МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ

За напрямом 6.050504 "зварювання"

ЗАТВЕРДЖЕНО ВЧЕНОЮ РАДОЮ ФІЗИКО -МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ НТУУ «КПІ»

Київ 2014

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ
Методичні вказівки
За напрямом 6.050504 “Зварювання”
Укладач: Довгай В.В., 2014 р., 71 с.
Затверджено Вченою Радою Фізико - математичного факультету
НТУУ “КПІ” (протокол № ___ від _____травня__ 2014 р.)

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ
Методичні вказівки
За напрямом 6.050504 “Зварювання”
Укладач: Довгай В.В.
Рецензент: Рижов Р.М., д. т. н., проф. каф. ЕЗУ
Відповідальний редактор: Швець О.Ю., д. ф.-м. н., проф. кафедри
математичної фізики

ВСТУП

Методичні вказівки “Основи теорії ймовірностей” укладені для студентів зварювального факультету з метою забезпечення виконання ними самостійної роботи, що передбачена навчальною програмою з Основ теорії ймовірностей та розробленою на її основі робочою навчальною програмою кредитного модуля “Основи теорії ймовірностей” для напрямку підготовки бакалавра 6.050504 “Зварювання”.

Методичні вказівки складаються з трьох розділів. В першому розділі коротко викладено необхідний теоретичний матеріал стосовно випадкових подій, наведено основні означення відповідних математичних понять та формули для розрахунків. Другий розділ має подібну структуру і присвячений випадковим величинам. Всі розділи містять необхідну графічну інтерпретацію та багато прикладів детального розв’язування типових задач з основ теорії ймовірностей. Другий розділ закінчується граничними теоремами, що мають важливе прикладне значення та лежать в основі багатьох дисциплін, що базуються на теорії ймовірностей, зокрема й такої, як Прикладний аналіз експериментальних даних, передбачений програмою підготовки магістрів Зварювального факультету. В третьому розділі містяться задачі для самостійної роботи студентів, якою можуть бути домашні завдання, модульні або домашні контрольні роботи.

Підбір матеріалу і його викладення в методичних вказівках “Основи теорії ймовірностей” дозволяє використовувати їх як для денної, так і для заочної форми навчання студентів.

РОЗДІЛ І. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1. Простір елементарних подій. Випадкові події та дії з ними

З кожним експериментом, у якому діють випадкові фактори, пов'язується деяка множина $\Omega = \{\omega\}$, що складається з елементів ω довільної природи і яка називається ***простором елементарних подій***. Поняття простору елементарних подій (як і поняття будь-якої множини) є первісним поняттям, тому його можна лише розтлумачити на прикладах, але не давати за допомогою означень, які неодмінно приведуть до тавтології. Обмежимось наступними прикладами простору елементарних подій

Приклад 1. Один раз підкидається монета, яка падає на підлогу з твердим покриттям. В таких умовах результатом даного експерименту може бути лише одна з двох наступних елементарних подій: ω_1 – випав герб (Г), ω_2 – випала решітка (Р). Обидві вони і утворюють простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2\} = \{Г,\ Р\}$.

Приклад 2. В попередніх умовах незалежно один від одного двічі підкидається одна і та ж монета. В цьому випадку $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4\} =$

$= \{ГГ,\ ГР,\ РГ,\ РР\}$, де елементарними подіями є наступні елементи

$\omega_1 = ГГ$ – перший раз випав герб і другий раз випав герб,

$\omega_2 = ГР$ – перший раз випала решітка, а другий раз випав герб,

$\omega_3 = РГ$ – перший раз випав герб, а другий раз випала решітка,

$\omega_4 = РР$ – перший раз випала решітка і другий раз випала решітка.

Приклад 3. В умовах прикладу 1 монета підкидається до тих пір, поки не випаде герб. Дотримуючись попередніх позначень, маємо наступні елементарні події

$\omega_1 = \text{Г}$ – герб випав за першим разом,

$\omega_2 = \text{РГ}$ – перший раз випала решітка, а другий раз випав герб,

$\omega_3 = \text{РРГ}$ – перші два рази випала решітка, а третій раз випав герб,

. . . .

$\omega_1 = \underbrace{\text{РР}\ldots\text{Р}}_{n-1\ \text{раз}}\text{Г}$ – перші n-1 рази випала решітка, а n-тий раз випав герб,

. . . .

Отже в даному випадку простір елементарних подій складається з нескінченної (але зліченної) кількості елементів

$$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3, \ldots,\ \omega_n,\ \ldots\} = \{\text{Г},\ \text{РГ},\ \text{РРГ},\ \ldots\ \underbrace{\text{РР}\ldots\text{Р}}_{n-1\ \text{раз}}\text{Г}, \ldots\}.$$

Приклад 4. З відрізку $[0;1]$ навмання вибирається дійсне число. Очевидно, що в цьому випадку $\Omega = \{\omega : \omega = x,\ x \in [0;1]\}$, тобто Ω складається з тих же елементів, що й відрізок $[0;1]$. Це теж нескінченна множина, але значно потужніша за зліченну (потужності континууму).

2. Випадкові події та дії з ними

Випадковою подією називається підмножина А простору елементарних подій Ω, в тому числі і сам простір елементарних подій Ω (достовірна подія) та порожня множина Ø (неможлива подія).

Приклад 1. Двічі підкидається монета, яка падає на підлогу з твердим покриттям. Записати випадкову подію А, яка полягає в тому, що герб випав рівно один раз.

Використовуючи попередні позначення, маємо

$$\Omega = \{\text{ГГ},\ \text{ГР},\ \text{РГ},\ \text{РР}\},\ \ A = \{\text{ГР},\ \text{РГ}\}.$$

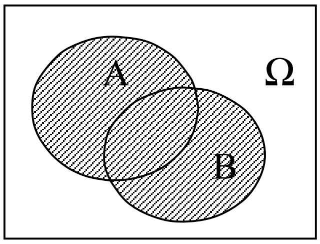
Приклад 2. Один раз підкидається гральний кубик, який падає на дошку для гри в кості. Записати випадкову подію А, яка полягає в тому, що випало не менше п’яти очок.

В цьому випадку простір елементарних подій Ω доцільно зобразити у вигляді множини елементів, кожен з яких рівний числу очок, що може випасти на гральному кубику, тобто $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Тоді $A = \{5, 6\}$.

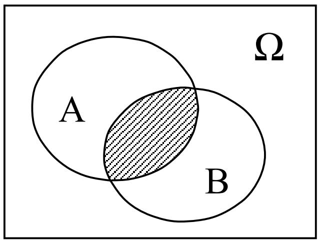
В обох прикладах випадкова подія A є підмножиною Ω.

З випадковими подіями A, B можна виконувати всі дії, що визначені у теорії множин. Даючи цим діям відповідну ймовірнісну інтерпретацію, проілюструємо їх на діаграмах, де Ω, A, B зображені множинами точок на площині. Результат відповідних дій на діаграмах вказаний штриховкою, в дужках наведені альтернативні позначення.

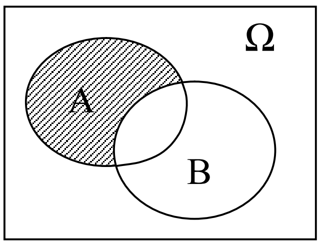
1. $A \cup B$ $(A + B)$ – це випадкова подія, яка полягає в тому, що відбувається A або B.
   Ця дія називається об'єднанням A та B.



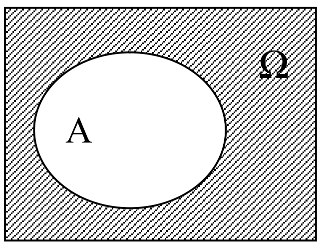
2. $A \cap B$ $(A \cdot B)$ – це випадкова подія, яка полягає в тому, що відбувається A і B одночасно.
   Ця дія називається перетином A та B.



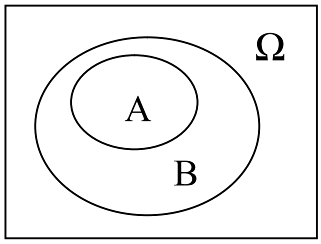
3. $A \setminus B$ $(A - B)$ – це випадкова подія, яка полягає в тому, що відбувається A, але B не відбувається.
   Ця дія називається різницею A та B.



4. $\overline{A}$ – протилежна до A випадкова подія, тобто така, коли A не відбувається.
   Така дія називається ще доповненням до A.

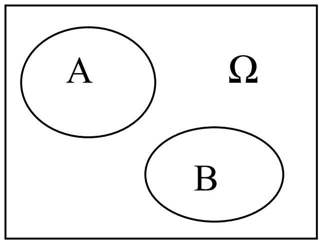


На подібних діаграмах проілюструємо також наступні поняття



1. $A \subset B$ – з того, що A відбувається випливає, що і B теж відбувається (A тягне B).

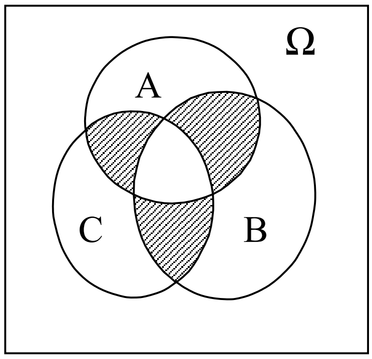
Зауважимо, що коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то тоді пишуть $A = B$.



2. $A \cap B = \varnothing$ – події A та B несумісні, тобто ці події не можуть відбуватись одночасно

<u>Приклад 3.</u> Нехай A, B, C – випадкові події. Проілюструвати на діаграмі та записати випадкову подію D – відбулось рівно дві з даних подій.

Подія D на діаграмі – заштрихована.



$$D = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C).$$

Існує три підходи до означення ймовірності випадкової події A – статистичний, класичний та аксіоматичний. Розглянемо їх по черзі.

3. Статистичний підхід до означення ймовірності випадкової події

Розглянемо n однакових експериментів, що виконуються в одних і тих же умовах незалежно один від одного, в кожному з яких може з'явитись або не з'явитись випадкова подія A. Нехай $\nu_n(A)$ – число тих експериментів, у яких A з'явилась, тоді відношення $\eta_n(A) = \dfrac{\nu_n(A)}{n}$

називається ***частотою випадкової події А***. Частота $\eta_n(A)$ має наступні властивості, які випливають із її означення:

1. $0 \le \eta_n(A) \le 1$, причому $\eta_n(\varnothing) = 0,\ \eta_n(\Omega) = 1$,
2. Якщо $A \subset B$, то $\eta_n(A) \le \eta_n(B)$,
3. Якщо A і B – несумісні випадкові події, тобто $A \cap B = \varnothing$, то $\eta_n(A \cup B) = \eta_n(A) + \eta_n(B)$

Означення 1. Якщо при $n \to \infty$ частота $\eta_n(A)$ прямує до деякого числа $P(A)$, то це число називається ***ймовірністю випадкової події А***.

Властивості ймовірності аналогічні властивостям частоти:

1. $0 \le P(A) \le 1$, причому $P(\varnothing) = 0,\ P(\Omega) = 1$,
2. Якщо $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$,
3. Якщо A і B – несумісні випадкові події, тобто $A \cap B = \varnothing$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4. Класичний підхід до означення ймовірності випадкової події

Означення 1. Нехай простір елементарних подій Ω складається із n рівноможливих подій, а випадковій події А сприяють m $(m \le n)$ з них, тобто

$$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2, \ldots,\ \omega_n\},\ A = \{\omega_{k_1},\ \omega_{k_2}, \ldots,\ \omega_{k_m}\},\ \omega_{k_s} \in \Omega,\ s = 1, 2, \ldots, m.$$

Тоді ***ймовірністю випадкової події*** А називається відношення $P(A) = \frac{m}{n}$.

Властивості ймовірності:

1. $0 \le P(A) \le 1$, причому $P(\varnothing) = 0,\ P(\Omega) = 1$,
2. Якщо $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$,
3. Якщо A і B – несумісні випадкові події, тобто $A \cap B = \varnothing$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Для практичного застосування класичного підходу до обчислення ймовірності випадкової події важливо уміти знаходити числа m та n. Така задача полегшується при використанні наступних понять ***комбінаторики***.

1. ***Правило добутку.*** Нехай потрібно утворити множину із k елементів, причому перший з них можна вибрати n_1 способами, другий – n_2 способами, $\ldots$, k-тий – n_k способами. Тоді згадану множину можна утворити $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ числом способів.
2. ***Розміщення з повтореннями.*** Нехай із множини n різних елементів потрібно вибрати k елементів, причому кожен елемент із даної множини можна вибирати кілька раз (від 1 до k). Такий вибір можна здійснити n^k способами.
3. ***Розміщення без повторень.*** Нехай із множини n різних елементів потрібно вибрати k різних елементів $(k \le n)$, розрізняючи при цьому порядок їх вибору. Число способів, якими такий вибір можна здійснити, позначається символом A_n^k, причому

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n.$$

4. ***Перестановки.*** Якщо у попередньому випадку $k = n$, то тоді застосовується позначення $A_n^n = P_n$, причому $P_n = n!$.
5. ***Комбінації.*** Нехай із множини n різних елементів потрібно вибрати k різних елементів $(k \le n)$, не розрізняючи при цьому порядок їх вибору. Число способів, якими такий вибір можна здійснити, позначається символом C_n^k, причому

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

При обчисленні C_n^k (при $k > \frac{n}{2}$) слід враховувати, що $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Приклад 1. Із 10 однакових деталей, серед яких 4 бракованих, навмання вибирають 7 деталей. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться рівно 2 браковані.

Тут простір елементарних подій Ω складається із $n = C_{10}^{7} = C_{10}^{3}$ рівноможливих подій (число способів, яким можна вибрати 7 деталей із 10 не розрізняючи порядку, в якому вони вибираються). Випадкова подія A, яка полягає в тому, що серед вибраних 7 деталей буде рівно 2 браковані, складається з елементарних подій, що мають структуру $\underbrace{б\,б}_{2\,\text{дет.}}\,\underbrace{с\,с\,с\,с\,с}_{5\,\text{дет.}}$, де літерами б та с позначено відповідно браковану та стандартну деталь. Вибрати 2 із 4 бракованих деталей можна C_4^2 способами, а 5 із 6 стандартних – $C_6^5 = C_6^1$ способами. Отже, згідно з правилом добутку, випадкова подія A складається з $m = C_4^2 \cdot C_6^1$ елементарних подій.

Згідно з класичним підходом до поняття ймовірності маємо

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{6}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{3}{10}.$$

5. Аксіоматичний підхід до означення ймовірності випадкової події. Ймовірнісний простір

Це найбільш загальний та одночасно і найбільш складний підхід, що базується на теорії міри.

Означення 1. Система $\Im$ підмножин із простору елементарних подій Ω називається σ***-алгеброю*** (сигма-алгеброю), якщо

1. $\Omega \in \Im$,
2. Якщо $A \in \Im$, то і $\overline{A} \in \Im$,
3. Якщо $A_k \in \Im$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, то і $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A \in \Im$.

Приклад 1. Якщо $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\}$, то тоді

$$\Im = \{\Omega,\ \varnothing,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \{\omega_1,\ \omega_2\},\ \{\omega_1,\ \omega_3\},\ \{\omega_2,\ \omega_3\}\}.$$

Раніше дане означення випадкової величини тепер можна уточнити.

Означення 2. Довільна множина $A \in \Im$ $(A \subset \Omega)$ називається ***випадковою подією***.

