Диференціальні рівняння першого порядку

I. Диференціальні рівняння з відокремлювальними змінними.

$$y' = f(x, y)$$

(1) $y' = f_1(x) f_2(y)$

(1.1) $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$ - ДР з відокремлювальними змінними

(1.2) $\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$ - ДР з відокремленими змінними

(2) $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

(2.1) $M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$ - ДР з відокремлювальними змінними

(2.2) $\dfrac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \dfrac{M_2(y)}{N_2(y)}dy = 0$ - ДР з відокремленими змінними

ДР з відокремленими змінними (1.2) або (2.2) можна інтегрувати

$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$ => $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$;

$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)} dx + \int \frac{M_2(x)}{N_2(x)} dx = C$ - загальні інтеграли ДР.

Приклад 1.1 Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{y}{\cos^2 x}$.

<u>Розв'язок:</u>

$y' = \dfrac{y}{\cos^2 x}$ - ДР з відокремлювальними змінними

$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ - ДР з відокремленими змінними

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{cos^2 x} + C$ - загальний інтеграл ДР.

Інтегруємо: $\ln y = \mathrm{tg}x + \ln C$ => $\ln y = \ln C e^{\mathrm{tg}x}$ => $y = Ce^{\mathrm{tg}x}$.

Відповідь: $y = Ce^{\mathrm{tg}x}$- загальний розв'язок ДР.

Приклад 1.2. Розв'язати рівняння $x\sin^2 y dx + (1 + x^2)dy = 0$.

Розв'язок:

$x\sin^2 y dx + (1 + x^2)dy = 0$ - ДР з відокремлювальними змінними

$\frac{xdx}{1+x^2} + \frac{dy}{\sin^2 y} = 0$ - ДР з відокремленими змінними

$\int \frac{xdx}{1+x^2} + \int \frac{dy}{\sin^2 y} = C$ - загальний інтеграл ДР.

Інтегруємо і отримаємо:

$\frac{1}{2}\ln|1 + x^2| - \mathrm{ctg}y = \ln C$ => $\mathrm{ctg}y = \ln C\sqrt{x^2 + 1}$ => $y = \mathrm{arcctg}\ln C\sqrt{x^2 + 1}$

Відповідь: $y = \mathrm{arcctg}\ln C\sqrt{x^2 + 1}$ - загальний розв'язок ДР.

II. ***Диференціальні рівняння першого порядку, однорідні відносно змінних.***

Означення

Рівняння $y' = f(\frac{y}{x})$ називається однорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку відносно змінних.

Приклади однорідних диференціальних рівнянь:

1) $y' = e^{\frac{y}{x}}$, 2) $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$, 3) $y' = \frac{x}{x+y}$ => $y' = \frac{1}{1+\frac{y}{x}}$

4) $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$ => $y' = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ => $y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$

Самостійно розв'язати наведені приклади.

Означення

Диференціальне рівняння $y' = f(x,y)$ $\left(\frac{dy}{dx} = f(x,y)\right)$ називається однорідним ДР 1-го порядку відносно змінних, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

!!!Зауваження.

Якщо функція $f(x,y)$ - однорідна функція нульового виміру, то вона зводиться до функції $f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Означення

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ називається однорідним ДР, якщо функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ є однорідними функціями одного виміру.

$y' = f(\frac{y}{x})$ - однорідне ДР, вводимо заміну змінної: $\frac{y}{x} = U$, тоді $y = Ux$.

Знайдемо похідну функції y:

$y' = U'x + U$, тоді

$$U'x + U = f(U)$$
$$xU' = f(U) - U$$
$$xdU = (f(U) - U)dx$$

$$\boxed{\frac{dU}{f(U)-U} = \frac{dx}{x}} \qquad \int \frac{dU}{f(U)-U} = \int \frac{dx}{x} + \ln C$$

$\boxed{\int \frac{dU}{f(U)-U} = \ln|x| + \ln C}$ - загальний інтеграл ДР.

Загальний інтеграл ДР перепишемо у вигляді: $\int \frac{dU}{f(U)-U} = \ln|Cx|$.

