МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ПРИКЛАДНИЙ АНАЛІЗ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ НА ТЕМУ
“Оцінки параметрів випадкової вибірки та визначення типу закону розподілу ймовірностей для неї по експериментальних даних”
студентами спеціальності 8.05050402 “Зварювальні установки”

ЗАТВЕРДЖЕНО ВЧЕНОЮ РАДОЮ ФІЗИКО -МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ НТУУ «КПІ»

Київ 2015

ПРИКЛАДНИЙ АНАЛІЗ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

Методичні вказівки до виконання курсової роботи на тему “Оцінки параметрів випадкової вибірки та визначення типу закону розподілу ймовірностей для неї по експериментальних даних”

Для спеціальності 8.05050402 “Зварювальні установки”

Укладач: Довгай В.В., 2015 р., 46 с.

Затверджено Вченою Радою Фізико - математичного факультету НТУУ “КПІ” (протокол № ___ від __________ 2015 р.)

ПРИКЛАДНИЙ АНАЛІЗ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

Методичні вказівки до виконання курсової роботи на тему “ Оцінки параметрів випадкової вибірки та визначення типу закону розподілу ймовірностей для неї по експериментальних даних ”

Для спеціальності 8.05050402 “Зварювальні установки”

Укладач: Довгай В.В.

Рецензент: Рижов Р.М., д. т. н., проф. каф. ЕЗУ

Відповідальний редактор: Швець О.Ю., д. ф.-м. н., проф. кафедри математичної фізики

ВСТУП

Методичні вказівки до виконання курсової роботи на тему "Оцінки параметрів випадкової вибірки та визначення типу закону розподілу ймовірностей для неї по експериментальних даних" укладені для студентів зварювального факультету з метою забезпечення виконання ними курсової роботи, що передбачена навчальною програмою дисципліни "Прикладний аналіз експериментальних даних" та розробленою на її основі робочою навчальною програмою відповідного кредитного модуля для підготовки магістрів спеціальності 8.05050402 "Зварювальні установки".

Метою курсової роботи є формування у студентів здатності до практичного застосування найпоширеніших методів обробки результатів серії експериментів, що застосовуються при проектуванні або експлуатації технічних систем в умовах суттєвого впливу випадкових факторів. Якість функціонування такої системи характеризується деякою фізичною величиною θ (скалярною або векторною), якою може бути, наприклад, енергоємність виробництва продукції даною системою, термін безвідмовної експлуатації самої системи або виробленої нею продукції, якість цієї продукції у вигляді певного набору числових характеристик і т. д. Вважається, що на систему крім детермінованих вхідних параметрів a, значення яких можуть змінюватись та фіксуватись вимірювальними приладами при налаштуванні системи, діють також випадкові фактори α (нестабільність параметрів системи, похибки їх вимірювання, неповна інформація про систему і т. д.). Вихідним параметром може бути як сама величина θ, так і деяка функція від неї $\xi(\theta)$, що зв'язана з θ, a, α у багатьох випадках досить складною функціональною залежністю $\xi(\theta) = f(\theta, a, \alpha)$. З цього випливає, що точне значення θ для дослідника системи недоступне, він може лише ставити задачу дістати деякі ймовірнісні оцінки θ, маючи доступ до $\xi(\theta)$.

Прикладом такої системи може бути, зокрема, зварювальне обладнання для виконання зварювального з'єднання двох деталей. Вхідними параметрами a при цьому можуть бути сила струму, швидкість руху електрода, випадковими факторами α – нестабільність джерела живлення, похибки вимірювальних приладів, а вихідним параметром – міцність зварювального з'єднання, при вимірюванні якої і одержують випадкову величину $\xi(\theta)$. Для оцінки якості такого зварювального обладнання досліднику його треба володіти методами оцінки θ по фіксованих значеннях випадкової величини $\xi(\theta)$.

Для розгляду загальної задачі побудови оцінок θ зручно, враховуючи наявність випадкових факторів, застосовувати відповідні математичні моделі теорії ймовірностей. Виходячи з цього, будемо вважати θ параметром розподілу випадкової величини $\xi(\theta)$, тоді, очевидно, функція розподілу ймовірностей $\xi(\theta)$ залежатиме від θ, тобто $F(x,\theta) = P\{\xi < x, \theta\}$. Якщо $\xi(\theta)$ – неперервна випадкова величина, то її густина $p(x,\theta) = F'(x,\theta)$ теж залежить від θ. Аналогічний вигляд матиме і закон розподілу ймовірностей $p_k(\theta) = P\{\xi(\theta) = x_k, \theta\}$, $k = 1, 2, \ldots$ для дискретної випадкової величини. В загальному випадку вважається, що як θ, так і закон розподілу $\xi(\theta)$ невідомі, інформацію про них одержують при функціонуванні системи, фіксуючи значення *x* випадкової величини $\xi(\theta)$. Процес одержання *x* будемо називати експериментом, а саме значення *x* – результатом експерименту. Очевидно, чим більше буде проведено експериментів, тим більше інформації одержимо про розподіл $\xi(\theta)$, а отже і про θ. Потрібно лише ці експерименти здійснювати в одних і тих же умовах незалежно один від одного, щоб спостерігати одну і ту ж випадкову величину $\xi(\theta)$. При проведенні серії з *n* експериментів за описаною схемою ми одержимо *n* експериментальних даних $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. В теорії ймовірностей, як відомо, задачі стосуються передбачення результатів експерименту при умові, що відомий закон розподілу $\xi(\theta)$. Тут же перед нами стоятиме задача до деякої міри обернена до задач теорії ймовірностей – за експериментальними даними висунути та перевірити гіпотезу відносно закону розподілу ймовірностей $\xi(\theta)$ і оцінити параметри θ цього розподілу.

Така загальна задача розгалужується на ряд частинних задач прикладного аналізу експериментальних даних, основні з яких і становитимуть зміст курсової роботи.

РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

1. Випадкова вибірка та визначення типу закону розподілу випадкової величини

Роботу деякої технічної системи від початку її функціонування до одержання значення x випадкової величини ξ будемо називати експериментом, одержане значення x – результатом експерименту, кілька таких значень – експериментальними даними. Розглянемо експериментальні дані $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, одержані як виміри при спостереженні невідомого параметра θ даної технічної системи. Ці виміри здійснюються в одних і тих же умовах незалежно один від одного. Зауважимо, що при проведенні іншої серії експериментів ми одержимо відмінні від попередніх значення експериментальних даних як n реалізацій випадкової величини ξ, що зв'язана з θ деякою функціональною залежністю.

Щоб описати всі можливі серії експериментів, використовують ймовірнісну математичну модель для експериментальних даних $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, згідно з якою $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, що мають той же закон розподілу $F(x, \theta) = P\{\xi < x\}$, що й випадкова величина ξ. Ця математична модель називається випадковою вибіркою і використовується для встановлення ймовірнісних характеристик різних функцій від експериментальних даних, які в одній серії експериментів будуть детермінованими числами.

Означення 1. Випадковою вибіркою називається випадковий вектор $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, всі компоненти якого є незалежними і однаково розподіленими випадковими величинами.

Згідно з цим означенням експериментальні дані є однією реалізацією випадкової вибірки. З поняттям випадкової вибірки тісно пов'язане поняття вибіркової функції розподілу.

Означення 2. Вибірковою функцією розподілу називається випадкова величина $\hat{F}_n(x)$, залежна від параметра $x \in R$, що визначається формулою $\hat{F}_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{n}$, де $\mu_n(x)$ – число тих компонент випадкової вибірки $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, що менші від x.

Згідно із законом великих чисел маємо для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{F}_n(x) - F(x)\right| < \varepsilon\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - M\xi_k\right| < \varepsilon\right\} = 1 .$$

Звідси робимо висновок, що при збільшенні n випадкова величина $\hat{F}_n(x)$, втрачаючи свою випадкову природу, наближається до невідомої функції розподілу F(x). Отже при великій кількості експериментальних даних одна реалізація вибіркової функції розподілу $\hat{F}_n(x)$, побудована по експериментальних даних $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, одержаних в одній серії експериментів, буде близькою до F(x).

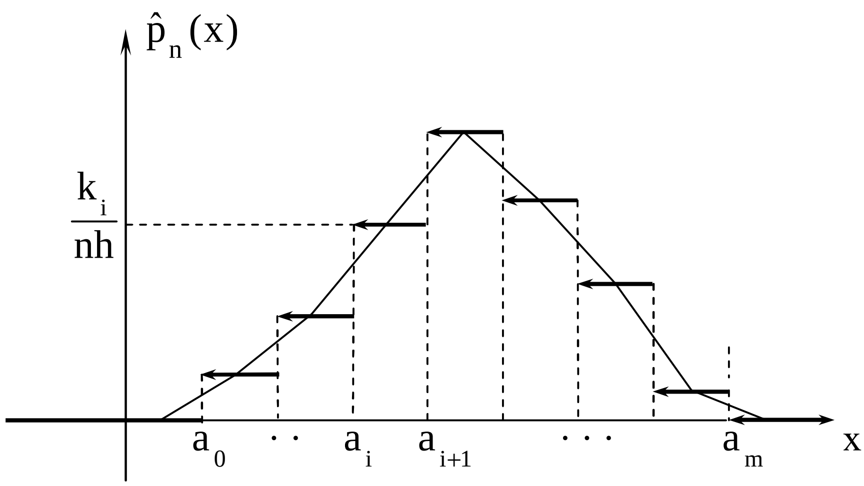
По вигляду реалізації $\hat{F}_n(x)$, який ми будуємо на основі експериментальних даних, важко розпізнати конкретний закон розподілу x_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ внаслідок того, що всі функції розподілу мають багато спільного – монотонно не спадають, неперервні зліва і т. д. Тому для цієї мети краще побудувати деяке наближення $\hat{p}_n(x)$ невідомої густини $p(x) = F'(x)$ випадкових величин x_k у випадку їх неперервності. Щоб побудувати графік $\hat{p}_n(x)$, проміжок $(a, b]$, що містить експериментальні дані $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, розбивають точками $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$ на частинні відрізки $(a_i, a_{i+1}], i = 0,1,\dots, m-1$ однакової довжини h, що визначається формулою $h = \dfrac{b-a}{m} = a_{i+1} - a_i$, причому m вибирають таким чином, щоб кожний з частинних відрізків містив не менше п'яти експериментальних даних. Позначимо через k_i число тих значень експериментальних даних x_s $(s = 1,2,\dots, n)$, що попали в проміжок $(a_i, a_{i+1}]$. Тоді згідно з законом великих чисел частота $\dfrac{k_i}{n} = \hat{F}_n(a_{i+1}) - \hat{F}_n(a_i)$ при великих n буде близькою до ймовірності

$$F(a_{i+1}) - F(a_i) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} p(x)dx = p_i h \ , \ \ p_i = p(\alpha_i), \ \ \alpha_i \in (a_i, a_{i+1}].$$