Зауважимо, що результат будь-яких дій з випадковими подіями теж буде випадковою подією. Наприклад, нехай A, B – випадкові події, тобто $A, B \in \Im$. Розглянемо $A \cap B = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})}$. Так як згідно з означенням 1 послідовно маємо $\overline{A}, \overline{B} \in \Im$, $\overline{A} \cup \overline{B} \in \Im$, $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} \in \Im$, то і $A \cap B \in \Im$, тобто $A \cap B$ – випадкова подія.

На множині $\Im$ підмножин Ω, як і на будь-якій множині, можна визначати деяку числову функцію. Частинним випадком такої функції і є ймовірність випадкової події.

Означення 3. Нехай на σ-алгебрі $\Im$ визначена числова функція $P(A)$, $A \in \Im$, і нехай вона має наступні властивості:

1. $P(A) \geq 0$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. З того, що $A_k \in \Im$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, причому $A_k \cap A_s = \varnothing$ для всіх $k, s = 1, 2, 3, \ldots$; $k \neq s$, випливає рівність $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

Тоді функція $P(A)$, $A \in \Im$ називається ***ймовірністю випадкової події A***.

Із аксіом 1 – 3 випливають ще й такі властивості ймовірності $P(A)$

1. Якщо $A \subset B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
2. Якщо $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$,
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,
4. $P(\varnothing) = 0$,

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

<u>Означення 4.</u> Трійка $\{\Omega,\ \Im,\ P\}$ називається ***ймовірнісним простором***.

Далі розглянемо деякі частинні випадки ймовірнісних просторів.

6. Дискретні ймовірнісні простори

Нехай Ω складається із скінченної або зліченної кількості елементарних подій, тобто $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2, \ldots,\ \omega_n, \ldots\}$. В цьому випадку $\Im$ містить підмножини Ω вигляду $\Omega,\ \varnothing,\ \omega_1,\ \omega_2, \ldots,\ \omega_n, \ldots,\ \{\omega_1,\ \omega_2\},$ $\{\omega_1,\ \omega_3\}, \ldots,\ \{\omega_{n_1},\ \omega_{n_2}\}, \ldots, \{\omega_{m_1},\ \omega_{m_2},\ \omega_{m_3}\}, \ldots, \{\omega_{s_1},\ \omega_{s_2}, \ldots,\ \omega_{s_k}\}, \ldots$. Якщо кожному $\omega_k \in \Omega$ $(k = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ поставити у відповідність число $p(\omega_k) \ge 0$ таке, що $\sum_{k=1}^{\infty} p(\omega_k) = 1$, то тоді для довільної випадкової події $A \in \Im$ ймовірністю $P(A)$ буде число, що визначається формулою $P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p(\omega_k)$. Утворена таким чином трійка $\{\Omega,\ \Im,\ P\}$ називається ***дискретним ймовірнісним простором***.

7. Геометричні ймовірності

Розглянемо випадок, коли Ω є множиною всіх точок деякої плоскої фігури, що має площу S_Ω. Позначимо через $\Im$ систему тих підмножин Ω, які теж мають площу та утворюють при цьому σ-алгебру. Тоді для довільної підмножини $A \in \Im$, що має площу S_A і є випадковою подією, функція $P(A) = \dfrac{S_A}{S_\Omega}$ задовольняє всім аксіомам для ймовірності. Отже $P(A)$ є ймовірністю випадкової події A, а утворена таким чином трійка $\{\Omega,\ \Im,\ P\}$ називається ***геометричним ймовірнісним простором***.

Зауважимо, що аналогічно утворюється геометричний ймовірнісний простір у випадках, коли Ω є деякою множиною точок на прямій або в просторі та має відповідно довжину або об'єм.

<u>Приклад 1.</u> (Задача про зустріч) Дві особи домовились зустрітись у проміжку часу від 0 до T, причому кожен чекає іншого часу не більше, ніж τ. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

Введемо позначення

x – час приходу першої особи, $x \in [0, T]$,

y – час приходу другої особи, $y \in [0, T]$.

При цьому простір елементарних подій Ω має вигляд $\Omega = \{(x, y) : x \in [0, T],\ y \in [0, T]\}$ та може бути зображеним у вигляді квадрата на координатній площині XOY (рис. 1).

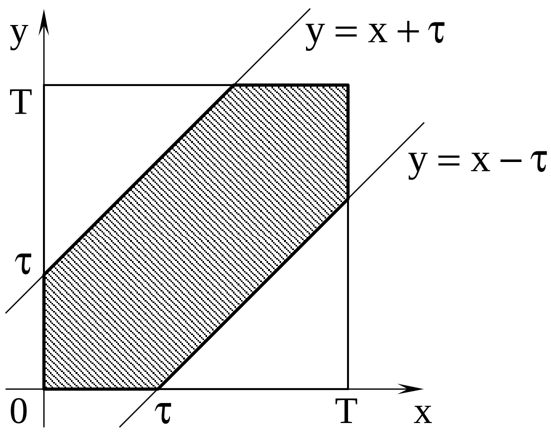


Рис. 1

Згідно з умовою задачі умовою того, що зустріч відбудеться, є нерівність $|y - x| \le \tau$, або, що те саме, $x - \tau \le y \le x + \tau$. Звідси випливає, що випадкова подія A, яка полягаєв тому, що зустріч двох осіб відбудеться, має вигляд $A = \{(x, y) : x - \tau \le y \le x + \tau,\ x \in [0, T],\ y \in [0, T]\}$ та може бути зображеною на координатній площині XOY у вигляді тієї частини Ω, що лежить між прямими $y = x - \tau$, $y = x + \tau$ (на рис. 1 – заштрихована). Маємо геометричний ймовірнісний простір, тому

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{T^2-(T-\tau)^2}{T^2}=1-\left(\frac{T-\tau}{T}\right)^2.$$

8. Умовна ймовірність та незалежність випадкових подій. Формула множення ймовірностей

Перед тим, як дати означення умовної ймовірності, розглянемо це поняття на простому прикладі.

Приклад 1. Нехай проводиться експеримент, кількість елементарних подій у якому рівна n і всі вони рівноможливі (класичний підхід до поняття ймовірності). Нехай деякі випадкові події A та B складаються з m та k елементарних подій відповідно, при цьому $A\cap B$ складається з s із них.

Знайти: 1) ймовірність випадкової події A (безумовна ймовірність A),

2) ймовірність випадкової події A при умові, що відбулась подія B (умовна ймовірність A, яку позначимо символом $P(A/B)$).

В обох випадках застосовуємо класичний підхід до означення ймовірності випадкової події.

1) В першому випадку маємо $P(A)=\frac{m}{n}$.

2) В другому випадку при застосуванні класичного підходу до поняття ймовірності слід взяти не всі m елементарних подій, що сприяють A, а лише ті, що відбуваються одночасно із подією B, тобто ті що складають $A\cap B$, яких буде s. Кількість всіх можливих елементарних подій при цьому теж буде не n, а k (беруться ті елементарні події, що становлять B). Отже $P(A/B)=\frac{s}{k}$. Цю формулу можна переписати також у вигляді

$$P(A/B)=\frac{\left(\frac{s}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Означення 1. Якщо $P(B) \neq 0$, то умовною ймовірністю випадкової події А при умові, що відбулась випадкова подія В, називається число $P(A/B)$, яке визначається формулою $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Приклад 2. Двічі кидається гральний кубик. Позначимо через А випадкову подію, яка полягає в тому, що сума очок, які випали, рівна 8, а через В – що перший раз випала непарна кількість очок.. Обчислити $P(A/B)$.

Нехай $\omega_{i,j} = (i, j)$ – елементарна подія, яка означає, що за першим разом випало і очок, а за другим – j очок $(i, j = 1, 2, \ldots, 6)$. Тоді

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{Bmatrix} (2,6) \\ (3,5) \\ (4,4) \\ (5,3) \\ (6,2) \end{Bmatrix},$$

$$B = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \end{Bmatrix}, \quad A \cap B = \begin{Bmatrix} (3,5) \\ (5,3) \end{Bmatrix}.$$

Отже $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{18}{36}} = \dfrac{1}{9}$.

Дві випадкові події вважаються ***незалежними***, якщо $P(A/B) = P(A)$ і $P(B/A) = P(B)$, або, що те саме $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Остання рівність і приймається за означення незалежності двох випадкових подій. Відзначимо, що коли А і В – незалежні, то незалежними будуть також: 1) A і $\overline{B}$, 2) $\overline{A}$ і B, 3) $\overline{A}$ і $\overline{B}$. Несумісні випадкові події А і В завжди залежні, якщо $P(A) \neq 0,\ P(B) \neq 0$.

З означення умовної ймовірності випливає наступна формула

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$, що називається ***формулою множення ймовірностей*** та може бути узагальненою за допомогою методу математичної індукції до вигляду

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\cap A_n)=$$
$$P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}).$$

У випадку, коли всі A_k $(k=1,2,\ldots,n)$ незалежні, остання формула набуває вигляду $P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n)$.

Приклад 3. В урні 4 чорних і 6 білих куль. З неї навмання вибирають 3 кулі. Знайти ймовірність того, що всі вибрані кулі – білі.

Вводимо позначення для випадкових подій:

$Б_k$ $(k=1,2,3)$ – за k-тим разом вибрана біла куля, A – всі вибрані кулі білі.

Очевидно, $Б_k$ $(k=1,2,3)$ – залежні випадкові події, тому

$$P(A)=P(Б_1)\cdot P(Б_2/Б_1)\cdot P(Б_3/Б_1\cap Б_2)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{6}$$

на основі класичного підходу до поняття ймовірності та формули множення ймовірностей.

Приклад 4. Перша гармата влучає в ціль із ймовірністю 0,8. Друга та третя – із ймовірностями 0,6 та 0,4 відповідно. Ці гармати незалежно одна від одної одночасно роблять по одному пострілу по цілі. Знайти ймовірність того, що в ціль влучить хоча б одна гармата.

Вводимо позначення для випадкових подій:

A_k $(k=1,2,3)$ – в ціль влучила k-та гармата, A – хоча б одна гармата влучила в ціль. Згідно з умовою задачі випадкові події A_k $(k=1,2,3)$ – незалежні, а оже незалежними будуть і $\overline{A}_k$ $(k=1,2,3)$ – в ціль не влучила k-та гармата. Випадкова подія $\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$ означає, що в ціль не влучила жодна гармата, тому $A=\overline{(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3)}$. Звідси, застосовуючи формулу множення ймовірностей для незалежних подій та властивості ймовірності, маємо

$$P(A) = P(\overline{\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) =$$
$$= 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_1) \cdot (1 - P(A_1) =$$
$$= 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 1 - 0{,}048 = 0{,}952.$$

9. Теорема про повну ймовірність та формули Байєса

Означення 1. Говорять, що випадкові події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ утворюють повну групу подій, якщо

1) $H_k \cap H_s = \varnothing$ для всіх $k, s = 1, 2, \ldots n$; $k \neq s$,

2) $\bigcup\limits_{k=1}^{n} H_k = \Omega$.

Теорема 1. (про повну ймовірність) Якщо $H_1, H_2, \ldots, H_n$ утворюють повну групу подій, то для довільної випадкової події A має місце рівність $P(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(A / H_k) \cdot P(H_k)$, яку називають ***формулою повної ймовірності***.

На практиці $H_1, H_2, \ldots, H_n$ називають гіпотезами, а ймовірності $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ – апріорними ймовірностями цих гіпотез. В ряді випадків виникає необхідність уточнити їх значення, маючи деяку додаткову інформацію. Найчастіше ця інформація полягає в тому, що після проведеного експерименту стає відомо, чи відбулась деяка випадкова подія A і отже мова йде про обчислення умовних ймовірностей $P(H_1 / A), P(H_2 / A), \ldots, P(H_n / A)$, які називають апостеріорними. Їх обчислюють за ***формулами Байєса***

$$P(H_s / A) = \frac{P(A / H_s) \cdot P(H_s)}{P(A)} \quad (s = 1, 2, \mathbf{K}, n),$$

де $P(A)$ знаходиться за формулою повної ймовірності.

<u>Приклад 1.</u> На склад заводи №1, №2 та №3 надіслали відповідно 4, 7 та 9 коробок із однаковими деталями. Завод №1 виробляє 2% бракованих деталей, для заводів №2 та №3 ці величини відповідно рівні 5% та 10%. Навмання вибирають коробку, а з неї – деталь. Знайти ймовірність того, що ця деталь буде бракованою.

Маємо наступні гіпотези:

H_1 – вибрали коробку заводу №1, $P(H_1) = \frac{4}{20}$,

H_2 – вибрали коробку заводу №2, $P(H_2) = \frac{7}{20}$,

H_3 – вибрали коробку заводу №3, $P(H_3) = \frac{9}{20}$.

Нехай A – випадкова подія, яка полягає в тому, що навмання взята деталь із навмання вибраної коробки – бракована, тоді $P(A / H_1) = 0{,}02$; $P(A / H_2) = 0{,}05$; $P(A / H_3) = 0{,}1$. Отже, згідно з формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(A / H_1) \cdot P(H_1) + P(A / H_2) \cdot P(H_2) + P(A / H_3) \cdot P(H_3) =$$

$$= 0{,}02 \cdot \frac{4}{20} + 0{,}05 \cdot \frac{7}{20} + 0{,}1 \cdot \frac{9}{20} = \frac{0{,}08 + 0{,}35 + 0{,}9}{20} = \frac{1{,}33}{20} = 0{,}0665.$$

<u>Приклад 2.</u> На склад заводи №1, №2 та №3 надіслали відповідно 3, 6 та 11 коробок із однаковими деталями. Завод №1 виробляє 15% бракованих деталей, для заводів №2 та №3 ці величини відповідно рівні 10% та 5%. Навмання вибирають коробку, а з неї – деталь, яка виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що ця деталь виготовлена заводом №1.

Відбулась випадкова подія A – навмання взята деталь із навмання вибраної коробки – бракована. Враховуючи, що маємо наступні апріорні гіпотези та пов'язані з ними ймовірності

H_1 – вибрали коробку заводу №1, $P(H_1)=\frac{3}{20}$, $P(A/H_1)=0{,}15$;

H_2 – вибрали коробку заводу №2, $P(H_2)=\frac{6}{20}$, $P(A/H_2)=0{,}1$;

H_3 – вибрали коробку заводу №3, $P(H_3)=\frac{11}{20}$, $P(A/H_3)=0{,}05$;

за формулою повної ймовірності обчислюємо ймовірність $P(A)$

$$P(A)=P(A/H_1)\cdot P(H_1)+P(A/H_2)\cdot P(H_2)+P(A/H_3)\cdot P(H_3)=$$
$$=0{,}15\cdot\frac{3}{20}+0{,}1\cdot\frac{6}{20}+0{,}05\cdot\frac{11}{20}=\frac{0{,}45+0{,}6+0{,}55}{20}=\frac{1{,}6}{20}=0{,}08.$$

Після цього згідно з формулами Байєса знаходимо потрібну апостеріорну ймовірність $P(H_1/A)=\frac{P(A/H_1)\cdot P(H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}15\cdot\frac{3}{20}}{0{,}08}=\frac{\left(\frac{9}{4}\right)}{8}=\frac{9}{32}$.