Приклад 2.1. Розв'язати рівняння $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

<u>Розв'язок:</u> Оскільки це рівняння однорідне відносно змінних, зробивши заміну, маємо:

$$y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}; \quad \frac{y}{x} = U; \quad y = Ux$$

$$y' = U'x + U$$

$$U'x + U = e^{-\frac{1}{U}} + U$$

$$U'x = e^{-U}$$

$$xdU = e^{-U}dx$$

$$e^{U}dU = \frac{dx}{x}$$

$$e^{U} = \ln|Cx|$$

$$e^{\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$$

$$\frac{y}{x} = \ln\ln|Cx|$$

$$y = x\ln\ln|Cx|$$

Відповідь: $y = \ln\ln|Cx|$ - загальний розв'язок однорідного ДР.

Приклад 2.1. Розв'язати рівняння $y' = \frac{y-x}{x}$.

<u>Розв'язок:</u> Поділивши праву частину на x, отримуємо

$y' = \frac{y}{x} - 1$. Права частина цього рівняння $f(x,y) = \frac{y-x}{x}$ є функцією нульового виміру. Отже вихідне рівняння є однорідним ДР відносно змінних. Зробивши заміну, маємо

$$\frac{y}{x} = u, \qquad y = ux, \qquad y' = u'x + u$$

Підставляючи отримані вирази у рівняння, отримаємо

$$u'x + u = u - 1 \;\; => \;\; u'x = -1 \;\; => \;\; \frac{du}{dx}x = -1.$$

Відокремлюючи змінні і інтегруючи отримуємо

$$du = -\frac{dx}{x} \;\; => \int du = -\int \frac{dx}{x} \;\; => u = -\ln|x| + \ln C \;\; => u = ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

Підставивши $u = \frac{y}{x}$, отримаємо $\frac{y}{x} = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \;\; => y = x\ln\left|\frac{C}{x}\right|$.

Відповідь: $y = x\ln\left|\frac{C}{x}\right|$ - загальний розв’язок однорідного ДР.

III. ***<u>Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Методи їх розв’язання.</u>***

<u>Означення.</u>

Лінійним диференціальним рівнянням (ЛДР) 1-го порядку називають рівняння

$y' + R(x)y = Q(x)$ (1)

в яке невідома функція і її похідна входять лінійно, тобто в першій степені і не перемножуються.

Рівняння (1) може бути записано у вигляді $A(x)y' + B(x)y = C(x)$. (2)

Рівняння (2) розділимо на функцію $A(x)$ ($A(x) \neq 0$), отримаємо

$$A(x)y' + B(x)y = C(x)$$
$$y' + \frac{B(x)}{A(x)}y = \frac{C(x)}{A(x)}$$
$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Функція $Q(x)$ називається вільним членом ДР або правою частиною ДР (1).

Означення.

Якщо $Q(x) \equiv 0$, то рівняння (3) $y' + P(x)y = 0$ називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) 1-го порядку, яке відповідає рівнянню(1).

Рівняння (1) називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням (ЛНДР) 1-го порядку.

!Зауваження.

Неможна плутати лінійні однорідні диференціальні рівняння (ЛОДР) і однорідні диференціальні рівняння.

Приклади:

$$y' = \frac{3y^2}{x^2} - 5$$

$y' = 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 5$ - однорідне1- го порядку рівняння (ДР однорідне відносно змінних), але воно не буде лінійним

$$y' = \frac{3y}{x^2} - 5$$

$y' - \frac{3y}{x^2} = -5$ - ЛНДР 1- го порядку

$y' = \frac{3y}{x^2}$ - ЛОДР 1- го порядку

$y' - \frac{3y}{x^2} = 0$ – ЛОДР і одночасно ДР з відокремлювальними змінними.

Розділяючи змінні, отримаємо $\frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x^2}$. Це рівняння можна інтегрувати.

$$\int \frac{dy}{y} = 3\int \frac{dx}{x^2} \ => \ln y = -\frac{3}{x} + \ln C \ => \ y = Ce^{-\frac{3}{x}} - \text{ розвязок ЛОДР.}$$

Розв'язок ЛНДР

Розв'язок ЛНДР проводять в два етапи:

1) розв'язок відповідного ЛОДР
2) розв'язок ЛНДР

Метод Лагранжа. Метод варіації довільної сталої.

