

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**ВИЩА МАТЕМАТИКА.
РОЗДІЛ «ТЕОРІЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО
ПОРЯДКУ»**

Методичні вказівки до
виконання практичних робіт
для студентів усіх форм навчання
напряму підготовки 6.051003,
професійного спрямування «ПСЕМ»

*Рекомендовано вченою радою
приладобудівного факультету
(протокол № від)*

Київ
НТУУ «КПІ»
2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**ВИЩА МАТЕМАТИКА.
РОЗДІЛ «ТЕОРІЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО
ПОРЯДКУ»**

Методичні вказівки до
виконання практичних робіт
для студентів усіх форм навчання
напряму підготовки 6.051003,
професійного спрямування «ПСЕМ»

*Рекомендовано вченою радою
приладобудівного факультету
(протокол № від)*

Київ
НТУУ «КПІ»
2016

Вища математика. Розділ «Теорія поверхонь другого порядку» [Текст] : методичні вказівки до виконання практичних робіт для студентів усіх форм навчання напряму підготовки 6.051003, професійного спрямування «ПСЕМ» / Уклад. : Н. П. Селезньова, Т. О. Рудик, В. В. Листопадова, О. В. Суліма. – К. : НТУУ "КПІ", 2016. – 55 с.

В методичних вказівках викладено матеріали, присвячені особливостям теорії поверхонь другого порядку - одного з розділів дисципліни "Вища математика".

Методичні вказівки написані відповідно до програми і включають основні теоретичні відомості з прикладами розв'язання типових задач, а також завдання для самостійної роботи студентів.

Методичні вказівки призначені для студентів усіх форм навчання напряму підготовки 6.051003, професійного спрямування «ПСЕМ».

Навчальне електронне мережне видання

**ВИЩА МАТЕМАТИКА.
РОЗДІЛ «ТЕОРІЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ»**

Методичні вказівки до
виконання практичних робіт
для студентів усіх форм навчання
напряму підготовки 6.051003,
професійного спрямування «ПСЕМ»

Укладачі: *Селезньова Надія Петрівна, канд. фізико-матем. наук, доцент*
Рудик Тетяна Олександрівна, канд. фізико-матем. наук, доцент
Листопадова Валентина Вікторівна, канд. фізико-матем. наук, доцент
Суліма Ольга Вікторівна, канд. фізико-матем. наук, доцент

Відповідальний редактор: *Томашук О.С., аспірант*

Рецензент: *Порєв В.А., д.т.н., професор*

За редакцією укладачів

ЗМІСТ

1 ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ.....	4
2 СФЕРА.....	4
3 ЦИЛІНДРИЧНІ ПОВЕРХНІ	7
3.1 Циліндри другого порядку	10
3.2 Поверхні, що розпадаються	11
4 КОНІЧНІ ПОВЕРХНІ	11
5 ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ	15
5.1 Поверхні утворені обертанням твірної γ , що знаходиться з віссю обертання h в одній площині	18
6 ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	20
6.1 Еліпсоїд обертання.....	20
6.2 Гіперболоїд обертання.....	21
6.3 Параболоїд обертання.....	22
7 КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	24
8 ГІПЕРБОЛІЧНИЙ ПАРАБОЛОЇД	25
9 ЗВЕДЕННЯ РІВНЯНЬ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ	27
9.1 Власні вектори та власні значення матриці.....	30
9.2 Перетворення координат у просторі	35
9.3 Зведення квадратичної форми трьох змінних до суми квадратів (до канонічного вигляду)	39
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ.....	48
ВІДПОВІДІ	52
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	55

1 ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Поверхні другого порядку - це поверхні, точки яких в просторових декартових координатах задовольняють рівнянню другого порядку. Ці поверхні мають таку властивість, що будь-яка площина перетинає їх по кривій другого порядку, тобто по деякому (власному чи не власному) конічному перерізу. Поверхні другого порядку - це єдині поверхні, всі плоскі перерізи яких є кривими другого порядку. Розглянемо різні типи поверхонь другого порядку.

2 СФЕРА

О з н а ч е н н я . Геометричне місце точок простору, рівновіддалених від деякої фіксованої точки, називається сферою. Ця фіксована точка називається центром сфери. Відрізок, який сполучає центр сфери з точкою на сфері, називається радіусом сфери.

Виберемо прямокутну декартову систему координат. Нехай координати центра $O_1(a, b, c)$, радіус R . Візьмемо довільну точку сфери $M(x, y, z)$. Точка M лежатиме на сфері тоді і лише тоді, коли

$$|\overline{O_1M}| = R. \quad (2.1)$$

Напишемо (2.1) в координатній формі:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R.$$

Звідси отримаємо

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0.$$

Отже, сфера - це поверхня другого порядку.

Т в е р д ж е н н я . Рівняння вигляду

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + Bx + Cy + Dz + F = 0 \quad (2.2)$$

в прямокутній декартовій системі координат описує сферу (якщо воно взагалі описує деякий геометричний образ).

Рівняння (2.2) можна записати в такому вигляді:

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 + \left(z + \frac{D}{2A}\right)^2 = \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4A^2} + \frac{D^2}{4A^2} - \frac{F}{A}. \quad (2.3)$$

Позначимо

$$R = \sqrt{\frac{B^2 + C^2 + D^2}{4A^2} - \frac{F}{A}}. \quad (2.4)$$

Якщо R - додатне число (дійсне), причому $R \neq 0$, то рівняння (2.2), а отже, і (2.3) описує сферу з центром в точці

$$O_1\left(-\frac{B}{2A}, -\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2A}\right), \text{ радіуса } R \quad (2.4).$$

Справді, ліва частина (2.3) є квадратом відстані від точки $M(x, y, z)$ до точки O_1 . Якщо $R=0$, то (2.3), а отже, і (2.2) описує точку, оскільки цим рівнянням в такому випадку задовольнятимуть тільки координати O_1 .

П р и к л а д и .

1. Визначити вид поверхні

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0.$$

Доповнюючи члени з x, y, z до повних квадратів, зведемо дане рівняння до вигляду

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9.$$

Отримали рівняння сфери з центром в точці $O_1(2, 3, -1)$ радіуса $R=3$.

2. Скласти рівняння сфери, описаної навколо тетраедра, одна із вершин якого збігається з початком координат, а інші виходять в точках $A(2, 0, 0), B(0, 5, 0), C(0, 0, 3)$.

Рівняння шуканої сфери

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Завдяки тому, що сфера проходить через вершини тетраедра, підставимо в рівняння сфери по черзі замість поточних координат координати вершин тетраедра. Отримаємо чотири рівняння для визначення невідомих параметрів a, b, c та R :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = R^2 \\ (2-a)^2 + b^2 + c^2 = R^2 \\ a^2 + (5-b)^2 + c^2 = R^2 \\ a^2 + b^2 + (3-c)^2 = R^2 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему, маємо:

$$a=1, b=\frac{5}{2}, c=\frac{3}{2}, R^2=\frac{38}{4}.$$

3. Скласти рівняння сферичної поверхні, якщо відомо, що вона проходить через точку $(0, -3, 1)$ і перетинає площину OXY по колу

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ z = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Центр сфери належить перпендикуляру, проведеному через центр плоского перерізу до площини цього перерізу, тобто осі OZ . Тому шукане рівняння сфери матиме такий вигляд:

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2. \quad (2.6)$$

Знайдемо невідомі значення параметрів c та R . Для цього в (2.6) покладемо $z = 0$ і отримаємо рівняння лінії перетину сфери з площиною OXY :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + c^2 = R^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

Зіставляючи отриману систему з (2.6), отримаємо співвідношення, що пов'язує невідомі c та R :

$$R^2 = c^2 + 16.$$

Рівняння сфери (2.6) можна записати у вигляді

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = c^2 + 16,$$

і містить тільки один невідомий параметр c , який можна знайти завдяки тому, що сфері належить точка $(0, -3, 1)$:

$$\begin{aligned} (-3)^2 + (1 - c)^2 &= c^2 + 16, \\ c &= -3. \end{aligned}$$

Отже, знайшли шукане рівняння сфери

$$x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25$$

3 ЦИЛІНДРИЧНІ ПОВЕРХНІ

Означення. Циліндричними поверхнями називають поверхні, утворені рухом прямої (твірної), яка при переміщенні в просторі зберігає постійний напрямок (наприклад, паралельний деякому вектору $\vec{U}(l, m, n)$) і перетинає кожен раз деяку нерухому криву γ , яку називають *напрямною циліндричної поверхні*. Очевидно, крива γ не повинна належати площині, паралельній твірним.

Розглянемо такі циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в одній із координатних площин, а твірні паралельні координатній осі, перпендикулярній до цієї площини.

Твердження. Для того щоб дістати рівняння циліндричної поверхні, напрямна якої задана рівняннями

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

а прямолінійні твірні паралельні до однієї із координатних осей, досить із (3.1) виключити ту змінну, яка відповідає координатній осі, до якої паралельні прямолінійні твірні циліндричної поверхні.

Доведемо, що рівняння циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі OZ , матимуть вигляд $f(x, y) = 0$, тобто не містять координати z .

Нехай напрямна γ такої циліндричної поверхні належить площині OXY і задана рівняннями (рис. 1):

$$f(x, y) = 0, \quad z = 0.$$

Доведемо, що першому з цих рівнянь задовольняє довільна точка $M(x_0, y_0, z_0)$, що належить заданій циліндричній поверхні. Візьмемо на площині HOY точку $P(x_0, y_0, 0)$. Очевидно, точка P належить тій же твірній, що і точка

M . Отже, координати точки P задовольняють рівняння твірної $f(x_0, y_0) = 0$. А ця тотожність і означає, що координати точки M задовольняють рівняння $f(x, y) = 0$. Твердження доведене.

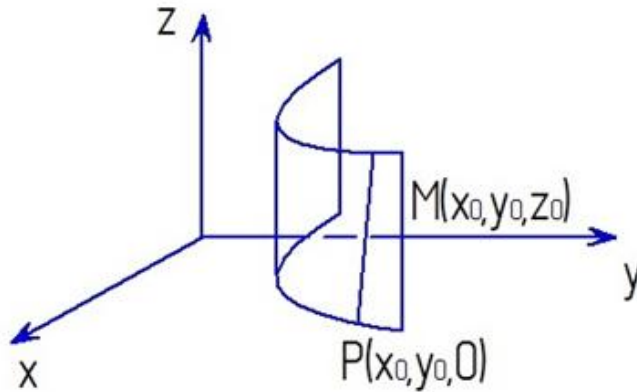


Рис. 1

Отже, рівняння будь-якої циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі OZ , набувають такого вигляду:

$$f(x, y) = 0.$$

Аналогічно, можна довести, що рівняння циліндричних поверхонь з твірними, паралельними осі OY або осі OX , мають, відповідно, вигляд

$$f(x, y) = 0, f(y, z) = 0.$$

П р и к л а д и .

