МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

„КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ: **ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ**

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів

напряму підготовки 6.050504 „Зварювання”

РЕКОМЕНДОВАНО МЕТОДИЧНОЮ РАДОЮ НТУУ „КПІ”

Київ

2011

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ: ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ:

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів

напряму підготовки 6.050504 „Зварювання"

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф., 2011 – 60с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ „КПІ"

(Протокол № 10 від 16 червня 2011р.)

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ: ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ:

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів

напряму підготовки 6.050504 „Зварювання"

Укладачі: Довгай В.В., Мельник А.Ф.

Рецензент: Карпенко А.С., к.т.н., доц. кафедри ЗВ НТУУ „КПІ".

Відповідальний редактор: Рижов Р.М., д.т.н., проф.

ВСТУП

В другому семестрі програмою з вищої математики на зварювальному факультеті НТУУ „КПІ” передбачено розділ „Звичайні диференціальні рівняння”. При вивченні даного розділу студенти знайомляться з поняттями диференціального рівняння, його загального та частинного розв'язку, оволодівають методами розв'язання диференціальних рівнянь та вчаться застосовувати диференціальні рівняння для розв'язання практичних задач.

Методичні вказівки написані відповідно до програми і включають основні теоретичні відомості та приклади розв'язання типових задач, а також завдання для самостійної роботи студентів і список літератури, рекомендованої для детальнішого ознайомлення з темою.

Мета пропонованих методичних вказівок – допомогти студентам зварювального факультету глибше засвоїти вказаний матеріал, розвинути навички застосування теоретичних знань до розв'язання конкретних задач та активізувати самостійну роботу студентів.

Методичні вказівки призначені для використання на практичних заняттях з вищої математики та для самостійної роботи студентів.

„З усіх математичних дисциплін теорія диференціальних рівнянь найважливіша... Вона дає пояснення всіх тих елементарних явищ природи, які змінюються в часі.”

С.Лі (норвезький математик, 1842 – 1899)

§ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Вивчення явищ природи, розв'язання багатьох практичних задач часто приводить до рівнянь, що встановлюють залежність між невідомою функцією та її похідними. Співвідношення такого типу називають диференціальними рівняннями. Якщо невідома функція є функцією однієї змінної, то диференціальне рівняння називається звичайним. Якщо невідома функція є функцією кількох змінних, то диференціальне рівняння називається рівнянням у частинних похідних.

З найпростішим типом диференціальних рівнянь ми зустрічаємось в інтегральному численні, коли за даною похідною

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1}$$

знаходимо невідому функцію $y = y(x)$ (первісну). Як відомо, розв'язком рівняння (1) є функція $y(x) = \int f(x)dx,$ при умові, що невизначений інтеграл існує.

Розглянемо приклад з фізики. Нехай матеріальна точка масою m рухається прямолінійно під дією сталої сили F, напрям якої збігається з напрямом руху точки. За другим законом Ньютона запишемо диференціальне рівняння $F = m\dfrac{dv}{dt}$, або $F = m\dfrac{d^2S}{dt^2}$, з яких невідомі швидкість $v(t)$ та шлях $s(t)$ визначаються за формулами

$v(t) = \int \dfrac{F}{m}dt = \dfrac{Ft}{m} + C_1,\qquad s(t) = \int\left(\dfrac{Ft}{m} + C_1\right)dt = \dfrac{Ft^2}{2m} + C_1 t + C_2,$ де константи C_1 і C_2 мають простий фізичний зміст: $C_1 = v(0),\quad C_2 = S(0).$

Означення 1. Рівняння, що встановлює залежність між незалежною змінною x, функцією $y(x)$ та її похідними $y', y'', ..., y^{(n)}$, називається звичайним диференціальним рівнянням.

Означення 2. Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної, що входить у рівняння.

Символічно диференціальне рівняння n-го порядку можна записати так:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{2}$$

Означення 3. Розв'язком (або інтегралом) диференціального рівняння (2) називається функція $y = y(x)$, що має на деякому інтервалі $(a;b)$ похідні до n-го порядку включно і при підстановці в рівняння (2) перетворює його в тотожність.

Приклад 1. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}. \tag{3}$$

Переконаємося, що функції $y = \dfrac{C}{x}$ є розв'язками даного рівняння при довільному значенні константи C. Дійсно, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{C}{x^2}$ і $-\dfrac{y}{x} = -\dfrac{C}{x^2}$. Множині функцій $y = \dfrac{C}{x}$ на площині відповідає сукупність кривих (у даному випадку – гіпербол), які залежать від константи C і називаються інтегральними кривими диференціального рівняння.

Нехай $C=1$. Даному значенню константи відповідає інтегральна крива $y=\frac{1}{x}$. Зафіксуємо на кривій точку, наприклад, $M_0\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

Навпаки, якщо задана точка $M_0\left(2;\frac{1}{2}\right)$ (тобто, умова $y(2)=\frac{1}{2}$), то, підставляючи координати точки в формулу $y=\frac{C}{x}$, одержимо $C=1$. Точці $M_1(2;1)$ відповідає значення $C=2$. Отже, через кожну точку площини (за винятком точок $x=0$, $y=0$) проходить одна інтегральна крива диференціального рівняння (3).

§ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ (ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ)

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x,y,y')=0. \qquad (1)$$

Якщо з рівняння (1) можна виразити y', то його можна записати у вигляді

$$y'=f(x;y). \qquad (2)$$

Оскільки похідну y' можна розглядати як частку диференціалів $\frac{dy}{dx}$, то рівняння (2) можна записати в еквівалентній формі в диференціалах $dy=f(x,y)dx.$ Диференціальне рівняння першого порядку в диференціалах можна записати у вигляді

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0.$$

Теорема (про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння першого порядку). Якщо в рівнянні (2) функція $f(x;y)$ та її частинна похідна $f'_y(x;y)$ неперервні в деякій області D площини XOY, точка $M_0(x_0;y_0)\in D,$ то знайдеться окіл точки x_0, в якому існує єдиний розв'язок $y=y(x)$ рівняння (2), що задовольняє умові $y(x_0)=y_0.$

З теореми випливає, що рівняння (2) має нескінченну множину різних розв'язків (тобто, різних інтегральних кривих, кожна з яких проходить через певну точку). Умова вигляду $y(x_0)=y_0$ називається початковою умовою.

Означення 1. Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція $y=y(x,C),$ яка залежить від змінної x та довільної сталої $C,$ якщо:

1) $y(x;C)$ є розв'язком диференціального рівняння для будь-якого допустимого значення константи $C;$

2) для довільної точки $M_0(x_0;y_0)\in D,$ в якій виконуються умови теореми про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння першого порядку, існує константа C_0 така, що $y(x_0;C_0)=y_0.$

Означення 2. Частинним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція $y=y(x),$ яка одержується з загального розв'язку при деякому фіксованому значенні константи $C.$

Початкова умова $y(x_0)=y_0$ виділяє з загального розв'язку частинний, тобто одну інтегральну криву, що проходить через задану точку. Задача знаходження розв'язку рівняння (1), який задовольняє початковій умові $y(x_0)=y_0,$ називається задачею Коші. Розв'язати задачу Коші – означає:

1) знайти загальний розв'язок диференціального рівняння;
2) із загального розв'язку виділити частинний розв'язок, який задовольняє заданій початковій умові.

Дамо геометричну інтерпретацію диференціального рівняння першого порядку. Нехай функція $f(x;y)$ задана в деякій області D. Тоді рівняння $y' = f(x;y)$ кожній точці $M(x;y) \in D$ ставить у відповідність значення похідної y', тобто кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої, що проходить через задану точку. Так як кутовий коефіцієнт визначає напрям інтегральної кривої, то кажуть, що диференціальне рівняння (2) задає поле напрямів на площині. Таким чином, розв'язання рівняння (2) полягає в знаходженні кривих, напрям яких співпадає з напрямом поля у відповідних точках. Геометричне місце точок площини, в яких поле напрямів є сталим, називається ізокліною.

Приклад 1. Знайти диференціальне рівняння, якому відповідає сім'я інтегральних кривих

$$y = Cx^3. \tag{3}$$

Розв'язання. Продиференціюємо рівняння (3): $y' = 3Cx^2$.

Підставляючи значення $C = \dfrac{y}{x^3}$ з рівняння (3), одержуємо диференціальне рівняння заданої сім'ї кривих $y' = \dfrac{3y}{x}, \quad x \neq 0.$

Далі розглянемо методи розв'язання деяких типів диференціальних рівнянь першого порядку.

§ 3. РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

Означення 1. Диференціальне рівняння вигляду

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (1)$$

називається рівнянням з відокремлюваними змінними.

Поділимо обидві частини рівняння

$$M_2(x)N_2(y)dy = -M_1(x)N_1(y)dx$$

на $M_2(x)\cdot N_1(y)$, при умові, що $M_2(x)\neq 0,\quad N_1(y)\neq 0$, та одержимо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx,$$

загальний інтеграл якого легко знаходиться у вигляді

$$\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + C,$$

де $C-$ довільна константа.

Зокрема, якщо замінити $\dfrac{dy}{dx} = y'$, рівняння (1) набуде вигляду

$$y' = f_1(x)\,f_2(y).$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\sqrt{y^2+1}dx - xydy = 0.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $xydy = \sqrt{y^2+1}dx$ і поділимо обидві його частини на $x\sqrt{y^2+1}$ при умові, що $x\neq 0$. Одержимо $\dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}}dy = \dfrac{dx}{x}$ та, інтегруючи, маємо $\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + \ln|C|$, або

$\sqrt{y^2+1} = \ln|Cx|$. Це є загальний інтеграл заданого диференціального рівняння.

<u>Приклад 2.</u> (Задача про розпад радію)

Встановлено, що швидкість розпаду радію прямо пропорційна його кількості в даний момент. Знайти закон зміни маси радію x залежно від часу t, якщо при $t = 0$ маса становила x_0, а період піврозпаду 1600 років.

Розв'язання. Швидкість розпаду радію характеризує похідна $\frac{dx}{dt}$. За умовою задачі $\frac{dx}{dt} = -kx$, де $k -$ коефіцієнт пропорційності $(k > 0)$. Це є рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні $\frac{dx}{x} = -kdt$ і одержимо $\ln|x| = -kt + C$, або

$$x = e^{-kt+C}. \qquad (2)$$

Використаємо початкові умови. Так як при $t = 0 \quad x = x_0$, то $x_0 = e^C$, і рівність (2) запишеться у вигляді

$$x = x_0 e^{-kt}. \qquad (3)$$

Якщо $t = 1600$ років, то $x = \frac{1}{2}x_0$. Тоді маємо $\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-1600k}$,

$e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1600}}$. Підставляючи дане значення в (3), одержимо закон розпаду радію

$$x = x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}.$$

<u>Приклад 3.</u> З метою зняття залишкових зварних напруг зварне з'єднання рівномірно нагрівають до температури 600° - 650°С, а потім

охолоджують на повітрі. За який час температура T зварного з'єднання знизиться до 30°C, якщо температура повітря 20°C, а зварне з'єднання за 20 хвилин охололо від 650°C до 300°C ? Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла та середовища.

