Диференціальні рівняння вищих порядків

I. *Рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку*

У загальному вигляді диференціальне рівняння другого порядку можна записати таким чином:

(1) $F(x, y, y', y'') = 0$, або

(1.2) $y'' = f(x, y, y')$.

Загальний розв'язок такого рівняння містить дві довільні сталі, тобто має вигляд

(2) $y = \varphi(x, C_1, C_2)$.

При розв'язанні диференціальних рівнянь другого порядку нас будуть цікавить лише ті випадки, коли ці рівняння допускають зниження порядку, тобто зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку.

Зниження порядку можливе лише у таких випадках,коли вихідне диференціальне рівняння є неповним, тобто не містить або незалежної змінної x,або шуканої функції $y(x)$, або першої похідної шуканої функції.

1.1. <u>Рівняння типу $\boldsymbol{y'' = f(x)}$, $\boldsymbol{y^{(n)} = f(x)}$.</u>

Ці рівняння розв'язуються послідовним інтегруванням

$$y' = \int f(x)dx + C_1 \;=>\; y = \int (f(x)dx + C_1) + C_2 = \int f(x)dx + C_1x + C_2\,.$$

Аналогічно розв'язуються і рівняння *n*-го порядку $y^{(n)} = f(x)$.

Приклад 1.1. Розв'язати рівняння $y'' = \sin 3x + \frac{1}{x^2}$.

<u>Розв'язок.</u> Функція в правій частині залежить тільки від змінної *x*. Отже це рівняння інтегруємо послідовно два рази, отримаємо

$$y' = \int \left(\sin 3x + \frac{1}{x^2}\right)dx + C_1 = -\frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{x} + C_1,$$

$y = \int \left(-\frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{x} + C_1\right) dx + C_2 = -\frac{1}{9}\sin 3x - \ln|x| + C_1 x + C_2$.

Відповідь: $y = -\frac{1}{9}\sin 3x - \ln|x| + C_1 x + C_2$ – загальний розв'язок ДР 2-го порядку.

Приклад 1.2. Розв'язати рівняння $y^{(4)} = 12x + e^{-x}$.

<u>Розв'язок.</u> Функція в правій частині залежить тільки від змінної *x*. Отже це рівняння інтегруємо послідовно два рази, отримаємо

$$y''' = \int (12x + e^{-x})dx = 6x^2 - e^{-x} + C_1 \;=>$$

$$=> y'' = \int (6x^2 - e^{-x} + C_1)dx + C_2 = 2x^3 + e^{-x} + C_1 x + C_2 =>$$

$$=> y' = \int (2x^3 + e^{-x} + C_1 x + C_2)dx + C_3 = \frac{x^4}{2} - e^{-x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 =>$$

$$=> y = \int \left(\frac{x^4}{2} - e^{-x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3\right) dx =>$$

$=> y = \frac{x^5}{10} + e^{-x} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$ – загальний розв'язок ДР 4-го порядку.

Відповідь: $y = \frac{x^5}{10} + e^{-x} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.

1.2. Рівняння типу $F(x, y', y'') = 0$.

Ці рівняння не містять явно шуканої функції y . Зробивши заміну $y' = p(x)$,

$y'' = p'(x)$, отримаємо рівняння першого порядку відносно функції p :

$F(x, p, p') = 0$.

Приклад 2.1. Розв'язати задачу Коші $xy'' + y' = 0$, $y(0) = 2, y'(0) = 3$.

<u>Розв'язок:</u> Рівняння не містять явно шуканої функції y . Зробивши заміну $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$, отримаємо рівняння першого порядку відносно функції p:

$xp' + p = 0$ – рівняння з відокремлювальними змінними, відокремлюємо змінні, отримаємо

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{p}{x} \ => \frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x} \ => \int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dx}{x} \ => \ln p = -\ln x + \ln C =>$$

$$=> p = C_1 e^{-x} \ => \ y' = C_1 e^{-x} \ => y = \int C_1 e^{-x} dx + C_2 = -C_1 e^{-x} + C_2.$$

Отже $y = C_2 - C_1 e^{-x}$ - загальний розв’язок ДР 2-го порядку.