Тобто $p_i \approx \dfrac{k_i}{nh}$, і отже східчаста функція $\hat{p}_n(x)$ вигляду

$$\hat{p}_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le a_0 \\ \dfrac{k_i}{nh}, & x \in (a_i, a_{i+1}], \ \ i = 0,1,\dots, m-1 \\ 0, & x > a_m \end{cases}$$

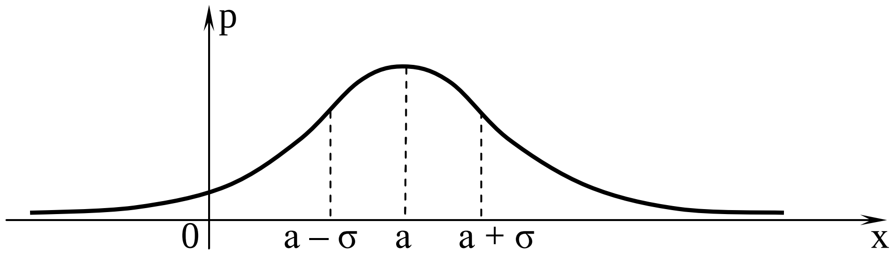
при великих n буде близькою до густини $p(x)$. Ця східчаста функція $\hat{p}_n(x)$ називається гістограмою експериментальних даних і має такий графік



Сполучаємо точки, що лежать посередині кожної сходинки гістограми, та згладжуємо одержимо ламану плавною кривою. Порівнюючи її з відомими законами розподілу, висуваємо гіпотезу про вид розподілу випадкової вибірки. Найчастіше для порівняння беруть такі розподіли

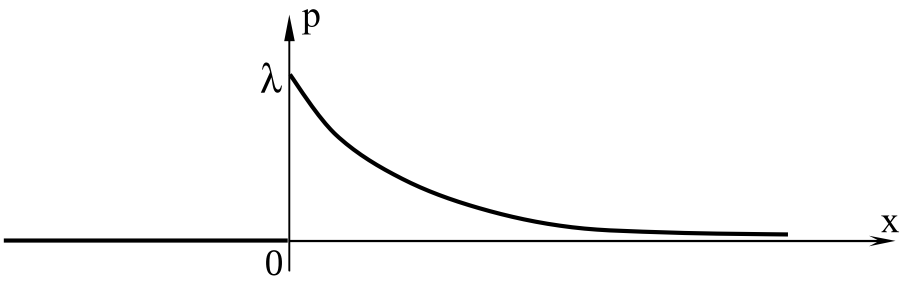
a) ***Нормальний (Гаусівський) розподіл з параметрами*** $N(a, \sigma^2)$

$$p(x, \alpha, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$



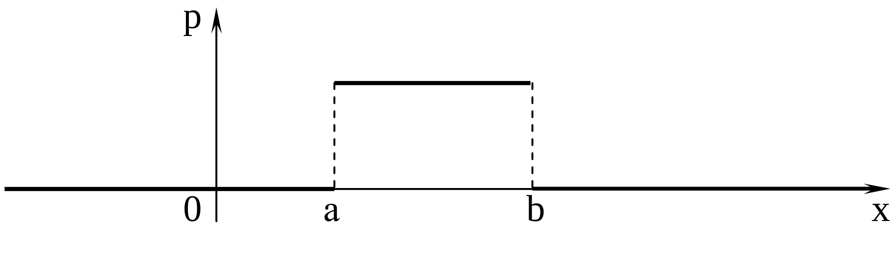
b) ***Показниковий розподіл з параметром*** $\lambda > 0$

$$p(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda \exp\{-\lambda x\}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$



c) ***Рівномірний розподіл на проміжку*** $[a, b]$

$$p(x, a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a; b] \\ 0, & x \in (-\infty; a) \cup (b; +\infty) \end{cases}$$



Висунена таким чином гіпотеза про вигляд закону розподілу випадкової вибірки підлягає наступній перевірці іншими статистичними методами, що розглядатимуться далі.

2. Точкові оцінки невідомих параметрів розподілу

Розглянемо випадкову вибірку $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, кожна компонента якої має функцію розподілу $F(x, \theta)$, де θ — невідомий параметр розподілу, що його слід оцінити по експериментальних даних як реалізації випадкової вибірки. Таким параметром найчастіше буває математичне сподівання та дисперсія відповідної випадкової величини.

Означення 1. Точковою оцінкою $\hat{\theta}$ деякого параметра θ розподілу випадкової величини x_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ називається деяка функція від елементів випадкової вибірки, тобто $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Серед усіх точкових оцінок $\hat{\theta}$ параметра θ, яких є безліч, практичну цінність мають лише ті, що задовольняють певним умовам близькості до θ. Перелічимо найважливіші з цих умов.

1. **Незміщеність.** Точкова оцінка $\hat{\theta}$ параметра θ називається незміщеною, якщо для неї виконується умова $M\hat{\theta} = \theta$.

2. **Спроможність.** Точкова оцінка $\hat{\theta}$ параметра θ називається спроможною, якщо виконується умова

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

   для будь-якого $\varepsilon > 0$. Виконання цієї умови означає, що при збільшенні об'єму n випадкової вибірки точкова оцінка все більше втрачає свою випадкову природу і отже її реалізація, обчислена по експериментальних даних, наближатиметься до невідомого значення θ.

3. **Ефективність.** Точкова оцінка $\hat{\theta}$ параметра θ називається ефективною, якщо вона серед множини всіх оцінок має найменшу дисперсію. При цьому для незміщеної оцінки θ виконується умова

$$D\hat{\theta} = -\frac{1}{nM\left(\dfrac{\partial^2 \ln p(x,\theta)}{\partial\theta^2}\right)}.$$

Тут $p(x,\theta)$ – гіпотетична густина розподілу випадкових величин x_k $(k = 1,2,\ldots,n)$. Якщо x_k – дискретні випадкові величини, то $p(x,\theta)$ замінюється ймовірністю $P\{x_k = x,\ \theta\}$.

Операція математичного сподівання M стосується змінної x як випадкової величини з даним законом розподілу. Слід мати на увазі, що не при всіх розподілах існують ефективні оцінки їх параметрів, тому в інженерній практиці часто задовольняються точковими оцінками, що мають лише перші дві властивості.

Розглянемо два найпоширеніші методи побудови точкових оцінок – метод моментів та метод максимальної правдоподібності.

Метод моментів

Суть цього методу, що базується на близькості $\hat{F}_n(x)$ до $F(x,\theta)$ при великих n, полягає в тому, що за точкові оцінки моментів

$$a_k = Mx_i^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)dx, \quad k = 1,2,\ldots$$

та центральних моментів

$$m_k = M(x_i - a)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^k p(x)dx, \ a = a_1, \quad k = 1,2,\ldots$$

k-того порядку неперервних випадкових величин x_i, які є компонентами випадкової вибірки $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, беруть числа

$$\hat{a}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, \quad \hat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{a})^k, \quad \hat{a} = \hat{a}_1 \quad k = 1, 2, \ldots$$

відповідно. Ці числа є моментами та центральними моментами k-того порядку дискретних випадкових величин із вибірковою функцією розподілу $\hat{F}_n(x)$ та називаються вибірковими моментами та центральними моментами k-того порядку. Аналогічно роблять і тоді, коли x_i мають дискретний розподіл. Подібно до того, що $a = a_1 = Mx_i$ та $\sigma^2 = m_2 = Dx_i$ – це математичне сподівання та дисперсія x_i, числа $\hat{a} = \hat{a}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$ та $\hat{\sigma}^2 = \hat{m}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{a})^2$ називають відповідно вибірковим математичним сподіванням та вибірковою дисперсією. Вони найчастіше зустрічаються у практичному застосуванні та мають наступні властивості:

1. $M\hat{a} = a$, отже вибіркове математичне сподівання є незміщеною точковою оцінкою параметра $a = Mx_i$.
2. Точкова оцінка $\hat{a}$ спроможна.
3. $D\hat{a} = \dfrac{\sigma^2}{n}$.
4. Точкова оцінка $\hat{a}$ асимптотично нормальна (тобто її закон розподілу близький до нормального при великих n) з параметрами $N\left(a, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.
5. $M\hat{\sigma}^2 = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2$. З цієї рівності випливає,що вибіркова дисперсія є зміщеною точковою оцінкою для $\sigma^2 = Dx_i$. Щоб усунути зміщення, яке може бути досить значним при малих значеннях n, слід обчислювати дану оцінку за формулою

$$\hat{\sigma}_{н}^{2} = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^{2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i} - \hat{a}\right)^{2}.$$

При великих n зміщення можна і не усувати.

6. Точкова оцінка $\hat{\sigma}^2$ спроможна.
7. $D\hat{\sigma}^2 = \dfrac{m_4 - \sigma^4}{n} - \dfrac{2\left(m_4 - 2\sigma^4\right)}{n^2} + \dfrac{m_4 - 3\sigma^4}{n^3}$.
8. Точкова оцінка $\hat{\sigma}^2$ асимптотично нормальна з параметрами $N\left(\sigma^2, \dfrac{m_4 - \sigma^4}{n}\right)$.

Щодо ефективності, то слід відзначити, що метод моментів дає, як правило, неефективні точкові оцінки, але в практично важливому частинному випадку нормальної випадкової вибірки можна встановити ефективність вибіркових математичного сподівання та дисперсії.

<u>Приклад 1.</u> Дослідити на ефективність точкові оцінки $\hat{a}$ та $\hat{\sigma}^2$ у випадку нормальної випадкової вибірки $(x_1, x_2, x_3, \mathbf{K}, x_n)$ з параметрами $N(a, \sigma^2)$.

В цьому випадку $p\left(x, a, \sigma^2\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Для вибіркового математичного сподівання маємо

$$\frac{\partial^2 \ln p}{\partial a^2} = \frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(-\frac{1}{2}\ln 2\pi - \ln\sigma - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{x-a}{\sigma^2}\right) = -\frac{1}{\sigma^2}.$$

Враховуючи, що $D\hat{a} = \dfrac{\sigma^2}{n}$, бачимо, що для $\hat{a}$ виконується умова ефективності $D\hat{a} = -\dfrac{1}{nM\dfrac{\partial^2 \ln p}{\partial a^2}}$.