Розв'язання. За умовою задачі складаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20), \tag{4}$$

де $k-$ коефіцієнт пропорційності $(k>0).$ Відокремлюємо змінні

$$\frac{dT}{T-20} = -kdt$$

і одержуємо $\ln|T-20| = -kt + C,$ або $(T>20)$

$$T = 20 + e^{-kt+C}. \tag{5}$$

Застосуємо початкові умови: при $t=0,\quad T=650\,°$; при $t=20$ хв., $T=300\,°$. Підставляючи задані значення в рівність (5), маємо

$$\begin{cases} 650 = 20 + e^{C}, \\ 300 = 20 + e^{-20k+C}. \end{cases}$$

З першого рівняння $e^{C}=630,$ з другого: $280 = 630e^{-20k},\quad e^{-k} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{20}}.$

Тоді (5) зводиться до вигляду

$$T = 20 + 630\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{t}{20}}. \tag{6}$$

З рівності (6) знайдемо час, що відповідає температурі 30° зварного з'єднання.

$$30 = 20 + 630\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{t}{20}},\quad \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{t}{20}} = \frac{1}{63},\quad t = 20\log_{\frac{4}{9}}\frac{1}{63} \approx 120\text{хв.=2год.}$$

Таким чином, за 2 години температура зварного з'єднання знизиться до 30°С.

§4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ОДНОРІДНІ ВІДНОСНО ЗМІННИХ

Означення 1. Функція $f(x;y)$ називається однорідною функцією порядку a, якщо для довільного $t>0$ справедлива тотожність $f(tx;ty)=t^{a}f(x;y)$.

Означення 2. Диференціальне рівняння

$$P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0 \tag{1}$$

називається однорідним відносно змінних x і y, якщо $P(x;y)$ і $Q(x;y)$ є однорідними функціями одного й того ж порядку.

Рівняння (1) можна записати у вигляді

$$y'=j(x;y), \tag{2}$$

де $j(x;y)=-\dfrac{P(x;y)}{Q(x;y)}$ є однорідною функцією нульового порядку.

Рівняння (2) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними з допомогою заміни $y=tx,$ де $t=t(x)-$ нова невідома функція.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y\ln\frac{y}{x}dx-xdy=0. \tag{3}$$

Розв'язання. Це є однорідне рівняння відносно змінних, так як

$y\ln\dfrac{y}{x}$ та $(-x)$ є однорідними функціями першого порядку. Запишемо (3) у вигляді $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$ і виконаємо заміну $y = tx.$ Маємо

$$t'x + t = t\ln t, \quad t'x = t(\ln t - 1), \quad \frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}, \quad t \neq 0, \quad t \neq e,$$

$$\ln\left|\ln t - 1\right| = \ln\left|x\right| + \ln\left|C\right|, \quad \ln t - 1 = Cx, \quad t = e^{Cx+1}, \quad y = xe^{Cx+1} \quad (C \neq 0).$$

<u>Приклад 2.</u> Знайти криву, що збирає паралельні промені в одній точці.

Розв'язання. Виберемо систему координат на площині так, щоб промені падали паралельно осі ox справа, а початок координат співпадав з точкою, в якій крива збирає паралельні промені.

Нехай точка $M(x;y)$ лежить на кривій, $x > 0$, $y > 0$, $MK -$ дотична до кривої в точці M, $j -$ кут падіння і кут відбивання променя (рис. 1) . Тоді кут, що утворює дотична MK з віссю ox, теж дорівнює j,

$\left|KO\right| = \left|OM\right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$

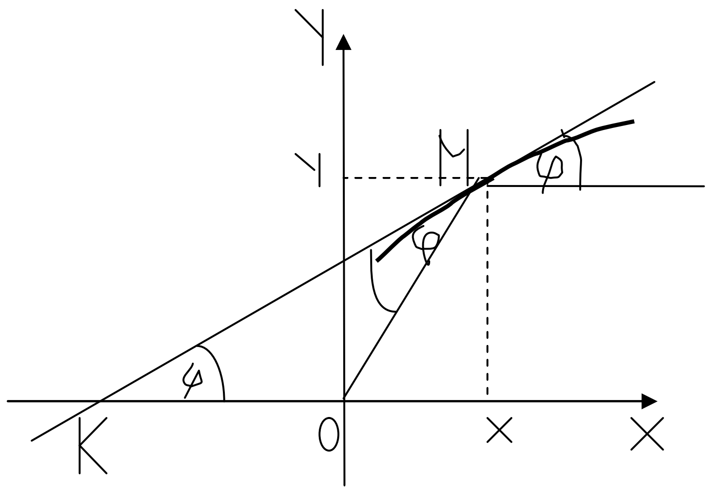

Рис. 1

Так як $y' = tgj$, а з прямокутного трикутника $tgj = y\Big/\left(\sqrt{x^2 + y^2} + x\right),$

одержуємо диференціальне рівняння

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}, \tag{4}$$

що є однорідним диференціальним рівнянням форми кривої. Зробивши заміну $y = tx,$ маємо

$$t'x + t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}+1}; \quad x\frac{dt}{dx} = \frac{-t\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}+1}; \ \int\frac{\sqrt{t^2+1}+1}{t\sqrt{t^2+1}}dt = -\int\frac{dx}{x}.$$

Обчислимо окремо інтеграл у лівій частині рівняння:

$$\int\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\right)dt = \ln t + \int\frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}} = \left|\begin{matrix}\sqrt{t^2+1}=u\\ t=\sqrt{u^2-1}\\ dt=\dfrac{udu}{\sqrt{u^2-1}}\end{matrix}\right| = \ln t +$$

$$+\int\frac{u}{(u^2-1)u}du = \ln t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \ln t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}+1}\right| + C =$$

$$= \ln t + \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{t^2+1}-1)^2}{t^2} + C = \ln\left(\sqrt{t^2+1}-1\right) + C.$$

Тоді $\ln\left(\sqrt{t^2+1}-1\right) = -\ln x + C_1, \sqrt{t^2+1}-1 = \dfrac{C}{x}, \quad C = e^{C_1} > 0,$

$$t^2+1 = \frac{(C+x)^2}{x^2}, \quad \frac{y^2}{x^2}+1 = \frac{C^2+2Cx+x^2}{x^2}, \quad y^2 = C(C+2x), \ C>0,$$

тобто, крива є параболою. Якщо точка $M(x, y)$ лежить в трьох інших чвертях, приходимо до тієї ж відповіді. Зауважимо, що рівняння (4) розв'язується простіше, якщо вважати x функцією незалежної змінної y і виконати заміну $x = ty.$ З прикладу 2 слідує, що просторове дзеркало з аналогічною властивістю буде параболоїдом обертання.

Приклад 3. Знайти лінію, що проходить через точку $M(1;0)$, для якої відрізок, що відтинається довільною дотичною від осі OY, дорівнює полярному радіусу точки дотику.

Розв'язання. Нехай $M_0\left(x_0;y_0\right)$ - точка дотику на шуканій кривій, $N(0;y_1)-$ точка, в якій крива перетинає вісь OY (рис. 2). За умовою задачі $y_1=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$.

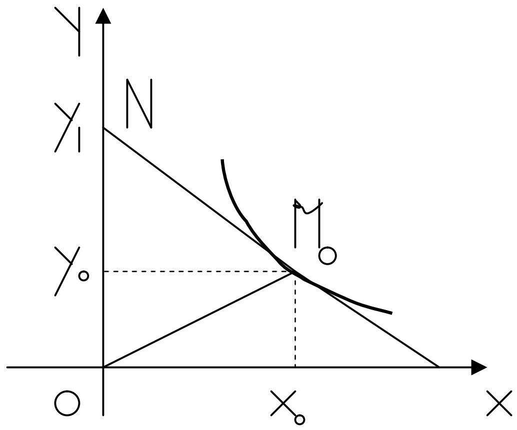

Рис. 2

Рівняння дотичної до кривої в точці M_0: $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$. Точка N належить дотичній, тому $y_1-y_0=y'(x_0)(-x_0)$, або $\sqrt{x_0^2+y_0^2}-y_0=-x_0y'(x_0)$. Остання рівність виконується в довільній точці M_0 кривої, а тому $\sqrt{x^2+y^2}-y=-xy'$, звідки

$$y'=\frac{y}{x}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}. \qquad (5)$$

Це є однорідне диференціальне рівняння шуканої лінії. Зробимо заміну $y=tx$:

$$t'x+t=t-\sqrt{1+t^2},$$

$$x\frac{dt}{dx}=-\sqrt{1+t^2},\quad \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=-\frac{dx}{x},$$

$\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|=-\ln|x|+\ln|C|,\quad t+\sqrt{1+t^2}=\frac{C}{x}.$ Так як $t=\frac{y}{x},$ маємо

$$\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{C}{x},\quad \sqrt{x^2+y^2}=C-y.$$

З даного сімейства кривих знаходимо ту, що проходить через точку $M(1;0)$.

$C=1,\quad \sqrt{x^2+y^2}=1-y,\quad x^2+y^2=1-2y+y^2$ при $y\le 1,\quad x^2=1-2y,$

тобто шукана крива є параболою.

§5. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ

Означення 1. Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо воно містить $y,\quad y'$ в першій степені, тобто має вигляд

$$A(x)y'+B(x)y+C(x)=0, \tag{1}$$

де $A(x),B(x),C(x)-$ неперервні функції, визначені на деякому інтервалі.