10. Схема Бернуллі та біноміальні ймовірності

Нехай в одних і тих же умовах незалежно один від одного проводиться n експериментів, у кожному з яких може бути лише одне з двох – або успіх "У" із ймовірністю p, або невдача "Н" із ймовірністю q $(q=1-p)$. Така схема проведення експериментів називається ***схемою Бернуллі***.

Нехай A_n^k $(k=0,1,\ldots,n)$ – випадкова подія, яка полягає в тому, що при n експериментах схеми Бернуллі успіх (У) з'явився рівно k раз. Ймовірності $P_n(k)=P(A_n^k)$ цих випадкових подій називаються ***біноміальними ймовірностями*** та обчислюється за формулами $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $(k=0,1,\ldots,n)$. Зауважимо, що їх зручно застосовувати лише при невеликих значеннях n, порядку 10 (~10). Коли ж число n велике, порядку 100 (~100) і більше, для обчислення $P_n(k)$ застосовують наступні наближені формули, що випливають відповідно з ***теореми Пуассона***, ***локальної теореми Муавра-Лапласа*** та ***інтегральної теореми Муавра-Лапласа***.

1. Якщо n велике, ~100 і більше, а p мале, порядку 0,01 і менше, то тоді $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, де $\lambda = np$.
2. Якщо n велике, ~100 і більше, а p не мале (порядку 0,1), то тоді $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$, де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\varphi(x)$ – парна функція.
3. Якщо n велике, ~100 і більше, а p не мале (порядку 0,1), то тоді $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$, де $P_n(k_1, k_2)$ – ймовірність випадкової події, яка полягає в тому, що при n експериментах схеми Бернуллі число успіхів (У) задовольняє умову $k_1 \le k \le k_2$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Функція $\Phi(x)$ називається функцією Лапласа і є непарною. Крім того, $\Phi(+\infty) = \frac{1}{2}$.

Зауважимо, що значення функцій $\varphi(x), \Phi(x)$ даються в зручних для практичного застосування таблицях, які містяться, як правило, в кожному підручнику з теорії ймовірностей або математичної статистики.

Наведемо ще кілька важливих результатів, пов'язаних із схемою Бернуллі.

1. Якщо $P_n(k_0) = \max\limits_{0 \le k \le n}\{P_n(k)\}$, то тоді число k_0 називається найбільш імовірним числом успіхів у схемі Бернуллі і задовольняє умову $np - q \le k_0 \le np + p$.

2. Згідно зі статистичним підходом до поняття ймовірності випадкової події, відношення $\frac{k}{n}$ є частотою успіху, що має ймовірність p. Для довільного $\varepsilon > 0$ при великих n (~100 і більше) та не малих p (порядку 0,1), має місце наближена рівність

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Вона дозволяє оцінити ймовірність відхилення частоти випадкової події (успіху) від її ймовірності на величину, не більшу за ε.

<u>Приклад 1.</u> Монета підкидається і падає на рівну тверду поверхню 10 раз. Знайти ймовірність того, що герб випаде рівно 3 рази.

Маємо 10 експериментів схеми Бернуллі, де успіх – це випадіння герба в одному окремому експерименті, його ймовірність $p = \frac{1}{2}$. Невдачею є випадіння решітки з ймовірністю $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, отже згідно з формулою для обчислення біноміальних ймовірностей маємо для $P_n(k)$ при $n = 10$, $k = 3$

$$P_{10}(3) = C_{10}^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 120 \cdot \frac{1}{1024} = \frac{15}{128}.$$

<u>Приклад 2.</u> Завод виготовив 225 однакових деталей. Ймовірність того, що кожна з них може виявитись нестандартною, рівна 0,2. Знайти ймовірність того, що серед виготовлених деталей кількість нестандартних буде не меншою 40 і не більшою 60.

Маємо схему Бернуллі при $n = 225;\ p = 0{,}2;\ q = 0{,}8$. При цьому успіхом буде те, що виготовлена деталь – нестандартна. Так як n велике (~100), p не мале (порядку 0,1), а число k успіхів задовольняє умову $40 \le k \le 60$, то для знаходження $P_n(k_1, k_2) = P_{225}(40, 60)$ застосовуємо наближену рівність, що є наслідком інтегральної теореми Муавра-Лапласа. Маємо

$$P_{225}(40, 60) \approx \Phi\left(\frac{60-45}{\sqrt{45\cdot 0{,}8}}\right) - \Phi\left(\frac{40-45}{\sqrt{45\cdot 0{,}8}}\right) = \Phi\left(\frac{15}{\sqrt{36}}\right) - \Phi\left(\frac{-5}{\sqrt{36}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{15}{6}\right) + \Phi\left(\frac{5}{6}\right) = \Phi(2{,}5) + \Phi(0{,}83).$$

В таблиці для $\Phi(x)$ знаходимо $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$, $\Phi(0{,}83) = 0{,}2967$. Остаточно одержуємо $P_{225}(40, 60) = 0{,}4938 + 0{,}2937 = 0{,}7875$.

<u>Приклад 3.</u> Скільки раз слід підкинути гральний кубик, щоб найбільш імовірне число випадінь шести очок було рівним 5 ?

Тут у схемі Бернуллі $k_0 = 5;\ p = \frac{1}{6};\ q = \frac{5}{6}$, тому використовуючи співвідношення $np - q \le k_0 \le np + p$, послідовно одержуємо

$$\frac{n}{6} - \frac{5}{6} \le 5 \le \frac{n}{6} + \frac{1}{6},\quad n - 5 \le 30 \le n + 1,\quad \begin{cases} n \ge 29, \\ n \le 35. \end{cases}$$

Отже, щоб найбільш імовірне число випадінь шести очок було рівним 5, гральний кубик слід підкинути не менше 29 і не більше 35 раз.

РОЗДІЛ ІІ. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

1. Поняття випадкової величини та її функції розподілу

На просторі елементарних подій Ω, як і на кожній множині, може бути визначена деяка числова функція $\xi = \xi(\omega),\ \omega \in \Omega$. При певних умовах, які будуть обумовлені пізніше, така функція називається випадковою величиною.

<u>Приклад 1.</u> Гральний кубик кидається один раз. Визначимо випадкову величину ξ як кількість очок, що випала. Записати ξ як функцію, визначену на Ω.

В даному випадку маємо $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де ω_k $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ – елементарна подія, яка полягає в тому, що випало k очок. При цьому $\xi(\omega_k) = k,\ \omega_k \in \Omega$.

Приклад 2. Монета підкидається і падає на тверду поверхню до тих пір, поки не випаде герб (Г). Нехай випадкова величина ξ означає число підкидань монети. Записати ξ як функцію, визначену на Ω.

Тут $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ складається з елементарних подій вигляду $\omega_k = \underbrace{РР\ldots Р}_{k-1 \text{ раз}}Г$ $(k = 1, 2, \ldots)$, тобто перші $k-1$ рази випадала решітка (Р), а на k-тому підкиданні випав герб (Г). При цьому $\xi(\omega_k) = k,\ \omega_k \in \Omega$.

Приклад 3. З відрізку $[0;1]$ навмання вибирається дійсне число. Нехай ξ – координата вибраного числа на числовій прямій. Записати ξ як функцію, визначену на Ω.

В цьому випадку $\Omega = \{\omega : \omega = x,\ x \in [0;1]\}$, а отже $\xi(\omega) = \omega,\ \omega \in \Omega$.

Наведені приклади підтверджують, що випадкова величина – це функція, задана на просторі елементарних подій. Але не всяка з цих функцій буде випадковою величиною, тому уточнимо це поняття.

Означення 1. Нехай Ω – простір елементарних подій, $\Im$ – система підмножин із Ω, які утворюють σ-алгебру. Числова функція $\xi = \xi(\omega),\ \omega \in \Omega$, називається вимірною відносно σ-алгебри $\Im$, якщо для довільного дійсного значення x множина A тих значень ω, для яких $\xi(\omega) < x$, належить $\Im$, тобто $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \Im$.

Означення 2. Нехай $\{\Omega, \Im, P\}$ – деякий ймовірнісний простір. Випадковою величиною називається числова функція $\xi = \xi(\omega)$, визначена на Ω та вимірна відносно σ-алгебри $\Im$.

Приклад 4. Нехай $\xi = \xi(\omega)$ – випадкова величина. Довести, що $\{\omega: \xi(\omega) \le x\} \in \Im$.

Маємо $\{\omega: \xi(\omega) \le x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{\omega: \xi(\omega) < x + \frac{1}{k}\}$. Так як згідно з означенням випадкової величини $\{\omega: \xi(\omega) < x + \frac{1}{k}\} \in \Im$, то і $\bigcap_{k=1}^{\infty} \{\omega: \xi(\omega) < x + \frac{1}{k}\} \in \Im$, а отже $\{\omega: \xi(\omega) \le x\} \in \Im$.

Аналогічно $\{\omega: \xi(\omega) \ge x\} \in \Im$, $\{\omega: \xi(\omega) = x\} \in \Im$, $\{\omega: \xi(\omega) > x\} \in \Im$, $\{\omega: a \le \xi(\omega) < b\} \in \Im$ для довільних дійсних значень а та в.

Означення 3. Ймовірність вигляду $F(x) = P\{\omega: \xi(\omega) \le x\}$, $-\infty < x < +\infty$, називається функцією розподілу ймовірностей (або просто функцією розподілу) випадкової величини $\xi(\omega)$, визначеної на ймовірнісному просторі $\{\Omega, \Im, P\}$.

Тут для спрощення часто пишуть $\{\xi(\omega) < x\}$ або навіть $\{\xi < x\}$ замість $\{\omega: \xi(\omega) < x\}$

Приклад 5. Монета підкидається один раз і падає на тверду поверхню. Випадкова величина $\xi(\omega)$ приймає значення 1, якщо випав герб (Г) та 0, якщо випала решітка (Р). Знайти функцію розподілу $\xi(\omega)$ та зобразити її на графіку.

Маємо дискретний ймовірнісний простір, де $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{Г, Р\}$, де $\omega_1 = \{\text{випав герб}\}$, $\omega_2 = \{\text{випала решітка}\}$. Випадкова величина $\xi(\omega)$ приймає лише два значення: 1 та 0, із ймовірностями $p_1 = P(\omega_1) = P\{\xi(\omega) = 1\} = \frac{1}{2}$ та $p_2 = P(\omega_2) = P\{\xi(\omega) = 0\} = \frac{1}{2}$ відповідно. Враховуючи це та означення функції розподілу, для довільного $x \in R$ маємо

$$F(x) = P\{\xi(\omega) < x\} = \begin{bmatrix} P(\varnothing) & x \le 0, \\ P(\omega_2) & 0 < x \le 1, \\ P(\Omega) & x > 1, \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \le 0, \\ \frac{1}{2} & 0 < x \le 1, \\ 1 & x > 1. \end{bmatrix}$$

Зобразимо цю функцію розподілу на графіку (рис. 2).

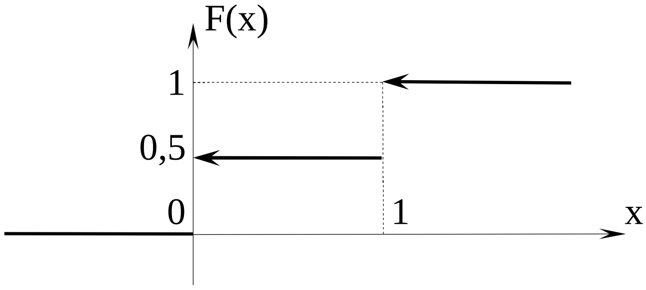


Рис. 2

Приклад 6. В круг, що має радіус R, навмання ставиться точка. Нехай $\xi(\omega)$ – віддаль від точки до центра круга. Знайти функцію розподілу $\xi(\omega)$ та побудувати її графік.

Побудуємо геометричний ймовірнісний простір, позначивши через Ω таку множину $\Omega = \{\omega = (u, v) : u^2 + v^2 \le R^2\}$ на координатній площині UOV (рис. 3).

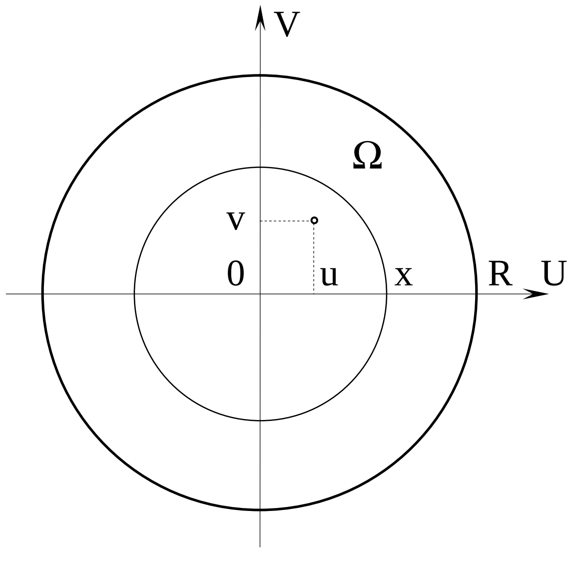


Рис. 3

При цьому $\xi(\omega) = \sqrt{u^2 + v^2}$, і отже $\{\omega:\ \xi(\omega) < x\} = \{(u, v) : u^2 + v^2 \le x^2\}$.

Тому, враховуючи означення функції розподілу, $F(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\} =$

$= P\{(u,v) : u^2 + v^2 \le x^2\}$. Застосовуючи поняття геометричної ймовірності, звідси остаточно одержуємо

$$F(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{\pi x^2}{\pi R^2}, & 0 < x \le R, \\ 1, & x > R, \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \left(\dfrac{x}{R}\right)^2, & 0 < x \le R, \\ 1, & x > R. \end{cases}$$

Будуємо графік цієї функції (рис. 4)

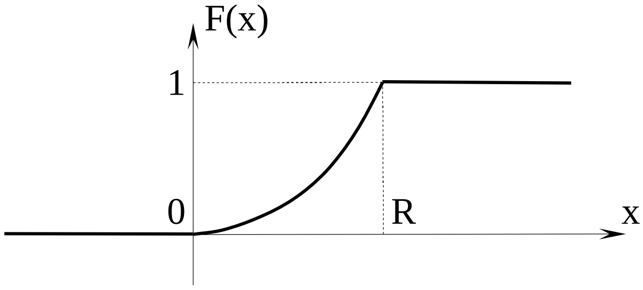


Рис 4

Властивості функції розподілу ймовірностей випадкової величини

1. $F(x) \ge 0$,
2. $F(x)$ монотонно не спадає, тобто якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$,
3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$,
4. $F(x)$ неперервна зліва, тобто $F(x-0) = F(x)$,
5. $P\{\xi \ge x\} = 1 - F(x)$, $P\{\xi \le x\} = F(x+0)$, $P\{\xi = x\} = F(x+0) - F(x)$, $P\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a)$.

2. *Дискретні та неперервні випадкові величини та їх закони розподілу*

Означення 1. Випадкова величина $\xi(\omega)$ називається ***дискретною (має дискретний розподіл ймовірностей)***, якщо вона приймає скінченну або зліченну кількість значень.

