

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**Збірник задач з вищої математики
для розрахункових робіт та модульних контрольних
робіт для студентів технічних напрямів підготовки**

Рекомендовано вченою радою фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»

Київ
НТУУ «КПІ»
2012

Збірник задач з вищої математики для розрахункових робіт та модульних контрольних робіт для студентів технічних напрямів підготовки/ Уклад.: О. В. Кузьма ,
В. В. Листопадова, Т. О. Рудик, Н. П. Селезньова, О. В. Суліма— К.: НТУУ «КПІ», 2012. – 58с.

*Гриф надано вченою радою ФМФ
(протокол № 3 від 26 квітня 2012 р.)*

Навчальне видання

**Збірник задач з вищої математики
для розрахункових робіт та модульних контрольних
робіт для студентів технічних напрямів підготовки**

Укладачі:

*Кузьма Олександр Всеволодович, доцент,
кандидат фізико-математичних наук;
Листопадова Валентина Вікторівна,
кандидат фізико-математичних наук;
Рудик Тетяна Олександрівна, доцент,
кандидат фізико-математичних наук;
Селезньова Надія Петрівна, доцент,
кандидат фізико-математичних наук;
Суліма Ольга Вікторівна, доцент,
кандидат фізико-математичних наук;*

Відповідальний
редактор:

Івасишен С.Д., д.фіз.-мат.наук, професор

Рецензент:

Колобродов В.Г., д.т.н., професор

За редакцією укладачів

ВСТУП

У методичних розробках викладено основні теоретичні відомості і приведені практичні завдання до контрольних і розрахунково-графічних робіт із вступної частини курсу вищої математики, який викладається для студентів інженерних спеціальностей на 1 курсі у 1 семестрі. Завдання погруповані у чотири розділи, що стосуються лінійної алгебри, аналітичної геометрії, вступу до математичного аналізу, зокрема, до обчислення границь, дослідження на неперервність, а також, диференціальне числення функцій однієї змінної. Структурування практичних робіт полегшує їх використання як частин модульно-рейтингової атестації студентів. Викладачі можуть використовувати необхідну кількість (від 1 до 4) МРКР або РГР, що визначається особливостями навчального плану на відповідних факультетах.

Слід відмітити, що перша, вступна частина, курсу вищої математики ніякою мірою не є більш простою чи менш важливою у розумінні майбутнього практичного використання. Навпаки, у методичному чи методологічному у ширшому розумінні, викладений матеріал представляє перше знайомство із підходами і методами вищої математики, що стане основою математичного наукового підходу, математичного моделювання, що широко використовується на вищих рівнях спеціалізації і є основою сучасних дослідницьких технологій.

Крім того, самі дисципліни, які традиційно входять до курсу вищої математики у першому семестрі, зараз отримують нове практичне значення, особливо враховуючи швидку інформатизацію не тільки техніки, але й усього суспільства в цілому.

Наприклад, кожен користувач «домашньої» електроніки знає скільки мегабіт має його «девайс», або пристрій, але мало хто розуміється на її матричній структурі, або перевагах чи недоліках збільшення кількості чутливих елементів.

Інформація, що отримується, або передається на більшість складних сучасних систем, в свою чергу, організована як масиви чи матриці числових значень.

Все це підвищує практичне значення вивчення матричної алгебри у підготовці сучасного інженера — дослідника.

Аналогічні паралелі можна провести стосовно зміни практичного значення інших розділів вступного курсу. Але головним є те, що методичні розробки допоможуть студентам почати знайомство із загальною математичною методологією, що сама по собі є необхідним знаряддям сучасного фахівця високого рівня.

1. КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Елементи лінійної алгебри

1.1.1 Деякі відомості про матриці

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, що містить m рядків та n стовпців.

Матриці, як правило позначають великими буквами латинського алфавіту, наприклад A , B , C , ..., а для позначення елементів матриці використовують букви з подвійною індексацією: a_{ij} , де i - номер рядку, j - номер стовпця. Наприклад

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Дві *матриці* однакового порядку називаються *рівними*, якщо відповідні елементи цих матриць є рівними.

Елементи матриці a_{ij} у яких номер стовпця дорівнює номеру рядка ($i = j$), називаються діагональними і утворюють діагональ матриці.

Якщо усі недіагональні елементи квадратної матриці дорівнюють нулю, а хоча б один діагональний елемент не дорівнює нулю, то матриця називається діагональною.

Якщо у діагональній матриці n -го порядку всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, то матриця називається одиничною матрицею n -го порядку. Таку матрицю позначають літерою E .

Наприклад, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ -одинична матриця третього порядку.

Матриця будь-якого розміру називається нульовою, або нуль-матрицею, якщо всі її елементи дорівнюють нулю.

Добутком матриці A на число λ називається матриця $B = \lambda A$, елементи якої $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$. (Зауваження: добутком матриці A на число 0 є нульова матриця).

Сумою двох матриць A та B однакового розміру називається матриця $C = A + B$, елементи якої $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$. (Тобто матриці додають поелементно).

Віднімання матриць. Різницею двох матриць однакового розміру є матриця, що визначається через попередні операції:

$$A - B = A + (-1)B.$$

Добуток матриць. Добуток матриці A на матрицю B визначають, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B . При виконанні цієї умови, добутком матриць $A \cdot B$ (розмір матриці $A - m \times k$, матриці $B - k \times n$) називається така матриця C (розмір якої - $m \times n$), кожен елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i -того рядку матриці A на відповідні елементи j -того стовпця матриці B :

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = (a_{i1} + b_{1j}, a_{i2} + b_{2j}, \dots, a_{in} + b_{mj}).$$

Багато властивостей, що є характерними для операцій над числами, є також справедливими і для операцій над матрицями:

- | | |
|--|---|
| 1) $A + B = B + A$; | 5) $(A + B)C = AC + BC$; |
| 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$; | 6) $\lambda (AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$; |
| 3) $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$; | 7) $A(BC) = (AB)C$. |
| 4) $A(B + C) = AB + AC$; | |

Маємо і деякі специфічні властивості операцій над матрицями. Наприклад, якщо добуток матриць A та B існує, то після перестановки множників місцями, добуток матриць BA може вже і не існувати. Наприклад, якщо розмір матриці $A (2 \times 3)$, а матриці $B - (3 \times 3)$, то добуток AB існує, добуток BA не існує. Загалом, $AB \neq BA$.

Транспонування матриць. Якщо в даній матриці A поміняти місцями стовпці та рядки, то отриману таким чином матрицю A' називають транспонованою по відношенню до даної матриці.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

1.1.2. Визначники квадратних матриць

Визначником матриці першого порядку $A = (a_{11})$ називається елемент a_{11} . Визначником матриці другого порядку, називається число, яке обчислюють за такою формулою:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Визначником матриці третього порядку називається число, яке визначається за такою формулою:

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{32}a_{23}a_{11})$$

В кожен доданок входить рівно по одному елементу із кожного рядка і кожного стовпця матриці. Знаки, з якими члени визначника входять у формулу легко запам'ятати користуючись правилом трикутників або правилом Сарруса.

$$\begin{array}{c} + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} - \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array}$$

Також можна обчислювати визначники третього порядку за правилом Лапласа.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Для обчислення визначників більш високого порядку необхідно ввести деякі нові поняття.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці n -го порядку називається визначник матриці $(n-1)$

порядку, отриманий із матриці A викреслюванням i -того рядку та j -того стовпця.

Наприклад, мінором елемента a_{23} матриці A третього порядку буде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці n -того порядку називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Визначники будь-якого порядку можна обчислювати за **правилом Лапласа**: визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядку (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^n a_{is}A_{is}.$$

Для визначника третього порядку це правило має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Деякі властивості визначників:

1. При транспонуванні матриці її визначник не змінюється. (Завдяки цій властивості надалі всі твердження, які стосуються рядків матриці, будуть справедливими і для стовпців матриці).
2. При перестановці двох рядків матриці її визначник змінює знак на протилежний.
3. Якщо який-небудь рядок матриці складається з одних нулів, то її визначник дорівнює нулю.
4. Якщо всі елементи якого-небудь рядку матриці помножити на число λ , то її визначник також помножиться на це число λ .
5. Якщо квадратна матриця містить два однакових рядки, то її визначник дорівнює нулю.
6. Якщо елементи двох рядків матриці пропорційні, то її визначник дорівнює 0.
7. Сума добутків елементів якого-небудь рядку матриці на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядку цієї матриці дорівнює нулю.
8. Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів якого-небудь рядку матриці додати елементи іншого рядку, помножені на одне і те ж число.

1.1.3. Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається оберненою по відношенню до квадратної матриці A , якщо при множенні цієї матриці на задану як справа так і зліва отримаємо одиничну матрицю.

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

Необхідна та достатня умова існування оберненої матриці. Обернена матриця A^{-1} існує та є єдиною тоді і лише тоді, коли визначник матриці A не дорівнює нулю.

Алгоритм обчислення оберненої матриці:

1. Знайдемо визначник матриці A . Якщо $\Delta A \neq 0$, то обернена матриця існує.
2. Знайдемо матрицю A' транспоновану до матриці A .
3. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів транспонованої матриці і складемо із них приєднану матрицю $\tilde{A}$.

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

4. Обчислюємо обернену матрицю за такою формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}.$$

1.2. Похідна

Означення. Похідною y' або $f'(x)$ від заданої функції $y = f(x)$ називається границя відношення приросту функції до приросту її аргумента за умови, що приріст аргумента прямує до нуля:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Деякі властивості операції диференціювання функцій:

Похідна суми: $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$

Похідна добутку: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Похідна частки: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0.$

Похідна оберненої функції: якщо на деякому проміжку (a, b) пряма функція $y = f(x)$ є монотонною то при її оберненні існує однозначна обернена функція $x = \varphi(y)$. Якщо $f(x)$ - диференційовна функція, то при значеннях x , при яких $f'(x) \neq 0$, обернена функція також буде диференційовною і похідні цих двох функцій пов'язані таким співвідношенням:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Похідна складеної функції: нехай задано функції $y = f(z)$ та $z = \varphi(x)$, кожна з яких є диференційовною по своєму аргументу. Тоді складена функція визначається за такою формулою: $y = f(\varphi(x))$. Похідну такої функції шукають за формулою:

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x$$

Диференціювання неявних функцій: якщо залежність між аргументом x та функцією цього аргумента y задана рівнянням, не розв'язаним відносно y , то для відшукування похідної $y'(x)$ необхідно продиференціювати це рівняння по x , вважаючи при цьому y функцією x . Розв'язуючи отримане таким шляхом рівняння відносно y' , знайдемо вираз для y' через x та y .

