремальна точка функції f(x,y). Введемо такі позначення :

$$A=f''_{xx}(a,b),\ B=f''_{xy}(a,b),\ C=f''_{yy}(a,b).$$

Складемо дискримінант

$$\Delta = AC-B^2.$$

Тоді: 1) якщо $\Delta>0$, то функція має екстремум у точці P(a,b), а саме максимум, якщо A<0 (або C<0), і мінімум, якщо A>0 (або C>0); 2) якщо $\Delta<0$, то екстремума в точці P(a,b) нема; 3) якщо $\Delta=0$, то питання про наявність екстремума функції в точці P(a,b) залишається відкритим (потрібно провести більш складні дослідження).

Приклад. Дослідити на екстремум функцію

$$z=x^3+3xy^2-15x-12y.$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні і складемо систему рівнянь (1):

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y^2-15=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=6xy-12=0.$$

Розв'язавши систему, отримаємо чотири стаціонарні точки:

$$P_1(1,2);\ P_2(2,1);\ P_3(-1,-2);\ P_4(-2,-1).$$

Знайдемо похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x$$

і складемо дискримінант Δ для кожної стаціонарної точки.

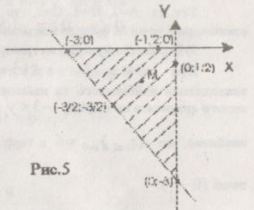

Рис.5

1) Для точки P_1:
A=6, B=12 , C=6;
$\Delta=36-144<0$. Отже, в точці P_1 екстремума нема.

2) Для точки P_2:
A=12, B=6, C=12; Δ =144-36>0, A>0.В цій точці функція має мінімум. Цей мінімум дорівнює значенню функції при x=2, y=1:

$$z_{\min}=8+6-30-12=-28.$$

3) Для точки P_3: A=-6, B=-12, C=-6; Δ =36-144<0. Екстремума нема.

4) Для точки P_4: A=-12, B=-6, C=-12; Δ =144-36>0, A<0. В точці P_4 функція має максимум, що дорівнює $z_{\max}=-8-6+30+12=28.$

Найбільше та найменше значення функції. Функція, диференційовна в обмеженій замкненій області, досягає свого найбільшого (найменшого) значення або у стаціонарній точці або в точці границі області.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в області $x\le 0,\ y\le 0,\ x+y\ge -3.$

Розв'язання. Вказана область є трикутник (Рис. 5).
1) Знайдемо стаціонарні точки:

$$z'_x=2x-y+1=0,$$
$$z'_y=2y-x+1=0;$$

[illegible] x=-1, y=-1; отримаємо точку M(-1,-1).

Так, як A=2, B=-1, C=2, то Δ=4-1=3>0, A>0, отже, в стаціонарній точці M функція має мінімум, причому $z_{\min}=-1.$

2) Дослідимо функцію на границі області.

При x=0 маємо $z=y^2+y$, і задача зводиться до знаходження найбільшого та найменшого значення цієї функції одного аргумента на відрізку $-3\le y\le 0$. Провівши дослідження, знайдемо, що $(z_{\text{найб}})_{x=0}=6$ в точці (0;-3); $(z_{\text{найм}})_{x=0}=-\frac{1}{4}$ в точці $(0;-\frac{1}{2})$.

При y=0 маємо $z=x^2+x$. Аналогічно знайдемо, що $(z_{\text{найб}})_{y=0}=6$ в точці (-3;0);
$(z_{\text{найм}})_{y=0}=-\frac{1}{4}$ в точці $(-\frac{1}{2};0)$.

При x+y=-3 або y=-3-x, отримаємо $z=3x^2+9x+6$. Аналогічно знайдемо, що
$(z_{\text{найм}})_{x+y=-3}=-\frac{3}{4}$ в точці $(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2})$; $(z_{\text{найб}})_{x+y=-3}=6$ співпадає з $(z_{\text{найб}})_{x=0}$ і $(z_{\text{найб}})_{y=0}$.

3) Співставляючи всі отримані значення функції z, робимо висновок, що $z_{\text{найб}}=6$ в точках (0;-3) та (-3;0); $z_{\text{найм}}=-1$ в стаціонарній точці M.

Завдання. Знайти найбільше та найменше значення функції в заданій області:

1. $u=x^2-xy+y,\quad -2\le x\le 2,\quad -2\le y\le 4$
2. $u=x^3+8y^3-6xy+1,\quad 0\le x\le 2,\quad |y|\le 1$
3. $u=x+|x-y|,\quad |x|\le 1,\quad |y|\le 2$
4. $u=x^2-xy+y^2,\quad |x|+|y|\le 1$
5. $u=(x+y)e^{xy},\quad -2\le x+y\le 1$
6. $u=1+x+2y,\quad x+y\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$

7. $u=x+3y,\quad x+y\le 6,\quad x+4y\ge 4,\quad y\le 2$
8. $u=x^2-2y+3,\quad y-x\le 1,\quad x\le 0,\quad y\ge 0$
9. $u=x^2+y^2-xy-x-y,\quad x+y\le 3,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$
10. $u=xy(6-x-y),\quad x+y\le 12,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0$
11. $u=3+2xy,\quad x^2+y^2\le 1$
12. $u=3+2xy,\quad 4\le x^2+y^2\le 9$
13. $u=x^2-y^2,\quad x^2+y^2\le 2x$
14. $u=x^2y,\quad x^2+y^2\le 1$
15. $u=y^4-x^4,\quad x^2+y^2\le 9$
16. $z=x^2+2y^2+1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad x+y\le 3$
17. $z=3-2x^2-xy-y^2,\quad x\le 1,\quad y\ge 0,\quad y\le x$
18. $z=x^2+3y^2+x-y,\quad x\ge 1,\quad y\ge -1,\quad x+y\le 1$
19. $z=x^2+2xy+2y^2,\quad -1\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2$
20. $z=5x^2-3xy+y^2+4,\quad x\ge -1,\quad y\ge -1,\quad x+y\le 1$
21. $z=10+2xy-x^2,\quad 0\le y\le 4-x^2$
22. $z=x^2+2xy-y^2+4x,\quad x\le 0,\quad y\le 0,\quad x+y+2\ge 0$
23. $z=x^2+xy-2,\quad 4x^2-4\le y\le 0$
24. $z=x^2+xy-1\le x\le 1,\quad 0\le y\le 3$
25. $z=x^2+3y^3+x-y,\quad x\le 1,\quad y\le 1,\quad x+y\ge 1$
26. $z=\frac{1}{2}x^2-xy,\quad \frac{1}{3}x^2\le y\le 3$
27. $z=2x+y-xy,\quad 0\le x\le 4,\quad 0\le y\le 4$
28. $z=x^2+y^2-xy+x+y,\quad -1\le x\le 1,\quad 0\le y\le 3$
29. $z=x^2y(4-x-y),\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad x+y\le 6$
30. $z=x^2-y^2,\quad x^2+y^2\le 4$