1. Скласти рівняння циліндричної поверхні, твірні якої паралельні прямій

$$x = y = z, \tag{3.2}$$

а напрямною є пряма

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x - y + z = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Запишемо канонічне рівняння твірної

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{1} \tag{3.3}$$

($l = m = n = 1$ взято із (3.2)). Позначимо

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{1} = t$$

Звідси отримаємо:

$$\begin{aligned}x_0 &= x - t, \\y_0 &= y - t, \\z_0 &= z - t.\end{aligned}$$

Підставляючи ці значення в (3.3) (завдяки тому, що точка (x_0, y_0, z_0) належить напрямній)

$$\begin{cases}x + y - z - t = 0, \\x - y + z - t = 0\end{cases}$$

та виключаючи t , знайдемо

$$2y - 2z = 1.$$

Отже, отримано рівняння площини, що проходить через задану напрямну паралельно до прямої $x = y = z$.

2.Скласти рівняння циліндра, якщо його твірні паралельні вектору $\vec{U}(1, 2, 3)$, а напрямна задана наступними рівняннями

$$\begin{cases}y^2 = 4x, \\z = 0.\end{cases} \quad (3.4)$$

Канонічні рівняння твірних запишемо так:

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{2} = \frac{z - z_0}{3}.$$

Позначимо останнє рівняння через t і напишемо:

$$\begin{aligned}x_0 &= x - t, \\y_0 &= y - 2t, \\z_0 &= z - 3t.\end{aligned}$$

Підставивши ці співвідношення в (3.4), маємо

$$\begin{cases}(y - 2t)^2 = 4(x - t), \\z - 3t = 0.\end{cases}$$

З останнього рівняння знайдемо t :

$$t = \frac{z}{3}.$$

Підставивши t в перше рівняння, отримаємо рівняння циліндричної поверхні

$$(3y - 2z)^2 = 12(3x - z)$$

3.1 Циліндри другого порядку

Назву циліндричної поверхні, як правило, дають в залежності від назви кривої по якій перетинає циліндричну поверхню площина, перпендикулярна до прямолінійних твірних поверхні. Беручи за напрямні лінії цих поверхонь різні криві другого порядку, що лежать в площині XOY , і, приймаючи напрямок осі OZ за напрямок твірних цих циліндрів, отримаємо рівняння таких циліндричних поверхонь.

1. Еліптичний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Віссю циліндра буде вісь OZ (рис. 2).

Частинним випадком еліптичного циліндра є круговий циліндр, рівняння якого має такий вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

(якщо його віссю є вісь OZ) або рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

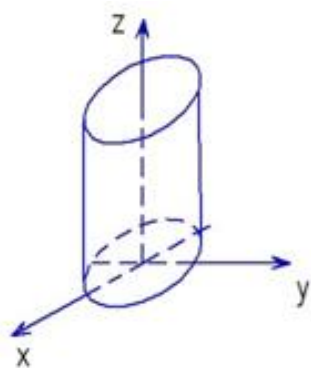


Рис. 2

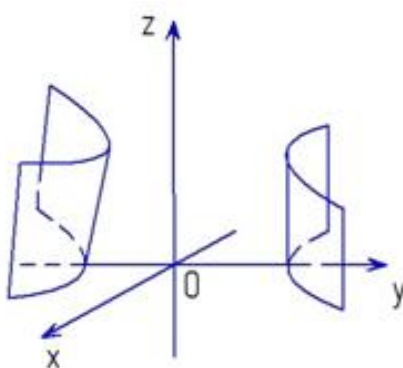


Рис. 3

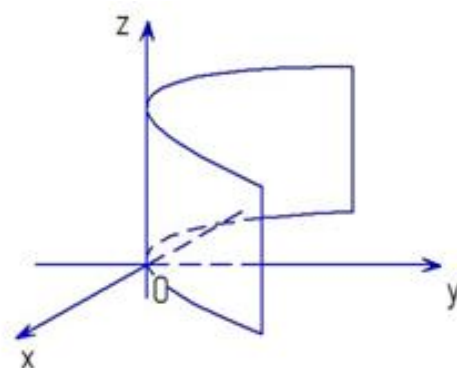


Рис. 4

Віссю цього циліндра є паралельна осі OZ пряма

$$x = a, y = b.$$

2. Гіперболічний циліндр

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Віссю циліндра буде вісь OZ (рис. 3).

3. Параболічний циліндр (рис. 4).

Всі ці поверхні називаються циліндрами другого порядку, тому що вони описуються рівняннями другого степеню відносно координат x, y, z .

3.2 Поверхні, що розпадаються

Якщо многочлен другого степеню $F(x, y, z)$ є добутком двох многочленів першого степеню

$$F(x, y, z) \equiv (A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2),$$

то поверхня $F(x, y, z) = 0$ розпадається на пару площин Π_1 та Π_2 :

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

4 КОНІЧНІ ПОВЕРХНІ

О з н а ч е н н я . Нехай задана деяка фіксована точка I і крива γ . Поверхня, яка утворена неперервним рухом прямої, що перетинає лінію γ і проходить через точку I , називається конічною поверхнею, точка I та лінія γ називаються вершиною та напрямною конічної поверхні. Для того, щоб скласти рівняння конічної поверхні, оберемо таку прямокутну систему координат, щоб напрямна конічної поверхні в цій системі координат визначалась такою системою рівнянь:

$$F_1(x, y, z) = 0, F_2(x, y, z) = 0. \quad (4.1)$$

Нехай вершина I має координати a, b, c . Напишемо рівняння в'язки прямих з центром в точці I

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}, \quad (4.2)$$

де l, m, n - координати напрямного вектору в'язки. l, m, n одночасно не дорівнюють нулю, тому можемо покласти $n=1$. Виберемо із прямих (4.2) ті, які перетинають криву γ . Для того, щоб прямі (4.2) перетинали γ , необхідно та достатньо, щоб система рівнянь (4.1), (4.2) була сумісною. Визначивши x, y, z із рівнянь (4.1), (4.2), підставивши в четверте (4.2), дістанемо

$$\varphi(l, m) = 0. \quad (4.3)$$

Співвідношення (4.3) із усіх прямих, що проходять через точку I відбирає ті прямі, які перетинають γ , тобто утворюють нашу конічну поверхню. Для того, щоб скласти рівняння конічної поверхні, досить з (4.2) знайти l, m через x, y, z і підставити в (4.3).

Рівняння конічної поверхні з вершиною в точці I є однорідним відносно $x-a, y-b, z-c$. Ця властивість є характерною для рівнянь конічних поверхонь.

О з н а ч е н н я . Функція $F(x, y, z)$ називається однорідною функцією відносно змінних (x, y, z) степеню K , якщо вона задовольняє таку умову:

$$F(tx, ty, tz) = t^K \cdot F(x, y, z).$$

Маємо таку теорему:

Т е о р е м а . Будь-яке однорідне рівняння відносно змінних $x-a, y-b, z-c$, якщо воно описує дійсну поверхню, є рівнянням конічної поверхні з вершиною в точці $I(a, b, c)$.

Якщо рівняння конічної поверхні є рівнянням другого порядку, то така поверхня називається конічною поверхнею другого порядку з вершиною $\rho(a, b, c)$. Напишемо загальний вигляд рівняння конічної поверхні другого порядку:

$$a_{11}(x-a)^2 + a_{22}(y-b)^2 + a_{33}(z-c)^2 + 2a_{12}(x-a)(y-b) + 2a_{13}(x-a)(z-c) + 2a_{23}(y-b)(z-c) = 0.$$

Приклади:

1. Скласти рівняння конуса з вершиною в початку координат і твірною

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c. \end{cases} \quad (4.4)$$

В цьому прикладі точка I має координати $(0,0,0)$, а напрямна γ є еліпсом. Канонічні рівняння твірних, що проходять через вершину $(0,0,0)$ конуса матимуть такий вигляд (див. (4.2)):

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}. \quad (4.5)$$

Виключимо x, y, z з цих рівнянь

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

Звідси отримаємо:

$$x = \frac{l}{n}c, \quad y = \frac{m}{n}c.$$

Підставивши x та y в перше рівняння (4.4), отримаємо:

$$\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{l^2}{n^2} + \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{m^2}{n^2} = 1.$$

Враховувши, що $\frac{l}{n} = \frac{x}{z}$, $\frac{m}{n} = \frac{y}{z}$ (див. (4.5)), нарешті отримаємо рівняння шуканого конуса

$$\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{z^2} + \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{z^2} = 1,$$

або

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

При $a=b$ напрямною конічної поверхні буде коло, і ми отримаємо круговий конус.

2. Скласти рівняння конуса, якщо задані координати його вершини $I(0; -a; 0)$ і рівняння на прямої

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ y + z = a. \end{cases} \quad (4.6)$$

Завдяки (4.2) канонічні рівняння твірних мають такий вигляд:

$$\frac{x}{l} = \frac{y+a}{m} = \frac{z}{n}. \quad (4.7)$$

Визначимо x, y, z через l, m, n . Із останнього рівняння (4.6)

$$z = a - y.$$

Тоді $\frac{y+a}{m} = \frac{a-y}{n}$, або $y = a \frac{m-n}{m+n}$.

З (4.7) знаходимо

$$\frac{x}{l} = \frac{y+a}{m}, \quad x = 2a \cdot \frac{l}{m+n}, \quad z = 2a \cdot \frac{n}{m+n}.$$

Отримані вирази для x, y, z підставимо в перше рівняння (4.6)

$$4a^2 \frac{l^2}{(m+n)^2} + a^2 \frac{(m-n)^2}{(m+n)^2} + 4a^2 \frac{n^2}{(m+n)^2} = a^2,$$

або

$$l^2 - nm + n^2 = 0.$$

В даному рівнянні замість l, m, n (з (4.7)) напишемо їх вирази через x, y, z .

В результаті отримаємо таке рівняння конуса:

$$x^2 + z^2 = (y+a)z.$$

На рис. 5 зображено цей конус.