Диференціювання функцій, заданих параметрично: нехай залежність між аргументом x та функцією y задана параметрично за допомогою рівнянь

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Тоді, якщо $x'_t \neq 0$, то $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$, $y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \dots$.

1.2.1. Таблиця похідних

1.	$y = c$	$y' = 0$	11.	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
2.	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	12.	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
3.	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	13.	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4.	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	14.	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5.	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	15.	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
6.	$y = e^x$	$y' = e^x$	16.	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

$$7. \quad y = \log_a x \quad y' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$8. \quad y = \ln x \quad y' = \frac{1}{x}$$

$$9. \quad y = \sin x \quad y' = \cos x$$

$$10. \quad y = \cos x \quad y' = -\sin x$$

$$17. \quad y = \operatorname{sh} x \quad y' = \operatorname{ch} x$$

$$18. \quad y = \operatorname{ch} x \quad y' = \operatorname{sh} x$$

$$19. \quad y = \operatorname{th} x \quad y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$20. \quad y = \operatorname{cth} x \quad y' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

2. РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА

2.1. Завдання з розділу "Елементи лінійної алгебри"

Завдання 2.1.1. Знайти значення параметра a , при якому визначник дорівнює нулю (n - номер варіанта).

$$1. \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & n \end{vmatrix}; \quad 2. \quad \begin{vmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & n & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad 3. \quad \begin{vmatrix} 1 & 31 & a & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix};$$

$$4. \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & n & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad 5. \quad \begin{vmatrix} 2 & n & 2 & 5 \\ 2 & a & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad 6. \quad \begin{vmatrix} 2 & n & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & a & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Завдання 2.1.2. Знайти елементи матриці $D = A^2 - BC + A^{-1} + n \cdot E$ (n - номер варіанта, E - одинична матриця).

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ n & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} n & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} n & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ n & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -n & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 4 & n & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -n & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 4 & n & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 2.1.3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера, матричним та методом Гаусса (n-номер варіанта).

$$1. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ n & 1 & -6 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & n \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & n & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & n & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 2.1.4. Дослідити систему лінійних рівнянь, задану розширеною матрицею, на сумісність. Якщо система сумісна, знайти який-небудь базисний розв'язок системи (n -номер варіанта).

$$1. \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 5n+3 & 5n+6 & -5n-6 & 8n+9 & -13n-18 \end{array} \right);$$

$$2. \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 4n+2 & 3n+4 & -2n-4 & 5n+6 & -7n-12 \end{array} \right);$$

$$3. \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & -6 \\ n-1 & -3n-2 & 3n+2 & -4n-3 & 11n+6 \end{array} \right);$$

$$4. \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ -n-3 & -7n-6 & 7n+6 & -10n-9 & 23n+18 \end{array} \right);$$

$$5. \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2.5n+0.5 & 1 & -1 & 0.5n+1.5 & 2n-3 \end{array} \right);$$

$$6. \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 1.5-0.5 & 2n-1 & 2n+1 & -2.5-1.5 & 8n+3 \end{array} \right).$$

2.2. Завдання з розділу "Елементи аналітичної геометрії"

Завдання 2.2.1. Задано вектори $\vec{a} = m\vec{e}_1 + (m+1)\vec{e}_2 + (m+2)\vec{e}_3$; $\vec{b} = n\vec{e}_2 + (n+1)\vec{e}_3$; $\vec{c} = \vec{e}_2 + n\vec{e}_3$, де $\vec{e}_1 = (1,0,0)$; $\vec{e}_2 = (0,1,0)$; $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Перевірити, чи вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є лінійно незалежними. Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є лінійно незалежними, знайти координати вектора $\vec{d} = n\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. (Число $m=1,2,\dots,6$ – задається викладачем, n – номер варіанта).

Завдання 2.2.2. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку перетину прямих $mx - (n+1)y + 1 = 0$, $(n+1)x - y - 2 = 0$ паралельно та перпендикулярно прямій

$$y = -\frac{1}{m+1}x + 1. \text{ (Число } m=1,2,\dots,6 \text{ – задається викладачем, } n \text{ – номер варіанта).}$$

Завдання 2.2.3. Задано вершини піраміди своїми координатами в ортонормованому базисі $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$.

Знайти:

1. Довжину ребра A_1A_2 ;
2. Кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_3 ;
3. Площу грані $A_1A_2A_3$;
4. Об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
5. Рівняння площини $A_1A_2A_3$;
6. Рівняння площини, що проходить через точки A_1A_4 , перпендикулярно до площини $A_1A_2A_3$;
7. Рівняння висоти, опущеної з точки A_4 на площину грані $A_1A_2A_3$;
8. Координати точки A_5 , що симетрична точці A_4 відносно грані $A_1A_2A_3$;
9. Рівняння площини, що проходить через точку A_4 перпендикулярно до прямої A_1A_4 .

Координати точок визначати таким чином:

1. $A_1(1, n, 0); \quad A_2(0, n, 0); \quad A_3(n, 0, 0);$

$$A_4(1, n, n).$$

2. $A_1(2, n, 0); \quad A_2(0, n, 0); \quad A_3(n, 0, 0);$

$$A_4(n, 2, n).$$

3. $A_1(3, n, 0); \quad A_2(0, n, 0); \quad A_3(n, 0, 0);$

$$A_4(n, n, 3).$$

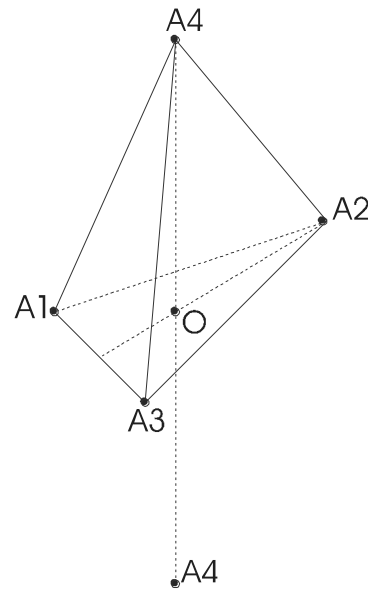
4. $A_1(4, n, 0); \quad A_2(0, n, 0); \quad A_3(n, 0, 0);$

$$A_4(1, n, n).$$

5. $A_1(5, n, 0); \quad A_2(0, n, 0); \quad A_3(n, 0, 0);$

$$A_4(n, 2, n).$$

6. $A_1(6, n, 0); \quad A_2(0, n, 0); \quad A_3(n, 0, 0); \quad A_4(n, 1, n).$



Завдання 2.2.4. Звести до канонічного виду рівняння кривої другого порядку, визначити тип кривої та зобразити схематично цю криву в системі координат (n -номер варіанта, $p \neq 0$ -стале число).

- 1) $x^2n^2 + 2xn^3 + (n+1)^2y^2 + 2y(n+1)^3 + n^4 + 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 = 0;$

- 2) $x^2 - 2xn - y^2(n+1)^2 + 2yn(n+1)^2 - n^3(n+2) - (n+1)^2 = 0;$

- 3) $x^2 - 2xn + y^2 - 2y(n+1) + 2n^2 + 2n = 0;$

- 4) $y^2 - 2yn - 2px + n^2 + 2p(n+1) = 0;$

- 5) $x^2 - 2xn + y^2 + 2yn - n^4 - 2n^3 - n^2 = 0;$

- 6) $y^2 + 2y(n+1) - 2px + n^2 + 2n + 1 - 2pn = 0.$

2.3. Завдання з розділу "Границі та неперервність"

Завдання 2.3.1. Обчислити границі (n -номер варіанта):

$$\begin{aligned}
1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)x^3 - nx^2 - (n-1)x + n}{(n+3)x^3 - (n-1)x + n+1}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg^2(x\sqrt{n+3})}{\arcsin^2(x\sqrt{n+2})}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)x + n}{(n+1)x + k + 3} \right)^{2nx+1}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (n+3)x + n+2}{x^2 - (n+2)x + n+1}. \\
2. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+2)x^5 + (n+1)x^4 + nx + n}{(n-3)x^3 + (n+1)x^2 + n-1}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos((n+2)x)}{x^2}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+2)x + n+5}{(n+2)x + n-1} \right)^{(n+1)x+n}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow n} \frac{5x^2 - (5n-1)x - n}{x - n}. \\
3. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^2 - (n+1)x - (n+2)}{(n+1)x^4 - (n-2)x^3 + (n-1)x}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg}((n+1)x) \arcsin(nx)}{1 - \cos(n+1)x}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+3)x - n - 2}{(n+3)x - n - 5} \right)^{nx+1}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow n} \frac{x^3 - nx^2 + x - n}{x^3 - (n+3)x^2 + (3n+2)x - 2n}. \\
4. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x^4 + (n+1)x^2 - n}{(n+1)x^4 + (n-2)x + n+3}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos((n+4)x)}{\cos((n+5)x) - \cos((n+3)x)}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+4)x - n - 3}{(n+4)x + n+1} \right)^{x+n}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow -n-1} \frac{x^3 + (n+1)x^2}{x^3 + (n+1)^3}. \\
5. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + (n+2)x^3 - x^2 + n+1}{nx^2 - 2nx + n}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos((n+3)x) - \cos((n+5)x)}{x \operatorname{tg}((n+4)x)}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + n+3}{x^2 + n+5} \right)^{(n+2)x^2+1}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + (n-1)x^2 - (2n+1)x + n+1}{x^3 + (n+1)x^2 - (2n+5)x + n+3}. \\
6. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)x^3 - (n+2)x^2 - (n+1)x + n}{nx^5 - n+1}; & \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos((n+1)x) - \cos((n+3)x)}{x^2}; \\
\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + (n+3)x + 2}{x^2 + (n+4)x - 1} \right)^{(n+1)x+1}; & \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - nx^2 - (2n+3)x - n-2}{x^3 + (n-1)x^2 - (2n+1)x - n-1}.
\end{aligned}$$

Завдання 2.3.2. Дослідити задану функцію $y = f(x)$ на неперервність у точках розриву. У випадку розриву знайти границі функції зліва та справа в точках розриву, визначити характер точок розриву. (n – номер варіанта).

$$\begin{aligned}
1. f(x) &= \frac{n^{\frac{1}{x}}}{(n+1)^{\frac{1}{x}} + 1}; & 2. f(x) &= (n+1)^{\frac{1}{1-x}} - 1; & 3. f(x) &= \frac{n^{\frac{1}{x}} + 1}{(n+1)^{\frac{-1}{x}} - 1}; \\
4. f(x) &= \frac{(n+1)^x + 1}{(n+1)^{-x} - 2}; & 5. f(x) &= \frac{\frac{1}{-n} - n}{\frac{1}{-n} + n}; & 6. f(x) &= n^{\frac{1}{1-nx}} - (n+1).
\end{aligned}$$

2.4. Завдання з розділу "Елементи диференціального числення"

Завдання 2.4.1. Знайти похідні заданих функцій.