Як правило, рівняння (1) зводиться до вигляду

$$y'+P(x)y=Q(x) \tag{2}$$

Розв'язок рівняння (2) будемо шукати у вигляді $y=u(x)v(x),$ де $u(x)-$ нова функція, $v(x)-$ допоміжна функція, вибір якої визначимо нижче. Після підстановки (2) набуває вигляду

$$u'v+uv'+P(x)uv=Q(x),$$

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

Виберемо функцію $v(x)$ так, щоб $v' + P(x)v = 0.$ Тоді рівняння (2) зводиться до системи

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = Q(x). \end{cases} \tag{3}$$

двох диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними. З першого рівняння знаходимо $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v, \quad \frac{dv}{v} = -P(x)dx, \; \ln|v| = -\int P(x)dx, \quad v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Підставляючи v в друге рівняння системи (3), знайдемо $u(x)$.

$$u'e^{-\int P(x)dx} = Q(x), \quad u' = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \quad u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Остаточно, $y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \right)e^{-\int P(x)dx}.$

<u>Приклад 1.</u> Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

Розв'язання. Заміна $y = uv$ приводить до рівняння

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2}.$$

Складаємо відповідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} v' + 2xv = 0, \\ u'v = xe^{-x^2}. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо $v.$

$\frac{dv}{dx} = -2xv, \quad \frac{dv}{v} = -2xdx, \quad \ln|v| = -x^2, \quad v = e^{-x^2}$. Підставляємо v в друге рівняння системи і знаходимо $u.$

$u'e^{-x^2}=xe^{-x^2}, \quad u'=x, \quad u=\frac{x^2}{2}+C.$ Отже, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд $y=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+C\right).$

<u>Приклад 2.</u> Електричне коло складене з опору $R,$ індуктивності L та джерела струму, електрорушійна сила якого $E(t)=kt,$ де $t-$час, $k-$ коефіцієнт пропорційності. Знайти закон зміни сили струму $i(t),$ якщо при $t=0, \quad i=0.$

Розв'язання. За законом Ома $i(t)=\frac{E}{R}, \quad$ де $E=E(t)+E_c, \quad E_c=-L\frac{di}{dt}.$

Тоді

$$i(t)=\frac{kt-L\frac{di}{dt}}{R}, \quad \text{або} \quad \frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{kt}{L}. \tag{4}$$

Рівняння (4) є лінійним диференціальним рівнянням зміни сили струму в колі. Виконуємо заміну $i=uv$:

$$u'v+uv'+\frac{R}{L}uv=\frac{kt}{L}, \quad u'v+u\left(v'+\frac{R}{L}v\right)=\frac{kt}{L}, \quad \begin{cases} v'+\frac{R}{L}v=0 \\ u'v=\frac{kt}{L} \end{cases}.$$

З першого рівняння:

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{R}{L}v, \quad \frac{dv}{v}=-\frac{R}{L}dt, \quad \ln|v|=-\frac{R}{L}t, \quad v=e^{-\frac{R}{L}t}.$$

З другого рівняння:

$$u'e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{kt}{L}, \quad u'=\frac{kt}{L}e^{\frac{R}{L}t}, \quad u=\frac{k}{L}\int te^{\frac{R}{L}t}dt=\left|\begin{matrix} u=t, & dv=e^{\frac{R}{L}t}dt \\ du=dt, & v=\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t} \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{k}{L}\left(\frac{L}{R}te^{\frac{R}{L}t}-\frac{L}{R}\int e^{\frac{R}{L}t}dt\right)=\frac{k}{R}\left(te^{\frac{R}{L}t}-\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\right)+C=\frac{k}{R}e^{\frac{R}{L}t}\left(t-\frac{L}{R}\right)+C.$$

Тоді

$i(t)=\frac{k}{R}\left(t-\frac{L}{R}\right)+Ce^{-\frac{R}{L}t}$ та, враховуючи початкову умову $i(0)=0,$ тобто $C=\frac{L}{R},$ остаточно закон зміни сили струму має вигляд

$$i(t)=\frac{k}{R}t+\frac{kL}{R^2}\left(e^{-\frac{R}{L}t}-1\right).$$

<u>Означення 2.</u> Рівнянням Бернуллі називається диференціальне рівняння вигляду

$$y'+P(x)y=Q(x)y^a\ , \tag{5}$$

де $P(x),\quad Q(x)-$ неперервні на деякому інтервалі функції, $a\ -$ дійсне число, $a\neq 0,\quad a\neq 1.$

Поділимо обидві частини рівняння (5) на y^a :

$$y^{-a}y'+P(x)y^{1-a}=Q(x) \tag{6}$$

та позначимо $y^{1-a}=z.$ Так як $z'=(1-a)y^{-a}y',$ то рівняння (6) запишеться у вигляді

$$\frac{z'}{1-a}+P(x)z=Q(x),$$

тобто рівняння Бернуллі зводиться до лінійного диференціального рівняння першого порядку відносно $z.$

Зауваження. Для розв'язання рівняння Бернуллі можна застосовувати той самий метод, що і для лінійного рівняння, виконуючи заміну $y=uv.$

Приклад 3. Знайти розв'язок рівняння

$$xy' + y = 2y^2 \ln x, \tag{7}$$

що задовольняє початковій умові $y(1) = \frac{1}{2}.$

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння Бернуллі (7) на $x \neq 0$:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{2y^2}{x} \ln x$$

та виконаємо заміну $y = uv.$ Маємо

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{2u^2v^2}{x} \ln x.$$

Складаємо систему

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = \dfrac{2u^2v^2}{x} \ln x. \end{cases}$$

З першого рівняння:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = \frac{1}{x}.$$

З другого рівняння:

$$u' = 2u^2 \frac{\ln x}{x^2}, \quad \frac{du}{u^2} = \frac{2\ln x}{x^2} dx, \quad \int \frac{2\ln x}{x^2} dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & dv = \dfrac{1}{x^2} dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = -\dfrac{1}{x} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2\ln x}{x} + 2\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C = -\frac{2}{x}\left(\ln x + 1\right) + C.$$ Тоді

$$-\frac{1}{u} = -\frac{2}{x}\left(\ln x + 1\right) + C,$$ або $$u = \frac{x}{2(\ln x + 1) + Cx}.$$

Враховуючи, що $y = uv,$ одержимо $y = \dfrac{1}{2(\ln x + 1) + Cx}.$ Сталу C визначимо з початкової умови $y(1) = \dfrac{1}{2}$: $\quad \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2 + C}, \quad C = 0.$

Тобто розв'язком рівняння (7), що задовольняє заданій початковій умові, є функція $y = \dfrac{1}{2(\ln x + 1)}, \quad x > 0, \quad x \neq \dfrac{1}{e}.$

§6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Означення 1. Диференціальним рівнянням вищого порядку називається рівняння вигляду

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \quad n = 2, 3, ... \tag{1}$$

Якщо (1) можна розв'язати відносно $y^{(n)},$ то одержимо

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Теорема (існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння $n-$го порядку). Якщо в рівнянні (2) функція $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ та її частинні похідні за змінними $y, y', ..., y^{(n-1)}$ неперервні в деякій області $D,$ точка $M_0(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}) \in D,$ то знайдеться окіл точки $x_0,$ в якому існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (2), що задовольняє умовам

$$\begin{gathered} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \\ .... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{gathered} \tag{3}$$

Умови (3) називають початковими умовами. Знаходження такого розв'язку рівняння (2), який задовольняє початковим умовам (3), називається задачею Коші.

<u>Означення 2.</u> Загальним розв'язком диференціального рівняння $n-$го порядку називається функція $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, де $C_1, C_2, ..., C_n$ – довільні константи, якщо

1) ця функція є розв'язком рівняння (2) при довільних допустимих значеннях $C_1, C_2, ..., C_n$;
2) для довільної точки $M_0(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$, в якій виконуються умови теореми існування та єдиності розв'язку, існують константи $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$ такі, що функція $y = y(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ задовольняє початковим умовам (3).

<u>Означення 3.</u> Частинним розв'язком рівняння (2) називається розв'язок, що одержується з загального при фіксованих значеннях констант.

§7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ПОНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

І. Рівняння, що містять тільки незалежну змінну та старшу похідну:

$$y^{(n)} = f(x). \quad (1)$$

Послідовно маємо:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1, \quad y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1 x + C_2, ...$$

Після n інтегрувань одержимо розв'язок рівняння (1).

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' = \sin 3x.$

Розв'язання. Тричі інтегруємо обидві частини рівняння:

$$y'' = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C_1, \qquad y' = -\frac{1}{9}\sin 3x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \frac{1}{27}\cos 3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

II. Рівняння, що не містить в явному вигляді шукану функцію:

$$F(x, y, y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{2}$$

Виконаємо заміну $y' = z, y'' = z', ..., y^{(n)} = z^{(n-1)},$ після чого приходимо до рівняння $F(x, z, z', ..., z^{(n-1)}) = 0.$

Зокрема, при $n = 2$ одержимо $F(x, z, z') = 0.$ Визначивши $z,$ повертаємось до y' та знаходимо $y.$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $2xy'y'' = (y')^2 + 1.$

Розв'язання. Виконаємо заміну $y' = z$ і одержимо $2xzz' = z^2 + 1.$ Це рівняння з відокремлюваними змінними.

$$2xz\frac{dz}{dx} = z^2 + 1, \quad \frac{2z}{z^2+1}dz = \frac{dx}{x},$$

$$\ln(z^2+1) = \ln|x| + \ln|C_1|, \quad z^2 + 1 = C_1 x, \quad z = \pm\sqrt{C_1 x - 1}.$$

Враховуючи, що $z = y',$ маємо

$$y' = \pm\sqrt{C_1 x - 1}, \quad y = \pm\int\sqrt{C_1 x - 1}\,dx = \pm\frac{2}{3C_1}(C_1 x - 1)^{3/2} + C_2.$$

III.Рівняння, що не містить в явному вигляді незалежну змінну:

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \qquad (3)$$

Відсутність змінної x дозволяє в рівнянні (3) змістити роль змінних. Вважатимемо, що $y -$ незалежна змінна, а $y' -$ невідома функція, і введемо позначення $y' = p(y).$ Тоді $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$

Після підстановки у випадку $n = 2$ маємо $F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$

Визначаємо з рівняння $p(y)$ та, використовуючи заміну $y' = p(y),$ знаходимо $y.$

<u>Приклад 3.</u> Знайти загальний інтеграл рівняння

$$yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0.$$

Розв'язання. Це рівняння не містить у явному вигляді $x,$ значить,

$y' = p(y), \quad y'' = p\frac{dp}{dy}, \quad yp\frac{dp}{dy} - p^2 + p^3 = 0.$ Один розв'язок знаходимо відразу: $p = 0, \quad y' = 0, \quad y = C.$ Знаходимо інший розв'язок

$$y\frac{dp}{dy} - p + p^2 = 0, \quad y\frac{dp}{dy} = p - p^2, \quad \frac{dp}{p - p^2} = \frac{dy}{y}.$$

$\int\frac{dp}{p(1-p)} = \int\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right)dp = \ln|p| - \ln|1-p| + C = \ln\left|\frac{p}{1-p}\right| + C.$ Тому

$$\ln\left|\frac{p}{1-p}\right| = \ln|y| + \ln|C_1|, \quad \frac{p}{1-p} = C_1y, \quad p = C_1y - C_1yp, \quad p = \frac{C_1y}{1 + C_1y}.$$

Враховуючи $p = y',$ маємо

$$y' = \frac{C_1 y}{1 + C_1 y}, \quad \frac{1 + C_1 y}{C_1 y} dy = dx, \int \left(\frac{1}{C_1 y} + 1 \right) dy = \int dx, \quad \frac{1}{C_1} \ln|y| + y = x + C_2 .$$

Приклад 4. Знайти форму, яку прийме пружна однорідна нитка під дією сили тяжіння, якщо її кінці прикріпити на однаковій висоті.