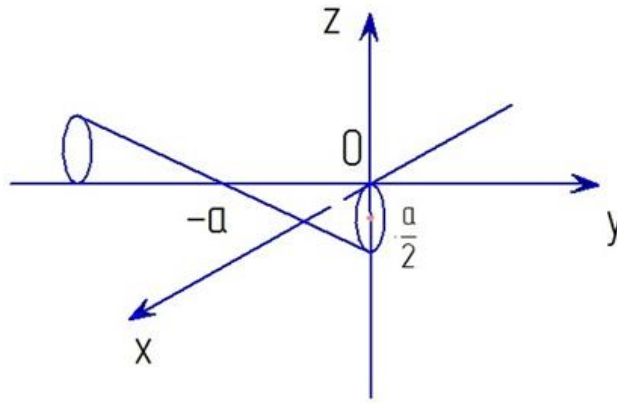


Рис. 5

5 ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ

Означення. Нехай задана деяка пряма h і довільна крива γ . Поверхня, яка утворюється внаслідок обертання γ навколо h , називається поверхнею обертання. Пряма h називається віссю поверхні обертання, крива γ - твірною поверхні обертання (рис. 6).

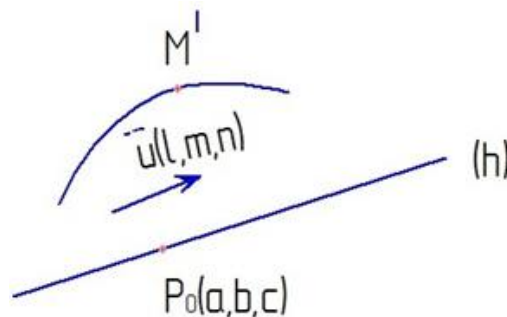


Рис. 6

Оберемо прямокутну декартову систему координат. Нехай в цій системі координат крива γ задана такою системою рівнянь (як перетин двох поверхонь):

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0; \\ F_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Нехай вісь h задана канонічним рівнянням

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n},$$

де $\vec{U}(l, m, n)$ - напрямний вектор осі h ; a, b, c - координати довільної точки P_0 , яка належить осі h . Кожна точка кривої γ описує коло, центр якого знаходиться на осі h , а площина кола перпендикулярна до осі h .

Поверхню обертання можна означити ще так: поверхня обертання – це геометричне місце кіл, площини яких перпендикулярні до осі обертання, центри лежать на осі, кожне з цих кіл перетинає лінію γ .

Знайдемо рівняння поверхні обертання. Для цього напишемо рівняння усіх кіл, площини яких перпендикулярні до прямої h , а центри лежать на h . Очевидно, їх рівняння можна записати так:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \\ lx + my + nz - q = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Виберемо із цих кіл ті, які перетинають γ , тобто ті, які утворюють поверхню обертання. Для того, щоб (5.4) перетинали (5.1), необхідно і достатньо, щоб (5.2) і (5.1) були сумісними. Нехай

$$f(R, q) = 0 \quad (5.3)$$

умова сумісності двох систем. Очевидно, щоб дістати рівняння шуканої поверхні обертання досить в (5.3) замість R і q підставити їх значення з (5.2)

$$f\left(\pm \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}, lx + my + nz\right) = 0. \quad (5.4)$$

Це і є рівняння поверхні обертання. Направний вектор осі $\vec{U}(l, m, n)$ точка з координатами $P_0(a, b, c)$ - деяка точка осі.

П р и к л а д и .

1. Скласти рівняння поверхні, яке утворюється внаслідок обертання прямої $x-1=y+1=z$ навколо осі OZ .

Задана пряма не перетинає і не буде паралельною до OZ , точка P_0 має такі координати: $P_0(0,0,0)$. Направний вектор осі $\vec{U}(0,0,1)$. Напишемо рівняння всіх кіл, площини яких перпендикулярні до OZ і центри яких лежать на OZ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ z = q, \end{cases} \quad (5.5)$$

де R - радіус сфери. З цієї системи та заданого рівняння прямої дістанемо ($f(R, q) = 0$)

$$\begin{aligned} z = q, x = 1 + q, y = q - 1, \\ (1 + q)^2 + (q - 1)^2 + q^2 - R^2 = 0. \end{aligned}$$

Спростивши це, можна записати так:

$$3q^2 - R^2 + 2 = 0.$$

Для знаходження рівняння поверхні в останню рівність підставимо вирази з системи (5.5). А це зводиться до такого вигляду:

$$3z^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2 = 0,$$

або

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 = 1,$$

це є однопорожнинний гіперболоїд обертання.

2. Пряма $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$ обертається навколо осі OX . Знайти рівняння описаної нею поверхні.

Задана пряма перетинає вісь OX в точці $P_0(2,0,0)$. Звідси випливає, що шукана поверхня є конусом з вершиною в цій точці. Знайдемо рівняння конуса. Напрямний вектор осі OX $\vec{U}(1,0,0)$. Рівняння (5.2) для даного прикладу набирають такого вигляду:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x = q. \end{cases} \quad (5.6)$$

З цієї системи і рівняння заданої прямої маємо

$$\frac{q-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}.$$

Звідси

$$y = \frac{2(q-2)}{3}, z = 2q - 4.$$

Отримані значення y, z підставимо в систему (5.6):

$$(q-2)^2 + \frac{4}{9}(q-2)^2 + 2(q-2)^2 = R^2.$$

Спростивши, отримаємо:

$$49q^2 - 196q + 196 = 9R^2.$$

Підставивши значення q та R , з (5.6) прийдемо до рівняння конуса:

$$40(x-2)^2 + 9y^2 - 9z^2 = 0.$$

Переріз поверхні обертання площиною, що проходить через вісь обертання, називається меридіаном. Лінії, які дістанемо при перетині поверхні обертання площинами, перпендикулярними до осі обертання, називаються паралелями. (Це будуть кола.)

5.1 Поверхні утворені обертанням твірної γ , що знаходиться з віссю обертання h в одній площині

Оберемо декартову систему координат так, щоб вісь поверхні обертання збігалася з віссю OZ . Криву γ помістимо в тій півплощині YOZ , де $y > 0$. Рівняння цієї кривої можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} f(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

На рис. 7 це була крива LN . Обертаючись навколо осі OZ , крива утворює поверхню $LL'N'N$.

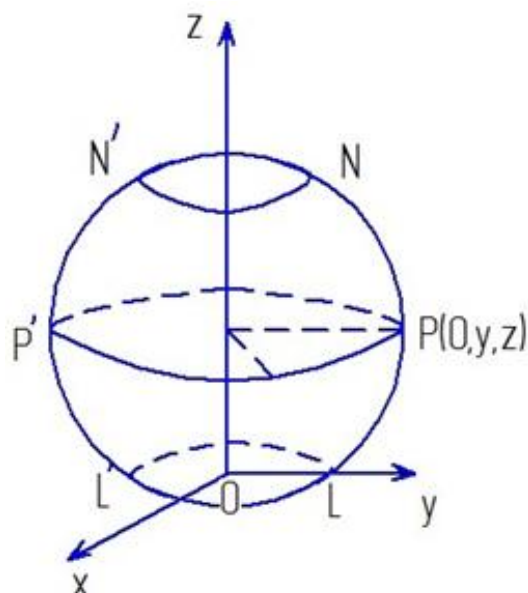


Рис. 7

Візьмемо на кривій LN довільну точку $P(0, y_0, z_0)$, яка при обертанні навколо осі OZ описує коло PP' , що лежить в площині $z = z_0$, перпендикулярній до осі OZ з центром на цій осі в точці K і радіусом $R = y_0$. В силу цих умов рівняння такого кола можна записати так:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = y_0^2, \\ z = z_0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Його буде задовольняти довільна точка $M(x, y, z)$, що лежить на цьому колі. Координати точки P задовольняють рівняння кривої LN

$$f(y_0, z_0) = 0. \quad (5.9)$$

Виключаючи з рівнянь (5.8), (5.9) координати y_0, z_0 точки P , прийдемо до рівняння

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (5.10)$$

Це і є рівняння поверхні обертання, тому що його задовольняють координати довільної точки M цієї поверхні.

Зауважимо, що зв'язок між рівнянням (5.7) самої кривої і рівнянням (5.10) утвореної нею поверхні обертання дуже простий: координата z (тобто

координата осі обертання) залишена без змін, а координата y (тобто друга координата в рівнянні $f(y, z) = 0$) замінена на $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Це правило має загальний характер. Так, якщо б нам була задана крива, що лежить в площині $ХОУ$, своїми рівняннями

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

і треба було б знайти рівняння поверхні, утвореної її обертанням навколо осі $ОУ$ то це рівняння мало б такий вигляд:

$$f(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0. \quad (5.11)$$

Корисним наслідком з усього викладеного є така ознака, по якій одразу можна за рівнянням поверхні відрізнити будь-яку поверхню обертання, віссю якої є одна із осей координат: дві з трьох координат входять в рівняння такої поверхні тільки у вигляді суми їх квадратів; віссю обертання є та вісь, координата якої входить в рівняння окремо; наприклад, рівняння $y^2 + z^2 = 4x$ є рівнянням поверхні обертання, віссю якої є вісь $ОХ$.

6 ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Знайдемо рівняння поверхонь, утворених обертанням кривих другого порядку навколо їх осей симетрії. Вісь обертання приймемо за вісь $ОZ$, криві розташуємо в площині YOZ . Рівняння поверхні знайдемо по (5.11).

6.1 Еліпсоїд обертання

Розташуємо еліпс, як показано на рис. 8.

Рівняння цього еліпса в площині YOZ буде

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (6.1)$$

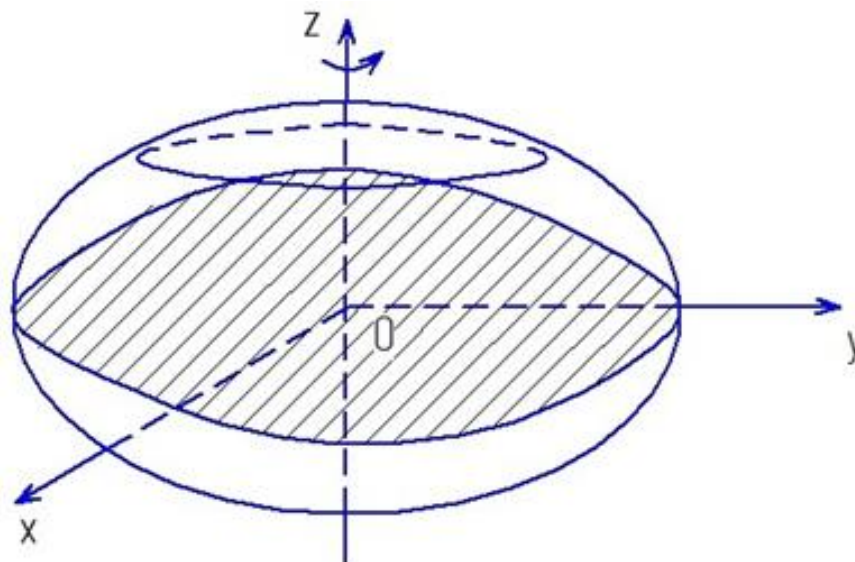


Рис. 8

Обертаючи цей еліпс навколо осі OZ , отримаємо поверхню, рівняння якої має такий вигляд:

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (6.1)$$

Ця поверхня називається еліпсоїдом обертання.