Індивідуальне завдання вибирається з таблиці 1 за такою схемою: будуємо функцію із двох функцій f_i, g_j ($i = 1, 2, \dots, 15; j = 1, 2, \dots, 15$), тобто вибираємо з таблиці 2 функції і, відповідно, над ними виконуємо вказані у 5-му, 6-му та 7-му стовпцях операції (операції

відповідають вашій функції g_j), це будуть завдання **а); б); в)** (п-номер варіанта, a - стала величина):

1. $(f_1, g_1), (f_1, g_2), \dots, (f_1, g_{15}), (f_2, g_1), \dots, (f_2, g_{15});$
2. $(f_3, g_1), (f_3, g_2), \dots, (f_3, g_{15}), (f_4, g_1), \dots, (f_4, g_{15});$
3. $(f_5, g_1), (f_5, g_2), \dots, (f_5, g_{15}), (f_6, g_1), \dots, (f_6, g_{15});$
4. $(f_7, g_1), (f_7, g_2), \dots, (f_7, g_{15}), (f_8, g_1), \dots, (f_8, g_{15});$
5. $(f_9, g_1), (f_9, g_2), \dots, (f_9, g_{15}), (f_{10}, g_1), \dots, (f_{10}, g_{15});$
6. $(f_{11}, g_1), (f_{11}, g_2), \dots, (f_{11}, g_{15}), (f_{12}, g_1), \dots, (f_{12}, g_{15});$

Таблиця 1

№	функція $f(t)$	аргу-мент t	функція $g(z)$	аргу-мент z	операції над функціями $f(t), g(z)$	операції над функціями $f(t), g(z)$	операції над функціями $f(t), g(z)$
	1	2	3	4	5	6	7
1.	$\sin t$	x^{n+1}	a^z	$\sqrt[n]{x}$	$\sqrt{\frac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}}$	$f(x)^{g(x)}$	$f(\frac{t}{y}) + g(zy) =$
2.	$\cos t$	$\frac{1}{x^{n+1}}$	e^z	$\operatorname{tg} x^n$	$\frac{f(x)+g(x)}{f^2(x)+g^2(x)}$	$f(x)^{g(x)}$	$f(\frac{t}{y}) + g(zy) = 0$
3.	tgt	$\sqrt[n]{x}$	$\operatorname{sh} z$	e^{-nx}	$f(x) - \frac{1}{f(x)g(x)}$	$f(x)^{g(x)}$	$f(\frac{t}{y}) + g(zy) = 0$
4.	ctgt	e^{nx}	$\operatorname{ch} z$	$a^{\frac{x}{n}}$	$f^2(x) - \frac{g(x)}{f(x)}$	$f(x)^{g(x)}$	$f(\frac{t}{y}) + g(zy) = 0$
5.	$\arcsin t$	$\ln(1-x^n)$	$\log_a z$	$\sqrt[n]{1-x^n}$	$\sqrt[n]{f(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}$	$f(x)^{g(x)}$	$f(\frac{t}{y}) + g(zy) = 0$
6.	$\arccos t$	$\sin^n(nx)$	$\sin z$	$\operatorname{sh} nx$	$f(x)g(x) - \sqrt{g(x)}$	$f(x)^{g(x)}$	$f(\frac{t}{y}) + g(zy) = 0$
7.	arctgt	n^{x^2}	$\cos z$	$\sin^n(1-nx)$	$\frac{1}{\sqrt{f(x)}} + \sqrt{g(x)}$	$f(x)^{g(x)}$	$f(\frac{t}{y}) + g(zy) = 0$
8.	$\operatorname{arcctgt}$	$\log_{n+1}(1+x^n)$	$\operatorname{th} z$	$\cos^n(1+nx)$	$f(x)g(x) + \frac{1}{g(x)}$	$f(x)^{g(x)}$	$f(\frac{t}{y}) + g(zy) = 0$
9.	$\log_a t$	$\sin(1-nx)$	$\operatorname{tg} z$	e^{-x^n}	$\sqrt{f(x)g(x) + \frac{1}{f(x)}}$	$f(x)^{g(x)}$	$f(\frac{t}{y}) + g(zy) = 0$
10.	e^t	$\cos^n(1+nx)$	$\operatorname{ctg} z$	$\operatorname{arctg} nx$	$\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt{g(x)}$	$f(x)^{g(x)}$	$f(\frac{t}{y}) + g(zy) = 0$
11.	a^t	$\operatorname{arctg}(x^n-1)$	$\arcsin z$	$\log_2(1+nx)$	$\frac{f(x)}{g(x)} + 2^{g(x)}$	$f(x)^{g(x)}$	$f(\frac{t}{y}) + g(zy) = 0$
12.	sht	$\sqrt[n]{1+x^n}$	$\arccos z$	$e^{\sin nx}$	$\ln f(x) - \ln g(x)$	$f(x)^{g(x)}$	$f(\frac{t}{y}) + g(zy) = 0$
13.	cht	$\sqrt[n]{2-x^{-n}}$	$\operatorname{arctg} z$	$e^{-\cos nx}$	$f(x)g(x) - \frac{f(x)}{g(x)}$	$f(x)^{g(x)}$	$f(\frac{t}{y}) + g(zy) = 0$

14.	tht	x^{n+2}	$arcctgz$	$\ln(1 - \frac{x}{n})$	$e^{f(x)}g(x)$	$f(x)^{g(x)}$	$f(\frac{t}{y}) + g(zy) = 0$
15.	$ctht$	n^{1-x^2}	$\ln z$	$arctg(1+x^n)$	$e^{g(x)}f(x)$	$f(x)^{g(x)}$	$f(\frac{t}{y}) + g(zy) = 0$

Наприклад, варіант 2 у групі 3 має завдання знайти похідні від таких функцій: вибираємо функції $f_5(t)$ та $g_2(z)$ і підставляємо відповідні t, z . Тоді

$$f_5(x) = \arcsin \ln(1 - x^n), \quad g_2(z) = e^{tgx^n};$$

$$a) \frac{f(x) + g(x)}{f^2(x) + g^2(x)} = \frac{\arcsin \ln(1 - x^n) + e^{tgx^n}}{(\arcsin \ln(1 - x^n))^2 + e^{2tgx^n}};$$

$$б) f(x)^{g(x)} = (\arcsin \ln(1 - x^n))^{e^{tgx^n}};$$

$$в) f(\frac{t}{y}) + g(zy) = \arcsin \frac{\ln(1 - x^n)}{y} + e^{y \cdot tgx^n}.$$

Завдання 2.4.2. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} функції $y = f(x)$, що задана

$$\text{параметрично: } \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Індивідуальне завдання вибирається з таблиці 2 за такою схемою: будуємо параметричну функцію із двох функцій f_i, g_j ($i = 1, 2, \dots, 15; j = 1, 2, \dots, 15$), тобто вибираємо з таблиці 2 функції i , відповідно, над ними виконуємо вказані у 3-му, та 4-му стовпцях:

1. $(f_1, g_1), (f_1, g_2), \dots, (f_1, g_{15}), (f_2, g_1), \dots, (f_2, g_{15});$
2. $(f_3, g_1), (f_3, g_2), \dots, (f_3, g_{15}), (f_4, g_1), \dots, (f_4, g_{15});$
3. $(f_5, g_1), (f_5, g_2), \dots, (f_5, g_{15}), (f_6, g_1), \dots, (f_6, g_{15});$
4. $(f_7, g_1), (f_7, g_2), \dots, (f_7, g_{15}), (f_8, g_1), \dots, (f_8, g_{15});$
5. $(f_9, g_1), (f_9, g_2), \dots, (f_9, g_{15}), (f_{10}, g_1), \dots, (f_{10}, g_{15});$
6. $(f_{11}, g_1), (f_{11}, g_2), \dots, (f_{11}, g_{15}), (f_{12}, g_1), \dots, (f_{12}, g_{15}).$

Таблиця 2

№	x	y	f(t)	g(t)
	1	2	3	4
1.	$\sin(nt)$	$\frac{1}{nt}$	$x + y$	$x - y$
2.	$\cos(nt)$	t^n	$\frac{x}{y}$	$x + y$
3.	$tg(nt)$	$\ln t$	xy	$x - y$
4.	$ctg(nt)$	$\sqrt[n]{t}$	xy	$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$
5.	$\arcsin(nt)$	$\log_3 t$	$x^2 + y^2$	$\frac{x - y}{x + y}$
6.	$\arccos(nt)$	$e^{\frac{n}{t}}$	$x^2 - y^2$	$\frac{x + y}{x - y}$
7.	$arctg(nt)$	$\sqrt{1 - t^n}$	$\sqrt{x + y}$	$x - y$
8.	$arcctg(nt)$	$\sqrt{1 + t^n}$	$x^3 + y^3$	$\frac{x + y}{x - y}$

9.	$\log_a(nt)$	$\sqrt{1+\frac{1}{t}}$	$\sqrt{\frac{x}{y}}$	$x-y$
10.	e^{nt}	$\sqrt{1-\frac{1}{t}}$	x^2+y^2	$x+y$
11.	a^{nt}	$\log_2(1+nt)$	$\sqrt{x+y}$	$\sqrt{x}+\sqrt{y}$
12.	$sh(nt)$	$\log_4(1-nt)$	x^3+y^3	$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$
13.	$ch(nt)$	$\frac{1}{1+t^n}$	x^2-y^2	$\sqrt{x}+\sqrt{y}$
14.	$th(nt)$	$\frac{1}{1-t^n}$	$\sqrt{\frac{x}{y}}$	$\frac{x+y}{x-y}$
15.	$cth(nt)$	$\ln(1+t^n)$	xy	$\frac{x-y}{x+y}$

Наприклад, варіант 2 у групі 3 має завдання знайти похідну від такої параметричної функції:

вибираємо функції $f_5(t)$ та $g_2(z)$ і підставляємо відповідні x, y . Тоді

$f_5 = x^2 + y^2$, $g_2 = x + y$, де $x = \arcsin nt$, $y = \log_3 t$. Отже

$$\begin{cases} x = (\arcsin nt)^2 + (\log_3 t)^2 \\ y = \arcsin nt + \log_3 t \end{cases}$$

Завдання 2.4.3. Провести повне дослідження функції і побудувати її графік.