(1) $y' + P(x)y = Q(x)$

1) $y' + P(x)y = 0$ (2) ЛОДР – рівняння з відокремлю вальними змінними.

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

$$\ln|y| + \int P(x)dx + \ln C = 0$$

$$\ln|y| = \ln e^{-\int P(x)dx} + \ln C$$

(3) $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ - загальний розв'язок ЛОДР

2) Для знаходження загального розв'язку ЛНДР скористаємося методом варіації (зміни) довільної сталої, запропонованим Лагранжем.

Будемо шукати розв'язок ЛНДР (1) у вигляді (3), але C=C(x), а C(x) – деяка функція від x.

Знайдемо цю функцію

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \qquad (3.1)$$

Знайдемо y' і підставимо в ЛНДР (1).

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}(-P(x))$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}+C(x)e^{-\int P(x)dx}(-P(x))+P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$
$$C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$
$$\frac{dC(x)}{dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$
$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$$

Підставляємо цей вираз для функції С(х) у розв'язок (3.1)

(4) $$y=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)e^{-\int P(x)dx}=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

- загальний розв'язок ЛНДР 1-го порядку.

!Зауваження.

Загальний розв'язок ЛНДР дорівнює сумі загального розв'язку ЛОДР ($y_{з.о}$) і частинного розв'язку ЛНДР ($y_{ч.н.}$), тобто y= $y_{з.о}+y_{ч.н.}$ - структура загального розв'язку ЛНДР.

Приклад 3.1. Розв'язати рівняння

$y'-y=x-1$, якщо $M(0;1)$ або y(0)=1.

Розв'язок:

Розв'язати задачу Коші для ЛНДР 1-го порядку.

1) Розв'яжемо відповідне ЛОДР: $y'-y=0$,

$$\frac{dy}{dx}=y$$
$$\frac{dy}{y}=dx$$
$$\boxed{\ln|y|=x+\ln C}$$
$$\boxed{\ln y=\ln e^{x}+\ln C}$$

$\ln|y|=\ln|Ce^{x}|$ => $y=Ce^{x}$ - загальний розв'язок ЛОДР.

ln

2) Метод варіації довільної сталої: $C = C(x)$, тоді $y = C(x)e^x$, отримаємо

$y = C(x)e^x$

$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x$

$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = x - 1$

$C'(x)e^x = x - 1$

$$C'(x) - (x-1)e^{-x}dx = \left| \begin{matrix} x-1 = U \\ dU = dx \\ e^{-x}dx = dV \\ -e^{-x} = -V \end{matrix} \right| = -(x-1)e^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x-1)e^{-x} - e^{-x} + c = -e^{-x}(x-1+1)$$

$C(x) = -xe^{-x} + C$

$y = (-xe^{-x} + C)e^x$

$y = Ce^x - x$ - загальний розв'язок ЛНДР. Перевіримо, що функція $y_{\text{ч.н.}} = -x$ буде розв'язком ЛНДР:

$y_{ч.н.} = -x$ $y'_{\text{ч.н.}} = -1$ підставимо в ДР $y' - y = x - 1$, отримаємо тотожність: $-1 - (x) = x - 1 \Rightarrow x - 1 = x - 1$. Функція $y_{\text{ч.н.}} = -x$ - частинний розв'язок ЛНДР.

Використаємо початкові умови і знайдемо константу С:

$y(0) = 1$

$1 = Ce^0 - 0$

$\boxed{C=1}$

$y = e^x - x$ - розв'язок задачі Коші для ЛНДР 1-го порядку

Відповідь: $y = e^x - x$.

<u>Метод Бернуллі.</u>

Шукаємо розв'язок ДР у вигляді добутку двох невідомих функцій U=U(x) і V=V(x), тобто

$y = U(x)V(x)$ або $y = UV$.