6.2 Гіперболоїд обертання

Візьмемо в площині YOZ дві спряжені гіперболи, віссю яких служить вісь OZ :

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Обертаючи їх навколо осі OZ , прийдемо до таких двох поверхонь обертання:

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Перша з них називається однопорожнинним гіперболоїдом обертання. Обертаючи навколо осі OZ пару спільних асимптот цих гіпербол, отримаємо конус обертання (рис. 9). Оскільки рівнянням пари асимптот буде рівняння

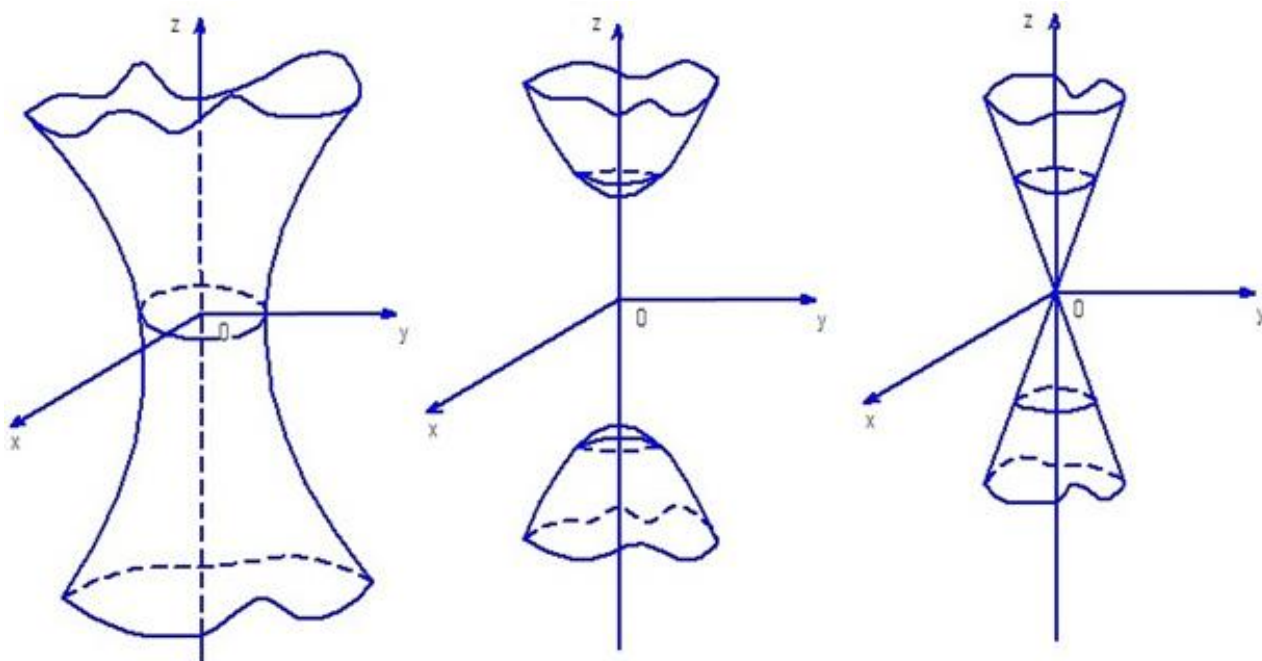


Рис. 9

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

то рівняння конуса обертання можна записати у вигляді

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Цей конус називається асимптотичним конусом обох розглянутих гіперболоїдів.

6.3 Параболоїд обертання

Рівнянням параболи, що лежить в площині YOZ , віссю якої є вісь OZ , буде рівняння

$$y^2 = 2qz.$$

Обертаючи цю параболу навколо осі OZ , отримаємо параболоїд обертання (рис. 10), рівняння якого можна записати так:

$$x^2 + y^2 = 2qz.$$

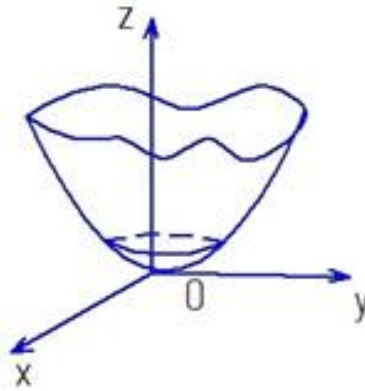


Рис. 10

П р и к л а д и .

1. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням кривої $z = x^2, y = 0$
а) навколо осі OZ ; б) навколо осі OX .

Скористаємося раніше наведеним правилом. В цьому прикладі рівняння кривої в загальному вигляді напишемо так:

$$\begin{cases} f(x, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

а). Крива обертається навколо осі OZ . Отже, завдяки правилу рівняння отриманої поверхні має такий вигляд:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0,$$

тобто

$$z = (\sqrt{x^2 + y^2})^2, \quad z = x^2 + y^2.$$

б). Крива обертається навколо осі OX . Рівняння шуканої поверхні напишемо в загальному вигляді

$$f(x, \sqrt{z^2 + y^2}) = 0,$$

або з врахуванням рівняння кривої

$$\sqrt{z^2 + y^2} = x^2.$$

2. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням кривої $z = e^{-x^2}, y = 0$ навколо осі OZ .

Напишемо рівняння кривої в загальному вигляді

$$\begin{cases} f(x, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Тоді шукане рівняння заданої поверхні обертання матиме такий вигляд:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0,$$

тобто

$$z = e^{-(\sqrt{x^2 + y^2})^2}$$

або

$$z = e^{-(x^2 + y^2)}$$

7 КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянуті нами в попередньому розділі поверхні другого порядку, в перерізі яких площинами, перпендикулярними до осі обертання, є кола, становлять частинні випадки поверхонь другого порядку, в перерізі яких відповідними площинами будуть не кола, а еліпси.

1. Еліпсоїд (триосний):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2. Однопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

3. Двопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

4. Конус:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

5. Еліптичний параболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$

Загальний вигляд цих поверхонь вказано на мал. 7, 10, 11. Зауважимо, що сфера не буде десятою поверхнею другого порядку, тому що вона є частинним випадком еліпсоїда.

8 ГІПЕРБОЛІЧНИЙ ПАРАБОЛОЇД

Нехай будемо мати дві параболі γ_1 та γ_2 , площини яких перпендикулярні і осі протилежно напрямлені. Якщо будемо криву γ_2 рухати в просторі так, щоб вершина кривої γ_2 ковзала по нерухомій параболі γ_1 і площина γ_2 залишалась паралельною площині її початкового положення, то поверхня, яка при цьому буде описуватись, називається гіперболічним параболоїдом.

Рівняння поверхні гіперболічного параболоїда

Оберемо прямокутну декартову систему координат так: вісь OZ розташуємо так, щоб вона співпадала з віссю симетрії γ_1 . Вісь OX нехай зберігається з дотичною до нерухомої параболі в її вершині. Нехай в так обраній системі координат рівняння γ_1 має вигляд

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Запишемо рівняння усіх парабол, площини яких перпендикулярні до площини XOZ , вершини лежать в координатній площині XOZ і їхня витягнутість протилежна додатному напрямку OZ . Рівняння таких парабол можна записати так:

$$\begin{cases} y^2 = 2q(h-z), \\ x = d. \end{cases} \quad (8.2)$$

Якщо параметри h та d будемо міняти незалежно один від одного, то координати вершин парабол будуть $P(d,0,h)$, оскільки вершини цих парабол мусять лежати на нерухомій параболі, то

$$d^2 = 2ph. \quad (8.3)$$

Ця рівність дає змогу з усіх парабол (8.2) відібрати ті і лише ті, які лежать на нашій поверхні. Для того, щоб отримати рівняння гіперболічного параболоїда досить в (8.3) замість d та h підставити їх вирази через x, y, z в (8.2). Зробивши це, дістанемо:

$$x^2 = 2p \left(\frac{y^2}{q} + z \right).$$

Це рівняння можна переписати у такому вигляді:

$$\frac{x^2}{p} - 2 \cdot \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Воно і буде рівнянням гіперболічного параболоїда (рис. 11).

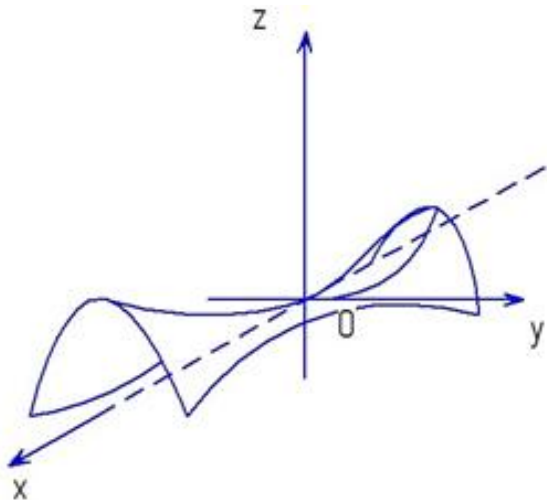


Рис. 11

9 ЗВЕДЕННЯ РІВНЯНЬ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

Можна довести, що крім згаданих в попередніх розділах типів поверхонь другого порядку інших типів поверхонь не існує. Найбільш загальне рівняння поверхні другого порядку має такий вигляд:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0. \quad (9.1)$$

Якщо це рівняння не містить членів з добутками координат, тобто має вигляд

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0, \quad (9.2)$$

то доповнюючи члени з x, y, z , взяті окремо, до повних квадратів, можна привести рівняння (8.2) до такого вигляду, за яким легко можна встановити тип поверхні і побудувати цю поверхню.

П р и к л а д и .

1. Визначити вигляд поверхонь:

$$4x^2 - 9y^2 - 9z^2 - 16x + 18y - 18z + 34 = 0.$$

Доповнюючи члени з x, y, z до повних квадратів, приведемо це рівняння до вигляду

$$4(x-2)^2 - 9(y-1)^2 - 9(z+1)^2 = -36.$$

Поділивши це рівняння на вільний член, отримаємо:

$$\frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1.$$

А це і буде рівнянням однопорожнинного гіперболоїда обертання, центр якого знаходиться в точці $O'(2,1,-1)$, а вісь обертання паралельна осі OX .