Перевіряти ефективність вибіркової дисперсії будемо при умові, що параметр а відомий і отже $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$. Обчислюючи математичне сподівання вибіркових центральних моментів можна вважати, що $a = 0$, тому $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $M\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Mx_i^2 = \frac{1}{n} n\sigma^2 = \sigma^2$. Враховуючи це, одержуємо

$$M\hat{\sigma}^4 = \frac{1}{n^2} M\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 = \frac{1}{n^2} M\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i^2 x_j^2\right) = \frac{1}{n^2}\left(nm_4 + \left(n^2 - n\right)\sigma^4\right),$$

$$D\hat{\sigma}^2 = M\hat{\sigma}^4 - \left(M\hat{\sigma}^2\right)^2 = \frac{m_4}{n} + \sigma^4 - \frac{\sigma^4}{n} - \sigma^4 = \frac{m_4 - \sigma^4}{n} = \frac{2\sigma^4}{n},$$

тому, що для нормального розподілу $m_4 = 3\sigma^4$. З другого боку

$$\frac{\partial^2 \ln p}{\partial\left(\sigma^2\right)^2} = \frac{\partial^2}{\partial\left(\sigma^2\right)^2}\left(-\frac{\ln 2\pi}{2} - \frac{\ln\sigma^2}{2} - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left(-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(x-a)^2}{\left(\sigma^2\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{(x-a)^2}{\sigma^6}, \quad M\frac{\partial^2 \ln p}{\partial\left(\sigma^2\right)^2} = \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^4} = -\frac{1}{2\sigma^4}.$$

Отже, для $\hat{\sigma}^2$ виконується умова ефективності $D\hat{\sigma}^2 = -\dfrac{1}{nM\dfrac{\partial^2 \ln p}{\partial\left(\sigma^2\right)^2}}$.

Метод максимальної правдоподібності

Нехай елементи випадкової вибірки $(x_1, x_2, x_3, \mathbf{K}, x_n)$ мають закон розподілу, що визначається густиною $p(x,\theta)$, де θ – параметр розподілу, для якого треба побудувати оцінку $\hat{\theta}$. Враховуючи незалежність елементів випадкової вибірки, утворимо їх спільну густину

$$L = p(x_1,\theta)\cdot p(x_2,\theta)\cdot \mathbf{K} \cdot p(x_n,\theta),$$

що називається **функцією правдоподібності**. Згідно з методом максимальної правдоподібності точковою оцінкою $\hat{\theta}$ параметра θ буде така функція від випадкової вибірки, яка максимізує функцію правдоподібності L, або, що те саме, $\ln L$. Звідси випливає, що $\hat{\theta}$ буде розв'язком рівняння $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$, яке є необхідною умовою існування екстремуму функції $\ln L$ та називається **рівнянням правдоподібності**.

<u>Приклад 2.</u> Знайти за допомогою методу максимальної правдоподібності точкову оцінку $\hat{p}$ для невідомої ймовірності p випадкової події A.

Елементами випадкової вибірки $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ в цьому випадку зручно вважати дискретні випадкові величини виду

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо в i-тому експерименті випадкова подія A відбулась,} \\ 0, & \text{якщо в i-тому експерименті випадкова подія A не відбулась.} \end{cases}$$

Реалізацією такої випадкової вибірки будуть експериментальні дані у виді послідовності, складеної з двох символів – 1 та 0. Випадкові величини x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ мають наступний закон розподілу

$$P\{x_i = 1\} = P\{A\} = p, \quad P\{x_i = 0\} = P\{\overline{A}\} = 1 - p = q.$$

Його можна записати з допомогою одного співвідношення

$$P(x, p) = P\{x_i = x\} = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1,$$

отже функція правдоподібності має вигляд $L = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}$.

При цьому $\ln L = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \ln(1-p)$.

Складаємо рівняння правдоподібності $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} = 0$, розв'язуючи яке знаходимо точкову оцінку $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{m}{n}$.

3. Довірчі інтервали для невідомих параметрів розподілу

Розглянемо випадкову вибірку $(x_1, x_2, x_3, \mathbf{K}, x_n)$, що відповідає функції розподілу $F(x,\theta) = P\{x_k < x\}$, де θ – невідомий параметр розподілу. Побудуємо дві функції від елементів випадкової вибірки

$$\theta_1 = \theta_1(x_1, x_2, ..., x_n),\ \theta_2 = \theta_2(x_1, x_2, ..., x_n),$$

що задовольняють умові $\theta_1 < \theta_2$.

Означення 1. Інтервал (θ_1, θ_2) називається довірчим інтервалом для невідомого параметра θ з довірчою ймовірністю $1-2\alpha$ якщо виконується умова $P\{\theta \in (\theta_1, \theta_2)\} = 1-2\alpha,\quad \alpha < \frac{1}{2}$.

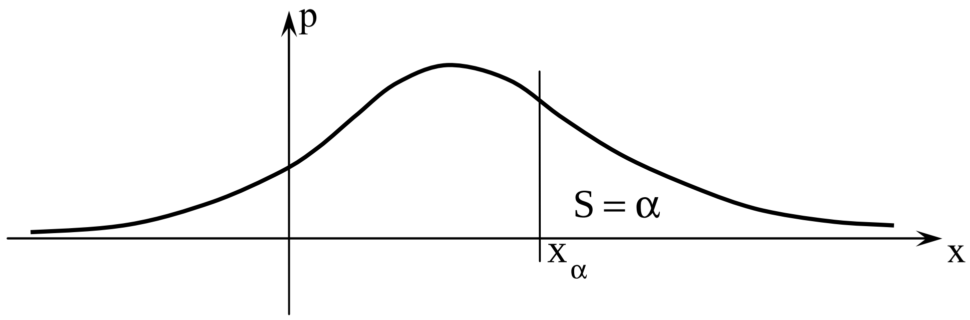
На практиці це означає, що коли по результатах експериментальних даних $x_1, x_2, x_3, \mathbf{K}, x_n$ як реалізації випадкової вибірки побудувати відповідну реалізацію $(\theta_1(x_1, x_2, ..., x_n),\ \theta_2(x_1, x_2, ..., x_n))$ довірчого інтервалу, то у $(1-2\alpha)\cdot 100\%$ випадків цей інтервал міститиме невідомий параметр θ. Для практичного застосування важливо, щоб довжина інтервалу (θ_1, θ_2) була якомога меншою. Цього можна досягти за рахунок зменшення довірчої ймовірності $1-2\alpha$, або збільшення об'єму n випадкової вибірки. Часто ставиться задача знайти таке значення n, щоб досягти заданої точності оцінки параметра θ при фіксованій ймовірності $1-2\alpha$.

Відзначимо, що θ_1 та θ_2 вибирають, як правило, на основі співвідношень $P\{\theta \geq \theta_2\} = \alpha$, $P\{\theta \leq \theta_1\} = \alpha$, де значення α вибирають з умови, що випадкова подія, ймовірність якої рівна 2α, практично не відбувається. В інженерній практиці найчастіше беруть $2\alpha = 0{,}05$, але використовують також значення $2\alpha = 0{,}1$; $2\alpha = 0{,}025$ та $2\alpha = 0{,}01$. Інколи з практичних міркувань використовують інтервали $(-\infty; \theta_2)$ та $(\theta_1; +\infty)$, які називають, відповідно, правостороннім та лівостороннім довірчим інтервалом для θ з довірчою ймовірністю $1-\alpha$.

При побудові довірчих інтервалів (а також в ряді інших задач) корисним є поняття квантиля закону розподілу випадкової величини, яке можна ввести за допомогою такого означення.

Означення 2. Квантилем закону розподілу випадкової величини з густиною $p(x)$ на рівні ймовірності α називається число x_α, що є розв'язком рівняння $\int\limits_{x_\alpha}^{+\infty} p(x)dx = \alpha$.

З даного означення випливає, що площа S під графіком густини $p(x)$ при $x \geq x_\alpha$ є рівною α.



Побудова довірчих інтервалів при великому об'ємі випадкової вибірки

Коли об'єм n випадкової вибірки є досить великим (порядку 100 і більше), задача побудови довірчих інтервалів для невідомих параметрів розподілу значно спрощується, тому що є можливість застосувати центральну граничну теорему. Розглянемо наступні випадки

a) Довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання при невідомій дисперсії.

Нехай маємо випадкову вибірку $(x_1, x_2, x_3, \mathbf{K}, x_n)$, кожна компонента якої має закон розподілу $F(x, a, \sigma^2) = P\{x_k < x\}$, де $a = Mx_k$, $\sigma^2 = Dx_k$ $(k = 1,2,..., n)$. Будемо вважати як сам закон розподілу $F(x, a, \sigma^2)$, так і його параметри a та σ^2 невідомими. Обчислимо методом моментів точкові оцінки $\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{a})^2$ невідомих параметрів a, σ^2 відповідно (зміщення для σ^2 можна не враховувати). При великих значеннях n при будь-якому законі розподілу $F(x, a, \sigma^2)$ випадкова величина $\hat{a}$ розподілена асимптотично нормально з параметрами $N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, тому, враховуючи спроможність точкової оцінки $\hat{\sigma}^2$, маємо $P\left\{\hat{a} - u_\alpha \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} < a < \hat{a} + u_\alpha \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right\} \approx 1 - 2\alpha$, де u_α – квантиль нормального розподілу з параметрами $N(0,1)$ на рівні ймовірності α. Звідси випливає, що при великих n інтервал $\left(\hat{a} - u_\alpha \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}; \hat{a} + u_\alpha \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)$ є довірчим для невідомого параметра а з довірчою ймовірністю $1 - 2\alpha$.

b) Довірчий інтервал для невідомої дисперсії.

Як і в попередньому випадку, маємо випадкову вибірку $(x_1, x_2, x_3, \mathbf{K}, x_n)$, де кожна компонента має функцію розподілу $F(x, a, \sigma^2) = P\{x_k < x\}$, що вважається невідомою, параметри $a = Mx_k$,

$\sigma^2 = Dx_k \ (k = 1,2,...,n)$.– також невідомі. Враховуючи асимптотичну нормальність з параметрами $N\left(\sigma^2, \frac{m_4 - \sigma^4}{n}\right)$ вибіркової дисперсії $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{a})^2$, де $\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, та спроможність точкових оцінок $\hat{\sigma}^2$, $\hat{m}^4 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \hat{a})^4$ параметрів σ^2, $m_4 = M(x_k - a)^4$ відповідно, маємо $P\left\{\hat{\sigma}^2 - u_\alpha\sqrt{\frac{\hat{m}^4 - \hat{\sigma}^4}{n}} < \sigma^2 < \hat{\sigma}^2 + u_\alpha\sqrt{\frac{\hat{m}^4 - \hat{\sigma}^4}{n}}\right\} \approx 1 - 2\alpha$. Це означає, що інтервал $\left(\hat{\sigma}^2 - u_\alpha\sqrt{\frac{\hat{m}^4 - \hat{\sigma}^4}{n}}; \hat{\sigma}^2 + u_\alpha\sqrt{\frac{\hat{m}^4 - \hat{\sigma}^4}{n}}\right)$ можна вважати довірчим для невідомого параметра σ^2 з довірчою ймовірністю $1 - 2\alpha$ при великих значеннях n. Зауважимо, що для нормальної випадкової вибірки вигляд цього довірчого інтервалу спрощується внаслідок того, що $m_4 = 3\sigma^4$, $\sqrt{\frac{m_4 - \sigma^4}{n}} = \sigma^2\sqrt{\frac{2}{n}} \approx \hat{\sigma}^2\sqrt{\frac{2}{n}}$ (при великих n). Враховуючи це, для σ^2 можна в даному випадку брати довірчий інтервал вигляду $\left(\hat{\sigma}^2 - u_\alpha\hat{\sigma}^2\sqrt{\frac{2}{n}}; \hat{\sigma}^2 + u_\alpha\hat{\sigma}^2\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$ при тій же довірчій ймовірності $1 - 2\alpha$.

c) Довірчий інтервал для невідомої ймовірності випадкової події.