Тоді, шукаючи похідну $y' = (UV)'$ і підставляючи рівняння, отримаємо

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$$y = U(x)V(y)$$

$$y' = U'V + UV'$$

$$U'V + UV' + P(x)UV = Q(x)$$

$$U'V + U(V' + P(x)V) = Q(x)$$

$$\begin{cases} V' + P(x)V = 0 \\ U'V = Q(x) \end{cases}$$

$$V' + P(x)V = 0 - ЛОДР$$

$$\frac{dV}{V} = -P(x)dx$$

$$\ln|V| = -\int P(x)dx$$

$V = e^{-\int P(x)dx}$ тоді $U'e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$

$$U' = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$U = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

$$y = UV$$

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right)e^{-\int P(x)dx}$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

Отримали загальний розв'язок ЛНДР.

Приклад 3.2.

Розв’язати задачу Коші для ЛНДР 1-го порядку

$$y' + xy = x^3 \qquad M(0;-2)$$

Розв’язок: Шукаємо розв’язок ДР у вигляді добутку двох невідомих функцій U=U(x) і V=V(x), тобто

$y = U(x)V(x)$ або $y = UV$.

Тоді, шукаючи похідну $y' = (UV)'$ і підставляючи рівняння, отримаємо

$$y = UV$$
$$y' = U'V + UV'$$
$$U'V + UV' + xUV = x^3$$
$$U'V + U(V' + xV) = x^3$$
$$\begin{cases} V' + xV = 0 \\ U'V = x^3 \end{cases}$$

$$V' = -xV$$
$$\frac{dV}{V} = -xdx$$
$$\ln|V| = -\frac{x^2}{2}$$
$$V = e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$U'V = x^3 \Rightarrow U'e^{-\frac{x^2}{2}} = x^3$$
$$U' = x^3 e^{\frac{x^2}{2}}$$
$$U = \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx + C = \left| \begin{matrix} \frac{x^2}{2} = t \\ dt = xdx \\ x^2 = 2t \end{matrix} \right| = \int 2te^t dt = 2\int te^t dt = \left| \begin{matrix} t = U \\ dt = dU \\ e^t dt = dV \\ V = e^t \end{matrix} \right| = 2te^t - 2\int e^t dt = 2(te^t - e^t) + C =$$

$$= 2e^{t}(t-1) + C = 2e^{\frac{x^2}{2}}\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) + C$$

$$U = 2e^{\frac{x^2}{2}}\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) + C = e^{\frac{x^2}{2}}\left(x^2 - 2\right) + C$$

$$y = \left(e^{\frac{x^2}{2}}\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) + C\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)$$

$y = Ce^{=\frac{x^2}{2}} + x^2 - 2$ - загальний розв'язок ЛНДР.

Використаємо початкові умови і знайдемо константу С:

$$y_{з.о.} = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$y_{ч.н.} = x^2 - 2$$
$$y(0) = -2$$
$$-2 = Ce^{0} - 2$$

Отримаємо С = 0. Тоді

$\boxed{y = x^2 - 2}$ - розв'язок задачі Коші.

Відповідь: $y = x^2 - 2$.

Рівняння Бернуллі.

Означення.

Диференціальне рівняння (нелінійне) вигляду

(5) $y' + P(x)y = Q(x)y^m$, де $\begin{matrix} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{matrix}$

називається рівнянням Бернуллі.

Його можна звести до ЛНДР заміною невідомої функції $z = y^{1-m}$.

Тоді отримаємо

$$z = y^{1-m}$$

$$z' = (1-m)y^{-m}y' \Rightarrow \frac{y'}{y^m} = \frac{z'}{1-m}$$

$$\frac{y'}{y^m} + P(x)\frac{y}{y^m} = Q(x)$$

$$\frac{y'}{y^m} + P(x)y^{1-m} = Q(x)$$

$$\boxed{\frac{1}{1-m}z' + P(x)z' = Q(x)}$$

- ЛНДР 1-го порядку відносно невідомої функції $z = z(x)$. Отримане рівняння (ЛНДР) далі розв'язуємо або методом Лагранжа або методом Бернуллі.