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ – це ті значення, що їх приймає випадкова величина $\xi(\omega)$ із ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ відповідно, при цьому $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. Тоді співвідношення $p_k = P\{\xi(\omega) = x_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, що повністю характеризують поведінку $\xi(\omega)$, називаються ***законом розподілу*** цієї дискретної випадкової величини. Якщо вважати, що числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ впорядковані за зростанням, то функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ даної випадкової величини можна записати у вигляді

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2 & x_2 < x \le x_3, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{k=1}^{n} p_k & x_n < x \le x_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Цю функцію теж називають законом розподілу дискретної випадкової величини, її графік має східчастий характер (рис. 5)

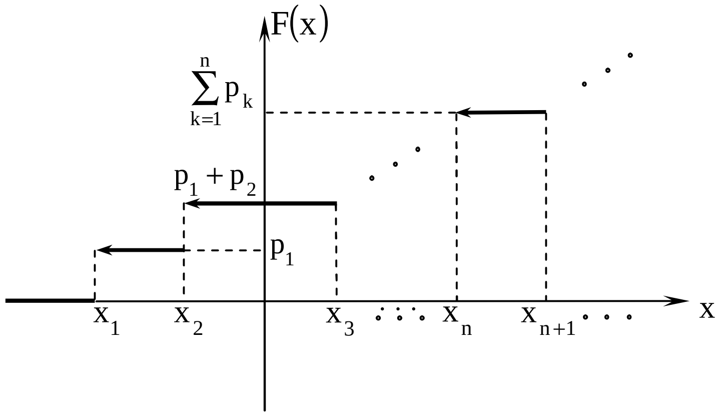


Рис. 5

Наведемо приклади дискретних розподілів.

1. *Біноміальний розподіл*. Випадкова величина $\xi(\omega)$ має біноміальний розподіл, якщо її закон розподілу визначається виразом

$$p_k = P\{\xi(\omega) = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},\ \ 0 < p < 1,\ \ q = 1 - p\ \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Такий закон розподілу має випадкова величина, що рівна числу появи успіху при n експериментах схеми Бернуллі, у якій p – ймовірність успіху в одному експерименті.

2. *Розподіл Пуассона*. Цей закон розподілу має вигляд

$$p_k = P\{\xi(\omega) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \lambda > 0, \ (k = 1, 2, \mathbf{K}).$$

До нього наближається біноміальний при $n \to \infty$, $p \to 0$, але так, що $np = \lambda$.

<u>Означення 2.</u> Нехай випадкова величина $\xi(\omega)$ має функцію розподілу $F(x)$. Якщо існує інтегрована та невід'ємна при $x \in R$ функція $p(x)$ така, що $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$, то тоді ця випадкова величина називається ***неперервною (має неперервний розподіл ймовірностей)***. При цьому кажуть, що $p(x)$ є ***густиною (щільністю) розподілу ймовірностей*** $\xi(\omega)$.

<u>Властивості густини</u>

1. $p(x) \ge 0$,
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$,
3. $p(x) = F'(x)$ в точках неперервності $p(x)$,
4. В точках неперервності $p(x)$, має місце рівність $P\{x \le \xi < x + \Delta x\} =$ $= p(x)\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$,
5. $P\{a \le \xi < b\} = \int\limits_{a}^{b} p(x)dx$.

Приклади неперервних розподілів:

1. *Рівномірний розподіл*. Якщо густина $p(x)$ випадкової величини $\xi(\omega)$ має вигляд $p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a; b], \\ 0, & x \in (-\infty; a) \cup (b; +\infty), \end{cases}$ то тоді говорять, що

ця випадкова величина має рівномірний розподіл на $[a,b]$. Графік густини даного розподілу зображено на рис. 6.

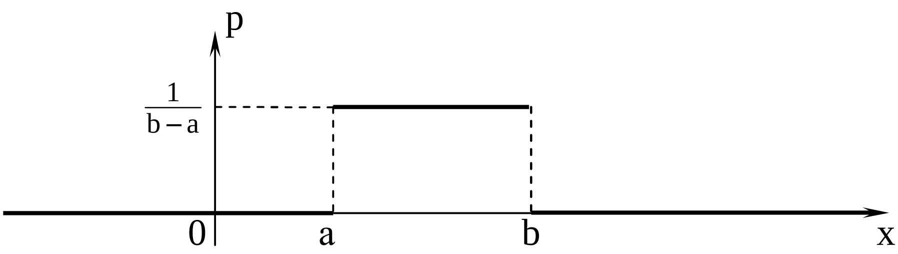


Рис. 6

2. *Показниковий розподіл*. В цьому випадку $p(x)=\begin{cases}\lambda\exp\{-\lambda x\}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

На рис.7 наведено графік цієї функції.

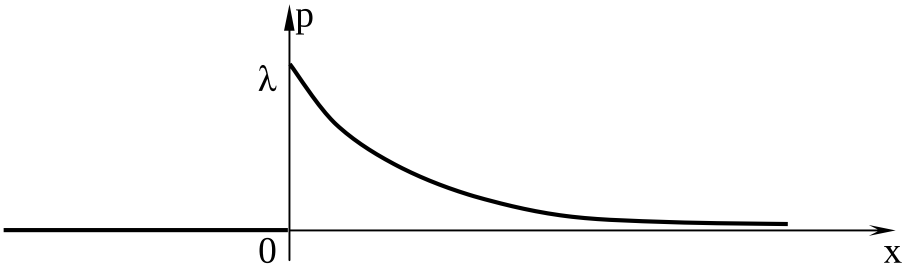


Рис. 7

3. *Нормальний (Гаусівський) розподіл*. Густина даного розподілу має вигляд $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $x\in(-\infty;+\infty)$, при цьому говорять, що відповідна випадкова величина є нормальною з параметрами $N(a,\sigma^2)$. Її графік зображено на рис. 8.

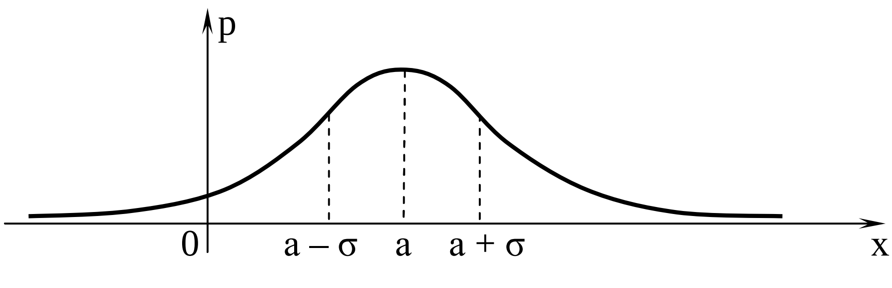


Рис. 8

Вважають, що цей розподіл мають випадкові похибки вимірювань фізичних величин.

3. Спільний розподіл системи кількох випадкових величин

Обмежимось випадком, коли на ймовірнісному просторі $\{\Omega,\ \Im,\ P\}$ визначені дві випадкові величини – $\xi_1(\omega)$ та $\xi_2(\omega)$.

<u>Означення 1.</u> Спільною функцією розподілу (спільним розподілом) двох випадкових величин $\xi_1(\omega)$ та $\xi_2(\omega)$ називається ймовірність вигляду $F(x, y) = P\{\omega : \xi_1(\omega) < x,\ \xi_2(\omega) < y\}$, де $\{\omega : \xi_1(\omega) < x,\ \xi_2(\omega) < y\} = \{\omega : \xi_1(\omega) < x\} \cap \{\omega : \xi_2(\omega) < y\},\ x \in R,\ y \in R$.

Така функція розподілу повністю характеризує поведінку системи $\xi_1(\omega)$ та $\xi_2(\omega)$ і має наступні властивості:

1. $F(x, +\infty) = F_1(x),\ F(+\infty, y) = F_2(y)$, де $F_1(x),\ F_2(y)$ – функції розподілу $\xi_1(\omega)$ та $\xi_2(\omega)$ відповідно.
2. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$.
3. Функція $F(x, y)$ неперервна по кожному аргументу зліва, тобто $F(x-0,\ y-0) = F(x,\ y)$.
4. $P\{\omega : a \le \xi_1(\omega) < b,\ c \le \xi_2(\omega) < d\} = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$.

Законом розподілу двох дискретних випадкових величин $\xi_1,\ \xi_2$, що приймають значення $x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n, \mathbf{K}$ і $y_1, y_2, \mathbf{K}, y_n, \mathbf{K}$, називаються ймовірності $p_{ij} = P\{\xi_1 = x_i,\ \xi_2 = y_j\};\ i, j = 1, 2, 3, \mathbf{K}$ або спільна функція розподілу $F(x, y)$ даних випадкових величин. Слід відзначити, що

$\sum_{j=1}^{\infty} p_{i\,j} = p_i^{(1)}$, де $p_i^{(1)} = P\{\xi_1 = x_i\}$ $(i = 1,\ 2,\ \mathbf{K})$ – закон розподілу ξ_1, $\sum_{i=1}^{\infty} p_{i\,j} = p_j^{(2)}$, де $p_j^{(2)} = P\{\xi_2 = y_j\}$ $(j = 1,\ 2,\ \mathbf{K})$ – закон розподілу ξ_2. Крім того, $\sum_{i,\,j=1}^{\infty} p_{i\,j} = 1$.

<u>Означення 2.</u> Нехай ξ_1, ξ_2 – дві неперервні випадкові величини, що мають спільну функцію розподілу $F(x, y)$. Якщо існує невід'ємна та інтегрована на всій координатній площині XOY функція $p(x, y)$ така, що $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} p(u, v)dv$, то $p(x, y)$ називається спільною густиною (спільною щільністю) розподілу ймовірностей ξ_1, ξ_2.

<u>Властивості спільної густини</u>

1. $p(x, y) \geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy = 1$,
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dy = p_1(x)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx = p_2(y)$, де $p_1(x)$, $p_2(y)$ – густини випадкових величин ξ_1 та ξ_2 відповідно.
4. $p(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$ в точках неперервності $p(x, y)$,
5. В точках неперервності $p(x, y)$ має місце рівність $P\{\omega:\ x \leq \xi_1 < x + \Delta x,\ y \leq \xi_2 < y + \Delta y\} = p(x, y)\Delta x \Delta y + o(\Delta x \Delta y)$, $\Delta x \Delta y \to 0$.

6. Для довільної області D на координатній площині XOY, яка має площу,

$$P\{\omega : (\xi_1, \xi_2) \in D\} = \iint\limits_D p(x,y)dxdy.$$

4. Функції від випадкових величин та їх закон розподілу

Розглянемо спочатку дискретну випадкову величину ξ, що має закон розподілу $p_k = P\{\xi(\omega) = x_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Якщо на інтервалі (a, b), що містить всі значення $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, визначена деяка функція $f(x)$, то за її допомогою можна визначити нову випадкову величину $\eta = f(\xi)$. Одержана таким чином випадкова величина η матиме наступний закон розподілу: $p_k = P\{\eta(\omega) = y_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, де $y_k = f(x_k)$. Слід відзначити, що якщо $f(x)$ не монотонна при всіх $x \in (a, b)$, то серед значень $f(x_k)$ випадкової величини η можуть бути однакові. Їх слід об'єднати, додавши відповідні ймовірності p_k.

<u>Приклад 1.</u> Закон розподілу дискретної випадкової величини ξ задано у вигляді таблиці

x_k	-1	0	1	2
p_k	0,15	0,1	0,25	0,5

, $k = 1, 2, 3, 4$. Знайти закон розподілу випадкової величини $\eta = \xi^2$.

В даному випадку $f(x) = x^2$, $x \in R$. Отже закон розподілу дискретної випадкової величини $\eta = \xi^2$ запишеться у вигляді наступної таблиці

y_k	1	0	1	4
p_k	0,15	0,1	0,25	0,5

, $k = 1, 2, 3, 4$. Після об'єднання однакових значень остаточно одержуємо

y_k	0	1	4
p_k	0,1	0,4	0,5

, $k = 1, 2, 3, 4$.

Розглянемо тепер неперервну випадкову величину ξ з густиною розподілу ймовірностей $p(x)$, яка приймає значення з деякого проміжку (a,b). Значення, що лежать поза проміжком (a,b), випадковою величиною ξ не приймаються, отже $p(x)=0$ при $x\notin(a,b)$. В частинних випадках а може бути $-\infty$, в може бути $+\infty$. Нехай на проміжку (a,b) визначена неперервна та монотонно зростаюча або монотонно спадна функція $y=f(x)$. За допомогою цієї функції можна утворити неперервну випадкову величину $\eta=f(\xi)$, яка приймає значення з проміжку (c,d), що є областю визначення функції $x=g(y)$, оберненої до $y=f(x)$. При цьому густина $q(y)$ випадкової величини η визначається формулою

$$q(y)=\left[\begin{array}{ll} p(g(y))\cdot|g'(y)|, & y\in(c,d), \\ \qquad 0, & y\notin(c,d). \end{array}\right.$$

Тут c,d можуть бути як скінченними числами, так і символами $-\infty$, $+\infty$. У випадку, коли $y=f(x)$ не буде ні монотонно зростаючою, ні монотонно спадною функцією на всьому проміжку (a,b), він розбивається на скінченну кількість частинних проміжків, у кожному з яких $f(x)$ монотонно зростає або спадає і до кожного з яких застосовується попередня формула. Одержані результати об'єднуються, причому для однакових проміжків змінної y відповідні складові для $q(y)$ додаються.

Приклад 2. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на $(-1,2)$. Знайти густину $q(y)$ випадкової величини $\eta=\xi^2$.

Згідно з умовою задачі густина ξ має вигляд: $p(x)=\left[\begin{array}{ll} \frac{1}{3}, & x\in(-1;2), \\ 0, & x\notin(-1;2). \end{array}\right.$

Функція $y = x^2$ монотонно спадає на $(-1, 0)$ і має обернену $x = -\sqrt{y}$ при $y \in (0,1)$ та монотонно зростає на $(0, 2)$ і має обернену $x = \sqrt{y}$ при $y \in (0, 4)$. На цих проміжках маємо наступні складові для $q(y)$:

$$q_1(y) = p(g(y)) \cdot |g'(y)| = \frac{1}{3} \cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{6\sqrt{y}}, \; y \in (0,1),$$

$$q_2(y) = p(g(y)) \cdot |g'(y)| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{6\sqrt{y}}, \; y \in (0, 4).$$

Об'єднуємо одержані результати, додаючи $q_1(y)$ та $q_2(y)$ на спільному проміжку $(0,1)$. Маємо: $q(y) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{y}}, & y \in (0,1), \\ \frac{1}{6\sqrt{y}}, & y \in [1, 4), \\ 0, & y \notin (0, 4). \end{cases}$

5. Незалежні випадкові величини. Розподіл суми двох незалежних випадкових величин

Обмежимось випадком системи двох випадкових величин.

<u>Означення 1.</u> Випадкові величини ξ_1 та ξ_2, що визначені на одному і тому ж ймовірнісному просторі $\{\Omega, \Im, P\}$, називаються незалежними, якщо для довільних дійсних чисел x, y виконується умова

$$P\{\omega : \xi_1 < x, \xi_2 < y\} = P\{\omega : \xi_1 < x\} \cdot P\{\omega : \xi_2 < y\},$$

тобто випадкові події $\{\omega : \xi_1 < x\}$ та $\{\omega : \xi_2 < y\}$ є незалежними.