Спочатку побудуємо методом моментів точкову оцінку $\hat{p}$ для невідомої ймовірності p випадкової події A. Як і раніше, розглянувши випадкову вибірку $(x_1, x_2, x_3, \mathbf{K}, x_n)$, утворену за допомогою дискретних випадкових величин x_i вигляду

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо в i-тому експерименті випадкова подія A відбулась,} \\ 0, & \text{якщо в i-тому експерименті випадкова подія A не відбулась,} \end{cases}$$

матимемо $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{m}{n}$, де m – число тих експериментів, в яких випадкова подія A відбулась. Ця оцінка невідомого параметра $p = Mx_i$ буде асимптотично нормальною з параметрами $N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$, отже на основі центральної граничної теореми можна встановити, що $P\left\{\sqrt{\frac{n}{pq}}|\hat{p} - p| < x_\alpha\right\} \approx 1 - 2\alpha$, де u_α – квантиль нормального розподілу з параметрами $N(0,1)$ розподілу на рівні ймовірності α. Звідси випливає, що якщо обчислити $p_{1,2} = \frac{n\hat{p} + \frac{1}{2}x_\alpha^2 \mp x_\alpha\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p}) + \frac{1}{4}x_\alpha^2}}{n + x_\alpha^2}$ як розв'язки квадратного рівняння $n(\hat{p} - p)^2 = x_\alpha^2 p(1-p)$, то при великих значеннях n інтервал (p_1, p_2) можна вважати довірчим для невідомої ймовірності $p = P(A)$ з довірчою ймовірністю $1 - 2\alpha$.

Побудова довірчих інтервалів при малому об'ємі випадкової вибірки

Складність знаходження довірчих інтервалів у цьому випадку на відміну від попереднього полягає у тому, що при малих значеннях n (порядку 10) не можна застосувати центральну граничну теорему і отже спочатку доведеться встановити, який закон розподілу мають точечні оцінки $\hat{a}$ та $\hat{\sigma}^2$ або хоча б деякі функції від них. З цією метою обмежимось випадком, коли компоненти випадкової вибірки $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ нормально розподілені з параметрами $N(a, \sigma^2)$ та введемо в розгляд наступні розподіли випадкових величин

1. χ^2 *розподіл з* n *степенями волі.*

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – незалежні та нормальні з параметрами $N(0,1)$ випадкові величини. Тоді випадкова величина $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$ має χ^2 розподіл з n степенями волі. Її густина $p_n(x)$ визначається формулою

$$p_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

, де $\Gamma(t)$ – гама-функція, яка має вигляд невласного інтегралу першого роду $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$, що збігається при $t > 0$. Слід відзначити, що $M\chi_n^2 = n$, $D\chi_n^2 = 2n$. При цьому χ^2 розподіл асимптотично нормальний з параметрами $N(n, 2n)$.

2. *Розподіл Стьюдента з* n *степенями волі.*

Нехай випадкові величини $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ – незалежні та нормально розподілені з параметрами $N(0,1)$. Тоді випадкова величина вигляду

$$\tau_n = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}} = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi_n^2}}$$

має розподіл, що називається розподілом Стьюдента з n степенями волі. Якщо позначити через $S_n(x)$ густину цього розподілу, то

$$S_n(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\cdot\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

При цьому $M\tau_n = 0$, $D\tau_n = \dfrac{n}{n-2}$ $(n > 2)$. Розподіл Стьюдента асимптотично нормальний з параметрами $N(0,1)$.

Мають місце наступні теореми.

Теорема 1. Якщо випадкова вибірка $(x_1, x_2, x_3, \mathbf{K}, x_n)$ є нормальною з параметрами $N\left(a, \sigma^2\right)$, то тоді точкові оцінки

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{a}\right)^2$$

невідомих параметрів розподілу $a = Mx_k$, $\sigma^2 = Dx_k$ $(k = 1,2,..., n)$ будуть незалежними, причому $\hat{a}$ – нормально розподілена з параметрами $N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, а випадкова величина $\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ має розподіл χ^2 квадрат з n–1 степенями волі.

Теорема 2. Якщо випадкова вибірка $\left(x_1, x_2, x_3, \mathbf{K}, x_n\right)$ є нормальною з параметрами $N(a, \sigma)$, то тоді випадкова величина $\tau_{n-1} = \frac{\hat{a} - a}{\hat{\sigma}}\sqrt{n}$, де

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \hat{a}\right)^2,$$

має розподіл Стьюдента з n–1 степенями волі.

Ці дві теореми і лежать в основі методу побудови довірчих інтервалів для невідомих параметрів розподілу у випадку невеликого об’єму n (порядку 10) нормальної з параметрами $N\left(a, \sigma^2\right)$ випадкової вибірки $(x_1, x_2, x_3, \mathbf{K}, x_n)$. При вказаних умовах розглянемо наступні випадки.

a) ***Довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання при невідомій дисперсії.***

В цьому випадку на основі теореми 2 матимемо $P\left\{\frac{|\hat{a} - a|}{\hat{\sigma}}\sqrt{n} < t_{\alpha, n-1}\right\} = 1 - 2\alpha$, де $t_{\alpha, n-1}$ – квантиль розподілу Стьюдента з $n-1$ степенями волі на рівні ймовірності α. Звідси випливає, що інтервал $\left(\hat{a} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{\alpha,n-1}; \hat{a} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{\alpha,n-1}\right)$ буде довірчим для невідомого математичного сподівання $a = Mx_k$ з довірчою ймовірністю $1-2\alpha$ при невідомій дисперсії $\sigma^2 = Dx_k\ (k = 1,2,...,n)$ та невеликій кількості експериментальних даних.

b) Довірчий інтервал для невідомої дисперсії.

Застосовуючи теорему 1, маємо $P\left\{h_{1-\alpha,n-1} < \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < h_{\alpha,n-1}\right\} = 1-2\alpha,$

де $h_{1-\alpha,n-1}$. $h_{\alpha,n-1}$ – квантилі розподілу χ^2 квадрат з $n-1$ степенями волі на рівнях ймовірності $1-\alpha$ та α відповідно. Остання рівність означає, що інтервал вигляду $(\gamma_1\tilde{\sigma}; \gamma_2\tilde{\sigma})$, де $\gamma_1 = \sqrt{\frac{n-1}{h_{\alpha,n-1}}}$, $\gamma_2 = \sqrt{\frac{n-1}{h_{1-\alpha,n-1}}}$,

$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \tilde{a})^2}$, $\tilde{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$, є довірчим інтервалом для невідомого середньоквадратичного відхилення $\sigma = \sqrt{Dx_k}\ (k = 1,2,...,n)$ з довірчою ймовірністю $1-2\alpha$.

При побудові всіх розглянутих довірчих інтервалів квантилі відповідних законів розподілу слід знаходити з допомогою таблиць. Параметр α бажано брати якомога меншим, але при фіксованому об’ємі n випадкової вибірки це приводить до збільшення довжини довірчого інтервалу а отже і до зменшення точності визначення з його допомогою невідомого параметра. Для досягнення необхідного компромісу в інженерній практиці найчастіше беруть α рівним 0,05.

c) Довірчий інтервал для невідомої ймовірності випадкової події.

Як і у випадку великого об’єму n випадкової вибірки будуємо точкову оцінку $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{k}{n}$ невідомої ймовірності $p=P(A)$ випадкової події A. В даному випадку, коли число експериментальних даних є малим (порядку 10), при побудові довірчого інтервалу виду (p_1,p_2), що містить невідоме значення p із довірчою ймовірністю $1-2\alpha$ центральну граничну теорему застосовувати не можна і отже для цієї мети слід виходити з точного закону розподілу дискретної випадкової величини $m=\sum_{i=1}^{n}x_i$. Випадкова величина m має біноміальний закон розподілу ймовірностей $P\{m=i\}=P_n(i)=C_n^i p^i(1-p)^{n-i},\ i=0,1,\ldots,n$. Утворимо суму вигляду $S_m(p)=\sum_{i=0}^{m}P_n(i),\ m=0,1,\ldots,n-1$, що є аналогом функції розподілу ймовірностей для неперервної випадкової величини. Візьмемо числа p_1, p_2 як розв'язки алгебраїчних рівнянь m-того степеня відносно p

$$1-S_{m-1}(p)=\alpha,\ S_m(p)=\alpha,\ m=1,\ldots,n-1$$

і вважаючи при цьому, що m є реалізацією відповідної випадкової величини, обчисленою по експериментальних даних $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ як реалізації випадкової вибірки $(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$. Тоді інтервал (p_1,p_2) буде довірчим інтервалом для невідомої ймовірності $p=P(A)$ випадкової події A із довірчою ймовірністю $1-2\alpha$, а точніше, із ймовірністю, не меншою $1-2\alpha$, інтервал (p_1,p_2) містить невідоме значення p.

4. Статистична перевірка гіпотез

Розглянемо експериментальні дані $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ як реалізацію випадкової вибірки $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ з невідомим законом розподілу ймовірностей неперервних випадкових величин $F(x, \theta) = P\{x_k < x, \theta\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ та невідомими параметрами θ цього розподілу. Побудувавши по цих експериментальних даних згідно з методикою параграфу ***1*** гістограму $\hat{p}_n(x, \theta)$ як оцінку густини $p(x, \theta) = F'(x, \theta)$ та висунувши на цій основі гіпотезу H_0 відносно вигляду закону розподілу випадкової вибірки, розглянемо задачу встановлення такого критерію, за допомогою якого можна або підтвердити H_0, або відхилити її на користь альтернативної гіпотези H_a. Як правило, H_a полягає в тому, що основна гіпотеза H_0 невірна. При такій постановці задачі гіпотеза H_0 називається непараметричною, на відміну від випадку параметричної гіпотези, коли H_0 стосується лише значень невідомого параметра θ.