План дослідження функції:

1. Область існування функції;
2. Парність функції;
3. Асимптоти графіка функції;
 - a) вертикальна;
 - b) горизонтальна;
 - c) похила;
4. Знайти точки розриву функції та встановити характер цих точок розриву;
5. Екстремальні точки функції та проміжки монотонності;
6. Проміжки опуклості та точки перегину функції.

Функція задана за допомогою такої формули:

$$1. y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + g}, \quad 2. y = \frac{mx + g}{ax^2 + bx + c}, \quad 3. y = ax^b e^{-cx+m},$$

$$4. y = ae^{\frac{bx+c}{mx+g}}, \quad 5. y = ae^{\frac{mx+g}{bx+c}}, \quad 6. y = ax^{-b} e^{-(cx+m)}.$$

Коефіцієнти a, b, c, m, g визначаються таблицею 3:

Таблиця 3

№	a	b	c	m	g
	1	2	3	4	5
1.	-10	1	0	1	5
2.	1	-1	-1	-1	2
3.	-1	-5	3	1	2
4.	5	2	-2	2	-1

	1	2	3	4	5
5.	$\frac{1}{2}$	1	-1	$\frac{1}{3}$	-1
6.	$\frac{1}{3}$	-1	2	1	-1
7.	$-\frac{1}{2}$	-1	1	-2	1
8.	$-\frac{1}{3}$	2	-1	$\frac{2}{3}$	-1
9.	$\frac{2}{3}$	-1	1	-1	2
10.	-1	2	1	1	-2
11.	2	-1	-1	2	$\frac{1}{4}$
12.	1	3	-2	1	-1
13.	1	-3	2	$\frac{1}{3}$	-1
14.	1	$\frac{1}{2}$	-1	2	-1
15.	-1	$\frac{1}{3}$	-2	1	-1
16.	1	$-\frac{1}{2}$	-1	2	-1
17.	-2	3	1	1	2
18.	-3	2	1	1	2
19.	3	-2	-1	$\frac{1}{4}$	-1
20.	2	-1	-2	1	-1
21.	1	3	-2	2	-1
22.	1	-3	2	-2	1
23.	4	2	-1	1	-2
24.	-4	2	2	-1	2
25.	1	2	-3	-1	2
26.	1	-2	-3	3	1
27.	-1	3	2	-1	3
28.	-2	2	1	3	2
29.	2	-2	-1	1	3
30.	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	-1	2	3

3. КОНТРОЛЬНА РОБОТА

3.1. Завдання з розділу "Елементи лінійної алгебри"

Завдання 3.1.1. Знайти матрицю $D = 2A^2 - 3B \cdot C + A^{-1}$

Таблиця 1

1.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
2.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
3.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
4.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
5.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
6.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
7.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
8.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$
9.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

10.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
11.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
12.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
13.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
14.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
15.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
16.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
17.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
18.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
19.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
20.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

21.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
22.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
23.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
24.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
25.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
26.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
27.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
28.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$
29.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$
30.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

I-ий.

II-ий. **Завдання 3.1.2.** Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими задана розширеною матрицею. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера, методом Гаусса та матричним методом.

Таблиця 2

1.	2.	3.
----	----	----

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & 11 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 11 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 15 \\ 3 & 1 & 2 & 14 \end{pmatrix}$	6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 12 \end{pmatrix}$	9. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	11. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 10 \\ -3 & 8 & -10 & -25 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	12. $\begin{pmatrix} -3 & -7 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 2 & -7 \end{pmatrix}$	14. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	15. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
16. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	17. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	18. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	20. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$	21. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
22. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 & -14 \end{pmatrix}$	23. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -16 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	24. $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
25. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & -5 & -8 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	26. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	27. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 19 \\ 2 & 7 & 4 & 30 \\ 3 & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	29. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	30. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 15 \\ 5 & -3 & 2 & 15 \\ 10 & -11 & 5 & 36 \end{pmatrix}$
--	--	---

3.2. Завдання з розділу "Елементи аналітичної геометрії"

Завдання 3.2.1. Задані координати точок $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$, $B(3; 8; 5)$.

- а) Знайти об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ і площу грані $A_1A_2A_4$.
- б) Знайти об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$. Знайти такі координати точки A_4 , при яких паралелепіпед перетворюється на прямий.
- в) Знайти довжину вектора $\overrightarrow{A_1B}$ і розкласти його за векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, якщо це можливо. Знайти кут, утворений векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$, а також довжину більшої діагоналі паралелограма, побудованого на цих векторах.

Таблиця 3

1. $A_1(2; -2; 0)$, $A_2(-2; 0; 3)$, $A_3(0; -1; 1)$, $A_4(-2; 1; -2)$.
2. $A_1(-1; 3; 2)$, $A_2(0; 1; 2)$, $A_3(1; 2; -1)$, $A_4(-2; 0; 1)$.
3. $A_1(-2; 0; -2)$, $A_2(-1; 1; 1)$, $A_3(2; 2; 0)$, $A_4(0; -2; 2)$.
4. $A_1(3; -3; 0)$, $A_2(0; 3; -1)$, $A_3(4; 0; 1)$, $A_4(-2; 1; 2)$.
5. $A_1(0; 3; 1)$, $A_2(1; -3; -1)$, $A_3(-1; 0; -2)$, $A_4(2; -1; 0)$.
6. $A_1(4; 0; 1)$, $A_2(-1; -1; -1)$, $A_3(-2; 1; 0)$, $A_4(3; 2; -2)$.
7. $A_1(-4; 2; -3)$, $A_2(0; 0; -1)$, $A_3(1; -2; 1)$, $A_4(-2; 1; 0)$.
8. $A_1(-1; -1; 0)$, $A_2(2; 2; -1)$, $A_3(3; 1; -2)$, $A_4(0; -2; 1)$.
9. $A_1(0; 0; -4)$, $A_2(-1; 0; -2)$, $A_3(-4; 2; 1)$, $A_4(4; -2; -1)$.
10. $A_1(-2; -1; 0)$, $A_2(0; -2; -1)$, $A_3(2; 0; 1)$, $A_4(1; 2; 3)$.
11. $A_1(-3; 0; 4)$, $A_2(1; -1; 0)$, $A_3(-2; 1; -4)$, $A_4(-1; 2; -3)$.
12. $A_1(3; -1; 2)$, $A_2(-1; 1; -2)$, $A_3(1; 0; -3)$, $A_4(0; -2; 4)$.
13. $A_1(2; -1; 1)$, $A_2(-2; 1; 4)$, $A_3(0; 4; -1)$, $A_4(-1; -4; 0)$.
14. $A_1(-4; 0; 3)$, $A_2(2; -1; 2)$, $A_3(-3; 1; 1)$, $A_4(-2; 2; -1)$.
15. $A_1(-1; 2; 3)$, $A_2(1; -2; -3)$, $A_3(0; 1; 2)$, $A_4(2; 0; -1)$.
16. $A_1(-3; -2; -1)$, $A_2(0; 2; 1)$, $A_3(2; -1; 4)$, $A_4(1; 1; 2)$.
17. $A_1(1; 4; 3)$, $A_2(3; 0; -1)$, $A_3(-1; 2; 2)$, $A_4(2; -3; -2)$.
18. $A_1(0; -1; 1)$, $A_2(4; 1; -2)$, $A_3(-3; 4; 2)$, $A_4(3; 2; 0)$.
19. $A_1(4; -1; 3)$, $A_2(2; -3; 0)$, $A_3(-2; 3; 5)$, $A_4(-1; 0; -2)$.

20.	$A_1(2; 5; -1), A_2(-2; 4; 3), A_3(3; -1; 2), A_4(0; -4; -2)$.
21.	$A_1(-1; 4; -2), A_2(2; 3; -1), A_3(3; 0; 2), A_4(-3; 4; -2)$.
22.	$A_1(-4; 1; 3), A_2(-1; -1; 3), A_3(2; 3; 4), A_4(3; 0; 2)$.
23.	$A_1(3; -1; -3), A_2(-1; 2; 2), A_3(1; 0; 5), A_4(2; -3; 0)$.
24.	$A_1(0; 2; -1), A_2(1; -3; 4), A_3(-1; 3; -2), A_4(-2; 0; 3)$.
25.	$A_1(-3; 2; -1), A_2(4; -1; 2), A_3(2; 1; 0), A_4(-1; 5; -2)$.
26.	$A_1(-2; -1; -3), A_2(-3; 2; 1), A_3(1; -2; 2), A_4(2; 3; 4)$.
27.	$A_1(1; -2; 3), A_2(-2; 0; -1), A_3(-1; -1; 2), A_4(0; 1; 0)$.
28.	$A_1(0; 1; 1), A_2(1; -1; 0), A_3(-1; 0; 2), A_4(2; -2; 3)$.
29.	$A_1(4; 2; -1), A_2(1; -1; 0), A_3(-3; 0; 1), A_4(3; 1; 2)$.
30.	$A_1(0; -1; -1), A_2(1; -2; 0), A_3(-1; 0; 2), A_4(2; 4; 3)$.