Використовуючи початкові умови $y(0) = 2, y'(0) = 3$,знайдемо коефіцієнти

C_1, C_2 із системи рівнянь $\begin{cases} C_2 - C_1 = 2, \\ C_1 = 3. \end{cases}$ Отримаємо $C_1 = 3, C_2 = 5$.

Тоді $y = 5 - 3e^{-x}$ - розв’язок задачі Коші (частинний розв’язок ДР).

Відповідь: $y = 5 - 3e^{-x}$ - розв’язок задачі Коші.

Приклад 2.2. Знайти загальний розв’язок ДР $xy'' = y' \ln\frac{y'}{x} + y'$.

<u>Розв’язок:</u> Рівняння не містять явно шуканої функції y . Зробивши заміну $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$, отримаємо рівняння першого порядку відносно функції p:

$xp' = p\ln\frac{p}{x} + p \ => \ p' = \frac{p}{x}\ln\frac{p}{x} + \frac{p}{x}$ – ДР однорідне відносно змінних. Розв’язуємо його підстановкою $u = \frac{p}{x}$, $p = ux$, $p' = u'x + u$. Підставляємо в останнє ДР, отримаємо

$$u'x + u = u\ln u + u \ => \int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x} \ => \int \frac{d(\ln u)}{u\ln u} = \ln|x| + \ln|C_1| =>$$

$$\ln u = C_1 x \ => u = e^{C_1 x} \text{ ,але } u = \frac{p}{x} => \frac{p}{x} = e^{C_1 x} \ => p = xe^{C_1 x} .$$

Підставимо y' замість p , отримаємо

$$y' = xe^{C_1 x} \ => \frac{dy}{dx} = xe^{C_1 x} \ => \int dy = \int xe^{C_1 x} dx + C_2 \ =>$$

$$y = \int xe^{C_1 x} dx + C_2 .$$

Інтегруємо частинами,

маємо $\int xe^{C_1 x} dx + C_2 = \begin{vmatrix} u = x, & dv = e^{C_1 x} dx, \\ du = dx, & v = \int e^{C_1 x} dx = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x} \end{vmatrix} =$

$$= \frac{1}{C_1}\, xe^{C_1 x} - \frac{1}{C_1}\int e^{C_1 x}dx + C_2 = \frac{1}{C_1} xe^{C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x} + C_2 \;=>$$

$$=> y = \frac{1}{C_1} xe^{C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x} + C_2 - \text{загальний інтеграл ДР } 2 - \text{го порядку.}$$

Відповідь: $y = \frac{1}{C_1} xe^{C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x} + C_2$ - загальний розв'язок ДР.

Приклад 2.3. Знайти загальний розв'язок ДР $xy'' + y' - x^2 - 1 = 0$.

Розв'язок: Рівняння не містять явно шуканої функції y . Зробивши заміну $y' = p(x),\;\; y'' = p'(x)$, отримаємо рівняння першого порядку відносно функції p: $xp' + p = x^2 + 1$. Маємо ЛНДР 1-го порядку відносно функції $p = p(x)$. Застосовуємо метод Бернуллі для знаходження розв'язку цього рівняння: $p = uv, p' = u'v + uv'$. Тоді

$$p' + \frac{uv}{x} = \frac{x^2+1}{x} => u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{x^2+1}{x} => u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x}$$

$$\left[\begin{array}{l} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ v' + \dfrac{v}{x} = \dfrac{x^2+1}{x} \end{array}\right. => \; v' = -\frac{v}{x} => \frac{dx}{x} = -\frac{dx}{x} => \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dx}{x} =>$$

$$\ln|v| = -\ln|x| \;=> \boxed{v = \frac{1}{x}}.$$

Тоді

$$u'v = \frac{x^2+1}{x} \;=> u'\frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} \;=> u' = x^2 + 1 \;=> u = \int (x^2+1)dx + C_1$$

$$\boxed{y = \frac{x^3}{3} + x + C_1} => p = uv = \left(\frac{x^3}{3} + x + C_1\right)\frac{1}{x} = \frac{x^2}{3} + 1 + \frac{C_1}{x} =>$$

$$=> \; p = \frac{x^2}{3} + 1 + \frac{C_1}{x}.$$

Підставимо y' замість p , отримаємо

$$y' = \frac{x^2}{3} + 1 + \frac{C_1}{x} => y = \int \left(\frac{x^2}{3} + 1 + \frac{C_1}{x}\right)dx + C_2 = \frac{x^3}{9} + x + C_1\ln|x| + C_2$$

$$y = \frac{x^3}{9} + x + C_1 \ln|x| + C_2 -$$ загальний розв'язок ДР 2-го порядку.