Розв'язання. Виберемо систему координат на площині так, щоб крива L нитки була симетричною відносно осі OY і перетинала вісь OY в точці $A.$ Нехай точка $M(x; y) \in L, \quad F -$ сила натягу нитки в точці $M, \quad s -$ довжина дуги $AM, \quad q -$ кут нахилу дотичної до L в точці M до осі OX, тобто $tgq = y'.$ Розкладемо силу F на горизонтальну F_x та вертикальну F_y складові. Тоді $F_y = F \sin q = ks, \quad F_x = F \cos q = F_0$, де $k -$ коефіцієнт пропорційності, $F_0 -$ сила натягу нитки в точці $A.$ Звідси знаходимо: $tgq = \frac{k}{F_0} s.$ Позначимо $\frac{k}{F_0} = a$ і маємо $y' = as.$

Продиференціюємо дану рівність по x: $\quad y'' = a \frac{ds}{dx}.$ Враховуючи, що $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx,$ одержуємо диференціальне рівняння кривої L:

$$y'' = a\sqrt{1 + (y')^2}. \tag{4}$$

Це рівняння, що не містить у явному вигляді $x.$ Тому позначаємо

$y' = z, \quad y'' = z'$ і маємо $\; z' = a\sqrt{1 + z^2}, \quad \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = adx,$

$$\ln\left| z + \sqrt{1 + z^2} \right| = ax + \ln|C_1|, \quad z + \sqrt{1 + z^2} = C_1 e^{ax}.$$

Так як в точці A кут $q = 0,$ то $z(0) = y'(0) = tg0 = 0,$ а значить $C_1 = 1.$

$$z + \sqrt{1 + z^2} = e^{ax}, \quad \sqrt{1 + z^2} = e^{ax} - z, \quad 1 + z^2 = e^{2ax} - 2ze^{ax} + z^2 ,$$

$$z = \frac{e^{2ax} - 1}{2e^{ax}} = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} = shax, \quad y' = shax, \quad y = \int shaxdx = \frac{1}{a} chax + C.$$

Отже, пружна однорідна нитка приймає форму кривої $y=\frac{1}{a}chax+C,$ яку називають ланцюговою лінією.

§8. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

<u>Означення 1.</u> Диференціальне рівняння $n-$го порядку називається лінійним, якщо воно містить невідому функцію та її похідні в першій степені, тобто має вигляд

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \qquad (1)$$

де функції $a_1(x),a_2(x),...,a_n(x),\ f(x)$ задані в деякій області $D.$

Функція $f(x)$ називається правою частиною рівняння (1). Якщо $f(x)\equiv 0,$ то рівняння

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=0 \qquad (2)$$

називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР). В протилежному випадку рівняння (1) називають неоднорідним (ЛНДР).

Будемо вважати, що функції $a_k(x),\quad k=1,2,...,n,\quad f(x)$ неперервні на $[a;b].$ Тоді за теоремою §6 рівняння (1) має єдиний розв'язок, що задовольняє умовам $y^{(k)}(x_0)=y_0^{(k)},\quad k=0,1,...,n-1,$ де $y_0^{(k)}-$довільні дійсні числа, x_0-довільна точка проміжку $[a;b].$

<u>Означення 2.</u> Вираз $L(y)\equiv y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y$ називається лінійним диференціальним оператором.

Оператор $L(y)$ дозволяє записати рівняння (1) і (2) у вигляді:
$L(y)=f(x)$ та $L(y)=0,$ і має наступні властивості:

1) $L(C_1y_1+C_2y_2)=C_1L(y_1)+C_2L(y_2), \quad C_1,C_2-const.;$

2) якщо $y_1,y_2,...,y_k$ є розв'язками рівняння $L(y)=0,$ то довільна їх лінійна комбінація $y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ky_k$ теж є розв'язком цього рівняння.

Означення 3. Функції $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ називаються лінійно залежними на $[a;b],$ якщо існують константи $C_1,C_2,...,C_n,$ серед яких є відмінні від нуля, такі, що

$$C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+...+C_ny_n\equiv 0 \tag{3}$$

для довільного $x\in[a;b].$ Якщо рівність (3) можлива тільки у випадку $C_1=C_2=...=C_n=0,$ то функції $y_1,y_2,...,y_n$ називаються лінійно незалежними.

Наприклад, функції $y_1=\sin^2 x, \quad y_2=\cos^2 x, \quad y_3=1$ є лінійно залежними, так як $y_1+y_2=y_3$. А функції $y_1=1, \quad y_2=x, \quad y_3=x^2$ - лінійно незалежні, адже співвідношення $C_1+C_2x+C_3x^2=0$ може виконуватись не більше, ніж у двох точках. В загальному випадку для дослідження лінійної залежності функцій використовують визначник Вронського:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. Якщо функції $y_1,y_2,...,y_n$ лінійно залежні на $[a;b],$ то $W(x)\equiv 0$ на $[a;b].$

Теорема 2. Якщо лінійно незалежні на $[a;b]$ функції $y_1,y_2,...,y_n$ є розв'язками рівняння $L(y)=0,$ то $W(x)\neq 0$ для довільного $x\in[a;b].$

Рівняння $L(y)=0$ має n і тільки n лінійно незалежних розв'язків. Система n лінійно незалежних розв'язків рівняння $L(y)=0$ називається фундаментальною.

Теорема 3 (структура загального розв'язку ЛОДР). Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ є фундаментальна система розв'язків рівняння $L(y)=0,$ то загальний розв'язок рівняння визначається за формулою

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n, \tag{4}$$

де $C_1, C_2, ..., C_n -$ довільні константи.

Приклад 1. Рівняння $y'' - y = 0$ має частинні розв'язки $y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}.$ Визначник Вронського $W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$ тому розв'язки y_1, y_2 лінійно незалежні, і загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$

Теорема 4 (структура загального розв'язку ЛНДР). Загальний розв'язок $y_{з.н.}$ рівняння $L(y) = f(x)$ дорівнює сумі загального розв'язку $y_{з.о.}$ відповідного однорідного рівняння $L(y)=0$ та деякого частинного розв'язку $y_{ч.н.}$ неоднорідного рівняння: $y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}.$

§9. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Будемо розглядати рівняння $L(y)=0$ у випадку, коли $a_k(x), \quad k = 1, 2, ..., n, -$ дійсні числа:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{1}$$

Потрібно знайти n лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (1). Спробуємо шукати частинний розв'язок у вигляді $y = e^{lx}, \quad l = const.$ Очевидно, функція $y = e^{lx}$ є розв'язком рівняння (1), якщо число l є коренем алгебраїчного рівняння:

$$l^n + a_1 l^{n-1} + a_2 l^{n-2} + \ldots + a_{n-1} l + a_n = 0. \qquad (2)$$

Рівняння (2) називають характеристичним рівнянням для диференціального рівняння (1).

При розв'язанні рівняння (2) можливі наступні випадки.

1) Всі корені $l_1, l_2, \ldots, l_n$ характеристичного рівняння дійсні і різні. В цьому випадку одержимо n частинних лінійно незалежних розв'язків рівняння (1):

$$y_1 = e^{l_1 x}, \quad y_2 = e^{l_2 x}, \ldots, \quad y_n = e^{l_n x}.$$

2) Всі корені рівняння (2) дійсні, але деякі з них співпадають (кратні корені). В цьому випадку кожному кореню l_i кратності K_i відповідає K_i лінійно незалежних розв'язків рівняння (1):

$$y_1 = e^{l_i x}, \quad y_2 = x e^{l_i x}, \ldots, \quad y_{K_i} = x^{K_i - 1} e^{l_i x}.$$

3) Серед коренів рівняння (2) є комплексні. Оскільки (2) є рівнянням з дійсними коефіцієнтами, то кожному комплексному кореню $a + ib$ відповідає комплексно спряжений корінь $a - ib$. Цим кореням відповідають два лінійно незалежних частинних розв'язки рівняння (1):

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_2 = e^{ax} \sin bx.$$

Якщо корені $a \pm ib$ мають кратність r, то цим кореням відповідають $2r$ частинних лінійно незалежних розв'язки рівняння (1):

$$e^{ax} \cos bx, \quad x e^{ax} \cos bx, \quad \ldots, \quad x^{r-1} e^{ax} \cos bx,$$

$$e^{ax}\sin bx,\quad xe^{ax}\sin bx,\quad \dots,\quad x^{r-1}e^{ax}\sin bx.$$

Зокрема, при $n=2$ загальний розв'язок ЛОДР в кожному з трьох випадків має вигляд

1) $y=C_1e^{l_1x}+C_2e^{l_2x}$,

2) $y=e^{l_1x}\left(C_1+C_2x\right)$,

3) $y=e^{ax}\left(C_1\cos bx+C_2\sin bx\right)$.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''-4y'-5y=0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння $l^2-4l-5=0$. Його корені $l_1=-1,\quad l_2=5$. Їм відповідають частинні розв'язки $y_1=e^{-x},\quad y_2=e^{5x}$. Значить, загальний розв'язок $y=C_1e^{-x}+C_2e^{5x}$.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'''-6y''+9y'=0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння в даному випадку має вигляд $l^3-6l^2+9l=0$. Його корені $l_1=0,\quad l_2=l_3=3$. Тому частинні розв'язки: $y_1=1,\quad y_2=e^{3x},\quad y_3=xe^{3x}$ і загальний розв'язок $y=C_1+e^{3x}(C_2+C_3x)$.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'''+3y''+y'-5y=0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння буде таким: $l^3+3l^2+l-5=0$. Воно має дійсний корінь $l_1=1$ та комплексно спряжені корені $l_2=-2+i,\quad l=-2-i$. Звідси випливає, що частинні розв'язки мають вигляд $y_1=e^x,\quad y_2=e^{-2x}\cos x,\quad y_3=e^{-2x}\sin x$. Тому загальний розв'язок $y=C_1e^x+e^{-2x}(C_2\cos x+C_3\sin x)$.

§10. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ. МЕТОД НЕВИЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $n-$го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x). \qquad (1)$$

З теореми 4 §9 випливає, що загальний розв'язок рівняння (1) визначається за формулою $y_{з.н.}=y_{з.о.}+y_{ч.н.}$, де $y_{з.о.}-$ загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $L(y)=0$, $y_{ч.н.}-$ деякий частинний розв'язок рівняння (1). Розглянемо метод невизначених коефіцієнтів, який дозволяє знаходити частинний розв'язок рівняння (1) у випадку, якщо права частина рівняння має спеціальний вигляд

$$f(x)=e^{ax}(P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx), \qquad (2)$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)-$многочлени степені n і m відповідно, $a\,,b\,-$дійсні числа. Позначимо $s=\max\{n;m\}$. Якщо число $a+ib$ є коренем характеристичного рівняння $l^n+a_1l^{n-1}+a_2l^{n-2}+...+a_{n-1}l+a_n=0$ кратності $k, k=0,1,...,$ ($k=0$ означає, що $a+ib$ не є коренем характеристичного рівняння), то частинний розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$y_{ч.н.}=x^ke^{ax}\left(R_s(x)\cos bx+F_s(x)\sin bx\right), \qquad (3)$$

де $R_s(x)$ і $F_s(x)-$многочлени степені s з невідомими коефіцієнтами. Невизначені коефіцієнти шукаємо так: оскільки вигляд $y_{ч.н.}$ відомий, знаходимо $y'_{ч.н.}$, $y''_{ч.н.}$, …, $y^{(n)}_{ч.н.}$, підставляємо ці вирази в рівняння (1) та прирівнюємо в одержаній тотожності коефіцієнти при однакових степенях незалежної змінної x (або при $\cos bx$ і $\sin bx$). З одержаної системи лінійних алгебраїчних рівнянь знаходимо коефіцієнти многочленів $R_s(x)$ і $F_s(x)$.