2. Визначити вигляд поверхні

$$3x^2 - 5y^2 - 2z^2 - 30 = 0.$$

Це рівняння зведемо до вигляду

$$\frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{15} - \frac{x^2}{10} = -1.$$

Маємо двопорожнинний гіперболоїд (триосний). Вісь напрямлена вздовж осі OX дорівнює $\sqrt{10}$, одна поперечна вісь дорівнює $\sqrt{6}$ і напрямлена по осі OY , інша дорівнює $\sqrt{15}$ і напрямлена вздовж осі OZ .

3. Визначити, яку поверхню описує рівняння

$$16x^2 + 3y^2 + 16z^2 - 48 = 0.$$

Це рівняння можна звести до вигляду

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{3} = 1.$$

Отже, поверхня є витягнутим еліпсоїдом обертання з півосями

$$a = c = \sqrt{3}, b = 4.$$

Віссю обертання є вісь OY .

4. Визначити, яку поверхню описує рівняння

$$x^2 - 6x + 4y^2 + 9z^2 + 36z - 99 = 0.$$

Доповнюючи члени до повних квадратів, зведемо це рівняння до вигляду

$$(x - 3)^2 + 4y^2 + 9(z + 2)^2 = 144,$$

або

$$\frac{(x - 3)^2}{144} + \frac{y^2}{36} + \frac{(z + 2)^2}{16} = 1.$$

Маємо рівняння триосного еліпсоїда з півосями $a = 12$, $b = 6$, $c = 4$; його центр лежить в точці $(3, 0, -2)$, осі паралельні осям координат.

5. Визначити вигляд поверхні

$$x^2 + 4x - y + z = 0.$$

Доповнюючи до повного квадрату члени, що містять x , зведемо рівняння до вигляду

$$(x + 2)^2 = y - z + 4. \quad (9.3)$$

Це є рівняння параболічного циліндра. Впевнимось у цьому. Повернемо осі OY і OZ в їх площинах на кут 45° за годинниковою стрілкою відносно осі

ОХ. Позначимо нові координати через y' і z' . Напишемо формули повороту осей:

$$y = y' \cdot \cos(-45^\circ) - z' \cdot \sin(-45^\circ) = \frac{y' + z'}{\sqrt{2}},$$

$$z = y' \cdot \sin(-45^\circ) + z' \cdot \cos(-45^\circ) = -\frac{y' - z'}{\sqrt{2}}.$$

Врахувавши поворот осей, рівняння (9.3) зведемо до вигляду

$$(x + 2)^2 = \sqrt{2}(y' + 2\sqrt{2}),$$

що і доводить наше початкове твердження; твірні циліндра паралельні новій осі OZ' .

Розглянемо поверхні другого порядку в загальному вигляді (9.1).

Завдання полягає в тому, щоб звести це рівняння до найбільш простого (канонічного) вигляду.

Систему координат в просторі можна вибрати по-різному; кожна така система координат визначається точкою O – початком координат і впорядкованою трійкою лінійно-незалежних векторів [6]. Одній і тій же точці простору можна поставити у відповідність різні набори координат в різних системах координат (якщо змінити систему координат, то зміняться і координати точки). При заміні початкової системи координат (старої) на спеціально вибрану (нову) систему координат рівняння (9.1) набере іншого вигляду. Будемо проводити перетворення рівняння (9.1) з метою його спрощення.

Отже, задача полягає в тому, щоб за рахунок вдало вибраної системи координат спростити рівняння 9.1. Для цього треба знати, як пов'язані нові та старі координати точки і як зміниться рівняння (9.1) при заміні системи координат. Зауважимо, що перетворення рівняння (9.1) тісно пов'язане з перетворенням квадратичних форм.

О з н а ч е н н я . Числова функція вигляду

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum a_{ij} x_i x_j, ij = 1, 2, 3, \quad (9.4)$$

Перепишемо систему (9.6) так, щоб в правих частинах рівнянь цієї системи були нулі:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \quad (9.7)$$

Матриця цієї однорідної системи має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

Очевидно, що матрицю (9.8) можна записати в такому вигляді:

$$A - \lambda E, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю E називають одиничною матрицею. Відомо, що система лінійних однорідних рівнянь має нетривіальний (ненульовий) розв'язок, коли визначник цієї системи є відмінним від нуля (за умови, що кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь системи). Тобто, що

$$\det (A - \lambda E) = 0. \quad (9.9)$$

Рівняння (9.9) відносно змінної λ називається характеристичним рівнянням матриці A . Корені характеристичного рівняння матриці називаються власними значеннями, або ж власними числами чи коренями матриці.

П р и к л а д . Обчислити власні значення та власні вектори матриці A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Для визначення власних чисел матриці A складемо та розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи цей визначник, отримаємо рівняння

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 1.$$

Координати власних векторів, що відповідають знайденим власним числам, знайдемо з такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 4x_2 = 0, \\ -x_1 - (3+\lambda)x_2 = 0. \end{cases} \quad (9.10)$$

Підставляючи в цю систему $\lambda_1 = -2$, отримаємо

$$\begin{cases} 4x_1^1 + 4x_2^1 = 0, \\ -x_1^1 - x_2^1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю однорідну систему, маємо $x_1^1 = -x_2^1$. Покладемо $x_2^1 = t$, де t – будь-яке дійсне число. Отже, першим власним вектором матриці A є

$$\vec{x}^1 = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

Знайдемо другий власний вектор матриці A . Для цього підставимо в систему (9.10) $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{cases} x_1^2 + 4x_2^2 = 0, \\ -x_1^2 - 4x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю однорідну систему, маємо

$$x_1^2 = -4x_2^2$$

Покладемо $x_2^2 = t$, де $t \in R$. Отже, другим власним вектором матриці A є

$$\vec{x}^2 = \begin{pmatrix} -4t \\ t \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити власні значення та власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для визначення власних чисел матриці A складемо і розв'яжемо її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язки цього рівняння: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Власні числа збігаються.

Координати власних векторів, що відповідають власним числам, знайдемо з такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + (-3-\lambda)x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + (-2-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Підставивши в цю систему $\lambda = -1$, отримаємо

$$\begin{cases} 3x_1^1 - x_2^1 + 2x_3^1 = 0, \\ 5x_1^1 - 2x_2^1 + 3x_3^1 = 0, \\ -x_1^1 - x_3^1 = 0. \end{cases} \quad (9.11)$$

Розв'язок цієї системи: $x_1^1 = t, x_2^1 = t, x_3^1 = -t \quad t \in R$, тоді відповідний вектор можна записати так:

$$\vec{x}^1 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix}, \quad t \in R, \quad t \neq 0. \quad (9.12)$$

При кратних λ два інших вектори $\vec{x}^2$ та $\vec{x}^3$ можна взяти будь-якими, або вектори $\vec{x}^1, \vec{x}^2, \vec{x}^3$ були попарно перпендикулярними (лінійно-незалежними). Знайдемо який-небудь вектор $\vec{x}^2 \perp \vec{x}^1$. Розглянемо ліву частину першого

рівняння (9.11) як скалярний добуток векторів $\vec{x}^1$ (9.12) та $\vec{x}^2 = \begin{pmatrix} 3t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix}$. Отже,

скалярний добуток векторів $\vec{x}^1 \cdot \vec{x}^2 = 0$.

За другий власний вектор можна вибрати вектор $\vec{x}^2$. Третій власний вектор $\vec{x}^3$ виберемо рівним векторному добутку $\vec{x}^1 \times \vec{x}^2$, $\vec{x}^3 = \begin{pmatrix} t \\ -5t \\ -4t \end{pmatrix}$. Отже, $\vec{x}^3 \perp \vec{x}^1$ і

$\vec{x}^3 \perp \vec{x}^2$.

Нормуючи ці вектори, отримаємо:

$$\begin{aligned}\vec{i}_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \\ \vec{j}_1 &= \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}} \right), \\ \vec{k}_1 &= \left(\frac{1}{3\sqrt{14}}, -\frac{5}{3\sqrt{14}}, -\frac{4}{3\sqrt{14}} \right).\end{aligned}$$

Знайти власні числа, власні вектори матриць:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2, \quad \vec{x} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

t_1, t_2 одночасно $\neq 0$.

$$3) A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \vec{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 0, \quad \vec{x}^2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda = 1, \quad \vec{x} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \neq 0.$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & -8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \bar{x}^1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \lambda_2 = -1, \quad \bar{x}^2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$t \neq 0$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \bar{x}^1 = t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$t_1 \neq 0, t_2 \neq 0.$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$$

$$\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

$$8) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

$$\bar{x}^1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}^2 = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\bar{x}^3 = t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

9.2 Перетворення координат у просторі

Нехай у просторі треба перейти від однієї системи прямокутних декартових координат до іншої такої ж системи координат з тим же початком. Позначимо старі координати через x_1, x_2, x_3 , старі координатні орти (взаємно перпендикулярні вектори одиничної довжини) через $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$, нові координати – через $\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \bar{x}'_3$, і нові координатні орти – через $\vec{l}'_1, \vec{l}'_2, \vec{l}'_3$. Взаємне розміщення старих та нових координат можна задати за допомогою косинусів кутів, утворених відповідно між старими і новими осями координат:

$$\begin{aligned}
\cos(\vec{l}_1, \hat{\vec{l}}_1') &= \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_1' = \alpha_{11}, \\
\cos(\vec{l}_1, \hat{\vec{l}}_2') &= \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2' = \alpha_{12}, \\
\cos(\vec{l}_1, \hat{\vec{l}}_3') &= \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3' = \alpha_{13}, \\
\cos(\vec{l}_2, \hat{\vec{l}}_1') &= \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_1' = \alpha_{21}, \\
\cos(\vec{l}_2, \hat{\vec{l}}_2') &= \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_2' = \alpha_{22}, \\
\cos(\vec{l}_2, \hat{\vec{l}}_3') &= \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_3' = \alpha_{23}, \\
\cos(\vec{l}_3, \hat{\vec{l}}_1') &= \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_1' = \alpha_{31}, \\
\cos(\vec{l}_3, \hat{\vec{l}}_2') &= \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_2' = \alpha_{32}, \\
\cos(\vec{l}_3, \hat{\vec{l}}_3') &= \vec{l}_3 \cdot \vec{l}_3' = \alpha_{33}.
\end{aligned}$$

Ці дев'ять напрямних косинусів напишемо у вигляді матриці перетворення, яку позначимо через S :

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}. \quad (9.13)$$

Елементи рядків цієї матриці є координатами відповідних ортів старої системи координат у новій ($\vec{l}_1 = \alpha_{11}\vec{l}_1' + \alpha_{12}\vec{l}_2' + \alpha_{13}\vec{l}_3'$), а елементи стовпців – координатами відповідних ортів нової системи в старій (наприклад, $\vec{l}_1' = \alpha_{11}\vec{l}_1 + \alpha_{21}\vec{l}_2 + \alpha_{31}\vec{l}_3$). Завдяки цьому сума квадратів елементів будь-якого рядка і будь-якого стовпця матриці S дорівнює одиниці (тому що визначає квадрат довжини відповідного орта), а сума добутків відповідних елементів двох різних рядків або двох різних стовпців дорівнює нулю (це скалярний добуток двох взаємно-перпендикулярних ортів):