В основі критерію для статистичної перевірки H_0 лежить деяка функція $\kappa = \kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від елементів випадкової вибірки, для якої при умові вірності H_0 відомий точний, або хочаб асимптотичний, закон розподілу ймовірностей у виляді густини $p(k \mid H_0)$. Якщо така функція побудована, то фіксують рівень ймовірності α з міркувань, що випадкова подія, яка має ймовірність 2α, практично не відбувається (або, що те саме, випадкова подія з ймовірністю $1 - 2\alpha$ практично завжди відбувається). Найчастіше в інженерній практиці беруть $2\alpha = 0{,}05$. Після цього обчислюють квантилі $k_{1-\alpha}$ та k_α на рівнях ймовірностей $1 - \alpha$ та α відповідно, для яких $\int\limits_{k_{1-\alpha}}^{+\infty} p(k \mid H_0)dk = 1 - \alpha$, $\int\limits_{k_\alpha}^{+\infty} p(k \mid H_0)dk = \alpha$, і отже $P\{k_{1-\alpha} < \kappa < k_\alpha\} = 1 - 2\alpha$. Звідси випливає висновок, що коли реалізація

$\kappa(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n)$, тобто значення $\kappa(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n)$, обчислене по експериментальних даних $x_1, x_2, x_3, \mathbf{K}, x_n$, попадає в проміжок $(k_{1-\alpha}, k_\alpha)$, то це означає, що в результаті проведених експериментів відбулась випадкова подія, яка і повинна була відбутись. Навпаки, коли це значення буде за межами проміжку $(k_{1-\alpha}, k_\alpha)$, то відбулась випадкова подія, яка при вірності гіпотези H_0 не повинна відбутись.

Враховуючи це, формулюється наступний двосторонній критерій статистичної перевірки гіпотези H_0 (критерій узгодженості):

1) Якщо значення κ, обчислене по експериментальних даних $x_1, x_2, x_3, \mathbf{K}, x_n$, попадає в проміжок $(k_{1-\alpha}, k_\alpha)$, то говорять, що підстав для відхилення основної гіпотези H_0 існує.
2) У випадку, коли $\kappa \le k_{1-\alpha}$ або $\kappa \ge k_\alpha$, гіпотезу H_0 відхиляють на користь альтернативної гіпотези H_a, допускаючи при цьому похибку першого роду із ймовірністю 2α.

Зауважимо, що у першому випадку не можна твердити про вірність H_0, так як не відома ймовірність 2β похибки другого роду – прийняти невірну гіпотезу H_0 в той час, коли вірною є H_a. Згадана ймовірність обчислюється за формулою $2\beta = \int_{k_{1-\alpha}}^{k_\alpha} p(k \mid H_a) dk$. Тут $p(k \mid H_a)$ – густина випадкової величини κ при умові вірності гіпотези H_a, знаходження її для більшості практичних задач пов’язане із значними труднощами внаслідок складності структури H_a.

Досить часто з практичних міркувань виникає необхідність у застосуванні односторонніх критеріях узгодженості для статистичної перевірки гіпотез. Тоді, наприклад для правостороннього критерію узгодженості, обчислюють лише один квантиль – k_α, та роблять один із таких двох висновків:

1) Якщо значення κ, обчислене по експериментальних даних $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, задовольняє умові $\kappa < k_\alpha$, то говорять, що підстав для відхилення основної гіпотези H_0 існує.
2) У випадку, коли $\kappa \geq k_\alpha$, гіпотезу H_0 відхиляють на користь альтернативної гіпотези H_a, допускаючи при цьому похибку першого роду із ймовірністю α.

Розгляекмо один з найпопулярніших критеріїв узгодженості для статистичної перевірки непараметричної гіпотези про вигляд невідомого закону розподілу по одержаних експериментальних даних – критерій Пірсона (критерій χ^2). Процес його застосування здійснюється наступним чином:

a) Згідно з методикою параграфу ***1*** проміжок $(a, b]$, що містить експериментальні дані $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, розбивається точками $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$ на частинні відрізки $(a_i, a_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$ однакової довжини $h = \dfrac{b-a}{m} = a_{i+1} - a_i$. Обчислюються числа k_i тих значень експериментальних даних x_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$, що попали в проміжок $(a_i, a_{i+1}]$ та будується гістограма $\tilde{p}_n(x, \theta)$.
b) Порівнюючи $\tilde{p}_n(x, \theta)$ з відомими законами розподілу, висувається основна гіпотеза $H_0 = \{p(x, \theta) = \tilde{p}_n(x, \theta)\}$ про вигляд розподілу випадкової вибірки. Тут випадкова подія $\{p(x, \theta) = \tilde{p}_n(x, \theta)\}$

означає, що невідомий закон розподілу ймовірностей $p(x,\theta)$ є тим з усіх взятих для порівняння, графік якого найбільш подібний до гістограми $\hat{p}_n(x,\theta)$. При цьому альтернативна гіпотеза H_a може мати вигляд $H_a = \{p(x,\theta) \neq \hat{p}_n(x,\theta)\}$, тобто H_a полягає в тому, що гіпотеза H_0 невірна.

c) Якщо параметри розподілу θ невідомі, то обчислюються їх точкові оцінки $\hat{\theta}$, після чого знаходяться ймовірності $p_i = \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} p(x,\hat{\theta})dx$ $(i = 0,1,\ldots,m-1)$ та утворюється функція $\kappa = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \frac{(k_i - np_i)^2}{np_i}$. Ця функція при вірності гіпотези H_0 та $n \to \infty$ наближається до випадкової величини, що має χ^2 розподіл із $m - r - 1$ степінню волі, де r – кількість невідомих параметрів розподілу θ, що замінялись їх точковими оцінками $\hat{\theta}$ при знаходженні ймовірностей p_i. Тобто при великих n (порядку 100 і більше) можна вважати, що $\sum\limits_{i=0}^{m-1} \frac{(k_i - np_i)^2}{np_i} = \chi^2_{m-r-1}$.

d) Чим меншою буде реалізація $\kappa = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \frac{(k_i - np_i)^2}{np_i}$, обчислена по експериментальних даних, тим більше підстав вважати розподіл ймовірностей випадкової величини κ рівним роподілу χ^2_{m-r-1}, тому для перевірки гіпотези H_0 слід застосовувати правосторонній критерій узгодженості. Для цього фіксується рівень ймовірностей α з міркувань, що випадкова подія, ймовірність якої рівна α, практично не відбувається та обчислюється квантиль $h_{\alpha,m-r-1}$

розподілу χ^2 із $m-r-1$ степенями волі на рівні ймовірності α. Критерій для статистичної перевірки гіпотези H_0 формулюється наступним чином:

1) Якщо значення $\kappa = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \frac{(k_i - np_i)^2}{np_i}$, обчислене по експериментальних даних $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, задовольняє умові $\kappa < h_{\alpha, m-r-1}$, то говорять, що підстав для відхилення основної гіпотези H_0 існує.
2) У випадку, коли $\kappa \geq h_{\alpha, m-r-1}$, гіпотезу H_0 відхиляють на користь альтернативної гіпотези H_a, допускаючи при цьому похибку першого роду із ймовірністю α.

<u>**Приклад.**</u> Обчислити ймовірності p_i у виразі $\kappa = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \frac{(k_i - np_i)^2}{np_i}$ при здійсненому розбитті $(a, b]$, що містить експериментальні дані $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, точками $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$ на частинні відрізки $(a_i, a_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$ однакової довжини $h = \frac{b-a}{m} = a_{i+1} - a_i$ для статистичної перевірки основної гіпотези $H_0 = \{p(x, \theta) = N(\hat{a}, \hat{\sigma}^2)\}$, тобто що невідомий закон розподілу ймовірностей $p(x, \theta)$ з невідомими параметрами θ є нормальним з параметрами $a = Mx_k$, $\sigma^2 = Dx_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$, для яких знайдені точкові оцінки $\hat{a}$, $\hat{\sigma}^2$.

Густина $p(x, \alpha, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$ нормального закону розподілу з параметрами $N(a, \sigma^2)$ визначена на проміжку $(-\infty, +\infty)$, тому для того, щоб виконувалась умова $\sum\limits_{i=0}^{m-1} p_i = 1$ слід при обчисленні p_0 та p_{m-1} замість крайніх проміжків $(a_0, a_1]$ та $(a_{m-1}, a_m]$ взяти проміжки $(-\infty,\ a_1)$ та $(a_{m-1},\ +\infty)$ відповідно. Враховуючи це, маємо

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{a_1} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dx = \left|\begin{matrix}\frac{x-\bar{x}}{\sigma} = t\\ dx = \sigma dt\end{matrix}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{u_1} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2} + \Phi(u_1).$$

Аналогічно

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dx = \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i) \ \ (i = 1, 2, \ldots, m-2),$$

$$p_{m-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{a_{m-1}}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{u_{m-1}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2} - \Phi(u_{m-1}),$$

де $u_i = \frac{a_i - \bar{x}}{\sigma}$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – непарна функція, яка називається функцією Лапласа, значення її містяться в таблицях, що містяться у літературі з теорії ймовірностей та математичної статистики (у тому числі і в даних методичних вказівках).

РОЗДІЛ ІІ. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ КУРСОВОЇ РОБОТИ ТА ПОРЯДОК ЇХ ВИКОНАННЯ

1. Варіанти індивідуальних завдань

Кожному студенту у відповідністю з його номером у списку групи керівником курсової роботи видається один із наступних варіантів експериментальних даних

Варіант 1

.873	3.438	3.157	2.416	3.755	5.244	1.998	1.861	2.264	2.448
1.924	3.411	2.812	2.866	2.364	4.206	4.318	3.668	2.072	1.990
2.191	2.242	3.842	4.113	1.855	3.563	2.995	4.769	3.580	3.582
4.507	1.641	1.850	4.765	3.624	3.087	5.303	3.557	4.122	1.122
3.938	4.157	3.837	1.436	4.773	3.925	2.643	2.068	2.578	4.683
2.768	4.384	.817	1.362	2.196	3.006	2.782	2.472	3.183	2.438
2.765	2.209	3.705	4.806	5.805	1.857	1.777	3.089	4.176	3.101
2.779	5.467	3.518	2.318	1.787	3.785	1.505	1.721	1.792	.942
2.470	3.265	2.954	2.695	5.597	2.460	3.961	4.385	2.323	3.643
2.829	2.767	3.437	2.811	1.870	3.268	2.078	2.486	4.669	2.125
2.947	1.905	3.159	2.873	2.685	3.128	2.582	3.739	3.657	4.364
2.428	3.861	2.538	4.066	3.455	2.864	2.203	3.346	2.887	3.041
1.990	2.165	2.633	2.286	3.095	1.089	3.862	2.771	2.097	3.422
3.155	2.733	3.901	1.940	1.779	3.820	2.722	4.652	3.752	4.370
1.468	4.566	3.431	4.839	4.553	4.111	2.396	1.149	3.463	3.593
4.072	3.546	3.406	3.946	3.322	3.448	1.395	3.369	3.223	3.773
3.111	2.646	2.215	1.549	4.434	2.242	3.897	2.833	2.399	3.253
3.519	1.871	1.052	3.962	1.384	4.280	3.480	3.807	3.121	1.009
2.832	2.218	3.926	4.263	2.475	3.792	3.062	3.328	2.235	4.779
2.342	1.884	3.846	3.125	2.125	1.776	3.968	1.295	2.946	3.751