<u>Приклад 1.</u> Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y = 2e^{2x}$.

Розв'язання. Розглянемо відповідне однорідне рівняння $y'' - 4y = 0$. Його характеристичне рівняння має вигляд $l^2 - 4 = 0$. Корені характеристичного рівняння: $l_1 = -2$; $l_2 = 2$. Тому $y_{з.о.} = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$.

Права частина рівняння $f(x) = 2e^{2x}$ має спеціальний вигляд (2) з $a = 2$, $b = 0$ і $P_n(x) = 2$. Так як число $a + ib = 2$ є коренем характеристичного рівняння кратності $k = 1$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y_{ч.н.} = Axe^{2x}$. Тоді $y'_{ч.н.} = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$, $y''_{ч.н.} = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$. Підставляючи ці значення в початкове рівняння, маємо $4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 4Axe^{2x} = 2e^{2x}$. Звідси $4A = 2$, $A = \frac{1}{2}$. Отже, маємо $y_{ч.н.} = \frac{1}{2}xe^{2x}$ і

$y_{з.н.} = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x}$.

<u>Приклад 2.</u> Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 6y' + 9y = 3x^2 + 4x + 2.$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння: $l^2 + 6l + 9 = 0$. Його корені $l_{1,2} = -3$. Тому $y_{з.о.} = e^{-3x}(C_1 + C_2x)$. Так як $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$, то $a = 0$, $b = 0$, $P_n(x) = 3x^2 + 4x + 2$ і $a + ib = 0$ не є коренем характеристичного рівняння. Значить, частинний розв'язок неоднорідного рівняння матиме вигляд $y_{ч.н.} = Ax^2 + Bx + C$. Знаходимо

$y'_{ч.н.} = 2Ax + B, \quad y''_{ч.н.} = 2A$ і, підставляючи ці значення в початкове рівняння, маємо

$$2A + 12Ax + 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = 3x^2 + 4x + 2,$$

або $\quad 9Ax^2 + \left(12A + 9B\right)x + 2A + 6B + 9C = 3x^2 + 4x + 2.$

Звідси одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 9A = 3, \\ 12A + 9B = 4, \\ 2A + 6B + 9C = 2, \end{cases}$$

з якої знаходимо невідомі константи: $A = \dfrac{1}{3}, \quad B = 0, \quad C = \dfrac{4}{27}.$ Отже,

$$y_{з.н.} = e^{-3x}\left(C_1 + C_2 x\right) + \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{27}.$$

Припустимо, що права частина рівняння (1) є сумою функцій спеціального вигляду (2). Справедливе твердження

Теорема 1. Якщо $y_{ч.н.1}$ є частинним розв'язком рівняння (1) з правою частиною $f_1\left(x\right)$, а $y_{ч.н.2}$ - розв'язок рівняння (1) з правою частиною $f_2\left(x\right)$, то $y_{ч.н.1} + y_{ч.н.2}$ є частинним розв'язком рівняння (1) з правою частиною $f_1\left(x\right) + f_2\left(x\right)$.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 9y = 12\sin 3x + 5xe^x, \qquad y\left(0\right) = 0{,}9; \quad y'\left(0\right) = 4{,}4.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $l^2 + 9 = 0$ має комплексні корені $l_{1,2} = \pm 3i.$ Тому $y_{з.о.} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x.$ Права частина $f\left(x\right) = 12\sin 3x + 5xe^x$ є сумою двох функцій спеціального вигляду. Для $f_1\left(x\right) = 12\sin 3x: \; a = 0, \quad b = 3, \quad Q_m\left(x\right) = 12, \quad a + ib = 3i$ є коренем характеристичного рівняння $\left(k = 1\right)$, тому $y_{ч.н.1} = x\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right).$

Другий доданок $f_2(x)=5xe^x$: $a=1,\quad b=0,\quad P_n(x)=5x,\quad a+ib=1$ не є коренем характеристичного рівняння, тому $y_{ч.н.2}=(Cx+D)e^x$. Остаточно, $y_{ч.н.}=x(A\cos 3x+B\sin 3x)+(Cx+D)e^x$.

Звідси знаходимо похідні

$$y'_{ч.н.}=A\cos 3x+B\sin 3x+x(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)+Ce^x+(Cx+D)e^x,$$

$$y''_{ч.н.}=-6A\sin 3x+6B\cos 3x-9x(A\cos 3x+B\sin 3x)+2Ce^x+(Cx+D)e^x.$$

Підставляємо значення в початкове рівняння

$$-6A\sin 3x+6B\cos 3x-9x(A\cos 3x+B\sin 3x)+2Ce^x+(Cx+D)e^x+$$

$$+9x(A\cos 3x+B\sin 3x)+9(Cx+D)e^x=12\sin 3x+5xe^x$$

і прирівнюємо коефіцієнти при $\sin 3x,\quad \cos 3x,\quad xe^x$ та e^x. Одержимо: $A=-2,\quad B=0,\quad C=\frac{1}{2},\quad D=-\frac{1}{10}$. Отже,

$$y_{з.н.}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-2x\cos 3x+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{10}\right)e^x.$$

Використаємо початкові умови для знаходження C_1, C_2.

$$y'_{з.н.}=-3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x-2\cos 3x+6x\sin 3x+\frac{1}{2}e^x+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{10}\right)e^x.$$

З умови $y(0)=0{,}9$ слідує $C_1-\frac{1}{10}=0{,}9,\quad C_1=1,$ а з умови $y'(0)=4{,}4$ визначаємо $3C_2-2+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=4{,}4,\quad C_2=2.$ Отже,

$$y=\cos 3x+2\sin 3x-2x\cos 3x+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{10}\right)e^x.$$

§11. МЕТОД ВАРІАЦІЇ ДОВІЛЬНИХ СТАЛИХ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Припустимо, що права частина ЛНДР зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \qquad (1)$$

не має спеціального вигляду. В цьому випадку метод невизначених коефіцієнтів непридатний, а розв'язати рівняння (1) можна загальнішим способом, який назвемо методом варіації довільних сталих. Нехай відповідне однорідне рівняння

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (2)$$

має загальний розв'язок

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x). \qquad (3)$$

Будемо шукати загальний розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)+\ldots+C_n(x)y_n(x), \qquad (4)$$

де $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ - невідомі функції, похідні яких визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+\ldots+C_n'(x)y_n(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+\ldots+C_n'(x)y_n'(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x)+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)=0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x). \end{cases} \qquad (5)$$

Визначник системи (5) відмінний від нуля (як визначник Вронського для лінійно незалежних функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$), тому система має єдиний розв'язок $C_1'(x), \quad C_2'(x), \quad ..., \quad C_n'(x)$. Знаючи цей розв'язок, знаходимо $C_1(x) = \int C_1'(x)dx, \quad ..., \quad C_n(x) = \int C_n'(x)dx.$

Зокрема, для рівняння другого порядку система (5) запишеться так

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{6}$$

Метод варіації довільних сталих в окремих випадках приводить до громіздких викладок при інтегруванні, а тому використовується, як правило, коли права частина рівняння (1) не має спеціального вигляду.

<u>Приклад 1</u>. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \tag{7}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $l^2 - 2l + 1 = 0$ має корені $l_{1,2} = 1$. Тому $y_{з.о.} = e^x(C_1 + C_2 x)$, тобто, $y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = xe^x$. Будемо шукати загальний розв'язок неоднорідного рівняння (7) у вигляді

$$y_{з.н.} = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x, \tag{8}$$

де $C_1(x), \quad C_2(x)$ - невідомі функції. Складаємо систему (6)

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0, \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)\left(e^x + xe^x\right) = \dfrac{e^x}{x^2+1}. \end{cases}$$

Визначивши невідомі $C_2'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad C_1'(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$, шляхом інтегрування знаходимо $C_1(x), \quad C_2(x)$.

$$C_1(x) = -\int \frac{x}{x^2+1}dx = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C_1, \quad C_2(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = arctgx + C_2.$$

Підставляючи $C_1(x)$ і $C_2(x)$ в (8), одержимо:

$$y_{з.н.}=\left(-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C_1\right)e^x+\left(arctgx+C_2\right)xe^x.$$

З врахуванням початкових умов $y(0)=1,\quad y'(0)=0$ маємо $C_1=1$ і

$$y'_{з.н.}=-\frac{x}{x^2+1}e^x+\left(-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C_1\right)e^x+\frac{1}{1+x^2}xe^x+\left(arctgx+C_2\right)\left(e^x+xe^x\right),$$

$C_2=-1$. Остаточно, $y=\left(1-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right)e^x+\left(arctgx-1\right)xe^x.$

§12. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

В цьому параграфі ми розглянемо одну задачу прикладної механіки і розв'яжемо її з допомогою лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Нехай на пружині підвішене тіло з масою m. Розглянемо вертикальні коливання тіла навколо положення рівноваги O (рис. 3). На тіло діють:

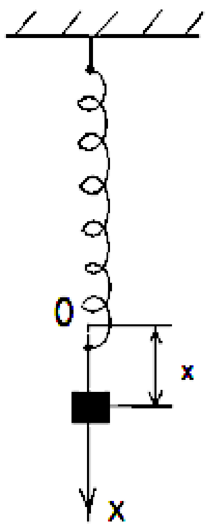

Рис. 3

1) сила, пропорційна відстані тіла від початку координат (пружна сила пружини) $F_n=-kx$;

2) сила опору середовища, пропорційна швидкості зміни x, $F_o=-l\frac{dx}{dt}$, $k>0,\ l>0$ - коефіцієнти пропорційності;

3) зовнішня сила $F_з^*$.

За другим законом Ньютона $mx'' = -lx' - kx + F_{з.}^{*}$, або $mx'' + lx' + kx = F_{з.}^{*}$. Поділимо обидві частини рівняння на m і позначимо $\frac{l}{m} = 2h,\quad \frac{k}{m} = a^2,\quad \frac{F_{з.}^{*}}{m} = F_{з.}$. Диференціальне рівняння

$$x'' + 2hx' + a^2 x = F_{з} \qquad (1)$$

описує коливальний рух тіла. Число h називається коефіцієнтом опору, a^2 – коефіцієнтом відновлення.

Розглянемо частинні випадки рівняння (1).

а) Нехай $F_0 = 0,\quad F_з = 0$. Рівняння (1) звелося до вигляду

$$x'' + a^2 x = 0. \qquad (2)$$

Це ЛОДР зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння $l^2 + a^2 = 0$ має корені $l_{1,2} = \pm ai$, тому загальний розв'язок рівняння (2) $x = C_1 \cos at + C_2 \sin at$.

Позначимо $C_1 = A\sin j$, $\quad C_2 = A\cos j$, де $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $j = arctg\,\frac{C_1}{C_2}$, і одержимо рівність

$$x = A\sin(at + j), \qquad (3)$$

яка описує так звані вільні (гармонічні) коливання. A – амплітуда, j – початкова фаза, a – частота коливань.