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^3 \alpha_{ij}^2 &= 1, \quad (i=1, 2, 3), & \sum_{i=1}^3 \alpha_{ij}^2 &= 1, \quad (j=1, 2, 3), \\
\sum_{j=1}^3 \alpha_{ij}\alpha_{kj} &= 0, & (i, k=1, 2, 3, \quad i \neq k), \\
\sum_{i=1}^3 \alpha_{ij}\alpha_{ik} &= 0, & (j, k=1, 2, 3, \quad j \neq k).
\end{aligned} \quad (9.14)$$

Крім того, визначник матриці S дорівнює плюс або мінус одиниці

$$\det S = \pm 1,$$

тому що його значення дорівнює змішаному добутку трьох ортів:

$$\det S = \vec{l}'_1 \cdot \vec{l}'_2 \cdot \vec{l}'_3$$

(в той же час $\det S = \vec{l}'_1 \cdot \vec{l}'_2 \cdot \vec{l}'_3$) і при цьому є об'ємом побудованого на цих ортах куба, взятого з відповідним знаком в залежності від взаємної орієнтації старих і нових осей (якщо обидві системи мають однакову орієнтацію, то $\det S = 1$, якщо ж різну, то $\det S = -1$).

Запишемо транспоновану по відношенню до S матрицю, тобто матрицю, яку можна отримати з S за допомогою заміни рядків стовпцями, і навпаки

$$S^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що матриця S^T має ті ж властивості, що і матриця S .

Неважко впевнитись в тому, що завдяки (9.14) маємо рівність

$$S \cdot S^T = S^T \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, транспонована по відношенню до S матриця S^T збігається з матрицею S^{-1} (оберненою до матриці S):

$$S^T = S^{-1}.$$

О з н а ч е н н я . Матриця S , яка має всі вище вказані властивості, називається ортогональною матрицею.

Для того, щоб отримати формули переходу від старих координат до нових, і навпаки, напишемо в старій і в новій системах координат розклад по ортам радіус - вектора $\vec{r}$ довільної точки M простору, старі координати якої x_1, x_2, x_3 , а нові x'_1, x'_2, x'_3 :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x_1 \vec{l}_1 + x_2 \vec{l}_2 + x_3 \vec{l}_3, \\ \vec{r} &= x'_1 \vec{l}'_1 + x'_2 \vec{l}'_2 + x'_3 \vec{l}'_3. \end{aligned}$$

Отже,

$$x_1 \vec{l}_1 + x_2 \vec{l}_2 + x_3 \vec{l}_3 = x_1' \vec{l}_1' + x_2' \vec{l}_2' + x_3' \vec{l}_3'.$$

Помножимо скалярно обидві частини останньої рівності по черзі на $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$, а потім на орти $\vec{l}_1', \vec{l}_2', \vec{l}_3'$. Врахувавши 0 (9.14), отримаємо:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} x_1' + \alpha_{12} x_2' + \alpha_{13} x_3', \\ x_2 &= \alpha_{21} x_1' + \alpha_{22} x_2' + \alpha_{23} x_3', \\ x_3 &= \alpha_{31} x_1' + \alpha_{32} x_2' + \alpha_{33} x_3'; \end{aligned} \quad (9.15)$$

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{21} x_2 + \alpha_{31} x_3, \\ x_2' &= \alpha_{12} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{32} x_3, \\ x_3' &= \alpha_{13} x_1 + \alpha_{23} x_2 + \alpha_{33} x_3. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Позначимо:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix},$$

$$X^T = (x_1 \ x_2 \ x_3), \quad X'^T = (x_1' \ x_2' \ x_3').$$

Напишемо рівності (9.15) та (9.16) у матричній формі

$$X = SX', \quad X' = S^{-1}X; \quad (9.17)$$

$$X^T = X'^T S^{-1}, \quad X'^T = X^T S \quad (9.18)$$

Взаємно обернені матриці S та S^{-1} здійснюють взаємно обернені перетворення старих координат в нові, і навпаки.

П р и к л а д .

1. Задано два лінійних перетворення

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_2 - x_3, \\ x_2' = -x_1 + 4x_2 + 7x_3, \\ x_3' = 8x_1 + x_2 - x_3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1'' = 9x_1' + 3x_2' + 5x_3', \\ x_2'' = 2x_1' + 3x_3', \\ x_3'' = x_2' - x_3'. \end{cases}, \quad (9.19)$$

Знайти перетворення, яке визначає x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3 .

Р о з в ' я з а н н я . Нехай

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix}.$$

Лінійне перетворення (9.19) напишемо в матричній формі:

$$X_1 = AX, \quad X_2 = BX_1.$$

Перетворення, яке визначає X_2 через X : $X_2 = BAX$

$$BA = \begin{pmatrix} 28 & 8 & 7 \\ 22 & 1 & -5 \\ -9 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Отже, отримали шукане перетворення:

$$\begin{cases} x''_1 = 28x_1 + 8x_2 + 7x_3, \\ x''_2 = 22x_1 + x_2 - 5x_3, \\ x''_3 = -9x_1 + 3x_2 + 8x_3. \end{cases}$$

З а в д а н н я . Задано два лінійних перетворення. Знайти перетворення, яке визначає x''_1, x''_2, x''_3 через x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} x'_1 = x_1 - 3x_2 + 3x_3, \\ x'_2 = x_1 - 4x_2 + 2x_3, \\ x'_3 = 2x_1 - 4x_2 + 2x_3. \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x''_1 = 3x'_1 + 2x'_2 - 3x'_3, \\ x''_2 = 3x'_1 + 4x'_2 - 4x'_3, \\ x''_3 = x'_1 + x'_2 - 2x'_3. \end{cases} \\ 2) \quad & \begin{cases} x'_1 = 7x_1 - 5x_2 - x_3, \\ x'_2 = 3x_1 + 7x_2 + x_3, \\ x'_3 = x_1 + 10x_2 + 2x_3. \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x''_1 = 4x'_1 - 3x'_2 - x'_3, \\ x''_2 = -x'_1 + 10x'_2 + 2x'_3, \\ x''_3 = 7x'_1 - 5x'_2 + 2x'_3. \end{cases} \end{aligned}$$

9.3 Зведення квадратичної форми трьох змінних до суми квадратів (до канонічного вигляду)

Будь-яка квадратична форма (9.1) за допомогою заміни змінних може бути перетворена до такого вигляду, в якому відсутні добутки змінних, тобто,

якщо нові змінні позначити через x'_1, x'_2, x'_3 , то після переходу до них форма (9.1) набере такого вигляду:

$$F(x'_1, x'_2, x'_3) = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2 + \lambda_3 x'^2_3. \quad (9.20)$$

В частинному випадку один або два із коефіцієнтів $\lambda_i (i=1,2,3)$ можуть обертатись в нуль.

Розглянемо матрицю, складену із коефіцієнтів квадратичної форми (9.1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Тоді квадратичну форму (9.1) можна записати у вигляді добутку матриць

$$F(x_1, x_2, x_3) = X^T A X, \quad (9.21)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X^T = (x_1, x_2, x_3).$$

Перейдемо до нових змінних x'_1, x'_2, x'_3 . Для цього напишемо формули переходу до нових (9.17), (9.18):

$$\begin{aligned} X &= S X', \\ X^T &= X'^T S^{-1}, \end{aligned}$$

де S – матриця перетворення (9.13). Внесемо ці рівності в праву частину (9.21). Після переходу до нових змінних квадратична форма $F(x_1, x_2, x_3)$ перейде у квадратичну форму $F(x'_1, x'_2, x'_3)$, де

$$\begin{aligned} F(x'_1, x'_2, x'_3) &= (X'^T S^{-1}) A S X' = X'^T A' X', \\ A' &= S^{-1} A S. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Отже, при переході від старих змінних до нових матриця квадратичної форми змінюється за формулою (9.22).

Залишається знайти таке перетворення, при якому перетворена форма набере такого вигляду:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Помножимо рівність (9.22) на матрицю S ліворуч

$$\begin{aligned} SA' &= SS^{-1}AS, \\ SA' &= AS. \end{aligned} \tag{9.23}$$

В результаті отримаємо матричне рівняння, з якого треба знайти S та A' .
Напишемо (9.23) в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21} + a_{13}\alpha_{31} & a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22} + a_{13}\alpha_{32} & a_{11}\alpha_{13} + a_{12}\alpha_{23} + a_{13}\alpha_{33} \\ a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} + a_{23}\alpha_{31} & a_{21}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + a_{23}\alpha_{32} & a_{21}\alpha_{13} + a_{22}\alpha_{23} + a_{23}\alpha_{33} \\ a_{31}\alpha_{11} + a_{32}\alpha_{21} + a_{33}\alpha_{31} & a_{31}\alpha_{12} + a_{32}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{32} & a_{31}\alpha_{13} + a_{32}\alpha_{23} + a_{33}\alpha_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\lambda_1 & a_{12}\lambda_2 & a_{13}\lambda_3 \\ a_{21}\lambda_1 & a_{22}\lambda_2 & a_{23}\lambda_3 \\ a_{31}\lambda_1 & a_{32}\lambda_2 & a_{33}\lambda_3 \end{pmatrix}. \tag{9.24}$$

Із рівності матриць випливає рівність всіх відповідних елементів.
Прирівнюючи відповідні елементи перших стовпців, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{21} + a_{13}\alpha_{31} = a_{11}\alpha_1, \\ a_{21}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} + a_{23}\alpha_{31} = a_{21}\alpha_1, \\ a_{31}\alpha_{11} + a_{32}\alpha_{21} + a_{33}\alpha_{31} = a_{31}\alpha_1. \end{cases} \tag{9.25}$$

Аналогічні шість рівнянь отримаємо, якщо прирівняємо одне до одного елементи 2-го та 3-го стовпців в лівій та правій частинах (9.24).

Розглянемо систему (9.25). Врахувавши, $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ є координатами нового орта $\vec{e}'_1$ в старій системі координат, напишемо

$$A\vec{e}'_1 = \lambda_1 \vec{e}'_1.$$

Аналогічно дві останні системи рівнянь, з яких визначаються елементи 2-го та 3-го стовпців матриці S , можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} A\vec{e}'_2 &= \lambda_2 \vec{e}'_2, \\ A\vec{e}'_3 &= \lambda_3 \vec{e}'_3. \end{aligned}$$

Отже, задача зведення квадратичної форми до канонічного вигляду звелася до задачі знаходження власних значень і трьох взаємно ортогональних одиничних власних векторів матриці S квадратичної форми. Після того як знайдемо власні вектори, треба скласти матрицю перетворення координат S , за допомогою якої зведемо квадратичну форму до канонічного вигляду.