Варіант 2

3.633	3.899	3.224	2.987	3.914	2.808	2.640	1.462	2.183	4.285
4.304	3.051	3.512	4.213	2.400	3.474	3.761	2.763	3.068	1.410
2.226	3.826	3.702	4.546	3.451	3.215	4.223	3.293	3.691	2.778
4.649	2.742	4.222	2.901	2.414	3.139	1.662	4.444	4.741	4.035
3.956	1.297	2.909	4.613	4.941	1.706	3.652	4.744	2.281	3.008
3.061	4.073	4.023	2.973	3.121	3.158	2.326	1.746	2.768	4.860
2.607	3.435	4.290	2.607	3.345	3.776	2.691	2.660	2.403	2.817
4.969	3.217	5.675	3.770	2.944	3.608	4.097	3.911	4.762	3.533
3.071	2.632	4.334	3.917	2.074	3.823	3.112	2.098	2.777	3.835
4.579	3.491	3.977	3.285	5.896	2.036	2.282	4.413	4.731	4.097
1.585	2.486	2.157	3.420	3.613	4.168	2.293	2.864	5.021	3.038
4.896	4.193	4.415	1.641	1.627	4.172	2.771	2.900	3.121	3.189
3.161	3.119	5.041	2.108	2.315	4.053	2.908	2.890	2.966	2.028
3.423	4.529	4.060	2.670	2.406	3.119	4.712	3.713	1.553	4.933
3.724	3.926	3.269	1.731	2.241	5.267	2.908	4.701	2.729	4.726
2.455	3.992	1.934	3.099	4.162	3.627	3.492	1.597	3.290	2.697
3.603	3.476	2.745	3.433	2.829	1.943	4.576	3.355	3.606	2.900
2.959	3.353	4.068	3.115	2.473	4.127	4.008	2.555	4.517	5.478
2.023	2.430	3.507	3.278	4.377	4.223	3.662	4.471	4.634	5.927
2.662	2.936	3.179	2.872	3.326	3.516	3.903	3.135	1.918	2.480

Варіант 3

2.379	5.845	3.244	4.576	3.606	2.249	5.374	3.432	2.964	4.826
2.012	5.461	4.811	4.434	3.217	5.675	3.104	4.749	4.452	4.956
3.383	3.455	3.745	5.319	3.547	4.088	3.687	5.053	5.852	4.761
3.939	5.156	5.390	4.941	2.667	4.413	4.032	3.647	3.988	2.647
6.019	1.670	2.499	4.377	3.851	2.947	2.487	4.578	4.506	4.057
3.637	3.864	4.562	4.177	4.849	3.948	5.430	3.909	3.591	3.803
3.217	5.826	5.450	2.272	4.524	1.859	3.018	3.081	3.323	1.682
4.432	4.075	4.603	5.565	3.366	2.359	2.359	3.207	4.880	2.832
5.169	3.066	5.253	4.217	3.310	3.965	3.131	3.771	4.535	3.185
4.263	2.838	3.810	4.204	3.103	2.137	5.411	4.416	4.607	3.054
4.199	4.270	3.217	2.367	5.413	4.744	5.309	2.017	4.307	4.086
3.363	4.120	3.387	5.140	4.170	3.016	5.204	4.508	3.589	2.770
3.156	5.360	3.870	5.009	4.338	3.415	2.134	3.330	2.814	5.640
2.613	4.112	4.103	4.963	5.370	2.110	2.722	4.381	3.393	3.929
3.217	4.731	3.116	3.810	3.727	4.792	4.405	2.568	4.451	5.044
2.322	5.814	5.477	4.665	3.005	4.025	5.119	4.559	3.255	2.875
4.848	2.217	3.944	3.215	3.041	3.577	4.130	5.119	4.750	4.607
4.352	3.543	5.038	4.170	3.657	2.984	4.780	2.559	3.862	3.239
4.356	4.290	2.517	3.758	3.847	5.088	1.817	2.164	3.040	4.103
4.195	2.457	4.062	2.431	3.237	2.636	3.947	4.744	5.322	6.820

Варіант 4

4.484	3.553	3.951	4.430	4.656	4.726	4.712	3.405	6.389	5.621
3.711	4.559	5.385	4.854	3.641	5.435	3.843	4.283	3.919	3.940
4.624	4.300	5.572	4.345	5.381	3.570	4.705	2.913	4.543	5.332
5.208	5.386	5.288	3.363	4.517	5.441	4.196	4.476	4.810	5.252
4.469	4.121	3.799	5.693	3.751	4.702	3.713	4.843	5.806	4.649
3.860	3.697	3.000	2.383	5.530	4.994	3.642	4.632	5.513	2.689
4.009	3.081	5.750	5.077	3.594	5.166	4.677	3.958	4.078	5.948
3.865	4.463	5.601	4.939	5.371	3.692	5.816	3.238	5.805	3.798
5.926	4.387	3.758	5.006	5.077	6.206	4.063	3.712	3.664	4.110
3.951	5.890	5.723	3.811	3.202	3.366	3.689	3.675	5.211	5.256
4.398	4.633	3.923	4.941	4.839	6.552	3.672	4.241	5.724	5.502
2.925	2.892	5.499	3.852	4.404	4.885	4.659	5.936	3.170	4.279
4.147	5.059	3.668	4.840	3.939	6.462	3.388	4.324	4.240	4.856
4.148	3.607	5.283	2.729	4.407	5.133	4.047	4.345	5.014	4.154
3.691	4.436	4.310	4.390	3.635	3.355	3.823	6.626	4.815	4.672
5.731	5.012	3.714	5.353	5.549	3.132	4.575	5.918	5.300	2.929
3.937	3.730	4.890	4.294	4.087	2.343	4.727	3.204	4.422	3.675
4.697	2.500	5.707	4.884	5.399	5.684	4.499	3.678	5.592	4.751
5.986	4.611	4.582	4.424	3.934	5.261	4.582	3.509	4.896	5.141
5.556	4.204	4.248	3.219	5.864	4.223	3.510	3.458	4.355	3.427

Варіант 5

5.250	4.811	3.887	4.325	6.774	3.184	2.736	5.604	4.487	5.409
5.229	4.760	5.042	5.021	5.808	3.943	3.787	5.804	5.051	5.755
5.493	3.673	3.795	5.996	4.404	4.800	4.820	2.840	4.386	3.744
5.844	4.427	4.318	4.379	5.314	6.992	4.910	4.343	5.726	4.744
3.901	5.376	5.558	4.495	4.778	3.841	4.863	3.819	4.203	7.730
3.740	5.999	5.429	5.285	4.556	5.942	4.843	4.637	4.941	4.058
5.535	5.059	4.868	6.495	6.548	6.169	4.615	3.791	4.809	7.506
6.217	4.486	5.031	4.541	5.019	4.198	5.378	3.205	4.420	5.818
3.885	5.140	5.106	4.366	5.296	7.053	4.469	5.671	4.804	3.517
4.591	5.795	4.991	3.641	4.037	4.989	4.212	4.804	5.215	5.106
6.140	6.296	3.983	6.010	7.091	5.996	4.361	3.110	4.347	6.231
3.601	5.226	4.716	5.311	3.941	6.553	5.181	6.009	5.824	3.011
5.702	5.477	4.480	5.725	5.457	4.796	5.610	4.687	5.240	3.450
5.288	4.140	6.003	5.345	4.567	4.825	3.580	4.641	4.327	5.366
4.379	4.669	5.269	6.323	5.062	4.624	4.058	5.787	5.158	6.076
5.267	3.184	7.034	4.710	5.352	3.015	4.408	4.171	6.452	7.096
5.303	6.416	5.566	6.734	4.651	6.027	4.222	4.920	4.495	3.293
5.690	7.260	5.552	3.844	5.420	3.994	3.581	6.297	6.351	5.528
5.308	5.476	5.021	4.133	5.290	4.540	5.343	4.831	4.546	3.640
5.093	5.577	5.900	4.138	4.063	5.678	4.916	4.161	5.207	4.651

Варіант 6

4.745	3.633	4.029	7.250	5.805	6.309	3.670	6.115	5.629	5.323
5.883	5.744	6.264	7.405	4.937	6.870	4.655	5.879	5.679	6.997
6.551	6.055	5.095	7.864	6.073	3.538	4.865	5.438	4.614	5.088
4.717	5.552	5.119	5.438	5.372	5.412	3.727	3.911	5.418	3.940
5.508	4.198	5.922	5.186	4.046	5.199	6.072	5.771	4.845	5.552
6.111	5.296	6.757	6.184	4.364	4.695	6.548	5.620	4.888	3.830
5.617	6.975	6.730	5.113	4.745	5.638	4.665	5.270	7.280	5.598
6.264	5.536	5.390	3.826	4.786	7.111	5.527	5.670	5.712	5.944
5.039	4.242	5.223	6.332	5.454	6.586	5.907	6.247	6.190	7.135
5.434	5.097	5.716	5.821	5.234	4.840	5.164	5.289	5.730	6.018
5.392	6.951	6.129	5.580	7.060	5.323	5.871	4.718	4.486	4.627
5.938	5.540	6.960	5.580	6.475	7.448	5.865	6.001	6.120	4.224
7.192	5.178	4.519	4.975	5.071	4.170	5.517	5.853	5.032	4.719
6.830	4.800	5.605	6.602	4.365	5.520	5.471	5.309	4.581	4.175
3.518	6.764	6.186	5.613	5.768	7.602	5.104	6.563	5.272	6.790
4.383	5.692	7.629	7.493	5.763	6.380	6.411	7.240	3.424	6.857
5.769	4.288	5.328	7.041	4.830	3.452	6.076	6.533	5.833	4.586
4.288	5.412	4.402	5.123	5.800	4.549	6.705	5.764	4.677	5.115
6.393	4.469	5.804	5.824	5.176	6.880	4.210	6.290	4.119	6.831
5.969	5.454	6.211	4.825	5.353	6.029	5.776	3.596	4.993	7.270