Рівняння Бернуллі можна одразу (не зводячи його до ЛНДР) розв'язувати методом Бернуллі.

Приклад 3.3.

Розв'язати задачу Коші для рівняння Бернуллі:

$$xy' + y = y^2 \ln x \qquad M(1;1)$$

<u>Розв'язок:</u> Застосовуємо методом Бернуллі:

$$y = UV$$

$$y' = U'V + UV'$$

$$x(U'V + UV') + UV = U^2V^2 \ln x$$

$$xU'V + xUV' + UV = U^2V^2 \ln x$$

$$xU'V + U(xV' + V) = U^2V^2 \ln x$$

Останнє рівняння розпадається на сукупність двох рівнянь:

$$\begin{cases} xV' + V = 0 \\ xU'V = U^2V^2 \ln x \end{cases}$$

$$xV' + V = 0$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|V| = -\ln|x|$$

$$\boxed{V = \frac{1}{x}}$$

$$xU'V = U^2V^2 \ln x$$

$$xU' = U^2 V \ln x$$

$$\frac{dU}{U^2} = \frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$\int \frac{dU}{U^2} = \int \frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$-\frac{1}{U} = \int \frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = U \\ \dfrac{dx}{x^2} = dV \\ dU = \dfrac{dx}{x} \\ V = \int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x}\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}(\ln x + 1)$$

$$\frac{1}{U} = \frac{Cx + \ln x + 1}{x}$$

$$U = \frac{x}{Cx + \ln x + 1}$$

$$y = UV = \frac{x}{Cx + \ln x + 1}\frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}$$

$$y(Cx + \ln x + 1) = 1$$

Загальний розв'язок рівняння Бернуллі $y = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}$.

Використаємо початкові умови і знайдемо константу С:

$y(1) = 1 \;\; => \;\; 1(\text{C}1 + \ln 1 + 1) = 1 \;\; => \;\; \text{C} + 1 = 1 \;\; => \;\; \text{C} = 0$.

$\boxed{y = \frac{1}{\ln x + 1}}$ - розв'язок задачі Коші рівняння Бернуллі.

Відповідь: $y = \frac{1}{\ln x + 1}$.

Приклад 3.4. Розв’язати рівняння $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$.

Розв’язок: Оскільки це рівняння Бернуллі, то розв’язуємо його методом Бернуллі:

$$y = uv \;\; => \;\; y' = u'v + uv' \;\; => u'v + uv' + \frac{uv}{x} = -xu^2v^2 \;\; =>$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = -xu^2v^2 \;\; => v' + \frac{v}{x} = 0 \;\; => \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \;\; =>$$

$$=> \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \;\; => \ln|v| = -\ln|x| \;\; => \ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right| \;\; =>$$

$$=> \boxed{v = \frac{1}{x}} \;\; => \;\; u' \frac{1}{x} = -xu^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 \;\; => \frac{du}{dx} = -u^2 \;\; =>$$

$$=> -\int \frac{du}{u^2} = \int dx \;\; => \frac{1}{u} = x + C \;\; => \boxed{u = \frac{1}{x + C}} .$$

$$y = uv = \frac{1}{x + C} \frac{1}{x} \;\; => \;\; \boxed{y = \frac{1}{x^2 + Cx}} .$$

Ми знайшли загальний розв’язок рівняння Бернуллі, оскільки він містить довільну сталу.

Відповідь: $y = \frac{1}{x^2 + Cx}$ - розв'язок рівняння Бернуллі.

IY. ***<u>Рівняння в повних диференціалах</u>***

$$(1) \qquad P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0\,,$$

де функції $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в деякій області D ∈ $\mathbf{R}^2$.

Рівняння (1) називається **рівнянням у повних диференціалах,** якщо існує така неперервно диференційована функція $u(x,y)$ в області D, що

$$(2) \qquad du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,,\ (x;y) \in \text{D}.$$

Оскільки

$$du(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy\,,$$

то рівність (2)еквівалентна двом рівностям:

$$(3) \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y).$$

Якщо функція $y = y(x)$ є розв'язком рівняння (1), то

$$du\big(x, y(x)\big) = 0 \ \ (x;y) \in \text{D},$$

і, отже, $u\big(x, y(x)\big) = C$, де С- довільна стала є загальним інтегралом рівняння (1).