Стовпці матриці S з координатами ортонормованого базису $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ в якому матриця A набуває діагонального вигляду A' , а квадратична форма - шуканого канонічного вигляду.

Зауважимо, що у випадку поверхні другого порядку матриця відповідної квадратичної форми є симетричною (тобто $a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}$). Власні значення симетричної матриці - дійсні, а із власних векторів можна скласти ортонормований базис [6].

Покажемо на конкретних прикладах, як можна звести до канонічного вигляду загальне рівняння поверхні другого порядку.

П р и к л а д и .

1. Записати канонічне рівняння поверхні другого порядку

$$8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy + 4xz - 10yz - 16x + 4y - 28z + 4 = 0$$

і визначити тип цієї поверхні.

Р о з в ' я з а н н я . Матриця квадратичної форми старших членів рівняння поверхні:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Її власні числа: $\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0$. Квадратична форма старших членів в нових координатах набуває такого вигляду:

$$F(x'_1, x'_2, x'_3) = 12x'^2_1 + 6x'^2_2$$

Знайдемо матрицю перетворення координат. Для цього складемо для кожного власного числа системи аналогічні системи рівнянь (9.25), беручи по два перших рівняння.

При $\lambda = \lambda_1 = 12$

$$\begin{cases} -4\alpha_{11} - 2\alpha_{12} + 2\alpha_{31} = 0, \\ 2\alpha_{11} - 7\alpha_{12} - 5\alpha_{31} = 0. \end{cases}$$

При $\lambda = \lambda_2 = 6$

$$\begin{cases} 2\alpha_{12} - 2\alpha_{22} + 2\alpha_{32} = 0, \\ -2\alpha_{12} - \alpha_{22} - 5\alpha_{32} = 0. \end{cases}$$

При $\lambda = \lambda_3 = 0$

$$\begin{cases} 8\alpha_{13} - 2\alpha_{23} + 2\alpha_{33} = 0, \\ -2\alpha_{13} + 5\alpha_{23} - 5\alpha_{33} = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши ці системи рівнянь і врахувавши, що $\alpha_{1j}^2 + \alpha_{2j}^2 + \alpha_{3j}^2 = 1$

при $j = 1, 2, 3$, отримаємо:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha_{21} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha_{31} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha_{12} = \frac{2}{\sqrt{6}},$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \alpha_{32} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \alpha_{13} = 0, \alpha_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_{33} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, отримали таку матрицю перетворення координат:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Нова система координат орієнтована так само, як і стара система координат (права), тому що $\det S = +1$

Напишемо формули перетворення координат:

$$x_1 = \frac{x_1'}{\sqrt{3}} + \frac{2x_2'}{\sqrt{6}},$$

$$x_2 = -\frac{x_1'}{\sqrt{3}} + \frac{x_2'}{\sqrt{6}} + \frac{x_3'}{\sqrt{2}},$$

$$x_3 = \frac{x_1'}{\sqrt{3}} - \frac{x_2'}{\sqrt{6}} + \frac{x_3'}{\sqrt{2}}.$$

Перетворимо до нових координат молодші члени заданого рівняння

$$-16x_1 + 4x_2 - 28x_3 + 4 = -16\sqrt{3}x'_1 - 12\sqrt{2}x'_3 + 4.$$

Після переходу до нових координат рівняння поверхні набуде такого вигляду:

$$12x'^2_1 - 6x'^2_2 - 16\sqrt{3}x'_1 - 12\sqrt{2}x'_3 + 4 = 0.$$

Доповнюючи члени членами з x'_1 повного квадрату, зведемо це рівняння до такого вигляду:

$$12(x'_1 - \frac{2\sqrt{3}}{3})^2 + 6x'^2_2 = 12\sqrt{2}(x'_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}),$$

або

$$\frac{(x'_1 - \frac{2\sqrt{3}}{3})^2}{\sqrt{2}} + \frac{x'^2_2}{2\sqrt{2}} = x'_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Зробимо таку заміну змінних:

$$x''_1 = x'_1 - \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$x''_2 = x'_2,$$

$$x''_3 = x'_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, остаточно, рівняння поверхні набере такого вигляду:

$$\frac{x''^2_1}{\sqrt{2}} + \frac{x''^2_2}{2\sqrt{2}} = x''_3.$$

Це є еліптичний параболоїд.

2. Записати канонічне рівняння поверхні другого порядку:

$$x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 - 5x_1x_2 + 5x_1x_3 - 5x_2x_3 - 6x_1 - 6x_2 + 12x_3 - 38 = 0$$

і визначити тип цієї поверхні.

Для того щоб не мати дробів в матриці квадратичної форми, помножимо рівняння поверхні на 2.

Матриця квадратичної форми старших членів поверхні має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ -5 & 2 & -5 \\ -5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Її власні числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 12$. Отже, після перетворення координат старші члени рівняння поверхні набувають такого вигляду:

$$F(x'_1, x'_2, x'_3) = -3x'^2_1 - 3x'^2_2 + 12x'^2_3.$$

Для знаходження матриці перетворення координат для кожного власного числа складемо систему рівнянь, аналогічну (9.24). Із-за того, що $\lambda_1 = \lambda_2$, всі три рівняння системи (9.24) збігаються і зводяться до одного рівняння:

$$\alpha_{11} - \alpha_{21} + \alpha_{31} = 0. \quad (9.26)$$

Аналогічно отримаємо

$$\alpha_{12} - \alpha_{22} + \alpha_{32} = 0 \quad (9.27)$$

Крім того, внаслідок ортогональності матриці S елементи двох перших її стовпців задовольняють тотожності (9.14):

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 &= 1, \\ \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 &= 1, \\ \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} &= 0. \end{aligned} \quad (9.28)$$

Рівняння (9.26) має безліч розв'язків. Покладемо, наприклад,

$$\alpha_{11} = \alpha_{21} = t_1, \alpha_{31} = 0.$$

Тоді з першого рівняння (9.28) знайдемо $t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Отже, елементи першого стовпця матриці ми визначили:

$$\lambda_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda_{31} = 0.$$

Внесемо ці значення в третє рівняння (9.28) і отримаємо

$$\alpha_{12} + \alpha_{22} = 0.$$

Отже, елементи другого стовпця матриці S знайдемо з такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_{12} - \alpha_{22} + \alpha_{32} = 0, \\ \alpha_{12} - \alpha_{22} = 0. \end{cases}$$

Покладемо $\alpha_{22} = t_2$, тоді $\alpha_{12} = -t_2, \alpha_{32} = 2t_2$. З другого рівняння (9.28) знайдемо t_2 :

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Ми знайшли елементи другого стовпця матриці S :

$$\alpha_{12} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \alpha_{22} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \alpha_{32} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Елементи 3-го стовпця матриці S знайдемо так само як і в попередньому прикладі ($\alpha_3 = 12$): $2\alpha_{13} + \alpha_{23} - \alpha_{33} = 0, \alpha_{13} + 2\alpha_{23} + \alpha_{33} = 0$.

Покладемо $\alpha_{13} = t_3$, тоді $\alpha_{23} = -t_3, \alpha_{33} = t_3$. Із умови $\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 = 1$ знайдемо

$$t_3, t_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Знайдемо елементи 3-го стовпця матриці S :

$$\alpha_{13} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha_{23} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \alpha_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Отже, матриця S має такий вигляд:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \det S = +1.$$

Напишемо формули перетворення координат:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_1'}{\sqrt{2}} - \frac{x_2'}{\sqrt{6}} + \frac{x_3'}{\sqrt{3}}, \\ x_2 &= \frac{x_1'}{\sqrt{2}} + \frac{x_2'}{\sqrt{6}} - \frac{x_3'}{\sqrt{3}}, \\ x_3 &= \frac{2x_2'}{\sqrt{6}} + \frac{x_3'}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Напишемо в нових координатах молодші члени заданого рівняння поверхні:

$$-12x_1 - 12x_2 + 24x_3 - 76 = -12\sqrt{2}x'_1 + 8\sqrt{6}x'_2 + 8\sqrt{3}x'_3 - 76.$$

Після переходу до нових координат задане рівняння поверхні набере такого вигляду:

$$-3x_1'^2 - 3x_2'^2 + 12x_3'^2 - 12\sqrt{2}x'_1 + 8\sqrt{6}x'_2 + 8\sqrt{3}x'_3 - 76 = 0.$$

Доповнимо члени в x'_1, x'_2, x'_3 до повних квадратів

$$-3(x'_1 + 2\sqrt{2})^2 - 3(x'_2 - \frac{4\sqrt{6}}{3})^2 + 12(x'_3 + \frac{\sqrt{3}}{3}) - 24 = 0,$$

або

$$\frac{(x'_1 + 2\sqrt{2})^2}{8} + \frac{(x'_2 - \frac{4\sqrt{6}}{3})^2}{8} - \frac{(x'_3 + \frac{\sqrt{3}}{3})^2}{2} = -1.$$

Зробимо таку заміну змінних:

$$\begin{aligned} x''_1 &= x'_1 + 2\sqrt{2}, \\ x''_2 &= x'_2 - \frac{4\sqrt{6}}{3}, \\ x''_3 &= x'_3 + \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Отже, рівняння заданої поверхні набере такого вигляду:

$$\frac{x''_1{}^2}{8} + \frac{x''_2{}^2}{8} - \frac{x''_3{}^2}{2} = 1.$$

Це є двопорожнинний гіперболоїд обертання.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Якому співвідношенню повинні задовольняти коефіцієнти площини $Ax + By + Cz + D = 0$ для того, щоб ця площина дотикалася сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$?

2. Написати рівняння сферичної поверхні, центр якої знаходиться в точці

а) $(2, -1, 3)$ та радіус $R = 6$;

б) $(0, 0, 0)$ та проходить через точку $(6, -2, 3)$.

3. Написати рівняння циліндра, описаного навколо сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, знаючи, що його твірна утворює рівні кути з трьома осями координат.

4. Скласти рівняння циліндра, твірні якого паралельні вектору $\vec{U}(1, 1, 1)$, а напрямна задана рівняннями
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x, \\ z = 0. \end{cases}$$

5. Скласти рівняння трьох циліндричних поверхонь, описаних навколо сфери $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$ твірними, паралельними відповідно:

а) осі OX ; б) осі OY ; в) осі OZ .