Варіант 7

7.275	7.002	6.580	5.366	6.083	5.204	4.390	6.788	5.479	6.136
6.484	5.642	7.213	4.656	8.582	6.392	6.391	5.611	7.287	4.897
4.914	6.222	5.493	6.679	5.526	6.822	5.238	5.838	6.394	6.112
6.422	5.338	6.930	6.196	5.469	5.693	5.344	4.881	6.883	6.869
5.692	8.264	4.643	6.817	6.414	5.655	4.294	4.510	5.631	5.817
5.522	6.667	4.183	6.396	6.417	4.895	6.847	7.307	4.428	4.410
5.782	5.325	6.192	4.880	7.531	6.100	4.847	6.597	5.542	6.692
6.533	6.359	6.393	4.538	6.418	6.143	5.045	6.387	6.039	5.338
3.996	5.511	6.292	6.121	6.766	6.715	6.084	4.122	6.669	6.620
5.195	5.848	7.405	6.778	6.929	8.281	6.738	7.199	5.915	5.191
6.740	6.696	6.000	6.496	6.398	7.504	6.574	6.142	5.829	6.246
5.249	6.351	4.999	5.008	4.657	5.840	5.819	6.177	6.526	6.951
6.490	5.838	8.010	6.055	5.187	6.857	5.126	5.329	7.051	6.733
6.309	6.604	6.331	6.790	8.124	5.650	7.373	6.698	6.061	6.520
5.981	7.080	7.534	6.312	5.512	4.843	8.648	5.530	3.813	6.623
7.598	7.819	4.994	5.062	6.363	5.172	5.477	7.896	5.868	5.511
6.579	5.609	7.105	5.157	7.484	5.992	7.505	4.547	7.817	6.497
5.659	7.223	5.691	4.732	5.849	6.289	4.091	5.622	6.357	4.757
6.097	7.328	4.422	6.969	6.443	4.710	5.952	5.696	5.282	7.541
5.713	6.207	7.268	6.761	5.948	6.044	6.541	6.121	4.915	5.174

Варіант 8

3.951	3.336	2.930	3.206	2.523	2.835	2.662	2.906	2.754	2.917
3.226	3.175	3.661	2.756	3.574	2.742	2.622	3.255	3.702	2.925
2.733	2.903	3.259	2.727	3.275	2.255	3.065	2.688	2.390	2.621
3.225	3.182	2.929	3.206	2.651	2.164	2.126	2.339	2.749	3.111
2.695	3.328	2.935	3.706	2.567	3.339	2.488	3.510	3.265	2.521
3.774	3.446	3.156	3.448	2.734	2.422	2.913	3.599	2.700	3.510
3.404	2.640	3.627	3.111	3.447	2.972	2.745	3.597	2.317	3.456
3.177	2.911	2.855	3.158	3.241	2.114	2.723	3.335	2.687	2.732
2.805	3.150	2.832	2.406	2.492	2.242	2.247	3.465	2.309	3.537
2.371	2.591	3.439	2.453	2.809	2.474	3.147	2.817	3.691	2.399
2.797	2.634	2.091	2.813	2.568	2.637	3.216	3.544	2.645	3.883
1.878	2.235	3.245	2.606	2.982	2.648	3.664	3.418	3.355	3.453
2.537	2.466	2.749	2.654	2.575	3.090	3.457	3.273	2.847	2.943
2.823	3.145	3.523	3.945	2.656	3.366	2.610	3.292	3.227	2.783
2.270	2.199	2.487	3.036	2.676	2.386	3.095	2.381	3.733	3.265
2.571	3.006	2.676	3.578	2.556	3.558	3.960	2.605	2.337	3.252
3.173	3.726	3.691	2.754	3.180	3.262	2.322	2.320	4.149	2.665
4.180	2.796	3.423	3.199	2.973	2.444	3.105	2.932	3.697	3.134
2.656	2.902	2.448	2.727	3.530	2.639	1.959	4.127	2.546	3.271
3.724	3.007	3.689	3.739	3.554	2.384	3.320	2.306	2.758	3.250

Варіант 9

2.706	4.454	4.127	3.916	3.477	3.436	3.880	3.173	3.085	3.372
3.911	3.706	4.094	3.644	3.313	3.604	3.503	3.324	2.766	3.510
3.999	3.781	2.942	3.562	3.840	3.654	3.487	4.126	3.046	3.835
3.797	2.515	4.190	2.707	3.718	3.636	2.962	2.830	3.964	3.263
3.676	2.920	3.483	3.030	4.083	4.256	3.689	3.896	3.804	3.400
3.661	3.288	4.727	4.106	3.457	3.138	3.725	3.003	2.792	3.621
4.628	3.348	2.868	3.438	2.952	3.664	3.619	3.730	3.909	3.104
3.375	3.792	3.409	3.847	3.203	2.674	3.183	2.681	3.906	3.251
2.775	3.581	4.555	3.340	3.713	4.101	3.800	4.370	3.110	3.747
4.104	2.907	3.088	3.657	3.099	3.385	3.121	4.073	4.331	4.179
3.484	3.490	3.224	4.070	2.882	3.467	3.425	3.043	2.770	3.610
3.584	3.567	2.688	4.328	3.389	3.540	4.111	3.327	3.744	2.966
4.152	3.347	3.122	3.304	4.017	2.966	4.002	3.232	3.789	4.278
2.586	3.120	3.165	3.603	3.196	3.048	3.067	3.406	3.189	3.484
3.261	3.137	3.846	4.239	3.072	3.815	3.077	3.784	3.756	4.513
2.957	3.037	3.202	3.350	3.317	3.101	4.392	3.596	3.887	3.517
3.001	4.554	2.850	3.507	2.901	2.964	2.938	2.701	3.125	3.865
2.630	4.081	2.712	3.665	2.969	4.005	2.705	2.808	3.645	3.977
2.920	3.356	4.002	3.464	4.030	4.023	3.590	3.633	3.592	3.623
3.926	3.466	2.756	3.007	3.413	3.728	2.874	3.941	3.671	4.082

Варіант 10

4.314	4.201	3.040	3.673	3.730	3.921	3.996	4.263	3.461	3.438
4.821	4.390	3.554	3.655	4.123	3.924	3.550	4.813	3.491	3.924
4.278	4.531	4.250	4.098	4.904	4.154	3.782	4.175	3.664	3.687
4.101	3.334	3.675	3.663	4.007	4.029	3.330	3.755	4.141	4.660
5.165	3.184	3.979	3.973	4.718	3.593	3.550	3.980	4.383	4.466
3.835	4.152	3.885	2.971	3.631	3.645	3.877	4.037	3.289	3.733
4.114	3.490	4.327	3.287	3.762	4.259	4.383	4.115	3.932	4.662
3.687	4.559	3.479	5.037	3.995	4.467	3.841	4.730	3.835	2.988
3.555	4.177	4.019	3.226	4.258	4.280	3.572	4.525	4.651	3.178
4.726	4.071	3.505	3.437	4.658	3.648	3.933	3.521	3.420	3.826
3.895	4.593	3.644	5.198	3.439	3.380	3.696	4.303	4.080	3.289
4.821	3.907	4.714	4.057	4.556	4.180	4.136	4.157	3.830	4.487
5.520	3.750	3.561	3.778	4.994	4.507	4.515	5.624	3.550	4.424
4.423	4.332	3.094	4.619	3.750	4.238	3.958	4.069	3.338	3.362
4.029	3.717	4.262	3.462	4.040	4.266	4.269	3.733	3.532	3.870
4.039	4.111	3.619	3.986	3.445	4.017	3.333	4.925	3.811	4.351
3.208	4.365	3.413	4.189	3.741	4.118	3.683	3.808	4.262	4.003
3.624	4.472	3.718	3.634	3.877	4.057	4.050	3.690	3.756	4.700
3.897	4.247	3.960	4.023	3.375	4.322	3.142	3.085	4.008	3.491
3.582	4.710	4.099	3.614	3.788	4.958	3.707	4.182	4.580	3.869

Варіант 11

4.316	3.872	5.409	4.991	5.082	4.576	4.992	3.772	4.473	4.362
5.425	4.400	4.349	4.008	5.370	3.644	4.021	4.116	4.054	4.852
4.209	3.702	4.028	5.129	4.249	4.250	4.831	4.661	5.575	4.753
5.267	4.134	5.410	4.496	4.618	3.618	4.289	5.257	4.898	3.866
5.083	4.143	5.347	4.768	3.855	4.447	4.894	4.546	5.325	3.819
5.037	4.667	4.412	4.257	3.692	3.842	4.855	4.075	4.664	4.521
4.443	4.382	4.124	4.176	3.761	5.034	4.358	4.249	4.746	3.463
3.643	3.704	4.198	5.340	4.568	4.730	4.599	4.160	4.800	4.422
5.614	4.472	4.298	4.554	5.702	4.634	4.632	5.138	4.468	3.647
4.189	4.562	4.788	4.418	4.519	5.093	4.035	4.287	4.666	4.599
5.427	4.421	4.315	4.271	4.065	4.766	3.706	4.161	5.077	4.047
4.581	3.973	4.931	4.590	5.183	4.377	5.841	4.605	4.670	4.823
5.506	5.549	5.253	4.667	4.933	4.419	4.621	4.517	4.978	3.838
4.630	4.839	4.095	5.080	4.544	4.283	4.014	4.679	4.781	4.264
3.518	5.175	3.829	3.730	5.267	4.522	5.031	3.916	4.468	5.141
5.172	3.556	4.925	4.079	5.198	4.716	4.839	3.775	4.159	4.572
4.586	4.189	4.607	4.807	4.414	5.582	4.316	4.473	4.791	5.204
4.989	4.912	3.590	3.882	3.754	4.599	5.182	4.463	4.436	4.609
4.446	4.107	4.116	3.967	4.474	4.981	4.500	4.581	4.605	5.513
4.158	4.398	5.189	3.629	5.038	4.402	4.731	4.395	4.621	4.033

Варіант 12

4.870	5.263	5.256	5.111	5.762	4.879	4.706	4.444	4.690	5.110
5.977	5.298	5.981	4.546	4.791	5.005	5.049	4.203	5.867	4.634
4.788	5.485	4.843	5.006	4.880	5.047	5.271	5.310	5.991	5.474
4.172	5.446	5.296	4.465	5.093	5.128	5.391	4.970	5.020	4.385
5.031	4.097	5.282	4.918	4.262	4.939	4.215	5.031	5.018	6.233
5.096	5.084	4.158	4.721	4.899	4.621	5.084	5.791	4.884	5.086
4.818	5.580	4.955	5.446	4.635	4.854	5.339	5.323	5.121	5.969
5.075	5.675	4.622	5.769	5.812	5.156	5.329	5.246	4.458	5.134
5.758	5.480	5.171	4.981	5.288	6.238	4.509	5.975	5.747	4.878
4.658	5.487	5.522	4.616	5.198	5.097	4.935	5.129	5.012	5.681
4.881	5.067	4.564	5.879	5.610	4.980	5.863	4.577	4.253	5.059
4.840	4.500	4.787	5.285	4.891	5.611	4.890	5.139	4.837	4.533
4.145	4.306	4.998	4.925	4.990	5.010	4.861	5.013	5.668	5.792
4.451	4.102	4.656	5.564	4.554	5.201	4.246	5.455	4.102	4.253
4.143	5.238	5.063	5.093	4.652	5.427	4.578	5.241	4.494	5.407
5.501	4.614	4.874	4.409	4.937	4.724	4.752	4.879	4.940	4.067
4.482	5.083	5.624	6.057	4.472	5.104	4.773	4.879	4.675	4.375
4.914	4.425	5.261	5.340	4.930	4.702	4.563	4.667	4.684	5.387
5.899	4.581	4.808	5.023	5.081	5.224	4.849	4.722	4.786	5.076
5.156	5.014	5.241	5.160	4.332	5.250	4.444	4.801	4.865	5.140