Відповідь: $y = \frac{x^3}{9} + x + C_1 \ln|x| + C_2$ - загальний розв'язок ДР.

1.3. Рівняння типу $\boldsymbol{F(y, y', y'') = 0}$.

Рівняння цього типу не містить явно незалежної змінної x і допускає зниження порядку за одиницю, якщо покласти , а новий аргумент взяти саму шукану функцію y. Похідну другого порядку отримуємо за правилом диференціювання складної функції

$$p = p(y), \qquad y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = p\frac{dp}{dy} = pp' \;=>\; \boxed{y'' = pp'}$$

Підставивши ці вирази в рівняння, отримаємо $F(y, p, pp') = 0$. Отримане рівняння є рівнянням першого порядку відносно функції

$p = p(y)$, $\left(p' = \frac{dp}{dy}\right)$.

Приклад 3.1. Знайти загальний розв'язок ДР $yy'' - 2(y')^2 = 0$.

<u>Розв'язок:</u> Рівняння цього типу не містить явно незалежної змінної x і допускає зниження порядку за одиницю, якщо покласти $y' = p(y)$, а новий аргумент взяти саму шукану функцію y, тому $p = p(y)$, $y'' = pp'$, отримаємо диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремлювальними змінними:

$$p\left(y\frac{dp}{dy} - 2p\right) = 0.$$

1) $p = 0 \;=>\; y' = 0 \;=>\; y = C_1$ – розв'язок рівняння;
2) $y\frac{dp}{dy} - 2p = 0 \;=>\; \frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y} \;=>\; \int\frac{dp}{p} = \int\frac{2dy}{y} + C_2 \;=>$
$=> \ln|p| = 2\ln|y| + \ln|C_2| \;=>\; p = C_2 y^2$.

Враховуючи, що $y' = p(y)$, отримаємо $y' = C_2 y^2$, $\frac{dy}{dx} = C_2 y^2$. Знову отримали диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремлювальними змінними:

$$\frac{dy}{y^2} = \mathrm{C}_2 dx => \int \frac{dy}{y^2} = \int \mathrm{C}_2 dx + C_3 \; => \; -\frac{1}{y} = C_2 x + C_3 => y = -\frac{1}{C_2 x + C_3}.$$

Загальний розв'язок $y = -\frac{1}{C_2x+C_3}$ містить розв'язок $y = C_1 = -\frac{1}{C_3}$ при $\mathrm{C}_2 = 0$ (за винятком розв'язка $y = 0$).

Відповідь: $y = -\frac{1}{C_2x+C_3}$ - загальний розв'язок ДР.

Приклад 3.2. Розв'язати задачу Коші

$$2(y')^2 = y''(y-1), \;\; y(1) = 2, \;\; y'(1) = -1 .$$

Розв'язок: Рівняння цього типу не містить явно незалежної змінної x і допускає зниження порядку за одиницю, якщо покласти $y' = p(y)$, а новий аргумент взяти саму шукану функцію y, тому $p = p(y), \; y'' = pp'$. Підставляючи ці вирази у рівняння, отримаємо

$$2p^2 = pp'(y-1) => p\big(2p - p'(y-1)\big) = 0.$$

1) $p = 0 \; => \; y' = 0 \; => y = C_1$ – розв'язок рівняння;

2)$2p = p'(y-1)$. Отримали рівняння з відокремлювальними змінними. Розділяючи змінні і інтегруючи, отримаємо

$$\frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y-1} => \int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{dy}{y-1} + C_2 => \ln|p| = 2\ln|y-1| + \ln|C_2| =>$$

$$\ln|p| = \ln(y-1)^2 + \ln|C_2| \; => p = C_2(y-1)^2 .$$

Оскільки $p = y'$, маємо

$$y' = C_2(y-1)^2 \; => \frac{dy}{dx} = C_2(y-1)^2 => \int \frac{dy}{(y-1)^2} = C_2 \int dx \; =>$$

$$=> -\frac{1}{y-1} = C_2 x + C_3 \; => y - 1 = -\frac{1}{C_2 x + C_3} => y = 1 - \frac{1}{C_2 x + C_3} =>$$

$$y = \frac{C_2 x + C_3 - 1}{C_2 x + C_3}.$$

Загальний розв'язок $y = \frac{C_2x+C_3-1}{C_2x+C_3}$ містить розв'язок $y = C_1 = \frac{C_3-1}{C_3}$ при $\mathrm{C}_2 = 0$ (за винятком розв'язка $y = 0$).