Позначимо через $F_1(x)$, $F_2(y)$ функції розподілу випадкових величин ξ_1 та ξ_2 відповідно, і нехай $F(x, y)$ – їх спільна функція розподілу. Тоді, якщо ξ_1, ξ_2 незалежні, то $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$. Нехай ξ_1, ξ_2 – дискретні випадкові величини, що мають закони розподілу $p_i = P\{\xi_1(\omega) = x_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ та $q_j = P\{\xi_2(\omega) = y_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Тоді, коли ξ_1, ξ_2 є незалежними, то їх спільний розподіл має вигляд $p_{ij} = P\{\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j\} = p_i q_j$, $(i, j = 1, 2, \ldots)$. Для неперервних випадкових величин ξ_1, ξ_2 їх спільна густина $p(x, y)$ задовольняє умову $p(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$, де $p_1(x)$, $p_2(y)$ – густини ξ_1 та ξ_2 відповідно.

<u>Приклад 1.</u> Знайти спільний закон розподілу двох незалежних нормальних випадкових величин з параметрами $N(a_1, \sigma_1^2)$ та $N(a_2, \sigma_2^2)$.

Введемо позначення: $p_1(x)$ – густина ξ_1, $p_2(y)$ – густина ξ_2, $p(x, y)$ – їх спільна густина. Згідно з умовою задачі

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x - a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\},\ p_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(x - a_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\},$$
$$x, y \in (-\infty; +\infty).$$

Враховуючи незалежність ξ_1 та ξ_2, одержуємо спільний закон розподілу

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x - a_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y - a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\},\ x, y \in (-\infty; +\infty).$$

Розглянемо випадкову величину $\eta = \xi_1 + \xi_2$, де ξ_1, ξ_2 є незалежними неперервними випадковими величинами з густинами густини $p_1(x)$, $p_2(y)$ відповідно. Позначимо через $p(x)$ густину η,тоді

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(u) \cdot p_2(x - u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} p_2(u) \cdot p_1(x - u) du.$$

6. *Математичне сподівання та дисперсія випадкових величин, їх властивості*

Означення 1. Нехай дискретна випадкова величина ξ має закон розподілу $p_k = P\{\xi(\omega) = x_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тоді число $M\xi$, що визначається рівністю $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$, називається ***математичним сподіванням дискретної випадкової величини*** ξ при умові, що ряд у правій частині збігається абсолютно.

Означення 2. Якщо ξ – неперервна випадкова величина із густиною $p(x)$, то тоді вираз $M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$, в якому невласний інтеграл першого роду збігається абсолютно, називається ***математичним сподівання***м ***неперервної випадкової величини*** ξ.

Властивості математичного сподівання

1. Якщо C – стале дійсне число, то $MC = C$,
2. Для довільного дійсного числа C має місце рівність $M(C\xi) = C \cdot M\xi$,
3. $M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$,
4. Якщо $P\{a \le \xi \le b\} = 1$, то $a \le M\xi \le b$,
5. Якщо ξ_1 та ξ_2 незалежні, то $M(\xi_1 \cdot \xi_2) = M\xi_1 \cdot M\xi_2$,
6. $|M\xi| \le M|\xi|$.

Розглянемо дискретну випадкову величину ξ із законом розподілу $p_k = P\{\xi(\omega) = x_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ і нехай (a, b) – інтервал, що містить всі значення ξ і на якому визначена функція $f(x)$. Тоді $Mf(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)p_k$ при умові, що ряд у правій частині збігається абсолютно. Якщо ж ξ –

неперервна випадкова величина із густиною $p(x)$, функція $f(x)$ – неперервна при $x \in (-\infty, +\infty)$, то тоді $Mf(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx$, якщо невласний інтеграл першого роду в правій частині збігається абсолютно.

Означення 3. ***Дисперсією випадкової величини*** ξ називається число $D\xi$, яке визначається формулою $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$.

Останню формулу можна переписати також у вигляді $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

Властивості дисперсії

1. $D\xi \geq 0$,
2. $DC = 0$, де C – стале число,
3. Для довільного сталого числа C має місце рівність $D(C\xi) = C^2 D\xi$,
4. Якщо ξ_1 та ξ_2 незалежні, то $D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$.

Приклад 1. Знайти $M\xi$, $D\xi$, якщо ξ має біноміальний розподіл.

Закон розподілу такої випадкової величини ξ має вигляд

$$p_k = P\{\xi(\omega) = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \ \ 0 < p < 1, \ \ q = 1 - p \ \ (k = 1, 2, \mathbf{K}, n),$$

тому враховуючи, що $\sum\limits_{s=0}^{n-1} C_{n-1}^s p^s q^{n-1-s} = 1$ для закону розподілу $p_s = P\{\xi(\omega) = s\} = C_{n-1}^s p^s q^{n-1-s} \ \ (k = 0, 2, \mathbf{K}, n-1)$, маємо

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = \left| k - 1 = s \right| = np \sum_{s=0}^{n-1} C_{n-1}^s p^s q^{n-1-s} = np.$$

Враховуючи одержаний результат та аналогічні міркування відносно розподілу $p_s = P\{\xi(\omega) = s\} = C_{n-2}^s p^s q^{n-2-s} \ \ (k = 0, 2, \mathbf{K}, n-2)$, спочатку обчислюємо $M\xi^2$

$$M\xi^2=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^kp^kq^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k^2\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}=$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}[k-1+1]\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}=$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}p^{k-2}q^{n-k}+np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}=$$

$$=\left|k-2=s\right|=n(n-1)p^2\sum_{s=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{s!(n-2-s)!}p^sq^{n-2-s}+np=n^2p^2-np^2+np.$$

Тепер обчислюємо $D\xi$ згідно з формулою $D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2$. Маємо

$D\xi=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np(1-p)=npq$, де $q=1-p$.

Приклад 2. Знайти $M\xi$, $D\xi$, якщо ξ має розподіл Пуассона.

В цьому випадку $p_k=P\{\xi(\omega)=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda>0$, $(k=1,2,\mathbf{K})$,

отже $M\xi=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\left|k-1=s\right|=\lambda e^{-\lambda}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\lambda^s}{s!}=$

$$=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda,\quad M\xi^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1+1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=$$

$$=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-2}}{(k-1)!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda=$$

$$=\left|k-2=s\right|=\lambda^2e^{-\lambda}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\lambda^s}{s!}+\lambda=\lambda^2+\lambda,\quad D\xi=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

Приклад 3. Знайти $M\xi$, $D\xi$, якщо ξ має рівномірний розподіл на $[a,b]$.

Враховуючи, що густина $p(x)$ даної випадкової величини $\xi(\omega)$ має

вигляд $p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a;b],\\ 0, & x\in(-\infty;a)\cup(b;+\infty),\end{cases}$ одержуємо:

$$M\xi=\int_a^b\frac{xdx}{b-a}=\frac{x^2}{2(b-a)}\Bigg|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2},\ M\xi^2=\int_a^b\frac{x^2dx}{b-a}=\frac{x^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b=$$
$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3},\ D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-$$
$$-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

<u>Приклад 4.</u> Знайти $M\xi$, $D\xi$, якщо ξ має показниковий розподіл.

В даному випадку $p(x)=\begin{cases}\lambda\exp\{-\lambda x\}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ Тому послідовно одержуємо: $M\xi=\int\limits_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\begin{vmatrix}u=x & du=dx\\ dv=e^{-\lambda x}dx & v=\dfrac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\end{vmatrix}=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+$

$$+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}}+0-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_0^{+\infty}=-\frac{1}{\lambda}\left(\lim_{x\to+\infty}e^{-\lambda x}-1\right)=\frac{1}{\lambda},\ M\xi^2=$$
$$=\int_0^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\begin{vmatrix}u=x^2 & du=2xdx\\ dv=e^{-\lambda x}dx & v=\dfrac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\end{vmatrix}=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx=$$
$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{\lambda x}}+0+\frac{2}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2},\ D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}.$$

<u>Приклад 5.</u> Знайти $M\xi$, $D\xi$, якщо ξ має нормальний розподіл з параметрами $N(a,\sigma^2)$.

Густина $p(x)$ даного розподілу має наступний вигляд $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\},\ x\in(-\infty;+\infty)$. Враховуючи парність і непарність підінтегральних функцій та властивості функції Лапласа $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, одержуємо:

$$M\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{matrix}\frac{x-a}{\sigma}=t\\ dx=\sigma dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(a+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=a2\Phi(+\infty)+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt=a2\cdot\frac{1}{2}+0=a,$$

$$D\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{matrix}\frac{x-a}{\sigma}=t\\ dx=\sigma dt\end{matrix}\right|=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\left|\begin{matrix}u=t & du=dt\\ dv=te^{-\frac{t^2}{2}}dt & v=-e^{-\frac{t^2}{2}}\end{matrix}\right|=-\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}+$$

$$+\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0+2\sigma^2\Phi(+\infty)=2\sigma^2\frac{1}{2}=\sigma^2.$$

7. Коваріація та коефіцієнт кореляції. Моменти вищих порядків

Означення 1. Коваріацією двох випадкових величин ξ_1 та ξ_2 називається число $\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)$, яке визначається рівністю

$$\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)=M(\xi_1-M\xi_1)(\xi_2-M\xi_2).$$

Якщо ξ_1, ξ_2 – дискретні випадкові величини із спільним законом розподілу $p_{i\,j}=P\{\xi_1=x_i\,,\ \xi_2=y_j\};\ i,j=1,\ 2,\ 3,\ \mathbf{K}$, то тоді $\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)$ обчислюється за допомогою формули

$$\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)=\sum_{i,\,j=1}^{\infty}(x_i-M\xi_1)(y_j-M\xi_2).$$

У випадку ж, коли ξ_1, ξ_2 – неперервні випадкові величини, що мають спільну густину $p(x,y)$, то тоді

$$\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M\xi_1)(y-M\xi_2)p(x,y)dy.$$

Властивості коваріації

1. $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \operatorname{cov}(\xi_2, \xi_1)$,
2. $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = D\xi$,
3. $\operatorname{cov}(C\xi_1, \xi_2) = C\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$, C – стале число,
4. Якщо ξ_1 та ξ_2 – незалежні, то $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$,
5. $D(\xi_1 + \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + 2\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$ для довільних випадкових величин ξ_1 та ξ_2,
6. $\left|\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)\right| \le \sqrt{D\xi_1 D\xi_2}$.

Те, що $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$ відмінна від нуля для залежних випадкових величин та рівна нулю для незалежних, дозволяє використовувати її для характеристики міри залежності ξ_1 та ξ_2. Та найчастіше для цієї мети використовують поняття коефіцієнта кореляції двох випадкових величин.

<u>Означення 2.</u> Коефіцієнтом кореляції $\rho(\xi_1, \xi_2)$ двох випадкових величин ξ_1, ξ_2 називається число $\rho(\xi_1, \xi_2) = \dfrac{\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{D\xi_1 D\xi_2}}$.

Властивості коефіцієнта кореляції

1. $\left|\rho(\xi_1, \xi_2)\right| \le 1$,
2. Якщо ξ_1 та ξ_2 – незалежні, то $\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$,
3. Якщо між ξ_1 та ξ_2 існує лінійна залежність (тобто $\xi_2 = A\xi_1 + B$, де A, B – сталі), то тоді $\left|\rho(\xi_1, \xi_2)\right| = 1$.

Отже $\rho(\xi_1, \xi_2)$ може використовуватись як міра лінійної залежності між ξ_1 та ξ_2.

Означення 3. Моментом порядку $k\,(k=1,2,\ldots)$ випадкової величини ξ називається число $M\xi^k$. Центральним моментом порядку $k\,(k=1,2,\ldots)$ цієї ж випадкової величини ξ називається число $M(\xi - M\xi)^k$.

Згідно з цим означенням математичне сподівання ξ є моментом першого порядку, а дисперсія ξ є центральним моментом другого порядку даної випадкової величини. Відзначимо, що із існування моменту $M\xi^m\,(m\ge 2)$ випливає існування всіх моментів та центральних моментів порядку $k\,(k=1,2,\ldots,m)$.

8. Нерівність Чебишова, закон великих чисел та центральна гранична теорема

Теорема 1. Якщо $P\{\xi(\omega)\ge 0\}=1$ та існує $M\xi(\omega)$, то для довільного $\varepsilon>0$ виконується нерівність $P\{\xi(\omega)\ge\varepsilon\}\le\dfrac{M\xi(\omega)}{\varepsilon}$.

Теорема 2. (нерівність Чебишова) Якщо існує $D\xi$, то для довільного $\varepsilon>0$ виконується нерівність $P\{|\xi - M\xi|\ge\varepsilon\}\le\dfrac{D\xi}{\varepsilon^2}$.

Теорема 3. (закон великих чисел) Якщо випадкові величини $\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n,\ldots$ незалежні та $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}D\xi_k=0$, то для довільного $\varepsilon>0$ виконується рівність $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}M\xi_k\right|<\varepsilon\right\}=1.$

Найчастіше закон великих чисел застосовується у наступній формі, що є частинним випадком теореми 3.

Теорема 4. Якщо випадкові величини $\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n,\ldots$ незалежні, однаково розподілені та мають скінченні дисперсії $\sigma^2=D\xi_k$, $k=1,2,\ldots$ (а отже і скінченні математичні сподівання $a = M\xi_k$), то для довільного $\varepsilon > 0$ виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Твердження цієї теореми означає, що при необмеженому зростанні n випадкова величина $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$, все більше втрачаючи свою випадкову природу, наближається до невипадкового числа $a = M\xi_k$.

Розглянемо наступні практичні приклади застосування закону великих чисел.

Приклад 1. (метод Монте-Карло обчислення означених інтегралів). Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$ – незалежні та рівномірно розподілені на проміжку $[0,1]$ випадкові величини, $f(x)$ – неперервна при $x \in [0,1]$ функція. При цьому

$$Mf(\xi_k) = \int_0^1 f(x)\cdot 1dx = \int_0^1 f(x)dx,\ \ Mf^2(\xi_k) = \int_0^1 f^2(x)\cdot 1dx = \int_0^1 f^2(x)dx,$$

$$Df(\xi_k) = Mf^2(\xi_k) - [Mf(\xi_k)]^2.$$

Отже, на основі теореми 4 для довільного $\varepsilon > 0$ виконується рівність $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) - \int_0^1 f(x)dx\right| < \varepsilon\right\} = 1.$ Це означає, що $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)$ при досить великих n. Для формування незалежних та рівномірно розподілених на проміжку $[0,1]$ випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$ розроблено нескладні та зручні у практичному використанні алгоритми.

Приклад 2. (обчислення невідомої ймовірності випадкової події). Нехай A – деяка випадкова подія, появу або не появу якої можна фіксувати при проведенні серії однакових незалежних один від одного експериментів, що проводяться в одних і тих же умовах. При цьому ймовірність $p = P(A)$ появи випадкової події A вважається невідомою. Введемо позначення

$$\xi_k = \begin{cases} 0, \text{ якщо в } k\text{-тому експерименті не з'явилась випадкова подія } A, \\ 1, \text{ якщо в } k\text{-тому експерименті з'явилась випадкова подія } A. \end{cases}$$

Тоді $\nu_n(A) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ – число тих експериментів із n проведених, у яких А з'явилась, $\frac{\nu_n(A)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ – частота випадкової події А. Крім того, для незалежних випадкових величин ξ_k $(k = 1, 2, \ldots n, \ldots)$ маємо $M\xi_k = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$, $M\xi_k^2 = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$, $D\xi_k = M\xi_k^2 - (M\xi_k)^2 = p - p^2$, тому на основі теореми 4 для довільного $\varepsilon > 0$ виконується рівність $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\nu_n(A)}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$. Звідси випливає, що при досить великих значеннях n має місце наближена рівність $p \approx \frac{\nu_n(A)}{n}$, тобто невідома ймовірність p випадкової події А близька до частоти цієї події, яку можна обчислити експериментальним шляхом.