Завдання 3.2.2. Дано координати вершин трикутника ABC . Знайти:

- довжину сторони BC ;
- рівняння лінії BC ;
- рівняння висоти, проведеної із вершини A ;
- довжину висоти, проведеної із вершини A ;
- рівняння бісектриси внутрішнього кута B ;
- рівняння площини трикутника ABC .

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $A(7;1), B(-5;-4), C(-9;-1)$ | 2. $A(0;5), B(12;0), C(18;8)$ |
| 3. $A(8;0), B(-4;5), C(-8;-2)$ | 4. $A(1;5), B(13;0), C(9;18)$. |
| 5. $A(6;1), B(-6;-4), C(-10;-1)$ | 6. $A(-1;5), B(11;0), C(17;8)$ |
| 7. $A(6;5), B(-6;0), C(-10;3)$ | 8. $A(-2;6), B(10;1), C(16;9)$ |
| 9. $A(10;-1), B(-2;-6), C(-6;3)$. | 10. $A(-1;7), B(11;2), C(17;10)$ |
| 11. $A(-6;4), B(-10;-1), C(6;1)$. | 12. $A(12;0), B(18;8), C(0;5)$ |
| 13. $A(-2;-6), B(-6;-3), C(10;-1)$. | 14. $A(8;2), B(14;10), C(-4;7)$ |
| 15. $A(2;-4), B(-2;-1), C(14;1)$. | 16. $A(2;-1), B(8;7), C(-10;4)$ |
| 17. $A(5;-3), B(1;0), C(17;2)$. | 18. $A(14;-6), B(20;2), C(2;-1)$ |
| 19. $A(3;4), B(-1;7), C(15;9)$. | 20. $A(1;-2), B(7;6), C(-11;3)$ |
| 21. $A(4;4), B(1;-3), C(-5;1)$. | 22. $A(3;-1), B(-3;3), C(2;6)$ |
| 23. $A(3;6), B(7;-1), C(9;5)$. | 24. $A(5;-1), B(-3;-2), C(3;-8)$ |
| 25. $A(-6;-2), B(2;1), C(-3;7)$. | 26. $A(-4;-3), B(-5;5), C(2;5)$ |
| 27. $A(2;4), B(4;-4), C(6;1)$. | 28. $A(-8;-1), B(-2;-3), C(-2;5)$ |
| 29. $A(1;-1), B(6;0), C(5;-7)$. | 30. $A(4;3), B(6;-3), C(-3;-2)$ |

Завдання 3.2.3. Аналітична геометрія у просторі.

В задачах 1 – 10 задається рівняння прямої L і координати точки A . Знайти рівняння площини, яка проходить через точку A і пряму L .

- $$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}; \quad A(3;4;0).$$
- $$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}; \quad A(-1;-1;0).$$

3. (L) $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$; $A(3;1;-2)$.
4. (L) $\frac{x}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5}$; $A(1;3;-2)$
5. (L) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$; $A(4;-1;3)$.
6. (L) $\frac{x}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{1}$; $A(2;-1;1)$.
7. (L) $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{5}$; $A(3;2;1)$.
8. (L) $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$; $A(1;2;-1)$.
9. (L) $\frac{x}{6} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$; $A(5;1;-1)$.
10. (L) $\frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{3}$; $A(-3;3;1)$.

В задачах 11–20 знайти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку A_4 , перпендикулярно площині, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 , координати яких задані.

- | | | | | |
|-----|----------------|------------------|-----------------|---------------|
| 11. | $A_1(0;0;2),$ | $A_2(2;0;5),$ | $A_3(1;1;0),$ | $A_4(4;1;2)$ |
| 12. | $A_1(3;0;5),$ | $A_2(0;0;2),$ | $A_3(4;1;2),$ | $A_4(1;1;0)$ |
| 13. | $A_1(1;1;0),$ | $A_2(4;1;2),$ | $A_3(0;0;2),$ | $A_4(3;0;5)$ |
| 14. | $A_1(4;7;2),$ | $A_2(1;1;0),$ | $A_3(3;0;5),$ | $A_4(0;0;2)$ |
| 15. | $A_1(0;0;0),$ | $A_2(3;-2;1),$ | $A_3(1;4;0),$ | $A_4(5;2;3)$ |
| 16. | $A_1(3;1;0),$ | $A_2(0;7;2),$ | $A_3(-1;0;-5),$ | $A_4(4;1;5)$ |
| 17. | $A_1(1;-1;1),$ | $A_2(0;2;4),$ | $A_3(1;3;3),$ | $A_4(4;2;-3)$ |
| 18. | $A_1(1;-1;2),$ | $A_2(2;1;1),$ | $A_3(1;1;4),$ | $A_4(0;0;0)$ |
| 19. | $A_1(1;-3;2),$ | $A_2(5;1;-4),$ | $A_3(2;0;3),$ | $A_4(1;-5;2)$ |
| 20. | $A_1(3;5;3),$ | $A_2(-2;11;-5),$ | $A_3(1;2;4),$ | $A_4(0;6;4)$ |

В задачах 21–30 дано загальне рівняння прямої L і координати точки A . Необхідно знайти відстань від точки A до прямої L .

21. (L) $\begin{cases} 2x - y - 3z = -1, \\ x - 5y + z = 0 \end{cases}$ $A(3;0;2).$
22. (L) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$ $A(1;2;0).$
23. (L) $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 2 \end{cases}$ $A(-1;2;1).$
24. (L) $\begin{cases} x + y - z = -2, \\ 4x - 3y + z = 1 \end{cases}$ $A(2;3;0).$
25. (L) $\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 4, \\ 4x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$ $A(0;4;-2).$

$$\begin{aligned}
26. (L) \quad & \begin{cases} 2x + 7y - z = 8, \\ x + 2y + z = 4 \end{cases} & A(-3;0;5). \\
27. (L) \quad & \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ x + 5y + z = 0 \end{cases} & A(1;3;0). \\
28. (L) \quad & \begin{cases} x + y - z = 1, \\ x + 2y + z = 4 \end{cases} & A(-2;0;1). \\
29. (L) \quad & \begin{cases} x - 4y - 2z = -3, \\ 3x + y + z = 5 \end{cases} & A(5;1;-2). \\
30. (L) \quad & \begin{cases} 3x + y + z = 5, \\ 4x - 3y + z = 1 \end{cases} & A(0;-5;2).
\end{aligned}$$

Завдання 3.2.4. Криві другого порядку. Скласти канонічне рівняння кривої другого порядку. (a, b - півосі кривої, ε - ексцентриситет, r - фокальний радіус). Побудувати ці лінії.

Таблиця 4

Еліпс		Гіпербола		Парабола	
1	$c=4, \varepsilon=0.5$	11	$b=4, \varepsilon=5$	21	Проходить через точку $M(4;8)$
2	$b=4, \varepsilon=0.5$	12	$c=3, \varepsilon=1.5$	22	Має фокус $F(0;3)$
3	Проходить через точки $M_1(2;\sqrt{3}),$ $M_2(0;3)$	13	$c=3, \varepsilon=2.5$	23	Має фокус $F(0;4)$
4	$b=5, \varepsilon=\frac{12}{13}$	14	$a=8, \varepsilon=\frac{5}{4}$	24	Проходить через точку $M(2;4)$
5	$c=3, \varepsilon=\frac{3}{5}$	15	$c=9$, рівняння асимптот $y=\pm\frac{2}{3}x$	25	Має фокус $F(-3;0)$
6	Проходить через точки $M_1(4;0),$ $M_2(2;\sqrt{3})$	16	$c=10$, рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$	26	Має фокус $F(4;0)$
7	$a=3, \varepsilon=\frac{1}{3}$	17	Проходить через точки $M_1(-3;-4), M_2(2;1)$	27	Проходить через точку $M(1;1)$
8	Проходить через точки $M_1(\sqrt{3};\sqrt{\frac{2}{3}}),$ $M_2(3;0)$	18	$c=3$, рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$	28	$r=3$, проходить через точку $M(x;\sqrt{5})$
9	$a=2, \varepsilon=\frac{1}{2}$	19	$a=4$, рівняння асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$	29	$r=4$, проходить через точку $M(x;\sqrt{15})$

10	$c=4, \varepsilon=0.2$	20	$a=6, \varepsilon=\frac{3}{2}$	30	$r=5$, проходить через точку $M(x;4)$
-----------	------------------------	-----------	--------------------------------	-----------	--

3.3. Завдання з розділу "Границі та неперервність"

Завдання 3.3.1. Знайти границі, не користуючись правилом Лопітала.

1. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5};$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x};$

г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x + 4}{3x^3 - 5x + 1};$

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+7} \right)^{x+1};$

е) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}.$

2.а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 81}{3x^2 + 4x + 2};$

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3};$

е) $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - 3^x)^{2/\sin x}.$

3.

а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x};$

б) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 64};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg} \pi(2+x)};$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 23}{x^7 - 3x^5 - 4x};$$

$$\Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2-3x};$$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{4}{\cos x} \right)^{1/9x^2}.$$

4.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x + x^5};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^3 + x^2};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg}(2\pi(x+1/2))};$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 5};$$

$$\Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x};$$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \pi x)^{1/(x \sin x)}.$$

5.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - x};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2};$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^5 + 4x^3};$$

$$\Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4};$$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 3x)^{1/x}.$$

6.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x + 1} - 5};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 10x + 7}{2x^3 - 3x};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 7}{x} \right)^{2x+1};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right)^{1/x}.$$

7.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x + 7} - 5}{3 - \sqrt{x}};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x + 10))};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x - 3x^2}{x^3 - 16};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 1}{x + 4} \right)^{3x+2};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x \sin^2 x)^{1/x}.$$

8.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 16} - 4};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + 5\pi/2) \operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x^3 - 5x + 4x};$$

$$\begin{aligned} \text{д)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2}; \\ \text{е)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (2 - 5^{x^3})^{1/x^3}. \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}; \\ \text{б)} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}; \\ \text{в)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{3x+1}}{\cos(\pi(x+1)/2)}; \\ \text{г)} \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - x^3}{4x^2 + 3x - 6}; \\ \text{д)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3}; \\ \text{е)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{1/x^2}. \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1}; \\ \text{б)} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9}; \\ \text{в)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + \pi x}; \\ \text{г)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^4 - 2x^2 + x}; \\ \text{д)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-3} \right)^{x-5}; \\ \text{е)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^x)^{1/x}. \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}; \\ \text{б)} \quad & \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}; \end{aligned}$$

$$\text{B)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{3 \operatorname{arctg} x};$$

$$\text{Г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+3}{x^3-4x^2-x};$$

$$\text{Д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}.$$

12.