б) Нехай $F_з = 0$. Рівнянню $x'' + 2hx' + a^2 x = 0$ відповідають корені характеристичного рівняння $l_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - a^2}$. Сила опору, як правило, незначна, тому вважатимемо, що $h < a$. Тоді $l_{1,2} = -h \pm i\sqrt{a^2 - h^2}$ і

$$x = e^{-ht}\left(C_1 \cos\sqrt{a^2 - h^2}\,t + C_2 \sin\sqrt{a^2 - h^2}\,t\right),$$ або

$$x = Ae^{-ht}\sin\left(\sqrt{a^2 - h^2}\,t + j\right), \qquad (4)$$

якщо $C_1 = A\sin j$, $\quad C_2 = A\cos j$. Амплітуда коливань $Ae^{-ht} \to 0$ при $t \to \infty$, тому коливання називають затухаючими.

в) Покладемо $F_0 = 0$, $\quad F_з = H\sin wt$, де $H, w -$ дійсні числа.

Рівняння $x'' + a^2 x = H\sin wt$ має корені характеристичного рівняння $\pm ai$, тому $x_{з.о.} = A\sin(at + j)$. Припустимо спочатку, що $a \neq w$. Тоді $a + ib = wi -$ не є коренем характеристичного рівняння, а значить, $x_{ч.н.} = D\cos wt + B\sin wt$. Підставляючи в початкове рівняння $x_{ч.н.}$ і $x''_{ч.н.}$, одержимо $-Dw^2\cos wt - Bw^2\sin wt + Da^2\cos wt + Ba^2\sin wt = H\sin wt$,

звідки $\begin{cases} -Dw^2 + Da^2 = 0 \\ -Bw^2 + Ba^2 = H \end{cases} \Rightarrow \quad D = 0, \quad B = \dfrac{H}{a^2 - w^2}.$

Остаточно, $x_{з.н.} = A\sin(at + j) + \dfrac{H}{a^2 - w^2}\sin wt$, тобто маємо суму двох гармонічних коливань з частотою a вільних коливань і частотою w зовнішньої сили.

У випадку, коли частоти a і w співпадають, $a + ib = wi = ai$ є коренем характеристичного рівняння першої кратності $(k = 1)$. Тоді $x_{ч.н.} = t\left(M\cos wt + N\sin wt\right)$ і, підставляючи у початкове рівняння $x_{ч.н.}$ і $x''_{ч.н.}$, маємо

$$-2Mw\sin wt + 2Nw\cos wt - Mw^2 t\cos wt - Nw^2 t\sin wt +$$
$$+Ma^2 t\cos wt + Na^2 t\sin wt = H\sin wt.$$

Звідси $N = 0$, $\quad M = -\dfrac{H}{2a}$ і

$$x_{з.н.} = A\sin(wt + j) - \frac{H}{2a}t\cos wt. \qquad (5)$$

Другий доданок у формулі (5) містить амплітуду $\dfrac{H}{2a}t,$ яка необмежено зростає при $t \to \infty.$ Отже, якщо частоти вільних коливань і зовнішньої сили співпадають, маємо випадок резонансу.

г) Припустимо, що $F_0 \neq 0$ і $F_з = H\sin wt.$ Як правило, в застосуваннях опір малий, тобто $h < a.$ Диференціальне рівняння коливань має вигляд $x'' + 2hx' + a^2 x = H\sin wt,$ і міркування, аналогічні проведеним у попередніх пунктах, приводять до його загального розв'язку

$$x = Ae^{-ht}\sin\left(\sqrt{a^2 - h^2}\,t + j\right) + L\sin\left(wt + y\right), \qquad (6)$$

де $N = \dfrac{H}{\sqrt{(a^2 - w^2)^2 + 4h^2w^2}}, \quad tgy = \dfrac{-2hw}{a^2 - w^2}.$

В рівності (6) перший доданок задає затухаючі коливання. Тому через деякий проміжок часу основний вклад у суму вноситиме другий доданок, що визначає коливання під дією зовнішньої сили (вимушені коливання). Їх амплітуда буде тим більшою, чим менше h і ближчими між собою є значення w і $a.$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

I. Розв'язати диференціальне рівняння. Розв'язати, де вказано, задачу Коші.

1. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2 ydy.$
2. $y' - xy^2 = 2xy.$
3. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0; \quad y(0)=1.$
4. $(1+e^x)yy' = e^x.$
5. $xy' + y = y^2.$
6. $xy' + y = y^2; \quad y(1) = 0{,}5.$
7. $y'\sin x = y\ln y.$
8. $(3+e^x)yy' = e^x.$
9. $3(x^2y + y)dy + \sqrt{2+y^2}dx = 0.$
10. $(1+y^2)dx = xdy.$
11. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}\,y' = 0.$
12. $xy(1+x^2)y' = 1+y^2.$
13. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}; \quad y(2) = 0.$
14. $y'\cos x = (y+1)\sin x.$
15. $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0.$
16. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy.$
17. $3y^2y' + 16x = 2xy^3.$
18. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}\,yy' = 0.$
19. $(x - xy^2)dx + (y - x^2y)dy = 0.$
20. $y^2\sin xdx + \cos^2 x\ln ydy = 0.$
21. $y\ln ydx + dy = 0; \quad y(1) = 1.$
22. $(e^{2x}+5)dy + ye^{2x}dx = 0.$
23. $y(1+x^2)y' = 1+y^2.$
24. $y'ctgx + y = 2; \quad y(0) = -1.$
25. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0;$
    $y(0)=1.$
26. $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0.$
27. $ye^{2x}dx - (1+e^{2y})dy = 0.$
28. $(xy^2+x)dx + (x^2y - y)dy = 0;$
    $y(0)=1.$
29. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$
30. $y'\sin x - y\cos x = 0; \quad y\left(\frac{p}{2}\right) = 1.$

II. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1. $x^2 + y^2 = 2xyy'.$

2. $xy' = y + xtg\,\dfrac{y}{x}.$

3. $xy' = \dfrac{3y^2 + 2xy}{2y + x}.$

4. $y^3dx + 2(x^3 - xy^2)dy = 0.$

5. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}.$

6. $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}.$

7. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}.$

8. $(x^2 + y^2)dx = 2xydy.$

9. $y' = \dfrac{x + 2y}{2x - y}.$

10. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2.$

11. $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0.$

12. $y' = \dfrac{y}{x}\left(\ln\dfrac{y}{x} + 1\right).$

13. $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0.$

14. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$

15. $xy' = y\cos\left(\ln\dfrac{y}{x}\right).$

16. $xy' = y + x\left(1 + e^{\frac{y}{x}}\right).$

17. $y' = \dfrac{xy + y^2e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}.$

18. $y' = \dfrac{4y - x}{2x - y}.$

19. $(x^2 + xy + y^2)dx - x^2dy = 0.$

20. $(2x - 5y)dx + (4x - y)dy = 0.$

21. $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0.$

22. $x\ln\dfrac{y}{x}dy = \left[y\sin\dfrac{y}{x} - x\right]dx.$

23. $(y^2 + 2xy)dx + x^2dy = 0.$

24. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0.$

25. $(x^2 + 3y^2)dx - 2xydy = 0.$

26. $y' = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2y + xy^2}.$

27. $(3x^2 + 9xy + 5y^2)dx - (6x^2 + 4xy)dy = 0.$

28. $\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)dx-\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)dy=0.$

29. $\left(x^3+y^2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy=0.$

30. $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0.$

III. Розв'язати задачу Коші:

1. $y'-\frac{2x-5}{x^2}y=5,\quad y(2)=4.$

2. $y'+\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}e^x,\quad y(1)=e.$

3. $y'-\frac{y}{x}=-2\frac{\ln x}{x},\quad y(1)=1.$

4. $y'-\frac{y}{x}=-\frac{12}{x^3},\quad y(1)=4.$

5. $y'+\frac{2}{x}y=x^3,\quad y(1)=-\frac{5}{6}.$

6. $y'+\frac{y}{x}=3x,\quad y(1)=1.$

7. $y'-\frac{2xy}{1+x^2}=1+x^2,\quad y(1)=3.$

8. $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1,\quad y(1)=1.$

9. $y'+\frac{3y}{x}=\frac{2}{x^3},\quad y(1)=1.$

10. $y'+2xy=-2x^3,\quad y(1)=e^{-1}.$

11. $y'-y\cos x=\sin 2x,\quad y(0)=-1.$

12. $y'-3x^2y=\frac{1}{3}x^2(1+x^3),\quad y(0)=0.$

13. $y'-\frac{y}{x}=-\frac{\ln x}{x},\quad y(1)=1.$

14. $y'-4xy=-4x^3,\quad y(0)=-\frac{1}{2}.$

15. $y'-y\cos x=-\sin 2x,\quad y(0)=3.$

16. $y'-\frac{2y}{(x+1)}=(x+1)^3,\quad y(0)=\frac{1}{2}.$

17. $y'+2xy=xe^{-x^2}\sin x,\quad y(0)=1.$

18. $y'-\frac{2}{x+1}y=e^x(x+1)^2,\quad y(0)=1.$

19. $y'+xy=-x^3,\quad y(0)=3.$

20. $y' + \dfrac{xy}{2(1-x^2)} = \dfrac{x}{2}, \quad y(0) = \dfrac{2}{3}.$

21. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0.$

22. $y' - yctgx = 2x\sin x, \quad y\left(\dfrac{p}{2}\right) = 0.$

23. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0.$

24. $y' + ytgx = \cos^2 x, \quad y\left(\dfrac{p}{4}\right) = \dfrac{1}{2}.$

25. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \dfrac{3}{2}.$

26. $y' - \dfrac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1.$

27. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x, \quad y\left(\dfrac{p}{2}\right) = 1.$

28. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x, \quad y(p) = \dfrac{1}{p}.$

29. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$

30. $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \dfrac{2}{3}.$

IV. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1. $xy' - y = y^2 e^{2x}.$

2. $xy' + 2y = \sqrt{y}.$

3. $y' + \dfrac{2x}{y} = 3x^2\sqrt[3]{y^4}.$

4. $y' - \dfrac{3y}{x} + x^3y^2 = 0.$

5. $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5.$

6. $(x-1)y' - y = y^2.$

7. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2).$

8. $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2.$

9. $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1+\sin x).$

10. $y' + 4x^3y = 4(x^3+1)e^{-4x}y^2.$

11. $y' + xy = (x-1)e^x y^2.$

12. $y' + y = xy^2.$

13. $y' - ytgx = -\left(\dfrac{2}{3}\right)y^4\sin x.$

14. $2y' + 3y\cos x = \dfrac{e^{2x}}{y}(2 + 3\cos x)$

15. $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}(1+x^3).$

16. $xy' + y = y^2 \ln x.$

17. $y' + y = xy^3.$

18. $y' + \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{y^3}.$

19. $y' + 9x^2 y = x^3 \sqrt[3]{y^2}.$

20. $y' + 2y = e^x y^2.$

21. $y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = xy^{\frac{1}{2}}.$

22. $xy' + xy^2 = y.$

23. $x(2x-1)y' + y^2 + 4x = (4x+1)y.$

24. $y' + 4x^3 y^3 + 2xy = 0.$

25. $xy' - y^2 \ln x + y = 0.$

26. $xy' = y - 3x^2 y^2.$

27. $y' + xy = x^3 y^3.$

28. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{x^2}.$

29. $xy' + y = xy^3.$

30. $(1+x^2)y' - 2xy = 4\sqrt{y(1+x^2)}\,arctgx.$

V. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1. $x^3 y'' + x^2 y' = 1.$