Теорема 5. (центральна гранична теорема) Якщо ξ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ – незалежні, однаково розподілені випадкові величини, причому $a = M\xi_k$, $\sigma^2 = D\xi_k$, то для довільного дійсного числа x має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Твердження теореми означає, що при необмеженому зростанні n закон розподілу випадкової величини

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

наближається до нормального з параметрами $N(0,1)$. На практиці вже при $n > 30$ цей закон вважають нормальним та використовують його при відповідних розрахунках ймовірностей.

РОЗДІЛ III. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

I. *ПРОСТІР ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПОДІЙ ТА ДІЇ З ВИПАДКОВИМИ ПОДІЯМИ*

1. Три рази підкидається монета, яка падає на підлогу з твердим покриттям. Події A_1, A_2, A_3 означають, що герб випав перший , другий, третій раз відповідно. Записати подію: випало хоча б два герби.
2. Три стрільці виконують незалежно один від одного по одному пострілу по мішені. Події A_1, A_2, A_3 означають, що попав у ціль перший , другий, третій стрілець відповідно. Записати подію: відбулось не більше одного попадання в мішень.
3. Нехай A, B, C – деякі випадкові події. Що означає випадкова подія $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$?
4. Стрілець стріляє по мішені до першого попадання. Випадкова подія A_1 – мішень вражена при першому пострілі, A_2 – при другому, і т. д. Записати подію: відбулось рівно чотири постріли.

5. Навмання вибирається натуральне число. Випадкова подія A – вибране число парне, B – вибране число ділиться на три. Що означає випадкова подія $\overline{A \cup B}$?
6. В групі частина студентів – відмінники, частина – спортсмени, частина – учасники художньої самодіяльності. Із цієї групи навмання вибирається один студент. Випадкова подія A – вибраний студент відмінник, B – спортсмен, C – учасник художньої самодіяльності. Записати подію: вибраний студент має не більше, ніж дві з перелічених якостей.
7. Нехай A, B, C – деякі випадкові події. Записати подію: відбулась лише одна із даних подій.
8. Із колоди гральних карт навмання вибирається одна. Випадкова подія A – вибрана карта пікової масті, B – вибрана карта туз. Що означає випадкова подія $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$?
9. Гральний кубик підкидається двічі. Записати простір елементарних подій Ω та випадкову подію A – сума очок, що випали, не менше дев'яти.
10. Монета кидається три рази на підлогу з твердим покриттям. Записати простір елементарних подій Ω та випадкову подію A – герб випав один раз.
11. Нехай A, B, C – деякі випадкові події. Що означає випадкова подія $(\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$?
12. Гральний кубик підкидається двічі. Випадкова подія A – обидва рази випало одне і те ж число очок, B – перший раз випало непарне число очок. Що означає випадкова подія $A \setminus B$?
13. Монета підкидається над підлогою з твердим покриттям до першої появи герба. Записати простір елементарних подій Ω та випадкову подію A – відбулось не менше трьох підкидань.

14. Є п’ять деталей, серед яких можуть бути дефектні. Випадкова подія A_k $(k = 1, 2, \ldots, 5)$ полягає в тому, що k-та деталь дефектна. Записати подію: жодна деталь не має дефекту.
15. Навмання вибирається натуральне число. Випадкова подія A – вибране число непарне, B – вибране число ділиться на п’ять. Що означає випадкова подія $A \cap \overline{B}$?
16. По каналу зв’язку послідовно передаються три повідомлення. Випадкова подія A_k $(k = 1, 2, 3)$ полягає в тому, що k-те повідомлення передано правильно. Записати подію: хоча б одне повідомлення передане правильно.
17. Відбувається спостереження за групою із чотирьох об’єктів, кожен із яких за час спостереження може бути виявлений або не виявлений. Випадкова подія A – виявлений рівно один із чотирьох об’єктів, B – виявлений хоча б один об’єкт. Що означає випадкова подія $A \cap B$?
18. Нехай A, B, C – деякі випадкові події. Записати подію: відбулось рівно дві з даних подій.
19. Студенту послідовно задають три питання. Випадкова подія A_k $(k = 1, 2, 3)$ полягає в тому, що студент правильно відповідає на k-те питання. Записати подію: студент не відповів правильно на жодне питання.
20. Навмання вибирається натуральне число. Випадкова подія A – вибране число закінчується нулем, B – вибране число ділиться на п’ять. Що означає випадкова подія $\overline{A \cap B}$?
21. При виготовленні виробу потрібно виконати чотири зварних з’єднання. Випадкова подія A_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ полягає в тому, що k-те зварне з’єднання виконане без дефекту. Виріб бракується, якщо хоча б одне з’єднання має дефект. Записати подію: виготовлено бракований виріб.

22. Нехай A, B, C – деякі випадкові події. Записати подію: відбулась рівно одна з даних подій.
23. Два гравці почергово підкидають монету над підлогою з твердим покриттям до першої появи герба. Записати простір елементарних подій Ω та випадкову подію A – закінчує підкидати монету той, що першим розпочав підкидання.
24. Три гармати одночасно виконують по одному пострілу по цілі. Випадкова подія A_k $(k = 1, 2, 3)$ полягає в тому, що k-та гармата влучила в ціль. Що означає випадкова подія $\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3$?
25. Нехай A, B – деякі випадкові події. Записати подію $A \cup B$ у вигляді об'єднання несумісних подій, кожна з яких виражається через A, B за допомогою відомих дій з випадковими подіями.
26. Нехай A, B, C – деякі випадкові події. Записати подію $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (C \cap B)$ у вигляді об'єднання несумісних подій, кожна з яких виражається через A, B, C за допомогою відомих дій з випадковими подіями.
27. Нехай A, B, C – деякі випадкові події. Записати подію $(A \cup B) \cap \overline{C}$ у вигляді об'єднання несумісних подій, кожна з яких виражається через A, B, C за допомогою відомих дій з випадковими подіями.
28. Здійснено чотири постріли по мішені. Випадкова подія A_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ полягає в тому, що мішень вражена k-тим пострілом. Записати подію: мішень вражена рівно один раз.
29. Для сигналізації про аварію встановлено три сигналізатори. Випадкова подія A_k $(k = 1, 2, 3)$ полягає в тому, що спрацював k-тий сигналізатор. Що означає випадкова подія $(A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_1})$?

30. Стрілець стріляє по мішені три рази. Після кожного пострілу фіксується враження або промах. Записати простір елементарних подій Ω та випадкову подію A – рівно два рази підряд ціль була вражена.

II. *ОБЧИСЛИТИ ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ КЛАСИЧНОГО ПІДХОДУ*

1. У ліфт 10-ти поверхового будинку на першому поверсі зайшло чотири особи. Кожна з них із однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що всі особи вийдуть на різних поверхах.
2. Кожну з літер слова "ЕЛЕКТРИФІКАЦІЯ" написали на одній із 14 однакових карточок, які потім вкинули в урну. Яка ймовірність того, що навмання витягуючи звідти послідовно чотири карточки та записуючи поряд зліва направо літери на них, одержимо слово "ЦИКЛ" ?
3. Із колоди гральних карт (36 шт.) навмання витягують три карти. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться рівно два тузи.
4. В групі 10 студентів, серед яких 4 відмінники. Група навмання розділена навпіл. Яка ймовірність того, що в кожній половині буде по два відмінники?
5. Кожну з літер слова "РОТОР" написали на одній із 5 однакових карточок, які потім вкинули в урну. Яка ймовірність того, що навмання витягуючи звідти послідовно три карточки та записуючи поряд зліва направо літери на них, одержимо слово "ТОР" ?
6. Поряд стоять 6 стільців, на які навмання сідають 6 осіб. Яка ймовірність того, що 3 наперед визначені з них особи будуть сидіти поруч?
7. В урні лежать 4 білі та 4 чорні кулі. З неї навмання витягують по одній всі кулі. Яка ймовірність того, що при цьому кольори куль будуть чергуватись?
8. Колода гральних карт (36 шт.) навмання ділиться на дві рівні частини. Знайти ймовірність того, що в одній із частин не буде жодного туза?

9. Із десяти лотерейних квитків виграшні лише три. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих чотирьох квитків рівно два виграшні.
10. 100000 лотерейних квитків перенумеровані послідовними п’ятизначними числами від 00000 до 99999. Знайти ймовірність того, що номер навмання вибраного лотерейного квитка не містить однакових цифр.
11. В коробці міститься 12 деталей, серед яких 5 бракованих. З коробки навмання виймають 7 деталей. Яка ймовірність того, що серед них буде рівно три бракованих?
12. Власник однієї карточки “Спортлото” (6 із 49) закреслює 6 номерів. Яка ймовірність того, що ним буде угадано рівно 4 номери?
13. Автобус, у якому їдуть 10 пасажирів, мусить зробити 15 зупинок. Для кожного пасажира однаково ймовірно вийти на будь-якій зупинці. Знайти ймовірність того, що всі пасажири вийдуть на різних зупинках.
14. Для кожної із 10 осіб однаково ймовірно було народитись у будь-якому з 12 місяців року. Яка ймовірність того, що серед них рівно три народились влітку?
15. Чотири юнаки та шість дівчат навмання сідають поряд. Яка ймовірність того, що всі юнаки будуть сидіти поряд?
16. На довільні дві клітинки шахової дошки навмання ставляться дві тури різного кольору. Яка ймовірність того, що вони не зможуть побити одна одну?
17. Двічі підкидається гральний кубик. Знайти ймовірність того, що сума очок, які випали, буде не меншою восьми.
18. Цифри $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ записані в рядок у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що числа $2, 4, 6$ будуть стояти поруч і в такому ж порядку.

19. Кожна із чотирьох осіб незалежно одна від одної навмання задумує одну із цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Знайти ймовірність того, що серед задуманих виявиться рівно дві цифри 5.
20. Із 60 питань програми студент знає 50. На екзамені йому буде запропоновано 2 з цих питань. Яка ймовірність у студента скласти екзамен, якщо для цього потрібно відповісти на всі запропоновані питання?
21. На кожній із 10 однакових карточок написана одна з цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Навмання беруть одну карточку, а потім другу, утворюючи таким чином двозначне число. Знайти ймовірність того, що це число ділиться на 9.
22. В цеху працюють 6 чоловіків та 6 жінок. По табельних номерах навмання відібрано 6 осіб. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться рівно 4 жінки.
23. Набираючи номер телефона, абонент забув останні три цифри , та пам’ятаючи, що вони різні і не нулі, набирає їх навмання. Знайти ймовірність того, що буде набраний потрібний номер.
24. В групі 15 студентів, серед яких 5 відмінників. По списку навмання відібрано 6 студентів. Яка ймовірність того, що серед відібраних студентів буде рівно 4 відмінники?
25. В ящику знаходиться 10 однакових деталей, пофарбованих у синій та червоний кольори. Ймовірність того, що дві навмання взяті з ящика деталі виявляться червоними, рівна $\frac{2}{15}$. Скільки в ящику синіх деталей?
26. 9 однакових деталей перенумеровані числами $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Із цих деталей навмання вибирають одну, а потім другу. Яка ймовірність того, що число на першій вибраній деталі буде меншим за число на другій?
27. В пасажирському поїзді 9 вагонів, по яких навмання розміщуються 4 особи. Яка ймовірність того, що всі вони виявляться у різних вагонах?

28. Гральний кубик кидається три рази. Яка ймовірність того, що всі грані, що випали, будуть різними?
29. Дерев'яний кубик, всі грані якого пофарбовані, розпилюють на 125 рівних частин. Навмання беруть одну з одержаних частин. Знайти ймовірність того, що у неї будуть пофарбованими не менше двох граней.
30. 9 однакових деталей перенумеровані числами $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Із цих деталей навмання вибирають чотири деталі. Знайти ймовірність того, що вибрані деталі виявляться перенумерованими чотирма послідовними числами.

III. *ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ*

1. Ймовірність влучити в мішень одним пострілом для першого стрільця рівна 0,7. Для другого стрільця така ймовірність рівна p. Якщо ці стрільці одночасно виконують по одному пострілу по мішені, то ймовірність рівно одного влучення в неї буде 0,38. Знайти число p.
2. Ймовірність при одному вимірюванні сили струму допустити похибку, що перевищує задану точність, рівна 0,1. Здійснюються три незалежних один від одного виміри сили струму. Знайти ймовірність того, що не більше, ніж в одному з цих вимірів допущена похибка перевищить задану точність.
3. Для кожного з трьох пристроїв, що працюють незалежно один від одного, ймовірність безвідмовної роботи на протязі року рівна 0,8. Знайти ймовірність того, що на протязі року безвідмовно працюватимуть хоча б два з цих пристроїв.
4. Ймовірність влучити в ціль із першої гармати рівна 0,8. Для другої та третьої гармат така ймовірність відповідно рівна 0,7 та 0,6. Всі три гармати одночасно та незалежно одна від одної здійснюють по одному

пострілу по цілі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна гармата влучить в ціль.

5. При виготовленні кожної деталі відбуваються три незалежних одна від одної операції обробки. Ймовірність одержати браковану деталь після першої операції рівна 0,05; після другої – 0,03; після третьої – 0,02. Знайти ймовірність одержати деталь без браку після всіх трьох операцій.
6. Знайти ймовірність одержати позитивний результат у одному експерименті, якщо ймовірність одержати рівно один позитивний результат у двох однакових та незалежних експериментах рівна $\frac{5}{18}$.
7. Абонент забув останню цифру номера телефона та набирає її навмання. Знайти ймовірність того, що не більше ніж із третьої спроби він набере вірний номер.
8. Гармата здійснює три постріли по цілі, що віддаляється. Ймовірність влучити в неї на початку стрільби рівна 0,9. Після кожного попереднього пострілу ця ймовірність зменшується на 0,1. Знайти ймовірність того, що гармата влучить в ціль хоча б один раз.
9. Із колоди гральних карт (36 шт.) навмання послідовно витягують три карти. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з витягнених карт буде тузом.
10. Білет для складання іспиту містить три питання. Ймовірність того, що студент вірно відповість на перше питання рівна 0,9; на друге – 0,8; на третє – 0,7. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього потрібно вірно відповісти хоча б на два питання.
11. В першій урні міститься 4 білих, 6 чорних і 10 червоних куль, а в другій – 10 білих, 3 чорних і 7 червоних куль. Із обох урн навмання виймають по одній кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі будуть одного кольору?

12. Двоє по черзі підкидають монету над підлогою з твердим покриттям, причому виграє той, у кого вперше з'явиться герб. Знайти ймовірність виграшу гравця, який першим починає підкидати монету.
13. Ймовірність влучити в ціль при одному пострілі по ній першого стрільця рівна 0,6. Для другого стрільця така ймовірність рівна 0,8. Обидва стрільці по черзі виконують постріли по цілі до першого попадання в неї. Знайти ймовірність того, що останній постріл зробить стрілець, який починає таке змагання.
14. Троє по черзі підкидають монету над підлогою з твердим покриттям, причому виграє той, у кого вперше з'явиться герб. Знайти ймовірність виграшу гравця, який першим починає підкидати монету.
15. Ймовірність влучити в мішень одним пострілом рівна 0,7. Постріли по мішені здійснюються незалежно один від одного до першого влучення. Знайти ймовірність того, що буде здійснено рівно 4 постріли.
16. Знайти ймовірність одержати позитивний результат у одному експерименті, якщо ймовірність одержати хоча б один позитивний результат у двох однакових та незалежних експериментах рівна 0,84.
17. Двоє по черзі кидають гральний кубик, причому виграє той, у кого вперше з'явиться одне очко. Знайти ймовірність виграшу гравця, який другим починає кидати гральний кубик.
18. Ймовірність влучити в ціль із першої гармати рівна 0,5. Для другої та третьої гармат така ймовірність відповідно рівна 0,7 та 0,9. Всі три гармати одночасно та незалежно одна від одної здійснюють по одному пострілу по цілі. Знайти ймовірність того, що не менше двох гармат влучать в ціль.
19. Ймовірність влучити в мішень одним пострілом рівна 0,8. Постріли по мішені здійснюються незалежно один від одного до першого влучення. Знайти ймовірність того, що буде здійснено не більше 3 пострілів.