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\pi(x+1))}{2x};$$

$$\text{Г)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4+5x}{2x^2-3x-7};$$

$$\text{Д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} (3-2 \cos x)^{1/x^2}.$$

13.

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x}-3}{\sqrt{8-x}-3};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x};$$

$$\text{Г)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+10x-11}{3x^4-2x+5};$$

$$\text{Д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} (2-3^{x^2})^{1/\sin^2 x}.$$

14.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin(\pi(x+2))};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 3x - 4}{2x^2 - 5x + 1};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{3-2x};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sqrt{2 - \cos x}.$$

15.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 - 2x + 4}{2x^2 + x - 5};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+5} \right)^{x+1};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(6 - \frac{5}{\cos x} \right)^{1/x}.$$

16.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 - 3x}{3x^2 + x - 10};$$

- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+2} \right)^{x-2};$
- е) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(3 - \frac{2}{\cos x} \right)^{1/x^2}.$
17. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4};$
- б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15};$
- в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos^2 x)};$
- г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 8}{8x^3 - 4x + 5};$
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{3-2x};$
- е) $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - e^{x^2})^{1/x^2}.$
18. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2};$
- б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}};$
- в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x};$
- г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 4}{3x^2 - 4x + 1};$
- д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-2x}{1-2x} \right)^{x+1};$
- е) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arcsin^2 \sqrt{x})^{1/x}.$
19. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1};$
- б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}};$
- в) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x};$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + x^2 - 7}{2x^2 - 5x + 3};$$

$$\Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+2}{4x-2} \right)^{2x^2-1};$$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{1/x^2}.$$

$$20. \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2};$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 2x^3 + 3}{2x^2 + 3x - 7};$$

$$\Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x-2} \right)^{2x-1};$$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x)^{1/x^2}.$$

$$21. \text{ a)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x};$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^5 - 4x^3 + 3}{2x^3 + x - 7};$$

$$\Delta) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+4} \right)^{1-3x};$$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x)^{1/\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$22. \text{ a)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 7x + 1}{x^3 + 4x^2 - 3};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+3x}{3x-4} \right)^{(x^2-4)};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{tg} \sqrt{x})^{1/\sin x}.$$

$$23. \text{ а)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 + 5x^2 - 3}{2x^2 - x + 7};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{3x-1};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{3x})^{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}.$$

$$24. \text{ а)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12};$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8};$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x};$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^4 - 2x^3 + 1};$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+8}{5x-2} \right)^{x+4};$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\sin x}.$$

25. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}};$

в) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 3x + 5}{4x^3 - 2x^2 + 1};$

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-4} \right)^{2x+3};$

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x}.$

26. а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1-x^2}}{2x + 3x^2};$

в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2};$

г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x^3 + 3x}{2x^2 - 2x + 1};$

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+4} \right)^{x+3};$

е) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{x^2})^{1/x \sin x}.$

27. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1};$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-3}};$

в) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(x/2)}{\pi - x};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 2}{4x^3 + 2x - 1};$

$$\begin{aligned} \text{д)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+4} \right)^{6x+1}; \\ \text{е)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} (x+2)(\ln(2x+1) - \ln(2x-1)). \end{aligned}$$

$$28. \text{ а)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + x^5};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{6x}}{3x^2 + 5x - 2};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^3 - 3x^2 + 7}{2x^4 + 3x + 1};$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-5} \right)^{3x-2};$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x \cdot 2^x)^{1/x^2}.$$

$$29. \text{ а)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{4x-1}}{2x^2 + 3x - 5};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{1 + 2x - x^4};$$

$$\text{д)} \quad \lim \left(\frac{3x-1}{3x+5} \right)^{3x-1};$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sqrt{1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

$$30. \text{ а)} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{3+2x}}{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}; \quad \text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x};$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 7x + 5}{4x^5 - 3x^3 + 2};$$

$$\Delta) \lim \left(\frac{1-2x}{3-2x} \right)^{-x+4};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \infty} (3x-1)(\ln(x+2) - \ln(x-1)).$$

Завдання 3.3.2. Дослідити задану функцію $y = f(x)$ на неперервність у точках $x_0 = 0, x_1 = 1$. У випадку розриву знайти границі функції зліва і справа, визначити характер точки розриву.

Таблиця 5

1. $f(x) = \frac{2^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{3^x} + 1}.$	2. $f(x) = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \cos x}.$	3. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x - 1}.$
4. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$	5. $f(x) = \frac{\sin 4x + 2}{1 + \cos \pi x}.$	6. $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \pi x - 1}.$
7. $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1}.$	8. $f(x) = \frac{2^{1-x} + 1}{2^{1-x} - 2}.$	9. $f(x) = \frac{3^{-x+1} + 1}{3^{-x+1} - 1}.$
10. $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}} - 1.$	11. $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x + 2}{2 \operatorname{ctg} x - 3}.$	12. $f(x) = \frac{1 - 2x}{\sqrt[3]{2x - 2}}.$
13. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1 + 2x}{1 - x}}.$	14. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \operatorname{ctg} x.$	15. $f(x) = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$
16. $f(x) = \frac{1 - e^x}{1 - x}.$	17. $f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}.$	18. $f(x) = \sqrt{1 - x} \operatorname{ctg} x.$
19. $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x + 1}{\operatorname{ctg} x - 1}.$	20. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin \pi x}.$	21. $f(x) = \lg x - 1 .$
22. $f(x) = \frac{2}{\lg x }.$	23. $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{1 + 3^{x-1}}}.$	24. $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1}.$

25. $f(x) = \frac{x+2}{x^2+2x-3}.$	26. $f(x) = \frac{3}{\lg x-1 }.$	27. $f(x) = \frac{2^x+1}{2^x-1}.$
28. $f(x) = \frac{\frac{1}{2^x}+1}{\frac{1}{2^x}-1}.$	29. $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1-x}.$	30. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} \pi x + 1}{\operatorname{tg} \pi x - 1}.$

3.4. Завдання з розділу "Елементи диференціального числення"

Завдання 3.4.1. Знайти похідні функції однієї змінної (параметри a і b вважати сталими величинами).

1. а) $y = x - \ln(e^x + 2\sqrt{e^{3x} + e^x});$

б) $y = \left(\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}} \right)^{-2};$

в) $y = (\sin \sqrt{x})^{\arcsin x};$

г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2. а) $y = e^{2x} + 1/8(2 - \sin 2x + e^{-3x});$

б) $y = \left(\frac{(1+x)\operatorname{tg} \sqrt{x}}{x^2} \right)^5;$

в) $y = (\arcsin x)^{x^2};$

г) $x^4 + y^4 = ax^2y^2.$

3. а) $y = 2\sqrt{e^x} + 1 + \ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1};$

б) $y = \operatorname{tg}^3(\arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x});$

в) $y = (\sin x)^{5e^x};$

г) $ax^3 + by^3 = xy.$

4. а) $y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + \operatorname{tg} e^x;$

б) $y = \left(\arccos \frac{2+x^2}{\sqrt{1-x}} \right)^{-\frac{1}{2}};$

в) $y = (x \sin x)^{\sin x};$

- $\text{r)} \ a \sin(xy) + b \cos(xy) = 0$.
5. а) $y = 2(x-2)\sqrt{1+e^x} + \ln x^4$;
 б) $y = (\sin \sqrt{x})^{e^x}$;
 в) $y = \sqrt{(\operatorname{arctg}(x^3+1))^3} + 3^{3x}$;
 г) $x^3 + x^2 y + y^2 = b$.
6. а) $y = \frac{1}{\ln x} + \ln \frac{1+2^x}{1-2^x}$;
 б) $y = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{6x}} \right)^3$;
 в) $y = x^{e^{\cos x}}$;
 г) $x - y = \arcsin x - \arccos y$.
7. а) $y = \ln(e^x + 1) + \frac{18e^x - 7}{6(e^x + 1)}$;
 б) $y = 6 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{(x^3 - 4)^3}$;
 в) $y = (x^2 + 1)^{\cos x}$;
 г) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = axy$
8. а) $y = 2(\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x})$;
 б) $y = ((x-2) \arccos \sqrt{x-1})^2$;
 в) $y = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x}$;
 г) $2y \ln(x+y) = bx$.
9. а) $y = \frac{1}{2} e^{-2x} \left(\frac{\cos 2x + \sin 2x}{4+x} + e^{2x} \right)$;
 б) $y = (\arccos \sqrt{x-1})^4$;
 в) $y = (x^2 + 1)^{\cos x}$;
 г) $y = \frac{a(x-y)}{x^2 + y^2}$.
10. а) $y = \frac{x+1}{1-e^x} - \ln(1+e^x)$;

- б) $y = \left(\arcsin \sqrt{\frac{x}{x+3}} \right)^{\frac{2}{3}} ;$
- в) $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{sh} x} ;$
- г) $\operatorname{arctg} \frac{by}{ax} = \ln \sqrt{ax^2 + by^2} .$
11. а) $y = \ln^3 \left(e^x + \sqrt{\sin e^{-x}} \right) ;$
- б) $y = \frac{4+x^4}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{4} ;$
- в) $y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}} ;$
- г) $ay - \sin y = bx .$
12. а) $y = 3e^{\sqrt{x}} \left(x - e^{\sin x - \sqrt{x}} \right) ;$
- б) $y = \left((x-2) \arccos \sqrt{x-1} \right)^{\frac{3}{4}} ;$
- в) $y = (x^8 + 1)^{\operatorname{th} x} ;$
- г) $x^3 + 2x^2 y^2 + 5x + y - 5 = a .$
13. а) $y = \arcsin e^x - \sqrt{1 - e^{2x}} ;$
- б) $y = \left(\frac{3+x}{2} \arccos \sqrt{\frac{x}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} ;$
- в) $y = (\cos 2x)^{\ln x} ;$
- г) $\operatorname{tg} y = axy .$
14. а) $y = \frac{e^{x^3}}{(1+x^3)^2} + \ln(1+x^3) ;$
- б) $y = \arcsin \ln \frac{x-2}{(x+1)\sqrt{x}} ;$
- в) $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln \operatorname{tg} x} ;$
- г) $y^3 - 3y + 2ax = 0 .$
15. а) $y = x - 3 \ln \sqrt{1 + e^x} ;$
- б) $y = \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right)^{-3} ;$