2. $yy'' + (y')^2 = 1.$

3. $xy^{V} - y^{IV} = 0.$

4. $xy'' - y' = x^2 e^x.$

5. $2yy'' = (y')^2.$

6. $(y''')^2 + (y'')^2 = 1.$

7. $xy'' = (1+2x^2)y'.$

8. $2yy'' = (y')^2 + 1.$

9. $x^2 y''' = (y'')^2.$

10. $xy'' + y' = 0.$

11. $y'' = \sqrt{1-(y')^2}.$

12. $(y''')^2 = y''.$

13. $y''y' + x = 0.$

14. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2.$

15. $y''' = (y'')^2.$

16. $xy'' = y'.$

17. $yy'' = y'(y' + \sqrt{y^2 + (y')^2})$

18. $y^{IV} - y''' = x.$

19. $(1 - x^2)y'' - xy' = 2.$

20. $2yy'' = 1 + (y')^2.$

21. $x^3 y''' + x^2 y'' = 1.$

22. $(x^2 + 1)y'' = 2xy'.$

23. $yy'' = (y')^2.$

24. $y^{IV} tgx = y''' + 1.$

25. $y'' + 2x(y')^2 = 1.$

26. $yy'' - (y')^2 - y^2 \ln y = 0.$

27. $y^{IV} - x = \dfrac{1}{x} y'''.$

28. $xy'' = xy' + y'.$

29. $y'' = 2y(y')^2(1 + y^2).$

30. $y''' + y'' tgx = \sin 2x.$

VI. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1. $y''' - 7y'' + 10y' = 0.$

2. $y^{IV} + 2y''' - 5y'' - 6y' = 0.$

3. $y''' - 4y' = 0.$

4. $y''' + 4y'' + 13y' = 0.$

5. $y^{IV} + 2y'' + y' = 0.$

6. $y^{IV} + 6y''' + 12y'' + 8y' = 0.$

7. $y''' + y'' - 2y' = 0.$

8. $2y''' - 5y'' + 2y' = 0.$

9. $y''' + 2y'' + 10y' = 0.$

10. $y^{IV} - 8y' = 0.$

11. $y''' - 2y'' + y' = 0.$

12. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 0.$

13. $y''' + y'' - 2y' = 0.$

14. $y''' + 4y'' + 4y' = 0.$

15. $y''' - 2y'' + 2y' = 0.$

16. $y''' + 3y'' = 0.$

17. $y^{IV} - 2y''' = 0.$

18. $y^{IV} + 27y' = 0.$

19. $y''' + y' = 0.$

20. $y''' - 5y'' + 6y' = 0.$

21. $y^{V} - 3y^{IV} = 0.$

22. $y''' + 4y'' + 3y' = 0.$

23. $y''' - 4y'' + 5y' = 0.$

24. $y''' + 4y' = 0.$

25. $y^{V} - y' = 0.$

26. $4y''' + 4y'' + y' = 0.$

27. $y^{IV} - y''' - y'' + y' = 0.$

28. $y''' - 4y'' + 8y' = 0.$

29. $y''' + 4y'' + 13y' = 0.$

30. $y''' - 4y'' + 2y' = 0.$

VII. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2.$

2. $y''' - y' = x^2 + x.$

3. $y^{IV} - y''' = 5(x+2)^2.$

4. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1.$

5. $3y^{IV} + y''' = 6x - 1.$

6. $y''' + y'' = 5x^2 - 1.$

7. $7y''' - y'' = 12x.$

8. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1.$

9. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3.$

10. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2.$

11. $y''' + y'' = 49 - 24x^2.$

12. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1.$

13. $y''' - y'' = 6x + 5.$

14. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2.$

15. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39.$

16. $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5.$

17. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x.$

18. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x.$

19. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1-x).$

20. $y^{V} - y^{IV} = 2x + 3.$

21. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2.$

22. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2.$

23. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x.$

24. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2.$

25. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x.$

26. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2.$

27. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4.$

28. $y^{IV} + y''' = x.$

29. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3.$

30. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1.$

VIII. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{x}.$
2. $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}.$
3. $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}.$
4. $y'' - 2y' = x^3.$
5. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}.$
6. $y'' + 3y' = 4x^2 + 1.$
7. $y'' + 4y' = x^2.$
8. $y'' - 10y' + 25 = 2e^{5x}.$
9. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}.$
10. $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}.$
11. $y'' - 2y' + y = -2e^{-x}.$
12. $7y'' - y' = 14x.$
13. $y'' + 5y' + 6y = 2x - 1.$
14. $y'' + 6y' + 9y = 9xe^{-3x}.$
15. $y'' - 2y' + 5y = 2xe^{-x}.$
16. $4y'' + 8y' = x^2 + x.$
17. $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}.$
18. $y'' - 5y' + 6y = -3e^{2x}.$
19. $y'' + 6y' + 9y = 9xe^{-3x}.$
20. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}.$
21. $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}.$
22. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(x + 1).$
23. $y'' + 8y' + 16y = 3e^{-4x}.$
24. $y'' - y = (x + 2)e^{x}.$
25. $y'' + 5y' + 6y = x^3.$
26. $y'' - 10y' + 25y = xe^{5x}.$
27. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}.$
28. $y'' + 12y' + 36y = 8e^{-6x}.$
29. $y'' + 8y' + 16y = xe^{-4x}.$
30. $y'' + 14y' + 49y = e^{-7x}.$

IX. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-\sin x + 2\cos x).$

2. $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x.$

3. $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x.$

4. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 8x.$

5. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 4x.$

6. $y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x).$

7. $y'' - 4y' + 8y = e^x(2\sin x - \cos x).$

8. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x.$

9. $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x.$

10. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x.$

11. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 4x.$

12. $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x).$

13. $y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x).$

14. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x.$

15. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x.$

16. $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x.$

17. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x.$

18. $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x).$

19. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x).$

20. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x.$

21. $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x.$

22. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x.$

23. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x.$

24. $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x).$

25. $y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x).$

26. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x.$

27. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x.$

28. $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x).$

29. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x.$

30. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x).$

X. Розв'язати задачу Коші:

1. $y'' + y = 1/\cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

2. $y'' + y = 1/\sin x, \quad y\left(\dfrac{p}{2}\right) = 1, \quad y'(p/2) = p/2.$

3. $y'' - 3y' + 2y = e^x/(1 + e^{-x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

4. $y'' - 3y' + 2y = 1/(1 + e^{-x}), \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, \quad y'(0) = 3\ln 2.$

5. $y'' + y = 2ctgx, \quad y(p/2) = 1, \quad y'(p/2) = 2.$

6. $y'' + y' = e^x/(2 + e^x), \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = 1 - \ln 9.$

7. $y'' + 4y = 4/\cos 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

8. $y'' + 4y = 4/\sin 2x, \quad y(p/4) = 2, \quad y'(p/4) = p.$

9. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}/(2 + e^x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

10. $y'' - 3y' + 2y = 1/(2 + e^{-x}), \quad y(0) = 1 + 3\ln 3, \quad y'(0) = 5\ln 3.$

11. $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4}ctg(x/2), \quad y(p) = 2, \quad y'(p) = 1/2.$

12. $y'' - 2y' = 4e^{-2x}/(1 + e^{-2x}), \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = \ln 4 - 2.$

13. $y'' + 16y = 16/\cos 4x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$

14. $y'' + 16y = 16/\sin 4x, \quad y(p/8) = 3, \quad y'(p/8) = 2p.$

15. $y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x}/(1 + e^{-2x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

16. $y'' + 6y' + 8y = 4\cos^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

17. $y'' - 8y' + 20y = 4e^{4x}\sin^2 2x/\cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

18. $y'' - 8y' + 20y = 4e^{4x}/\cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

19. $y'' - 10y' + 24y = 4e^{2x}\cos e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

20. $y'' - 4y' + 8y = 4e^{2x} \sin^x 2x / \cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

21. $y'' - 4y' + 8y = 4e^{2x} / \cos 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

22. $y'' - 2y' = 4e^{4x} \cos e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

23. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sin^2 x / \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

24. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} / \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

25. $y'' + y' = e^x \cos e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

26. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin^2 x / \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

27. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} / \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

28. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x} \cos e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

29. $y'' + y = \sin^2 x / \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

30. $y'' + y = 1 / \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

XI. Геометричні задачі:

1. Знайти рівняння кривої L, що проходить крізь точку $M_0(2;3)$, якщо відомо, що довжина відрізку дотичної від точки дотику до осі Ox дорівнює відстані точки дотику до початку координат.
2. Знайти криву, в якої відрізок нормалі в будь-якій точці кривої, замкнений між осями координат, ділиться навпіл у цій точці.
3. Знайти рівняння кривої, що проходить крізь точку $M_0(2;0)$, якщо відрізок дотичної до кривої між точкою дотику і віссю Oy має постійну довжину 2.

4. Знайти рівняння кривої, для якої довжина відрізку, що відтинається на осі ординат нормаллю, в будь-якій точці кривої дорівнює відстані цієї точки до початку координат.
5. Знайти криву, для якої відрізок на осі ординат, що відтинається будь-якою дотичною, дорівнює абсцисі точки дотику.
6. Знайти рівняння кривої, в якої довжина відрізку, що відтинається дотичною на осі абсцис, дорівнює квадрату ординати точки дотику.
7. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного віссю Ox, дотичною і радіус – вектором точки дотику, постійна.
8. Знайти рівняння кривої, у якої довжина відрізка, що відтинається дотичною на осі ординат, пропорційна квадрату ординати точки дотику.
9. Знайти лінію, що проходить крізь точку (1;2) і що має таку властивість, що ордината точки перетину дотичної з віссю Oy дорівнює натуральному логарифму абсциси точки дотику.
10. Знайти криві, в яких відрізок, що відтинається дотичною на осі ординат, рівний півсумі координат точки дотику.
11. Знайти криву, що проходить крізь точку $\left(1;\frac{1}{3}\right)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної до неї в будь-якій точці кривої втричі більше кутового коефіцієнта радіуса – вектора точки дотику.
12. Площа трапеції, утвореної дотичною до певної лінії, осями координат і ординатою точки дотику, є величина постійна, що дорівнює a^2. Знайти цю лінію.
13. Знайти лінію, що проходить крізь точку (2;2) і що має ту властивість, що ордината точки перетину нормалі з віссю ординат дорівнює добутку координат точки дотику.