Варіант 13

4.556	5.474	5.447	5.215	4.850	5.388	5.990	5.704	5.769	5.107
6.120	4.825	6.096	5.476	5.729	5.477	4.753	6.180	5.590	5.298
5.622	5.672	5.738	5.362	4.769	5.210	6.495	4.756	5.145	5.945
5.037	5.737	6.077	4.924	5.354	5.444	5.141	5.262	5.512	4.961
5.275	6.010	5.335	5.489	6.279	5.239	5.632	5.516	5.389	6.649
5.247	5.322	4.951	5.217	5.392	4.779	5.936	5.737	6.036	6.668
5.498	5.686	5.429	4.601	5.320	5.033	5.492	5.556	5.021	4.933
5.157	4.902	5.599	5.251	6.483	6.201	5.024	5.253	6.180	4.560
5.006	4.750	6.043	5.162	6.407	5.017	5.622	6.282	5.441	6.698
4.452	5.364	6.301	5.496	6.598	4.703	6.968	5.909	4.784	5.444
6.176	5.484	5.958	6.616	6.876	5.843	6.655	5.199	5.615	5.025
5.354	5.381	5.966	5.202	5.527	6.166	4.957	6.230	4.505	5.404
5.535	5.326	5.772	5.033	5.636	4.593	5.603	4.992	5.277	4.977
5.355	4.865	5.510	4.782	4.571	5.042	4.908	5.295	5.753	5.441
5.164	5.534	5.922	4.820	6.303	5.910	5.585	5.169	5.713	5.144
5.428	6.201	5.581	6.338	5.146	5.138	5.521	6.094	4.512	5.827
6.073	5.340	5.805	5.333	6.567	5.521	5.660	4.827	5.441	5.123
5.335	5.336	5.027	4.713	6.286	5.431	4.731	5.878	5.211	5.055
5.616	5.826	5.718	5.987	4.864	6.195	6.084	5.478	5.768	5.805
4.759	5.142	5.036	5.684	5.349	5.055	5.335	5.493	5.397	4.901

Варіант 14

6.067	6.073	5.738	6.741	5.848	5.854	6.113	6.673	6.227	5.840
6.780	6.136	6.804	5.392	5.964	6.097	6.189	5.891	6.683	6.474
5.586	5.620	6.005	5.111	6.341	5.403	6.153	5.930	6.260	6.200
5.545	6.214	6.793	6.004	6.354	5.176	6.696	5.575	6.032	6.593
5.803	6.330	6.478	5.915	6.349	7.012	6.169	6.064	6.348	6.122
6.157	5.544	5.167	5.001	5.443	6.035	5.485	6.723	6.307	5.257
4.818	6.200	6.240	5.508	5.502	5.608	5.171	6.130	6.443	5.454
6.038	6.362	6.120	5.206	5.637	6.080	5.252	5.066	6.748	5.518
6.837	6.156	5.725	5.915	5.661	6.353	6.275	5.482	6.598	5.667
7.197	6.751	5.751	5.497	6.296	7.196	6.288	6.507	5.890	6.034
5.363	6.528	5.855	6.920	6.846	5.916	5.903	6.663	6.584	6.601
5.500	6.457	6.364	6.191	5.572	6.003	6.536	5.432	5.141	5.715
5.997	5.648	6.241	6.969	6.193	6.422	5.300	6.092	5.522	6.069
5.521	6.290	6.410	5.057	6.568	6.621	6.851	5.264	6.245	5.835
5.668	5.636	5.314	6.729	6.306	6.479	6.144	5.729	6.654	6.341
6.581	5.806	6.023	5.207	5.359	5.341	5.259	5.678	6.018	5.752
5.111	5.998	6.094	5.338	6.795	5.711	6.372	6.819	5.448	5.348
5.751	6.536	5.596	6.281	5.978	6.620	5.839	5.776	6.485	6.276
5.895	5.752	5.109	6.332	5.972	6.479	5.993	5.543	6.086	5.548
6.476	6.133	6.486	6.482	6.722	6.038	6.095	5.733	6.552	6.053

2. Порядок виконання курсової роботи

Кожний студент для свого варіанту експериментальних даних має виконати наступні завдання з відповідним теоретичним обгрунтуванням

I. Визначити по експериментальних даних тип невідомого розподілу неперервної випадкової величини.

Тут слід здійснити наступні кроки:

1) Впорядкування експериментальних даних по зростанню.
2) Розбиття проміжку з експериментальними даними на 7 частинних проміжків рівної довжини.
3) Обчислення кількості експериментальних даних, що попали у кожний частинний проміжок.
4) Побудову гістограму для експериментальних даних.
5) Висунення на основі гістограми основної гіпотези H_0 про тип невідомого закон розподілу випадкової вибірки.

II. Обчислення точкових оцінок невідомих параметрів розподілу.

Це завдання складається з таких кроків, які мають бути відображені у курсовій робрті:

1) Для кожного варіанту обчислити точечні оцінки математичного сподівання та дисперсії методом моментів для кількості експериментальних даних
   a) $n = 200$
   b) $n = 20$ (взяти перші 20 значень по рядках з 200 заданих, розподіл вважати нормальним)
2) В обох випадках при обчисленні точечної оцінки дисперсії усунути зміщення.

III. Встановити довірчі інтервали для невідомих параметрів розподілу.

1) Знайти довірчі інтервали для невідомих значень математичного сподівання і дисперсії при довірчій ймовірності, рівній 0,95 та при кількості експериментальних даних

   a) $n = 200$

   b) $n = 20$ (взяти перші 20 значень відраховуючи по рядках з 200 заданих)

IV. Перевірка непараметричних гіпотез.

Використовуючи висновки п.I здійснити перевірку гіпотези про вид розподілу, якому відповідають експериментальні дані. При цьому

1) Кількість частинних проміжків та їх розмір взяти такими ж, як і в п. I.
2) Підрахувати ймовірності попадання експериментальних даних в кожен з частинних проміжків згідно з висунутою гіпотезою. При цьому використати точечні оцінки невідомих параметрів розподілу, побудовані при n=200.
3) Побудувати випадкову функцію з χ^2 розподілом для застосування відповідного критерію та обчислити її реалізацію по експериментальних даних.
4) Одержане значення порівняти з квантилем χ^2 розподілу, обчисленого для рівня ймовірності 0,95, та зробити відповідний висновок.

Одержані результати та їх теоретичне обґрунтування оформити на листах А4 з наступною титульною сторінкою

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
Кафедра математичної фізики

КУРСОВА РОБОТА

з дисципліни

ПРИКЛАДНИЙ АНАЛІЗ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

на тему

"Оцінки параметрів випадкової вибірки та визначення типу закону розподілу ймовірностей для неї по експериментальних даних"

Студента(ки) групи ________
6 курсу спеціальності 8.05050402
"Зварювальні установки"
______(прізвище, ініціали)_____
Керівник: _(посада, прїзвище, ініціали)
Національна оцінка: _____________
Кількість балів: ___ Оцінка ECTS: __

Київ 20___

3. *Таблиці для знаходження квантилів законів розподілу деяких неперервних випадкових величин*

Таблиця 1. *Значення функції Лапласа*

В таблиці наведені значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, що називається функцією Лапласа.

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0.01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3368
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1.11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1.12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0.1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708.
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1.14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1.17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0.3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1.24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1.27	0,3980

Продовження ***Таблиці 1***

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1.29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1.30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1.31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1.32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1.33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1.34	0,4099	1.67	0,4525	2,00	0,4772	2.66	0,4961
1.35	0,4115	1.68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1.69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1.70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1.71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1.41	0,4207	1.74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1.42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0.4977
1.44	0,4251	1.77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1.45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1.46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1.47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1.54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3.60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1.56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0.4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499999
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		

При цьому квантилі u_α нормального закону розподілу з параметрами $N(0,1)$ на рівні ймовірності α знаходяться з умови $\Phi(u_\alpha) = 0{,}5 - \alpha$. Функція $\Phi(x)$ – непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Таблиця 2. *Квантилі χ^2 розподілу*

Значення квантилю $h_{\alpha,n}$ в даній таблиці задовольняє умові $\int\limits_{h_{\alpha,n}}^{+\infty} p_n(x)dx = \alpha$, де $p_n(x)$ – густина розподілу χ^2 із n степенями волі, α – вибраний рівень ймовірності.

	0,01	0,025	0.05	0,95	0.975	0,99
1	6.6	5,0	3.8	0,0039	0.00098	0,00016
2	9,2	7,4	6.0	0,103	0.051	0,020
3	11,3	9,4	7.8	0.352	0.216	0,115
4	13,3	Н.1	9,5	0.711	0.484	0,297
5	15,1	12,8	11.1	1.15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1.64	1.24	0.872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1.69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1.65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2.50
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3.82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26.3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11.0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13.1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Таблиця 3. *Квантилі розподілу Стьюдента*

Значення квантилю $t_{\alpha,n}$ в даній таблиці задовольняє умові $\int\limits_{t_{\alpha,n}}^{+\infty} S_n(x)dx = \alpha$, де $S_n(x)$ – густина розподілу Стьюдента з n степенями волі, α – вибраний рівень ймовірності.

n \ α	0,40	0,30	0,20	0,10	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	5,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0.549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,231	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	3,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,503	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,063	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,043	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,254	0,527	0,848	1,295	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

ЛІТЕРАТУРА

Базова

1. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика. – М.: ИЛ, 1960. – 435 с.
2. Герасимович А.И. Математическая статистика. – Минск: Вышэйшая школа, 1983. – 279 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища школа, 1979. – 408 с.
4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2004. – 404 с.
5. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Чистяков А. В. Сборник задач по математической статистике. – М.: Высшая школа, 1989. – 255 с.
6. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
7. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1969. – 512 с.
8. Фишер Р.А. Статистические методы для исследователей. – М.: Госстатиздат, 1958. – 267 с.

Допоміжна

9. Андрухаев Х.М. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Просвещение, 1985. – 160 с.
10. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.
11. Дунин-Барковский И.В., Смирнов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). – М.: Гостехиздат, 1955. – 556 с.
12. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.1. – М.: Мир, 1963. – 512 с.
13. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.2. – М.: Мир, 1967. – 752 с.
14. Хикс Ч. Основные принципы планирования эксперимента. – М.: Мир, 1967. – 407 с.
15. Шефе Г. Дисперсионный анализ. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

ЗМІСТ