- б) $y = (x^3 + 4)^{\operatorname{tg} x}$;
 г) $\operatorname{arctg} \frac{ax}{bx}$.
16. а) $y = \operatorname{arctg}^2(e^x - e^{-x}) + \operatorname{th}^2 x$;
- б) $y = \left(\operatorname{arcsin} \sqrt{x^2 + 3x} \right)^{\frac{4}{3}}$;
 б) $y = (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$;
 г) $\cos(bxy) = ax$.
17. а) $y = \ln(e^x(x^2 - 1)\cos 6x)$;
- б) $y = \left(\operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{x} - 1}{5x} \right)^{\frac{5}{6}}$;
 б) $y = x^{\sin x^3}$;
 г) $e^{ay} = x + y$.
18. а) $y = e^{-x} \operatorname{arcsin} \ln(1 + e^{-x})$;
- б) $y = \frac{x-3}{2} \operatorname{tg}^3 \sqrt{x-2}$;
 б) $y = (\sin x)^{\cos x}$;
 г) $y = b + axe^y$.
19. а) $y = e^{\sin x} \left(x - \frac{1}{\cos x} \right)^2$;
- б) $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right)^{\frac{7}{6}}$;
 б) $y = (\cos 2x)^{\sin 2x}$;
 г) $\ln y + \frac{ax}{y} = b$.
20. а) $y = x - \frac{1}{3} \left(\ln \sqrt{1 + e^{3x}} \right)^3$;
- б) $y = \left(\operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{x}{x^2 + 3}} \right)^3$;
 б) $y = (\operatorname{tg} x)^{x^3}$;

21. $\Gamma) y = ax + \operatorname{arctg} y$.
 a) $y = \ln(e^x + \sqrt{\sin e^{-x}})$;
 б) $y = (\operatorname{arctg}(x^3 + 1))^{\frac{4}{3}}$;
 в) $y = (\sin x)^{\ln x}$;
 г) $\operatorname{arctg}(ax + by) = x$.
22. a) $y = \ln\left(\frac{e^x}{2}(x^2 - 1)\cos 3x\right)$;
 б) $y = \frac{2\sqrt{1-x}}{x}(\arcsin 3x)^3$;
 в) $y = x^{e^{\cos x}}$;
 г) $y^2 \cos ax = a^2 \sin 3x$.
23. a) $y = \frac{x+1}{1-e^x} - \ln(1+e^x)$;
 б) $y = \sqrt{\frac{4+x^4}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{4}}$;
 в) $y = x^{e^{\operatorname{tg} x}}$;
 г) $\ln(ax) + e^{-\frac{x}{y}} = b$.
24. a) $y = \log_2 \frac{(x^3 - 1)(x^2 + x + 2)^2}{2\sqrt{3-x}}$;
 б) $y = 2x \left(\arccos \frac{7x+1}{2} \right)^{\frac{1}{7}}$;
 в) $y = (\ln x)^{\ln x}$;
 г) $ay = \cos(x+y)$.
25. a) $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$;
 б) $y = \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\operatorname{arctg} \frac{2}{2}} \right)^4$;
 в) $y = x^{\arcsin x}$;
 г) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2 b^2}$.

26. а) $y = \ln(2x - 3 + \sqrt{4x^2 - 12x + 10}) - \sqrt{4x^2 - 12x + 10} \operatorname{arctg}(2x - 3);$
 б) $y = \left(\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}} \right)^2;$
 в) $y = x^{\sin^2 x};$
 г) $y \sin x = \cos(x - y).$
27. а) $y = \frac{2}{3}(4x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 - x} + (2x - 1)^4 \arcsin \frac{1}{2x - 1};$
 б) $y = \ln^3 \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}};$
 в) $y = (\sin x)^{e^x};$
 г) $e^{ax} \sin by + e^{by} \cos ax = 0.$
28. а) $y = \left(5x + \sqrt{25x^2 + 1} \right)^3 - \sqrt{25x^2 + 1} \operatorname{arctg} 5x;$
 б) $y = x(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$
 в) $y = (x^2 + 1)^{\cos x};$
 г) $x^3 + y^3 - 3abxy = 0.$
29. а) $y = \sqrt{49x^2 + 1} \operatorname{arctg} 7x - \ln(7x + \sqrt{49x^2 + 1});$
 б) $y = \sqrt{1 - 3x - 2x^2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x + 3}{\sqrt{17}};$
 в) $y = (x^5 + 1)^{\operatorname{tg} x};$
 г) $2^{ax} + 2^{by} = 2^{ax+by}.$
30. а) $y = \frac{2}{3x - 2} \sqrt{-3 + 12x - 9x^2} + \ln \frac{1 + \sqrt{-3 + 12x - 9x^2}}{3x - 2};$
 б) $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x};$
 в) $y = x^{e^x} x^9;$
 г) $x^4 + y^3 - 2x^3 y = a + b.$

Завдання 3.4.2. Знайти похідну другого порядку y''_{xx} функції $y = f(x)$, що задана параметрично.

Таблиця 6

1. $\begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = 2 \sec^2 t; \end{cases}$	2. $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}; \\ y = \frac{1}{t}; \end{cases}$	3. $\begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = e^t \sin t; \end{cases}$
4. $\begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t; \\ y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}; \end{cases}$	5. $\begin{cases} x = t + \sin t; \\ y = 2 - \cos t; \end{cases}$	6. $\begin{cases} x = \frac{1}{t}; \\ y = \frac{1}{(1+t^2)}; \end{cases}$
7. $\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt[3]{t-1}; \end{cases}$	8. $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \sec t; \end{cases}$	9. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \operatorname{cosec} 2t; \end{cases}$
10. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}; \\ y = \frac{t}{\sqrt{t-1}}; \end{cases}$	11. $\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt[3]{t-1}; \end{cases}$	12. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t; \\ y = \sec 2t; \end{cases}$
13. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3-1}; \\ y = \ln t; \end{cases}$	14. $\begin{cases} x = \operatorname{sh} t; \\ y = t h^2 t; \end{cases}$	15. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}; \\ y = \frac{1}{\sqrt{t}}; \end{cases}$
16. $\begin{cases} x = \cos^2 t; \\ y = \operatorname{tg}^2 t; \end{cases}$	17. $\begin{cases} x = \sqrt{t-3}; \\ y = \ln(t-3); \end{cases}$	18. $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \ln \cos t; \end{cases}$
19. $\begin{cases} x = t + \sin t; \\ y = 2 + \cos t; \end{cases}$	20. $\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 2 - \cos t; \end{cases}$	21. $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \ln \sin t; \end{cases}$
22. $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t; \\ y = \sin t - t \cos t; \end{cases}$	23. $\begin{cases} x = e^t; \\ y = \arcsin t; \end{cases}$	24. $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin^4 \left(\frac{t}{2} \right); \end{cases}$
25. $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t; \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}; \end{cases}$	26. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t; \\ y = \frac{t^2}{2}; \end{cases}$	27. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t); \\ y = 4(2 + \cos t); \end{cases}$
28.	29.	30.

$\begin{cases} x = \sin t - t \cos t; \\ y = \cos t + t \sin t; \end{cases}$	$\begin{cases} x = \cos t + \sin t; \\ y = \sin 2t; \end{cases}$	$\begin{cases} x = \ln t; \\ y = \operatorname{arctg} t; \end{cases}$
--	--	---

Завдання 3.4.3. Для заданої функції: а) знайти її диференціал; б) знайти наближене значення функції в точці x_0 .

1. $y = \sqrt[3]{x}; x_0 = 7,76$.
2. $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}; x_0 = 1,012$.
3. $y = (x + \sqrt{5 - x^2})/2; x_0 = 0,96$.
4. $y = \sqrt[5]{x}; x_0 = 31,62$.
5. $y = \arcsin x; x_0 = 0,8$.
6. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}; x_0 = 0,97$.
7. $y = \sqrt[4]{x}; x_0 = 16,47$.
8. $y = \sqrt{x^2 + x + 3}; x_0 = 1,97$.
9. $y = x^{11}; x_0 = 1,021$.
10. $y = \sqrt[4]{x^6 + 17}; x_0 = 2,030$.
11. $y = x^6; x_0 = 2,011$.
12. $y = \sqrt[3]{x^2}; x_0 = 1,032$.
13. $y = x^{21}; x_0 = 0,998$.
14. $y = \sqrt[5]{x^3 + x + 2}; x_0 = 2,98$.
15. $y = x^7; x_0 = 1,996$.
16. $y = \sqrt[6]{x^2 + x + 8}; x_0 = 7,09$.
17. $y = \sqrt{4x - 1}; x_0 = 2,56$.
18. $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}; x_0 = 1,016$.
19. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2}; x_0 = 5,07$.
20. $y = x^{17}; x_0 = 0,904$.
21. $y = \sqrt{1 + x + \sin x}; x_0 = 0,01$.
22. $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}, x_0 = 0,01$.
23. $y = \sqrt[4]{2x - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}, x_0 = 1,02$.
24. $y = \sqrt{x^5 + x^4 + 16}; x_0 = 2,11$.
25. $y = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}; x_0 = 1,58$.
26. $y = \operatorname{arctg} x; x_0 = 1,05$.
27. $y = \arccos x; x_0 = 0,51$.
28. $y = \operatorname{arcctg} x; x_0 = 0,95$.
29. $y = \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}}; x_0 = 0,15$.
30. $y = \ln \operatorname{tg} x; x_0 = 47^\circ$.

Завдання 3.4.4. Знайти границі функцій за правилом Лопітала.