Якщо задано початкову умову $y(x_0) = y_0$, то стала С визначається з рівності $C = u(x_0, y_{0)}$ і

$u(x,y) = u(x_0, y_0)$ є частинним інтегралом.

Відомо, що вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом тоді і тільки тоді,коли виконується рівність

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Якщо ця умова виконується, то рівняння (1) легко інтегрується. Інтегруючи за x першу з рівностей (3) , одержуємо

$$(*)\ \ u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y).$$

Для визначення функції $\varphi(y)$ продиференціюємо останній вираз за y і скористаємося другою рівністю (3):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right) + \varphi^{'}(y) = Q(x,y\,.)$$

З цього рівняння знаходимо $\varphi^{'}(y)$, і після інтегрування визначмо $\varphi(y)$, підставивши яке в вираз $(*)$, отримуємо $u(x,y)$.

Приклад 4.1. Розв'язати рівняння

$$(y\cos x - x^2)dx + (\sin x + y)dy = 0.$$

Розв'язок: Тут $P(x,y) = y\cos x - x^2$, $Q(x,y) = \sin x + y$. Знайдемо похідні: $\frac{\partial P}{\partial y} = \cos x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos x$, тобто рівняння є рівнянням в повних диференціалах. Функцію $u(x,y)$, повний диференціал якої стоїть у правій частині рівняння, знайдемо із системи:

$$P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} = y\cos x - x^2\,, \qquad Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + y\,.$$

Інтегруючи першу рівність за x , одержуємо

$$u(x,y) = y\sin x - \frac{x^3}{3} + \varphi(y),$$

де φ- довільна диференційована функція від y. Для її визначення про диференціюємо отриманий вираз за y і прирівняємо до $Q(x,y) = \sin x + y$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + \varphi^{'}(y) \;=>\; \sin x + \varphi^{'}(y) = \sin x + y \;=>$$

$$=> \varphi^{'}(y) = y \;=>\; \varphi(y) = \frac{y^2}{2} + C_1 \;=> u(x,y) = y\sin x - \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + C_1.$$

Тоді загальним інтегралом рівняння є $u(x,y) = C_2,\;\; C_2 \in \mathbf{R}$, тобто

$$y\sin x - \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = C, \qquad C = C_2 - C_{1,}\;\; C \in \mathbf{R}\,.$$

Відповідь: $y\sin x - \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} = C$ - загальний інтеграл ДР.

Приклад 4.2. Розв’язати рівняння

$$(2x + y^2)dx + (2xy + 1)dy = 0.$$

Розв’язок: Тут $P(x,y) = 2x + y^2$, $Q(x,y) = 2xy + 1$. Знайдемо похідні: $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$, тобто рівняння є рівнянням в повних диференціалах. Функцію $u(x,y)$, повний диференціал якої стоїть у правій частині рівняння, знайдемо із системи:

$$P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y^2, \qquad Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + 1\,.$$

Інтегруючи першу рівність за x , одержуємо

$$u(x,y) = x^2 + y^2x + \varphi(y),$$

де φ- довільна диференційована функція від y. Для її визначення про диференціюємо отриманий вираз за y і прирівняємо до $Q(x,y) = 2xy + 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + \varphi'(y) \;=>\; 2xy + \varphi'(y) = 2xy + 1 \;=>$$

$$=> \varphi'(y) = 1 \;=>\; \varphi(y) = y + C_1 \;=> u(x,y) = x^2 + xy^2 + y + C_1.$$

Тоді загальним інтегралом рівняння є $u(x,y) = C_2,\; C_2 \in \mathbf{R}$, тобто

$$x^2 + xy^2 + y = C, \qquad C = C_2 - C_1,\; C \in \mathbf{R}\,.$$

Відповідь: $x^2 + xy^2 + y = C$ - загальний інтеграл ДР.