Для знаходження частинного розв'язку використаємо початкові умови.

Підставляючи $x = 1$, $y = 2$ в загальний розв'язок, маємо

$2 = \frac{C_2+C_3-1}{C_2+C_3}$ $=> 2 = 1 - \frac{1}{C_2+C_3}$ $=>$ $C_2 + C_3 = -1$.

Ми одержали одне рівняння з двома невідомими. Використовуючи другу початкову умову, отримаємо і друге рівняння цієї системи:

$x = 1 , y = 2 , y^{'} = -1 => \ -1 = C_2(2-1)^2 \ => C_2 = -1$.

Розв'язуючи систему двох рівнянь з двома невідомими $\begin{cases} C_2 + C_3 = -1, \\ C_2 = -1 \end{cases}$,

Знаходимо значення довільних сталих $C_2 = -1 , C_3 = 0$.

Отже розв'язок задачі Коші має вигляд

$$y = \frac{-x-1}{-x} \quad \text{або} \quad y = 1 + \frac{1}{x}.$$

Відповідь: $y = \frac{C_2x+C_3-1}{C_2x+C_3}$ - загальний розв'язок ДР;

$y = 1 + \frac{1}{x}$ - розв'язок задачі Коші.

Приклад 3.3. Розв'язати задачу Коші $y^{''} = 1 + y^{'}, y(0) = 1, y^{'}(0) = 1$.

<u>Розв'язок:</u> Рівняння не містять явно шуканої функції y . Зробивши заміну $y^{'} = p(x)$, $y^{''} = p^{'}(x)$, отримаємо рівняння першого порядку відносно функції p:

$p^{'} = 1 + p$ – ДР з відокремлювальними змінними, відокремлюємо змінні, отримаємо

$$\frac{dp}{1+p} = dx => \ln|1+p| = x + \ln|C_1| => 1 + p = C_1e^x => p = C_1e^x - 1 =>$$

$$y^{'} = C_1e^x - 1 \ => y = \int (C_1e^x - 1)dx + C_2 = C_1e^x - x + C_2$$

$y = C_1e^x - x + C_2$ - загальний інтеграл ДР.

Використовуючи початкові умови $y(0) = 1, y^{'}(0) = 1$,знайдемо коефіцієнти

C_1, C_2 із системи рівнянь $\begin{cases} C_2 + C_1 = 1, \\ C_1 = 2. \end{cases}$ Отримаємо $C_1 = 2, C_2 = -1$.

Тоді $y = 2e^x - x - 1$ - розв'язок задачі Коші (частинний розв'язок ДР).

Відповідь: $y = 2e^x - x - 1$ - розв'язок задачі Коші.

Приклад 3.4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' = 1 + (y')^2$.

Розв'язок: Рівняння не містять явно шуканої функції y . Зробивши заміну $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$, отримаємо рівняння першого порядку відносно функції p:

$p' = 1 + p^2$ – ДР з відокремлювальними змінними, відокремлюємо змінні, отримаємо

$$\frac{dp}{1+p^2} = dx => \int \frac{dp}{1+p^2} = x + C_1 => \mathrm{arctg} p = x + C_1 => p = \mathrm{tg}(x + C_1).$$

Підставимо y' замість p , отримаємо

$$y' = \mathrm{tg}(x + C_1) \;=> \int dy = \int \mathrm{tg}(x + C_1)dx + C_2 =>$$

$$=> y = \int \frac{\sin(x + C_1)dx}{\cos(x + C_1)} + C_2 = -\int \frac{d\cos(x + C_1)}{\cos(x + C_1)} + C_2$$
$$= -\ln|\cos(x + C_1)| + C_2 ,$$

тобто $y = -\ln|\cos(x + C_1)| + C_2$ – загальний розв'язок заданого ДР.