Таблиця 7

1.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x}$ а)	$\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{ctg} \pi x)$ б)	в) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x - 1}{x + 1} \right)^{(\sqrt[3]{x-1})^{-1}}$
2.	а) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x - 1)^2}{e^{\sin \pi x} - e^{-\sin \pi x}}$	б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x)$	в) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{(x-a)^{-1}}$

3.	a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x - \sqrt[3]{2x-3})}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin \pi(x - \frac{1}{2})}$	б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x$	в) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x}\right)^{(\sqrt[3]{x}-1)^{-1}}$
4.	a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\cos x}{\cos 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$	б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2}{\sin \ln(x-1)}$	в) $\lim_{x \rightarrow a} (a^2 - x^2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}$
5.	a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg} 2x} - e^{-\sin 2x}}{\sin x - 1}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x$	в) $\lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{2x-7}{x+1}\right)^{(\sqrt[3]{x}-2)^{-1}}$
6.	a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\ln \sin 3x}{(6x - \pi)^2}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x}$	в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{4-x}\right)}}$
7.	a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\sqrt{2x^2 - 3x - 5})}{\ln(x-1) - \ln(x+1)}$	б) $\lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{\pi x}{2} \ln(1-x)$	в) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x}\right)^{1/(\sqrt[5]{x}-1)}$
8.	a) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(x-2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x - 1)}$	б) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2}$	в) $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/a)}$
9.	a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\ln(4x-1)}{\sqrt{1 - \cos \pi x} - 1}$	б) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$	в) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\operatorname{ctg} 2x / \sin 3x}$
10.	a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{2\left(3^{\sqrt{2+x+x^2}} - 9\right)}$	б) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln \operatorname{ctg} x$	в) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{1/\sin^2 2x}$
11.	a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2^{\sin \pi x} - 1}{\ln(x^3 - 6x - 8)}$	б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{2}{\pi} - \operatorname{arctg} x\right)$	в) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/6)}$
12.	a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^2}$	б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x^3}$	в) $\lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{1/\sin^2 2x}$
13.	a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg} \ln(3x-5)}{e^{x+3} + e^{x^2+1}}$	б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}) \sqrt{x}$	в) $\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$
14.	a) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\ln \cos x}{3^{\sin 2x} - 1}$	б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\pi - 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$	в) $\lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{5/(\operatorname{tg} 5x \sin 2x)}$
15.	a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1 + \ln^2 x} - 1}{1 + \cos \pi x}$	б) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^x - 1) \ln x$	в) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^x - 1) \ln x$

			$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{9-2x}{3} \right)^{\operatorname{tg}(\pi x/6)}$
16.	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{\sin x} - e^{\sin 4x}}$ а)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ б)	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{6 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x}$ Б)
17.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin \pi x} - 1}$ а)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right)$ б)	$\lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{x(x-1)}$ Б)
18.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{e^{\sin^2 6x} - e^{\sin^2 3x}}{\log_3 \cos 6x}$ а)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$ б)	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{1/(x-\pi/2)}$ Б)
19.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\operatorname{tg} 2x}}{\ln(2x/\pi)}$ а)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ б)	$\lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1} - 1)^{(3x-1)/(x-1)}$ Б)
20.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(e^{x+2} - e^{x^2-4})}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2}$ а)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \arctg x} - \frac{1}{x^2} \right)$ б)	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 3x)^{\sec x}$ Б)
21.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2^x + 7} - \sqrt{2^{x+1}}}{x^3 - 1}$ а)	$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ б)	$\lim_{x \rightarrow 2} (2e^{x-2} - 1)^{(3x+2)/(x-2)}$ Б)
22.	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(2 + \cos x)}{(3^{\sin x} - 1)^2}$ а)	$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$ б)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)^{(\sin(x-1))/(x-1-\sin(x-1))}}{x-1}$ Б)
23.	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x^3 - \pi^3) \sin 5x}{e^{\sin^2 x} - 1}$ а)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$ б)	$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2-x}{x} \right)^{1/\ln(2-x)}$ Б)
24.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{e^{\sqrt[3]{6+x^3-4x^2}} - e}$ а)	$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$ б)	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)^{1/\cos x}$ Б)
25.	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}$ а)	$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x}$ б)	$\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{(\sin(\pi x/2))/\ln(2-x)}$ Б)
26.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(2x - \pi)^2}$ а)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)^{1+3}}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$ б)	$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3} \right)^{1/(x-3)}$ Б)
27.	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{x^2-a^2} - 1}{\operatorname{tg} \ln\left(\frac{x}{a}\right)}$ а)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{e^{2x} - 1} \right)$ б)	$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{2x} \right)^{(\ln(x+2))/(\ln(2-x))}$ Б)

28.	а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sin\left(e^{\sqrt[3]{(1-x^2)/2}} - e_6\right)}{\arctg(x+3)}$	б) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4}\right)$	В) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{18 \sin x / \operatorname{ctg} x}$
29.	а) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right)}{2^{\sqrt{\sin x + 1}} - 2}$	б) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \ln(1-x)$	В) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x}\right)^{(\ln(x+2))/(\ln(2-x))}$
30.	а) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3^x} - 3\right)}{3^{\cos(3x/2)} - 1}$	б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$	В) $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{4}\right)^{1/\cos(x/2)}$

Завдання 3.4.5. Провести повне дослідження функції і побудувати графік.

Таблиця 8

1. $y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1};$	2. $y = (x-1)e^{3x+1};$	3. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2};$
4. $y = \frac{x^3 + 4}{x^2};$	5. $y = \frac{x^3}{x^4 - 1}$	6. $y = x^2 + \frac{1}{x^2};$
7. $y = \frac{4-2x}{1-x^2};$	8. $y = x \ln x;$	9. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1};$
10. $y = \frac{x^5}{x^4 - 1};$	11. $y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{x^2} (x-5);$	12. $y = (e^{2x} + 1)/e^x;$
13. $y = (5x^4 + 3)/x;$	14. $y = \frac{5x}{4-x^2};$	15. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1};$
16.	17.	18.

$y = \frac{x+1}{(x-1)^2};$	$y = e^{1/(5+x)};$	$y = x/(9-x);$
19. $y = \frac{4x-x^2-4}{x};$	20. $y = \frac{x^2}{4x^2-1};$	21. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}};$
22. $y = x + \frac{\ln x}{x};$	23. $y = x - \ln(1+x^2);$	24. $y = \frac{x^3}{x^2-x+1};$
25. $y = x^2 - 2 \ln x;$	26. $y = x^3 e^{-x^2/2};$	27. $y = \frac{x^2-x-1}{x^2-2x};$
28. $y = \frac{(x-2)^2}{x+1};$	29. $y = -\ln \frac{1+x}{1-x};$	30. $y = \ln(x^2+1);$

Завдання 3.4.6. Знайти найменше і найбільше значення функції $y = f(x)$ на відрізка $[a; b]$.

Таблиця 9

1. $y = \ln(x^2 - 2x + 2), [0; 3].$	2. $y = 3x/(x^2 + 1), [0; 5].$
3. $y = (2x-1)/(x-1)^2, [-1/2; 0].$	4. $y = (x+2)e^{1-x}, [-2; 2].$
5. $y = \ln(x^2 - 2x + 4), [-1; 3/2].$	6. $y = x^3/(x^2 - x + 1), [-1; 1].$
7. $y = x^4/4 - 6x^3 + 7, [16; 20].$	8. $y = 108x - x^4, [-1; 4].$
9. $y = \sqrt{3}/2 + \cos x, [0; \pi/2].$	10. $y = (3-x)e^{-x}, [0; 5].$
11. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, [-3; 1].$	12. $y = 3x^4 - 16x^3 + 2, [-3; 1].$
13. $y = (\ln x)/x, [1; 4].$	14. $y = e^{6x-x^2}, [-3; 3].$
15. $y = (x+1)\sqrt[3]{x^2}, [-4/5; 3].$	16. $y = x^2 - 2x + 2/(x-1), [-1; 3].$
17. $y = x^3 e^{x+1}, [-4; 0].$	18. $y = x \ln x, [1/e^2; 1].$
19. $y = ((x+1/x)^3), [1; 2].$	20. $y = \sqrt{x-x^3}, [-2; 2].$
21. $y = 4 - e^{-x^2}, [0; 1].$	22. $y = (x^3 + 4)/x^2, [1; 2].$
23. $y = xe^x, [-2; 0].$	24. $y = (x-2)e^x, [-2; 0].$
25. $y = (x-1)e^{-x}, [0; 3].$	26. $y = x/(9-x^2), [-2; 2].$
27. $y = (1 + \ln x)/x, [1/e, e].$	28. $y = e^{4x-x^2}, [1; 3].$

29. $y = (x^5 - 8)/x^4, [-3; -1].$	30. $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}, [-1; 2].$
------------------------------------	--

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. ч.1, 3.-К., "Вища школа". 1990,1991,1993.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.- К., "Вища школа", 1993.
3. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика.-К., "Вища школа", 1986.
4. Шкіль М.І., Математичний аналіз. ч.1,2.-К., "Вища школа", 1978, 1981.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.- М., Наука, 1980.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные и интегральное исчисление. - М., Наука, 1984.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. - М., Наука, 1971.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. - М., Наука, т.1, 1972; т.2, 1980
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление, т.1, т.2.-М., Наука, 1976.
10. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. - М., Наука, 1980.
11. Сборник задач по математике для вузов. ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа. - М., Наука, 1981.
12. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М., Наука, 1977.
13. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М., Наука, 1980.
14. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т.1, т.2. -М., Высшая школа, 1973.
15. Задачи и упражнения по математическому анализу. Под ред. Б.Д. Демидовича.- М., Наука, 1978.
16. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч.1,ч.2.- М., Высшая школа,1980.
17. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. Лекции для университетов и педагогических вузов / Под. Редакцией акад. РАН Садовничего В. А. – М. : Высш. школа, 1999. - 695 с.

Зміст

Вступ.....	3
1.КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ.....	4
1.1.ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ	4
1.1.1.Деякі відомості про матриці.....	4
1.1.2.Визначники квадратних матриць.....	5
1.1.3.Обернена матриця	7
1.2.ПОХІДНА	8
1.2.1.Таблиця похідних	9
2.РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА.....	10
2.1. Завдання з розділу "ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ."	10
2.2. Завдання з розділу "ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ."	12
2.3. Завдання з розділу "ГРАНИЦІ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ."	14
2.4. Завдання з розділу "ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ."	15
3.КОНТРОЛЬНА РОБОТА.	20
3.1. Завдання з розділу "ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ."	20
3.2. Завдання з розділу "ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ."	24
3.3. Завдання з розділу "ГРАНИЦІ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ."	29
3.4. Завдання з розділу "ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ."	41
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	55