14. Знайти криві, для яких сума катетів трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є величина постійна, що дорівнює 10.
15. Знайти рівняння кривої, що проходить крізь точку (1;1), для якої відрізок будь-якої її дотичної, замкнений між координатними осями, ділиться в точці дотику у відношенні 1:2, рахуючи від осі ординат.
16. Знайти лінію, що проходить крізь точку (1;0) і що має ту властивість, що абсциса точки перетину нормалі з віссю Ox дорівнює відношенню квадрата ординати точки дотику до абсциси точки дотику.
17. Знайти криві, в яких відрізок дотичної від точки дотику до точки перетину дотичної з віссю Ox рівний відстані точки перетину цієї дотичної з віссю Ox до точки $P(0;a)$.
18. Визначити лінії, радіус – вектор будь-якої точки яких дорівнює відрізку нормалі між кривою і віссю Ox.
19. Площа, обмежена кривою, віссю Ox і довільною ординатою, дорівнює кубу цієї ординати. Знайти таку інтегральну криву, яка проходить крізь початок координат.
20. Знайти лінію, в якої відрізок, що відтинається на осі ординат дотичною до лінії в довільній точці, пропорційний кубу ординати точки дотику.
21. Знайти криві, для яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис вдвічі менша абсциси точки дотику.
22. Знайти лінію, у якої відрізок, що відтинається на вісі ординат дотичною в довільній точці, пропорційний квадрату ординати точки дотику.
23. Знайти криві, дотичні до яких в будь-якій точці перпендикулярні до радіуса – вектора, проведеного в точку дотику.

24. Знайти криву, що проходить крізь точку $M(-1;2)$ і що має ту властивість, що всі її дотичні проходять крізь початок координат.
25. Знайти криву, що проходить крізь точку $M(-1;2)$ і що має ту властивість, що точка перетину будь-якої її дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу абсциси точки дотику.
26. Знайти криву, що проходить крізь точку $M(0;1)$ і що має ту властивість, що відрізок будь-якої її дотичної дорівнює відстані точки перетину цієї дотичної з віссю абсцис від точки $P(0;3)$.
27. Знайти криву, що проходить крізь точку $M(0;2)$ і що має ту властивість, що відрізок, що відтинається дотичною на осі абсцис, дорівнює квадрату ординати точки дотику.
28. Знайти лінії, що мають ту властивість, що будь-яка дотична до кривої відсікає на осях координат відрізки, що дорівнюють кореню квадратному з різниці квадратів ординати й абсциси точки дотику.
29. Знайти лінію, що має ту властивість, що будь-яка дотична до кривої відтинає від вісі абсцис відрізок, що дорівнює кореню квадратному з суми квадратів координат точки дотику.
30. Знайти лінії, в яких відрізки, що відтинаються будь-якою дотичною від осей координат (абсцис і ординат), відповідно дорівнюють кубу абсциси точки дотику і квадрату абсциси цієї точки.

XII. Задачі фізичного змісту:

1. За 30 днів розпалось 50% початкової кількості радіоактивної речовини. Через який час залишиться 1% її початкової кількості, якщо швидкість розпаду пропорційна кількості речовини в даний момент?

2. Тіло масою m=2 рухається прямолінійно під дією сталої сили F=5. Сила опору рухові чисельно дорівнює швидкості руху. Знайти закон руху тіла, якщо в початковий момент тіло знаходилося в спокої.
3. Моторний човен рухається в спокійній воді зі швидкістю 30 км/год. Через 40 секунд після вимкнення двигуна швидкість човна зменшилася до 15 км/год. За який час швидкість човна зменшиться до 5 км/год, якщо опір води пропорційний швидкості руху?
4. В кімнаті з температурою 15°C деяке тіло охololo за 10 хв. Від 200° до 60°C. Знайти закон охолодження тіла, якщо швидкість охолодження пропорційна різниці температур тіла та середовища, а підвищенням температури середовища можна знехтувати. За який час тіло охолоне до 20°C?
5. Тіло кинули вертикально вгору з початковою швидкістю 30 м/с. Знайти закон руху тіла під дією сили тяжіння. На яку максимальну висоту підніметься тіло?
6. Матеріальна точка масою m рухається вздовж осі ОУ і на неї діє в кожний момент часу сила, пропорційна відхиленню точки від початку координат і направлена до початку координат. Знайти закон руху точки, якщо в початковий момент вона мала ординату y_0 і швидкість v_0.
7. Куля, рухаючись зі швидкістю 200 м/с, пробиває брус товщиною 12 см, і вилітає зі швидкістю 60 м/с. Знайти закон руху та час проходження кулі через брус, якщо сила опору бруса рухові кулі пропорційна квадрату швидкості.
8. Матеріальна точка маси m=1 рухається прямолінійно під дією сили, пропорційної часу і обернено пропорційної швидкості. Знайти закон руху тіла, якщо $v(0)=0,$ при $t=10c.,$ $v=50$ м/с і $s(0)=1$м.

9. Локомотив рухається по горизонтальному шляху зі швидкістю 72 км/год. За який час і на якій відстані він буде зупинений гальмом, якщо опір руху після початку гальмування дорівнює 0,2 його ваги?

10. Якщо тіло занурюється у воду, то його швидкість v та прискорення a наближено зв'язані рівнянням $a = b - kv$, де b і k - сталі. Знайти залежність глибини занурення H від часу, якщо $H(0) = 0$ і $v(0) = 0$.

11. Швидкість точки, що рухається прямолінійно, пропорційна кубу часу з коефіцієнтом пропорційності k. Знайти закон руху точки, якщо через 2 с. після початку руху точка пройшла відстань 10 м.

12. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням, пропорційним добутку швидкості руху та часу. Встановити залежність швидкості від часу, якщо при $t = 0 \quad v = v_0$.

13. З висоти падає тіло масою m. Знайти закон зміни швидкості падіння тіла, якщо на нього, крім сили тяжіння, діє сила опору повітря, яка пропорційна швидкості.

14. Сила струму в ланцюгу з опором R, самоіндукцією L і електрорушійною силою E задовольняє диференціальному рівнянню $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$. Знайти залежність сили струму від часу, якщо $E = E_0 \sin wt$, де E_0, w - сталі, та початкова сила струму $i(0) = 0$.

15. В місткість з 1 кг води при температурі 20°С занурили алюмінієву деталь масою 0,5 кг, питомою теплоємністю 0,2 і температурою 75°С. За 1 хвилину вода нагрілась на 2°С. За який час температура води і деталі відрізнятимуться на 1°С, якщо швидкість зміни температури тіла пропорційна різниці температур тіла та середовища. Втрати тепла на нагрівання місткості не враховувати.

16. Знайти закон руху точки, що падає під дією сили тяжіння, якщо в початковий момент її висота $h = h_0$, а початкова швидкість v_0.

17. Цегляна стіна товщиною 30 см має температуру внутрішньої поверхні 20°С, а зовнішньої - 0°С. Знайти залежність температури внутрішнього вертикального шару стіни від відстані до зовнішньої поверхні та кількість тепла, що виділяється зовні $1M^3$ стіни за добу. Коефіцієнт теплопровідності цегли 0,2 ккал/м.год.град.

18. Знайти закон руху тіла, якщо швидкість тіла в кожний момент часу пропорційна шляху. Відомо, що тіло проходить 30 м. за 1 хв., а 90 м. за 2 хв.

19. Човен уповільнює свій рух під дією сили опору води, що пропорційна швидкості човна. Початкова швидкість човна 1,5 м/с, а через 4 с. – 1 м/с. За скільки часу швидкість зменшиться до 1 см/с ? Який шлях пройде човен до зупинки?

20. Підводний човен, виявивши корабель, що йде прямим курсом зі сталою швидкістю v км/год на відстані a км від човна, переслідує його зі швидкістю $v_1 = kv \quad (k > 0 -$ константа), тримаючи курс на рухомий корабель. Знайти рівняння кривої погоні, що описує підводний човен, та час до зустрічі з кораблем.

21. Уповільнюючи дія тертя на диск, що обертається в рідині, пропорційна кутовій швидкості обертання. Знайти залежність кутової швидкості від часу, якщо відомо, що спочатку диск обертається зі швидкістю 100 об./хв., а через 1 хв. – зі швидкістю 60 об./хв.

22. В повітрі лабораторії об'ємом 200 M^3 після зварювання покритими електродами міститься 0,15% чадного газу (CO). Вентилятор подає за 1 хвилину $20M^3$ повітря, що містить 0,04% CO. Скільки потрібно часу, щоб кількість чадного газу в повітрі кімнати зменшилась втричі?

23. При наплавці валика на масивне тіло швидкість охолодження металу на осі шва пропорційна квадрату різниці температури в даний момент часу і початкової температури T_0 з коефіцієнтом пропорційності $k,$ що залежить від параметрів режиму зварювання та властивостей метала. Знайти залежність температури від часу.

24. Сила опорного тиску гвинтів судна тоннажністю m дорівнює $Q,$ а сила опору рухові судна чисельно дорівнює $mk^2v^2 \quad (k > 0 -$ константа). Знайти залежність швидкості судна від часу, а також граничну швидкість $v_{гр.},$якщо судно рухається прямолінійно і його початкова швидкість дорівнює нулю.

25. Літак маси m в момент приземлення мав швидкість $v_0.$ Яку відстань він пройде до зупинки з вимкненими моторами, якщо сумарний опір рухові чисельно дорівнює $k_1v + k_2v^2,$ де $k_1, k_2 -$константи, $v -$швидкість літака.

26. В момент зупинки двигунів теплохід мав швидкість $v_0.$ Знайти час, що пройде до зупинки теплохода, якщо його водотоннажність дорівнює $m,$ а сила опору рухові чисельно дорівнює $c + kv$ $(c, k -$константи, $v -$швидкість теплохода).

27. Матеріальна точка маси m рухається прямолінійно до нерухомого центру O під дією сили притягання, яка пропорційна відстані від точки до цього центру. Знайти закон руху точки, якщо в початковий момент часу точка знаходилася на відстані a від точки O і мала швидкість $v_0.$

28. Сила, що діє на автомобіль маси m на початку руху, чисельно дорівнює $ae^{-\frac{b}{m}t},$ де $a, b -$константи, а сила опору рухові пропорційна швидкості руху. Знайти залежність швидкості автомобіля від часу.

29. Знайти закон руху $s(t)$ кінця електрода при точковому зварюванні, якщо прискорення a залежить від часу t як $a = 1,2t$ і в початковий момент $s = 0,$ а при $t = 5c.,\quad s = 20$ см ($s(t) -$ шлях, який проходить електрод від початкового положення до контакту зі зварним з'єднанням).

30. В резервуарі об'ємом 100 л знаходиться розсіл, що містить 10 кг розчиненої солі. В резервуар надходить вода зі швидкістю 5 л за 1 хв., що змішується з розчином, і суміш витікає з резервуара з такою ж швидкістю. Скільки солі залишиться в резервуарі через 1 годину?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1.Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. т. 2 – М.: Наука, 1972.

2.Бугров Я. С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1984.

3.Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Посібник для вузів. – К.: Видав. А.С.К., 2001.

4.Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958.

5.Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1975.

6.Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1972.

7.Вища математика. Збірник задач за ред. В.П.Дубовика, І.І.Юрика. – К.: Видав. А.С.К., 2003.

ЗМІСТ