Відповідь: $y = -\ln|\cos(x + C_1)| + C_2$ – загальний розв'язок ДР.

II. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

2.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0\ .$$

<u>Розв’язок:</u> Характеристичне рівняння

$$k^5 - k^4 + 8k^3 - 8k^2 + 16k - 16 = 0$$

Можна записати у вигляді $(k-1)(k^2+4)^2 = 0$.Звідси випливає, що

$$k_1 = 1, k_2 = k_3 = 2i\ , k_4 = k_5 = -2i.$$

Частинними розв’язками рівняння є функції

$y_1 = e^x, y_2 = \cos 2x\ , y_3 = x\cos 2x,\ \ y_4 = \sin 2x, y_5 = x\sin 2x$.

Загальним розв’язком заданого рівняння є

$$y = C_1e^x + (C_2 + C_3x)\cos 2x + (C_4 + C_5x), \qquad C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbf{R}\ .$$

Відповідь: $y = C_1e^x + (C_2 + C_3x)\cos 2x + (C_4 + C_5x)$.

Приклад 1.2. Знайти загальний розв’язок $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$.

<u>Розв’язок:</u> Характеристичне рівняння

$$k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k = 0$$

Можна записати у вигляді $k(k-1)^3 = 0$.Звідси випливає, що

$$k_1 = 0, k_2 = k_3 = k_4 = 1\ .$$

Частинними розв’язками рівняння є функції

$y_1 = e^{0x} = 1,\ y_2 = e^x, y_3 = xe^x\ , y_4 = x^2e^x$.

Загальним розв’язком заданого рівняння є

$$y = C_1 + (C_2 + C_3x + c_4)e^x, \qquad C_1, C_2, C_3, C_4, \in \mathbf{R}\ .$$

Відповідь: $y = C_1 + (C_2 + C_3x + c_4)e^x$.

2.2 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = -3,\ y''(0) = 1\,.$$

<u>Розв'язок:</u> Розв'яжемо відповідне ЛОДР $y''' - y'' + y' - y = 0$.

Характеристичне рівняння $k^3 - k^2 + k - 1 = 0 => (k-1)(k^2+1) = 0$ має різні корені $k_1 = 1, k_2 = i, k_3 = -i$. Частинними розв'язками ЛОДР є функції $y_1 = e^x, y_2 = \cos x\,, y_3 = \sin x$. Тому загальний розв'язок ЛОДР

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x\,, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}\,.$$

Оскільки загальний розв'язок ЛНДР $y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$, то потрібно знайти частинний розв'язок ЛНДР ($y_{\text{ч.н.}}$). Оскільки $\alpha + i\beta = 0$ не є коренем характеристичного рівняння, то $r = 0$ і частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді правої частини, тобто многочлена другого степеня

$y_{\text{ч.н.}} = Ax^2 + Bx + C$, де A, D, C - невідомі коефіцієнти, які потрібно знайти. Знайдемо потрібні похідні

$$y'_{\text{ч.н.}} = 2Ax + B,\ y''_{\text{ч.н.}} = 2A\,,\ y'''_{\text{ч.н.}} = 0$$

і, підставляючи у рівняння, отримаємо

$$-2A + 2Ax + B - Ax^2 - Bx - C = x^2 + x\,,$$

Звідки $-Ax^2 + (2A - B)x + (-2A + B - C) = x^2 + x\ =>$

$$=> \begin{cases} -A = 1, \\ 2A - B = 1, \\ -2A + B - C = 0. \end{cases} => \begin{cases} A = -1, \\ B = -3, \\ C = -1. \end{cases}$$ Отримали $y_{\text{ч.н.}} = -x^2 - 3x - 1$.

Тому загальний розв'язок ЛНДР має вигляд

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1\,,\ \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}\,.$$

Використовуючи початкові умови $y(0) = 0, y'(0) = -3, y''(0) = 1$, знайдемо коефіцієнти C_1, C_2, C_3. Для цього знайдемо похідні $y'_{\text{з.н}}\,, y''_{\text{з.н.}}$:

$$y'_{\text{з.н}} = C_1 e^x - C_2 \sin x + C_3 \cos x - 2x - 3\,,$$

$$y''_{\text{з.н.}} = C_1 e^x - C_2 \cos x - C_3 \sin x - 2\,.$$

Отримаємо:

$y(0) = 0 \;=> 0 = C_1 + C_2 - 1$,

$y'(0) = -3 \;=> -3 = C_1 + C_3 - 3,$

$y''(0) = 1 \;=> 1 = C_1 - C_2 - 2$.