20. Робітник обслуговує 3 станки, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший станок не вимагатиме уваги робітника, рівна 0,8. Для другого та третього станків такі ймовірності відповідно рівні 0,85 та 0,9. Знайти ймовірність того, що протягом години хоча б один станок вимагатиме уваги робітника.
21. Ймовірність того, що протягом одного робочого дня станок хоча б один раз вийде з ладу, рівна 0,1. Знайти ймовірність того, що протягом чотирьох робочих днів підряд станок жодного разу не вийде з ладу.
22. Три стрільці одночасно та незалежно один від одного здійснюють по одному пострілу по цілі. Ймовірність влучити в ціль для першого стрільця рівна 0,7. Для другого та третього стрільців така ймовірність відповідно рівна 0,75 та 0,8. Знайти ймовірність того, що всі три стрільці не влучать в ціль.
23. Монету підкидають над підлогою з твердим покриттям доти, поки не з'являться підряд 2 герби або 2 решітки. Знайти ймовірність того, що буде не більше трьох підкидань.
24. За одне сканування простору радіолокаційною антеною ціль виявляється із ймовірністю 0,8. Знайти ймовірність того, що для виявлення цілі знадобиться не більше трьох сканувань.
25. Прилад складається з трьох незалежно працюючих блоків. Перший з них може відмовити на протязі доби із ймовірністю 0,1; другий та третій – із ймовірностями 0,2 та 0,25 відповідно. Знайти ймовірність того, що на протязі доби прилад відмовить, якщо для цього достатньо відмови хоча б одного з блоків.
26. При одному запуску двигун починає працювати із ймовірністю 0,9. Знайти ймовірність того, що двигун запрацює не більше, ніж при двох незалежних один від одного запусках.
27. Виріб виготовляють три робітники, що працюють незалежно один від одного. Перший робітник допускає брак із ймовірністю 0,1; другий та

третій – із ймовірностями 0,2 та 0,15 відповідно. Знайти ймовірність того, що виготовлений виріб виявиться бракованим.

28. Із колоди гральних карт (36 шт.) послідовно навмання витягують карти доти, поки не з'явиться туз. Яка ймовірність того, що туз появиться не раніше, ніж за другим разом?
29. Гральний кубик кидається доти, поки два раз підряд не з'явиться 6 очок. Яка ймовірність того, що доведеться здійснити не більше трьох підкидань?
30. За одне сканування простору радіолокаційною антеною ціль виявляється із ймовірністю 0,8. Знайти ймовірність того, що ціль виявиться лише на третьому скануванні.

IV. *ТЕОРЕМА ПРО ПОВНУ ЙМОВІРНІСТЬ ТА ФОРМУЛИ БАЙЄСА*

1. Ймовірність попасти в ціль для першого стрільця рівна 0,9; для другого – 0,7. Один із них зробив постріл по цілі, але промахнувся. Знайти ймовірність того, що це був перший стрілець.
2. Завод виконав за першу декаду місяця 25% плану виробництва деталей, а за другу та третю декади – 35% та 40% відповідно. Ймовірність випуску бракованої продукції рівна 0,05 для першої декади, 0,1 для другої, та 0,15 для третьої. Навмання взята одна деталь із усіх, вироблених за місяць, виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що вона була виготовлена у другій декаді.
3. Робітник одержав 4 коробки з деталями, виготовленими заводом №1, та 6 коробок з деталями, виготовленими заводом №2. Ймовірність того, що завод №1 виготовляє стандартні деталі, рівна 0,7. Для заводу №2 ця ймовірність рівна 0,9. Робітник навмання взяв одну деталь із навмання вибраної коробки. Знайти ймовірність того, що ця деталь буде стандартною.
4. На першому станку виготовлено 20% всієї кількості болтів, на другому – 30%, на третьому – 50%. При цьому бракована продукція становить

3%, 4%, 6% для кожного із станків відповідно. Навмання вибраний із усієї виготовленої продукції болт виявився бракованим. Знайти ймовірність того, що він виготовлений на другому станку.

5. В контейнері містяться деталі, виготовлені трьома робітниками. Відомо, що перший із них дає 2% браку, другий – 4%, третій – 5%. З контейнера навмання беруть деталь. Знайти ймовірність того, що вона бракована, якщо від першого робітника в контейнер надійшло 500 деталей, від другого – 700, а від третього 300.
6. В першому ящику міститься 30 деталей, із них 20 стандартних, у другому – 40, із них 35 стандартних, у третьому – 50, із них 40 стандартних. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь із навмання вибраного ящика – стандартна.
7. Серед 30 лотерейних квитків є рівно 5 виграшних. Яка ймовірність виграшу в особи, що купує один квиток, якщо перед цим було куплено лише 2 квитки?
8. В ящику містяться 4 деталі. Всі припущення про кількість стандартних серед них однаково ймовірні. Навмання взята з ящика деталь виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що в ящику було 3 стандартних і 1 нестандартна деталь.
9. В першому ящику міститься 20 лампочок, із них 5 бракованих, у другому – 25, із них 10 бракованих. З першого ящика у другий переклали одну навмання взяту лампочку. Знайти ймовірність того, що навмання взята після цього із другого ящика лампочка – бракована.
10. Ймовірність попасти в мішень для першого стрільця рівна 0,6; для другого – 0,7; для третього – 0,8. Всі три стрільці одночасно та незалежно один від одного виконали по одному пострілу по мішені, після чого в ній виявилось 2 попадання. Знайти ймовірність того, що промахнувся другий стрілець.
11. В першому контейнері 10 виробів, із них рівно 4 браковані, у другому

контейнері 13 виробів, із них рівно 3 браковані. З першого контейнера у другий переклали навмання взяті 2 вироби. Знайти ймовірність того, що навмання взятий після цього із другого контейнера виріб виявиться бракованим.

12. Із партії в 3вироби навмання взяли один, що виявився бракованим. Яка ймовірність того, що в партії знаходився один бракований виріб та два стандартних, якщо всі припущення про кількість бракованих виробів у партії рівноймовірні?
13. В першій урні міститься 16 куль, серед яких 10 білих, інші – чорні. В другій – 20 куль, серед яких 12 білих, інші – чорні. З кожної урни навмання вийняли по одній кулі, з цих двох куль також навмання взяли одну. Яка ймовірність того, що вона біла?
14. Є 5 рушниць із оптичним прицілом та 7 рушниць без оптичного прицілу. Стрілець влучає в ціль із ймовірністю 0,95 при одному пострілі з рушниці, яка має оптичний приціл, якщо ж рушниця не має такого прицілу, то відповідна ймовірність рівна 0,8. Цей стрілець навмання бере рушницю та здійснює один постріл по цілі. Яка ймовірність того, що він влучить в неї?
15. 90% продукції, що випускається виробництвом, відповідає стандарту, решта – не відповідає. Спрощена схема контролю визнає придатною до експлуатації стандартну продукцію з ймовірністю 0,95 та нестандартну з ймовірністю 0,1. Знайти ймовірність того, що виріб, визнаний придатним, відповідає стандарту.
16. Для складання заліку студентам потрібно підготувати 60 питань. Із 25 осіб у групі студентів 6 підготували всі питання, 12 – 40 питань та 7 – 20 питань. Викликаний навмання студент вірно відповів на поставлене питання. Знайти ймовірність того, що він підготував 40 питань.
17. Із 7 стрільців 3 влучають у ціль із ймовірністю 0,8 і 4 – із ймовірністю 0,6. Що ймовірніше: влучить у ціль навмання вибраний стрілець чи

промахнеться?

18. Число вантажних та число легкових автомобілів, що проїжджають повз бензоколонку, відносяться як 3:5. Ймовірність того, що вантажний автомобіль матиме потребу в заправці, рівна 0,1. Для легкового автомобіля ця ймовірність рівна 0,3. До бензоколонки під’їхав автомобіль. Яка ймовірність того, що він виявиться вантажним?
19. В першій урні містяться 2 білі та 8 чорних куль. В другій – 3 білі та 2 чорні кулі. З кожної урни навмання видалили по одній кулі, а потім усі кулі з другої урни пересипали в першу. Яка ймовірність того, що вийнята після цього навмання з першої урни куля буде білою?
20. В ящику було 20 деталей, із них 15 стандартних, інші – нестандартні. При транспортуванні ящика одна деталь загубилась. Після цього навмання виймають з ящика одну деталь, що виявляється стандартною. Знайти ймовірність того, що загублено також стандартну деталь.
21. Є 4 рушниці із оптичним прицілом та 6 рушниць без оптичного прицілу. Стрілець влучає в ціль із ймовірністю 0,95 при одному пострілі з рушниці, яка має оптичний приціл, якщо ж рушниця не має такого прицілу, то відповідна ймовірність рівна 0,8. Цей стрілець навмання бере рушницю, здійснює один постріл по цілі та влучає в неї. Яка ймовірність того, що він стріляв із рушниці без оптичного прицілу?
22. В першій урні містяться 5 білих та 3 чорні кулі, в другій – 9 білих та 6 чорних куль, в третій – всі кулі білі. Навмання вибирають урну, а з неї кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?
23. В першій урні містяться 2 білі та 8 чорних куль, в другій – 6 білих та 2 чорні кулі. Навмання вибирають кулю з першої урни та перекладають її у другу, а потім з другої урни навмання вибирають кулю. Яка ймовірність того, що ця куля чорна?
24. В урні містяться 3 кулі, що можуть бути білими або чорними, причому всі припущення про розподіл кольорів куль в урні – рівноймовірні. В

урну додали 2 білі кулі, а потім з неї навмання вийняли одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

25. Із 100 лотерейних квитків рівно 20 виграшних. Після продажі одного квитка було куплено ще один, що виявився виграшним. Знайти ймовірність того, що перший куплений квиток теж був виграшним.
26. В групі 3 відмінних стрільці, 5 хороших, 6 посередніх та 2 поганих. Ймовірність влучити в ціль для відмінного стрільця рівна 0,9; для хорошого – 0,7; для посереднього – 0,5; для поганого – 0,3. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний стрілець влучить у ціль.
27. Числа $1, 2, 3, 4, 5$ написані на окремих карточках. Навмання береться одна карточка, а потім друга. Знайти ймовірність того, що число на першій карточці буде меншим за число на другій.
28. При перевезенні 10 деталей, серед яких 6 стандартних а інші – браковані, було загублено 2 деталі. З тих деталей, що залишились, навмання взяли одну, яка виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що обидві загублені деталі – стандартні.
29. Три робітники виготовили по одній деталі. Ймовірність виготовлення бракованої деталі для першого робітника рівна 0,1; для другого – 0,15; для третього – 0,2. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь із трьох виготовлених буде без браку.
30. В групі з 25 студентів 3 підготували всі 30 питань, що можуть бути задані на заліку; 5 – 25 питань; 10 – 20 питань; 7 – 10 питань. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний студент відповість на всі три довільно вибрані для нього питання.

V. <u>*СХЕМА БЕРНУЛЛІ*</u>

1. Ймовірність виготовлення стандартної деталі рівна 0,9. Скільки потрібно виготовити таких деталей, щоб найбільш імовірне число нестандартних серед них було рівним 10?

2. Майстер обслуговує 12 однакових станків, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що за зміну один станок потребуватиме уваги майстра, рівна 0,2. Яка ймовірність того, що за зміну рівно 4 різних станки потребуватимуть уваги майстра?
3. П'ять разів одночасно підкидаються дві однакові монети, які падають на підлогу з твердим покриттям. Знайти ймовірність того, що рівно три рази на обох монетах випадуть герби.
4. Два рівносильні гравці змагаються у грі в шахи. Що ймовірніше: виграти одну партію з двох чи дві партії з чотирьох, якщо при цьому не враховувати нічиїх?
5. У круг вписано квадрат. В цей круг навмання ставляться чотири точки. Знайти ймовірність того, що рівно одна з них виявиться всередині квадрата.
6. 10 разів підкидається монета, яка падає на підлогу з твердим покриттям. Знайти ймовірність того, що герб випаде від 4 до 6 раз.
7. Знайти найменше число підкидань грального кубика, які слід здійснити для того, щоб із ймовірністю, не меншою за 0,9 можна було б сподіватись появи шести очок хоча б один раз.
8. Ймовірність попасти в мішень при одному пострілі по ній рівна 0,8. ймовірність того, що при 10 незалежних пострілах по мішені буде 2 або 3 попадання в неї.
9. Ймовірність появи позитивного результату в одному досліді рівна 0,4. Знайти ймовірність того, що при 5 таких незалежних один від одного дослідах позитивний результат появиться не менше двох разів.
10. Ймовірність виготовлення робітником виробу, що відповідає стандарту, рівна 0,6. Яка ймовірність того, що серед виготовлених ним 7 виробів стандарту відповідатимуть не більше, ніж 2 з них?
11. Чотири рази одночасно підкидаються три однакові монети, які падають на підлогу з твердим покриттям. Знайти ймовірність того, що хоча б

один раз на всіх трьох монетах випадуть герби.

12. Ймовірність появи успіху в одному досліді рівна 0,6. Яку найменшу кількість однакових та незалежних один від одного дослідів слід здійснити, щоб найбільш імовірне число успіхів серед них було рівне 8?
13. Виконуються 6 незалежних пострілів по цілі. Ймовірність попадання в неї при одному пострілі – 0,75. Знайти ймовірність того, що буде не менше 5 попадань.
14. Знайти ймовірність того, що при 6 підкиданнях грального кубика 3 або 4 очки з'являться не більше двох раз.
15. Ймовірність виграшу в лотерею на один квиток рівна 0,1. Скільки треба купити лотерейних квитків, щоб найбільш імовірне число виграшів було рівне 15?
16. П'ять разів підкидаються одночасно два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що рівно два рази на обох кубиках випаде по одному очку.
17. Відомо, що 5% всіх виготовлених на заводі однакових приладів потребують додаткового регулювання. Знайти ймовірність того, що із 6 виготовлених приладів не більше 2 потребуватимуть додаткового регулювання.
18. Завод виготовляє вироби, кожен із яких може мати дефект із ймовірністю 0,05. Скільки треба виготовити таких виробів, щоб ймовірність появи хоча б одного дефектного серед них була не меншою, ніж 0,9?
19. Автопідприємство придбало 12 однакових автобусів, кожен із яких може мати суттєвий недолік із ймовірністю 0,1. Знайти ймовірність того, що серед придбаних автобусів не менше 10 будуть без суттєвих недоліків.
20. Виготовляються однакові деталі незалежно одна від одної. Ймовірність одержати хоча б одну браковану деталь при виготовленні чотирьох,

рівна 0,59. Знайти ймовірність виготовлення бракованої деталі.