6. Скласти рівняння конуса, вершина якого міститься в початку координат, а напрямна задана рівняннями:

$$\text{а)} \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = h; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} x^2 + (y - 6)^2 + z^2 = 25, \\ y = 3; \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} x^2 - 2z + z = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$$

Побудувати відповідні конуси.

7. В площині OXY лежить парабола; її вершина збігається з початком координат, вісь - з додатним напрямом осі OX , параметр $p = 2$. Скласти рівняння конуса, прийнявши їй параболу за напрямну та вибравши вершину в точці $(0, 0, 8)$.

8. Скласти рівняння конуса, якщо задані координати вершини $I(0, -a, 0)$ та рівняння напрямної $x^2 = 2py, z = h$. Побудувати конус.

9. Побудувати конус, визначити його вершину на напрямну в площині $z = h$ якщо конус задано рівняннями:

а) $x^2 + (y-h)^2 - z^2 = 0$; б) $x^2 = 2yz$.

10. Скласти рівняння проєкцій лінії перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ з конусом $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ на координатні площини:

а) OXY ; б) OXZ ; в) OYZ .

11. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням прямої $z = y, x = 0$

а) навколо осі OY ; б) навколо осі OZ .

12. Визначити вид поверхні $4x^2 + z^2 + 8x + 16y + 6z - 3 = 0$.

13. Задано однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$.

Знайти лінії його перетину з координатними площинами. Накреслити проєкції перерізів.

14. Знайти точки перетину поверхні та прямої:

а) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad \frac{x-4}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z+2}{-2};$

б) $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1, \quad x-3 = y-1 = \frac{z-6}{3};$

в) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1, \quad \frac{x-4}{4} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-1}{1}.$

15. Встановити, що площина $y + 6 = 0$ перетинає гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$ по параболі; знайти її параметр та вершину.

16. Знайти лінії перетину еліптичного параболоїда $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 2z$ з площинами $x - 5 = 0$ та $z - 3 = 0$

17. Сфера з центром в точці $C(1, -2, 4)$ дотикається площини $2x - y + 2z - 3 = 0$. Написати рівняння сфери.

18. Знайти координати центру та радіус сфери, заданої рівнянням $z^2 + x^2 + y^2 - 2x + 6y - 2z - 22 = 0$.

19. Скласти рівняння циліндра, твірні якого паралельні вектору $\vec{U}(2, -3, 4)$, а напрямна описується рівняннями
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 1. \end{cases}$$

20. Написати рівняння еліпсоїда, осі якого збігаються з осями координат, якщо він проходить через точку $A(1, 2, 3)$ та еліпс:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Звести до канонічного вигляду рівняння поверхонь другого порядку:

21. $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0.$

22. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0.$

23. $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16zx + 60x - 12y + 12z - 90 = 0.$

24. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10zx + 2x + 4y - 10z - 1 = 0.$

25. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2zx - 4x + 6y + 16z + 45 = 0.$

26. $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 4xy + 4xz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0.$

27. $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0.$

28. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 16zx - 2x + 6y + 2z = 0.$

29. $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2xz + 2yz + 4x + z^2 + 3 = 0.$

30. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz + 8x - 4y + 12z + 10 = 0.$

31. $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy - 6yz + 12xz - 36 = 0.$

32. $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 4xz + 4yz = 0.$

33. $x^2 - y^2 + 2z^2 + 2x + 4y - 8z = 0.$

34. $6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - 8z + 1 = 0.$

35. $(x + y)^2 + 2y + 2z = 0.$

36. $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4xz - 16x - 16y - 8z + 72 = 0.$

37. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 2x - 2y - 2z - 1 = 0.$

38. $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0.$

$$39. 4x^2 + 4y^2 - 8z^2 + xy + 4xz + 4yz - 16x - 16y + 10z - 2 = 0.$$

$$40. 2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz - 4x - 8y + 3 = 0.$$

ВІДПОВІДІ

1. $A^2 + B^2 + C^2 = \frac{D^2}{R^2};$

2. а) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 36;$

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 49.$

3. $3((x+z)^2 + (y-z)^2 - 1) - (x+y-2z)^2 = 0.$

4. $(x+z)^2 + (y-z)^2 = 4(x-z).$

5. а) $y^2 + z^2 = a^2;$

б) $x^2 + z^2 = 2ax;$

в) $x^2 + y^2 = 2ax.$

6. а) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{z^2}{R^2};$

б) $9(x^2 + z^2) = 16y^2;$

в) $x^2 + y^2 - z^2 = 0.$

7. $2y^2 + xz - 8x = 0.$

8. $h^2x^2 = 2pz(h(y+a) - az).$

9. а) вершина $\rho(0, h, 0)$, напрямна – коло

$$\begin{cases} x^2 + (y-h)^2 = h^2, \\ z = h. \end{cases}$$

б) вершина $\rho(0, 0, 0)$, напрямна – парабола

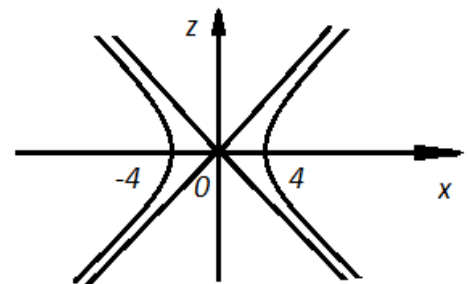
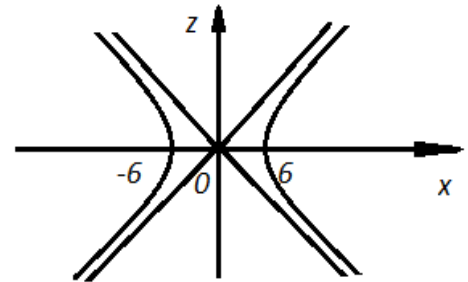
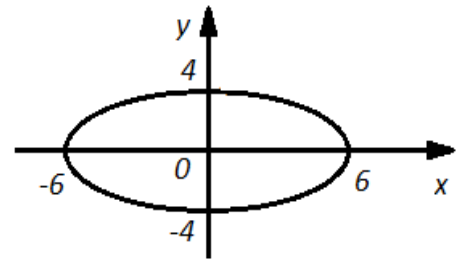
$$\begin{cases} x^2 = 2hy, \\ z = h. \end{cases}$$

10. а) коло $x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2;$

б) $z = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{a}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{a}{\sqrt{2}};$

в) $z = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{a}{\sqrt{2}} \leq y \leq \frac{a}{\sqrt{2}}.$

11. а) $x^2 + z^2 = y^2;$



б) $z^2 = y^2 + x^2$.

12. Еліптичний параболоїд.

13. а) $z = 0, \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1;$

б) $y = 0, \frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{4} = 1;$

в) $x = 0, \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1;$

14. а) $M_1(2, -3, 0), M_2(0, 0, 2);$

б) $M_1(4, 2, 9)$ - пряма дотикається до поверхні;

в) пряма лежить на поверхні.

15. $\rho = 15$; вершина $M(0, -6, -\frac{3}{2})$.

16. Парабола з вершиною в точці $C(5, 0, \frac{1}{2})$ та еліпс з центром в точці $O(0, 0, 3)$, пів осі

$a = 5\sqrt{6}, b = 3\sqrt{6}.$

17. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 9.$

18. $C(1, -3, 1), R = \sqrt{33}.$

19. $16x^2 + 16y^2 + 13z^2 - 16xz + 24yz - 16x - 24y - 26z - 131 = 0.$

20. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1.$

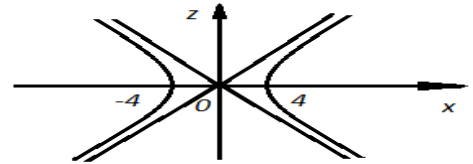
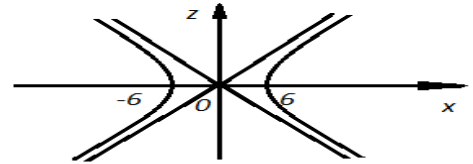
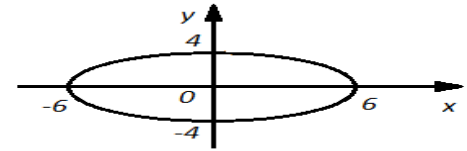
21. $\frac{x'^2}{4/5} + \frac{y'^2}{4/15} - \frac{z'^2}{4/25} = 1.$

22. $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} + \frac{z'^2}{2/3} = 1.$

23. $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} = -2z'.$

24. $\frac{x'^2}{1/3} - \frac{y'^2}{1/3} = 1.$

25. $\frac{x'^2}{5\sqrt{2}} + \frac{y'^2}{\sqrt{2}} = 2z'.$



$$26. y'^2 = \frac{4}{3}x'.$$

$$27. \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} = 1.$$

$$28. \frac{x'^2}{1/3} + \frac{y'^2}{1/6} - \frac{z'^2}{1/2} = 1.$$

$$29. \frac{x'^2}{\sqrt{2}+1} + \frac{y'^2}{\sqrt{2}-1} = 2z'.$$

$$30. -\frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{2} + \frac{z'^2}{1} = 1.$$

$$31. x'^2 = \frac{18}{7}.$$

$$32. \frac{x'^2}{1/4} + \frac{y'^2}{1/4} - \frac{z'^2}{1/2} = 1.$$

$$33. \frac{x'^2}{5} + \frac{y'^2}{5/2} - \frac{z'^2}{5} = 1.$$

$$34. \frac{x'^2}{5/8} + \frac{y'^2}{5/4} - \frac{z'^2}{5/2} = 1.$$

$$35. y'^2 = \frac{\sqrt{6}}{2}x'.$$

$$36. \frac{x'^2}{8} - \frac{y'^2}{8} = z'.$$

$$37. x'^2 + y'^2 + \frac{z'^2}{4} = 1.$$

$$38. \frac{x'^2}{2} + y'^2 = 1.$$

$$39. x'^2 - y'^2 = 2z'.$$

$$40. 6x'^2 + 6y'^2 - 2z'^2 = -1.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Привалов И. И. Аналитическая геометрия / И. И. Привалов. – М. : Наука, 1964. – 272 с.
2. Погорелов А. В. Геометрия / А. В. Погорелов. – М. : Наука, 1984. – 288с.
3. Сборник задач по математике для вузов, Ч. I. / В. А. Болгов, Б. П. Демидович [и др.] – М. : Наука, 1981. – 464 с.
4. Мантуров О. В. Курс высшей математики. Ч. I / Мантуров О. В., Матвеев Н. М. – М. : Высшая школа, 1986.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1971. – 429 с.