Розв'язуючи систему $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + C_3 = 0, \\ C_1 - C_2 = 3 \end{cases}$ отримаємо $\begin{cases} C_1 = 2, \\ C_3 = -2, \\ C_2 = -1. \end{cases}$

Отримаємо розв'язок задачі Коші:

$$y = 2e^x - \cos x - 3\sin x - x^2 - 3x - 1 .$$

Відповідь: $y_{\text{ч.н.}} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1$;

$y = 2e^x - \cos x - 3\sin x - x^2 - 3x - 1$ - розв'язок задачі Коші.

2.3 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами і довільною правою частиною. Метод Лагранжа.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x} , \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = -2 .$$

<u>Розв'язок:</u> Розв'яжемо відповідне ЛОДР $y'' + 16y = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 + 25 = 0$ має тільки комплексні корені $k_{1,2} = \pm 4i$. Отже, розв'язок ЛОДР $y_{\text{з.о.}} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$.Застосовуємо метод Лагранжа. Тоді загальний розв'язок ЛНДР: $y = C_1(x)\cos 4x + C_2(x)\sin 4x$, де $C_1(x)$, $C_2(x)$ - невідомі функції, які знаходимо із системи

$(*)\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$ де $y_1 = \cos 4x$, $y_2 = \sin 4x$.

Тоді $y_1' = -4\sin 4x$, $y_2' = 4\cos 4x$.

З неоднорідного рівняння маємо $f(x) = \frac{16}{\cos\, 4x}$. Система$(*)$ лінійна відносно невідомих функцій $C_1'(x), C_{2(x)}'$, розв'яжемо її методом Крамера: $C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, де

$$\Delta = w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 4x & \sin 4x \\ -4\sin 4x & 4\cos 4x \end{vmatrix} = 4\cos^2 x + 4\sin^2 x = 4,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin 4x \\ \dfrac{16}{\cos 4x} & 4\cos 4x \end{vmatrix} = -\frac{16\sin 4x}{\cos 4x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 4x & 0 \\ -4\sin 4x & \dfrac{16}{\cos 4x} \end{vmatrix} = 16\,.$$

Тоді $\quad C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{16\sin\ 4x}{4\cos\ 4x} = -\frac{4\sin\ 4x}{\cos\ 4x},$

$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{16}{4} = 4.$ Інтегруючи, знаходимо функцій $C_1'(x), C_{2(x)}'$:

$$C_1'(x) = -4\int \frac{\sin 4x}{\cos 4x} dx = \int \frac{d\cos 4x}{\cos 4x} = \ln|\cos 4x| + C_1,$$

$$C_2'(x) = 4\int dx = 4x + C_2.$$

Тоді загальний розв'язок ЛНДР $y = C_1(x)\cos 4x + C_2(x)\sin 4x$ перепишемо

$$y = (\ln|\cos 4x| + C_1)\cos 4x + (4x + C_2)\sin 4x\,.$$

Використовуючи початкові умови $y(0) = 3, y'(0) = -2$, знайдемо коефіцієнти C_1, C_2. Для цього знайдемо похідну $y_{\text{з.н}}'$:

$$y' = -\frac{4\sin 4x}{\cos 4x}\cos 4x + (\ln|\cos 4x| + C_1)\ (-4\sin 4x) + 4\sin 4x +$$

$$+(4x + C_2)4\cos 4x\,.$$

Тоді $y(0) = 3 => 3 = \ln 1 + C_1 + C_2 \cdot 0 \ => \boxed{C_1 = 3},$

$$y'(0) = -2\ => \ -2 = 0 + 4C_2 => \boxed{C_2 = -\frac{1}{2}}.$$

Отримаємо розв'язок задачі Коші:

$$y = (\ln|\cos 4x| + 3)\cos 4x + \left(4x - \frac{1}{2}\right)\sin 4x\,.$$

Відповідь: $\quad y = (\ln|\cos 4x| + 3)\cos 4x + \left(4x - \frac{1}{2}\right)\sin 4x\,.$