21. Ймовірність відмови приладу при його дослідженні рівна 0,1. Скільки таких приладів треба дослідити незалежно один від одного, щоб мати не менше однієї відмови із ймовірністю, не меншою за 0,8?
22. Що ймовірніше: поява 6 очок не менше, ніж на одному кубику при одночасному підкиданні трьох гральних кубиків, чи поява 6 очок не менше, ніж на двох кубиках при одночасному підкиданні шести гральних кубиків?
23. Десять раз підкидається монета, що падає на підлогу з твердим покриттям. Знайти ймовірність того, що в перших п'яти підкиданнях герб з'явиться 3 рази, а в наступних – 2 рази.
24. Гральний кубик підкидається 6 раз. Знайти ймовірність того, що не більше двох раз випаде число очок, кратне трьом.
25. Знайти ймовірність хоча б два рази влучити в ціль при 8 незалежних пострілах по ній, якщо ймовірність влучити в ціль при одному пострілу по ній рівна 0,6.
26. Гральний кубик підкидається 5 раз. Знайти ймовірність того, що рівно два рази випаде число очок, не менше п'яти.
27. Ймовірність виграшу в лотерею на один квиток рівна 0,08. Яке найбільш імовірне число виграшів буде серед придбаних навмання 42 лотерейних квитків?
28. Середини чотирьох сторін квадрата є вершинами іншого квадрата, вписаного в даний. В описаний квадрат навмання ставляться 5 точок. Знайти ймовірність того, що рівно три з них попаде у вписаний квадрат.
29. Два стрільці незалежно один від одного виконують по 5 пострілів по мішені. Ймовірність влучити у мішень при одному пострілі по ній рівна 0,9 для одного із стрільців та 0,7 – для іншого. Яка ймовірність того, що обидва стрільці влучать у мішень рівно по 3 рази?
30. Завод відвантажив на базу 8 однакових виробів. Ймовірність

пошкодження при перевезенні для кожного виробу рівна 0,1. Яка ймовірність того, що серед всіх перевезених на базу виробів виявиться не більше одного пошкодженого?

VI. *ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ СХЕМИ БЕРНУЛЛІ*

Ймовірність виготовлення бракованої деталі рівна p. Для наступних варіантів знайти ймовірність того, що при виготовленні n деталей число k бракованих серед них задовольняє умові $k_1 \le k \le k_2$

1. $p = 0{,}002;$	$n = 1000;$	$k_1 = 5;$	$k_2 = 1000;$
2. $p = 0{,}002;$	$n = 500;$	$k_1 = 0;$	$k_2 = 2;$
3. $p = 0{,}005;$	$n = 200;$	$k_1 = 0;$	$k_2 = 4;$
4. $p = 0{,}004;$	$n = 500;$	$k_1 = 1;$	$k_2 = 3;$
5. $p = 0{,}005;$	$n = 400;$	$k_1 = 2;$	$k_2 = 5;$
6. $p = 0{,}01;$	$n = 200;$	$k_1 = 3;$	$k_2 = 200;$
7. $p = 0{,}003;$	$n = 1000;$	$k_1 = 2;$	$k_2 = 4;$
8. $p = 0{,}0025;$	$n = 400;$	$k_1 = 0;$	$k_2 = 3;$
9. $p = 0{,}004;$	$n = 250;$	$k_1 = 4;$	$k_2 = 250;$
10. $p = 0{,}005;$	$n = 600;$	$k_1 = 1;$	$k_2 = 4;$

Ймовірність того, що за час випробування один прилад вийде з ладу, рівна p. Для наступних варіантів знайти ймовірність того, що за час випробування n таких же приладів, які функціонують незалежно один від одного, число k тих серед них, що вийдуть із ладу, буде задовольняти умові $k_1 \le k \le k_2$

11. $p = 0{,}8;$	$n = 100;$	$k_1 = 70;$	$k_2 = 100;$
12. $p = 0{,}5;$	$n = 200;$	$k_1 = 80;$	$k_2 = 120;$

13. $p = 0{,}7$; $n = 150$; $k_1 = 100$; $k_2 = 150$;

14. $p = 0{,}35$; $n = 400$; $k_1 = 120$; $k_2 = 150$;

15. $p = 0{,}6$; $n = 250$; $k_1 = 140$; $k_2 = 180$;

16. $p = 0{,}25$; $n = 100$; $k_1 = 0$; $k_2 = 30$;

17. $p = 0{,}45$; $n = 300$; $k_1 = 100$; $k_2 = 140$;

18. $p = 0{,}75$; $n = 200$; $k_1 = 140$; $k_2 = 200$;

19. $p = 0{,}4$; $n = 350$; $k_1 = 120$; $k_2 = 180$;

20. $p = 0{,}65$; $n = 400$; $k_1 = 250$; $k_2 = 300$;

Ймовірність влучити в ціль при одному пострілі рівна p. Скільки слід зробити пострілів, щоб із ймовірністю, рівною P, можна було б твердити, що відхилення частоти влучання в ціль від її ймовірності P не перевищує по абсолютній величині числа ε?

21. $p = 0{,}5$; $P = 0{,}95$; $\varepsilon = 0{,}01$;

22. $p = 0{,}2$; $P = 0{,}9$; $\varepsilon = 0{,}02$;

23. $p = 0{,}3$; $P = 0{,}92$; $\varepsilon = 0{,}03$;

24. $p = 0{,}4$; $P = 0{,}85$; $\varepsilon = 0{,}015$;

25. $p = 0{,}6$; $P = 0{,}8$; $\varepsilon = 0{,}025$;

26. $p = 0{,}7$; $P = 0{,}87$; $\varepsilon = 0{,}012$;

27. $p = 0{,}5$; $P = 0{,}98$; $\varepsilon = 0{,}028$;

28. $p = 0{,}4$; $P = 0{,}93$; $\varepsilon = 0{,}024$;

29. $p = 0{,}2$; $P = 0{,}96$; $\varepsilon = 0{,}016$;

30. $p = 0{,}8$; $P = 0{,}88$; $\varepsilon = 0{,}022$;

VII. *ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇЇ ГУСТИНА*

Випадкова величина ξ має густину розподілу ймовірностей виду

$$p(x)=\begin{cases} Af(x), & x\in(a,b), \\ 0 & x\notin(a,b). \end{cases}$$ Для наступних варіантів знайти сталу A, функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ та ймовірність $P\{\xi\in(\alpha,\beta)\}$ попадання випадкової величини ξ у проміжок (α,β).

Варіант №	$f(x)$	(a,b)	(α,β)	Варіант №	$f(x)$	(a,b)	(α,β)
1	$\sin x$	$(0,\pi)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$	16	$\frac{1}{x}$	$(1,3)$	$\left(\frac{3}{2},2\right)$
2	$\cos x$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	17	e^x	$(0,1)$	$\left(0,\frac{3}{4}\right)$
3	$1-x^2$	$(-1,1)$	$\left(\frac{1}{8},\frac{3}{4}\right)$	18	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$
4	$1-\lvert x\rvert$	$(-1,1)$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	19	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$
5	$1-x^4$	$(-1,1)$	$\left(-\frac{3}{4},0\right)$	20	2^x	$(0,2)$	$(0,1)$
6	$\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty,+\infty)$	$(-1,0)$	21	e^{-3x}	$(0,+\infty)$	$(0,2)$
7	$\cos^2 x$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$	22	e^{2x}	$(-\infty,0)$	$(-1,0)$
8	$\sin^2 x$	$(0,\pi)$	$\left(\frac{\pi}{6},\pi\right)$	23	$\sin\frac{x}{4}$	$(0,4\pi)$	$(0,\pi)$
9	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$	24	$\cos 2x$	$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right)$
10	1	$(-7,-2)$	$(-5,-3)$	25	$\frac{1}{4+x^2}$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,2\sqrt{3})$
11	$e^{-\lvert x\rvert}$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,1)$	26	$\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$	$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(0,\frac{3}{2}\right)$
12	$\lvert x\rvert$	$(-2,2)$	$(-1,0)$	27	$1-\frac{x^2}{4}$	$(-2,2)$	$(-1,1)$
13	x^3	$(0,1)$	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	28	$1-2\lvert x\rvert$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\left(0,\frac{1}{4}\right)$
14	x	$(0,2)$	$(1,2)$	29	$e^{-2\lvert x\rvert}$	$(-\infty,+\infty)$	$(-2,-1)$
15	x^2	$(0,1)$	$\left(0,\frac{3}{4}\right)$	30	$1+\lvert x\rvert$	$(-2,2)$	$(1,2)$

VIII. *МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ ТА ДИСПЕРСІЯ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ*

Випадкова величина ξ має густину розподілу ймовірностей виду $p(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a,b), \\ 0 & x\notin(a,b). \end{cases}$ Для наступних варіантів знайти математичне сподівання $M\xi$ та дисперсію $D\xi$ даної випадкової величини.

Варіант №	$f(x)$	(a,b)
1	$\frac{1}{2}\sin(x-10)$	$(10,\pi+10)$
2	$\frac{1}{2}\cos(x-12)$	$\left(12-\frac{\pi}{2},12+\frac{\pi}{2}\right)$
3	$1-\lvert x-5\rvert$	$(4,6)$
4	$\frac{3}{4}[1-(x-7)^2]$	$(6,8)$
5	$\frac{5}{8}[1-(x-8)^4]$	$(7,9)$
6	$6[x-9-(x-9)^2]$	$(9,10)$
7	$4[x-15-(x-15)^3]$	$(15,16)$
8	$12[(x-20)^2-(x-20)^3]$	$(20,21)$
9	$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-2x^2+20x-50}$	$(-\infty,+\infty)$
10	$\sin 2x$	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
11	$\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}$	$(-\pi,\pi)$
12	$3(1-3\lvert x\rvert)$	$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$
13	$3(1-16x^2)$	$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$
14	$\frac{1}{8}\left(1-\frac{x^4}{625}\right)$	$(-5,5)$
15	$\frac{x}{6}-\frac{x^2}{36}$	$(0,6)$
16	$\frac{x}{4}-\frac{x^3}{64}$	$(0,4)$
17	$4\left(\frac{x^2}{9}-\frac{x^3}{27}\right)$	$(0,3)$
18	$\frac{4}{\sqrt{2\pi}}e^{-8x^2+32x-32}$	$(-\infty,+\infty)$
19	$\frac{1}{6}\sin\frac{x}{3}$	$(0,3\pi)$
20	$\cos(2x-20)$	$\left(10-\frac{\pi}{4},10+\frac{\pi}{4}\right)$

Дискретна випадкова величина ξ приймає лише два значення – x_1 та

x_2 із ймовірностями $p_1 = P\{\xi = x_1\}$, $p_2 = P\{\xi = x_2\}$, при цьому $x_1 < x_2$. Для наступних варіантів відомих значень p_1, $M\xi$, $D\xi$ знайти закон розподілу випадкової величини ξ, який записати у вигляді такої таблиці

ξ	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Варіант №	p_1	$M\xi$	$D\xi$	Варіант №	p_1	$M\xi$	$D\xi$
21	0,1	3,9	0,09	26	0,9	2,2	0,36
22	0,3	3,7	0,21	27	0,8	3,2	0,16
23	0,5	3,5	0,25	28	0,6	3,4	0,24
24	0,7	3,3	0,21	29	0,4	3,6	0,24
25	0,9	3,1	0,09	30	0,2	3,8	0,16

IX. *ФУНКЦІЇ ВІД ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН*

Випадкова величина ξ має густину розподілу ймовірностей виду $p(x) = \begin{cases} h(x), & x \in (a,b), \\ 0 & x \notin (a,b). \end{cases}$ Для наступних варіантів знайти густину розподілу ймовірностей $q(y)$ випадкової величини $\eta = f(\xi)$.

Варіант №	$h(x)$	(a,b)	$f(x)$
1	$3e^{-3x}$	$(0,+\infty)$	e^x
2	$\frac{1}{5}$	$(3,8)$	x^2
3	$\sin 2x$	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$3x+2$
4	$\frac{3}{2}\cos 3x$	$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$	2^x
5	$\frac{1}{2}\left(1-\left\lvert\frac{x}{2}\right\rvert\right)$	$(-2,2)$	$\mathrm{arctg}x$
6	$\frac{1}{4}\left(1-\frac{x^2}{9}\right)$	$(-3,3)$	e^{-3x}
7	$\frac{1}{8}\left(1-\frac{x^4}{625}\right)$	$(-5,5)$	$\mathrm{arctg}x$
8	$\frac{x}{6}-\frac{x^2}{36}$	$(0,6)$	$2x-1$
9	$\frac{x}{4}-\frac{x^3}{64}$	$(0,4)$	$(x+1)^2$

10	$4\left(\frac{x^2}{9}-\frac{x^3}{27}\right)$	$(0,3)$	$\cos x$
11	$\frac{1}{3}$	$(9,12)$	$\sqrt{x}$
12	$2e^{2x}$	$(-\infty,0)$	e^{-x}
13	$\frac{1}{10}\sin\frac{x}{5}$	$(0,5\pi)$	$\ln(x+1)$
14	$\frac{1}{8}\cos\frac{x}{4}$	$(-2\pi,2\pi)$	$-2x+1$
15	$\frac{1}{3}\left(1-\left\lvert\frac{x}{3}\right\rvert\right)$	$(-3,3)$	$\sin\frac{x}{2}$
16	$\frac{3}{4}(1-x^2)$	$(-1,1)$	$\mathrm{arctg}x$
17	$\frac{5}{8}(1-x^4)$	$(-1,1)$	$-3x+2$
18	$6(x-x^2)$	$(0,1)$	$\mathrm{tg}x$
19	$4(x-x^3)$	$(0,1)$	$\cos x$
20	$12(x^2-x^3)$	$(0,1)$	$\sin x$
21	$\frac{1}{2}\sin(x-\pi)$	$(\pi,2\pi)$	$-2x-2$
22	$\frac{1}{2}\cos(x-\frac{\pi}{2})$	$(0,\pi)$	e^{-2x}
23	$1-\lvert x-5\rvert$	$(4,6)$	x^2+1
24	$\frac{3}{4}(1-(x-3)^2)$	$(2,4)$	x^3-2
25	$\frac{5}{8}(1-(x-2)^4)$	$(1,3)$	$\sqrt{x}$
26	$6(x-4-(x-4)^2)$	$(4,5)$	$\arcsin\frac{x}{6}$
27	$4(x-1-(x-1)^3)$	$(1,2)$	$\arccos\frac{x}{3}$
28	$12[(x-2)^2-(x-2)^3]$	$(2,3)$	3^{-x}
29	e^{-x}	$(0,+\infty)$	$\mathrm{arctg}x$
30	$\frac{1}{2}$	$(-3,-1)$	$\ln(2-x)$

ЛІТЕРАТУРА

1. Андрухаев Х.М. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Просвещение, 1985. – 160 с.
2. Боровков А. А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986. – 432 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев.: Вища школа, 1979. – 408 с.

4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.
5. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2004. – 404 с.
6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
7. Захаров В. К., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1983. – 160 с.
8. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
9. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1969. – 512 с.
10. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Изд-во МГУ, 1963. – 157 с.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.1. – М.: Мир, 1963. – 512 с.
12. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
13. Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей. – Київ.: Вища школа, 1994. – 192 с.

ЗМІСТ