МІНІСТЕРСТВО НАУКИ ТА ОСВІТИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ВАРІАНТИ ТИПОВО-РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Рекомендовано Вченою радою
фізико-математичного факультету
від 27.04.2016 р., протокол № 4

КИЇВ-2016

Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт з вищої математики для студентів технічних спеціальностей. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної / Уклад.: Г.В.Журавська, І.М. Копась, Г.М.Кулик, Н.В.Рева, Н.В.Степаненко –К.: НТУУ «КПІ», 2016.– 90 с.

Укладачі: *Журавська Ганна Вікторівна, канд. фіз.- мат. наук*
Копась Інна Миколаївна, канд. фіз.- мат. наук, доц.
Кулик Ганна Миколаївна, канд. фіз.- мат. наук, доц.
Рева Надія Віталіївна, канд.. фіз.-мат. наук
Степаненко Наталія Вікторівна, канд. фіз.- мат. наук

Укладачі: *Г.В.Журавська*
І.М. Копась
Г.М.Кулик
Н.В.Рева
Н.В.Степаненко

Відповідальний
редактор *С.Д. Івасишен, д-р фіз.- мат. наук, проф.*

Рецензент Н.М. Задерей, канд. фіз.- мат. наук, доц.

Для виконання типового розрахунку необхідно опрацювати теоретичний матеріал, і після цього виконати завдання. Із кожного вказаного викладачем завдання студент розв'язує задачі, номери яких відповідають його порядковому номеру в списку групи. Виконання студентами типового розрахунку контролює викладач. Під час захисту типового розрахунку студент повинен правильно відповідати на теоретичні питання, пояснювати хід розв'язування задач, розв'язувати задачі аналогічного типу.

1. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

1.1. Операції з графіками функцій

Нехай маємо графіки функцій

$$y = \varphi(x), \qquad x \in D_\varphi, \qquad y = \psi(x), \qquad x \in D_\psi. \tag{1.1}$$

Потрібно побудувати графіки функцій

а) $y = \varphi(x) \pm \psi(x), \qquad D_{\varphi \pm \psi} = D_\varphi \cap D_\psi;$ (1.2)

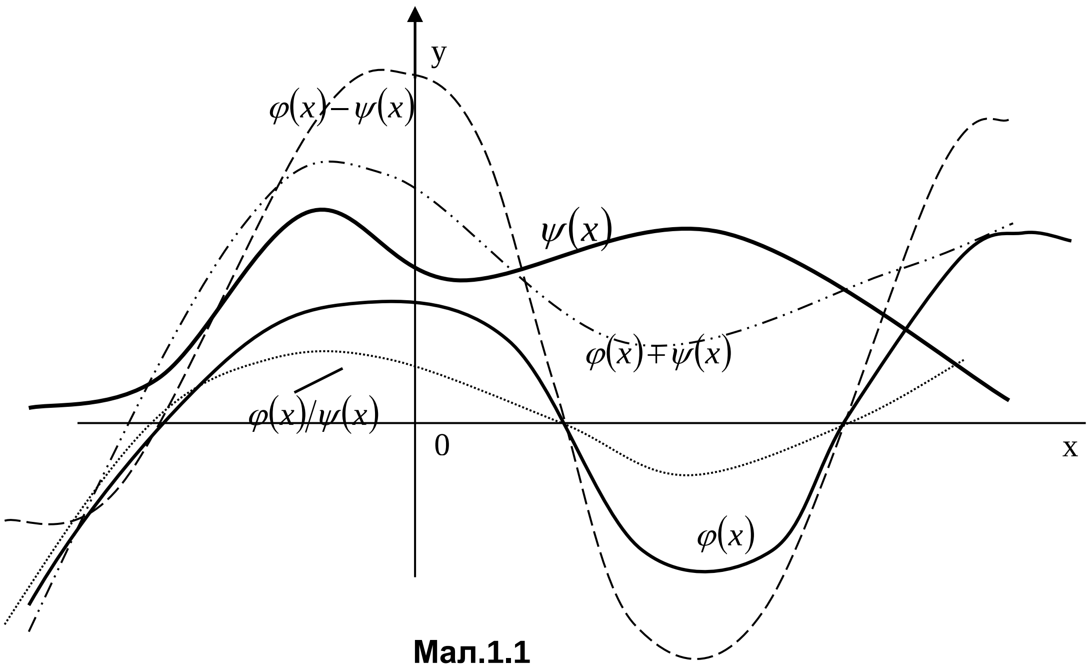
б) $y = \varphi(x) \cdot \psi(x), \qquad D_{\varphi, \psi} = D_\varphi \cap D_\psi;$ (1.3)

в) $y = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \qquad D_{\frac{\varphi}{\psi}} = (D_\varphi \cap D_\psi) \backslash \{x \,|\, \psi(x) = 0\}.$ (1.4)

Графіки (1.2)-(1.4) будуємо наступним чином. Для $x_0 \in D_\varphi \cap D_\psi$ знаходимо за графіком значення $\varphi(x_0)$ і $\psi(x_0)$, а після цього - значення $\varphi(x_0) \pm \psi(x_0)$, $\varphi(x_0) \cdot \psi(x_0)$, $\dfrac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$ (якщо $\psi(x_0) \neq 0$) для відповідних графіків функцій (1.3)-(1.4). За одержаними точками будуємо шуканий графік функції.

Зокрема, якщо $\psi(x) \equiv A = const$, то для побудови графіка функції $\varphi(x) \pm |A|$ достатньо виконати зсув по осі OY графіка функції $\varphi(x)$ на величину $|A|$ в сторону додатного напрямку осі OY при знаку "+" і в протилежний бік - при знаку “-“. Для того щоб отримати графік функції $\varphi(x)\cdot A$, достатньо виконати стиснення (при $0<A<1$) або розтягування (при $A>1$) вздовж осі OY графіка функції $\varphi(x)$ в A раз. При від'ємному A будуємо графік $|A|$, а після цього відображуємо його симетрично осі OX. Ділення графіків $\dfrac{\varphi(x)}{A}$ розглядаємо як множення графіків $\dfrac{1}{A}$ і $\varphi(x)$.

На мал. 1.1 за допомогою даних графіків функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ побудовані графіки функцій $\varphi(x)\pm\psi(x)$, $\varphi(x)\cdot\psi(x)$ і $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.



Мал.1.1

<u>Завдання 1.1.</u> Застосовуючи правила додавання, множення, ділення графіків, побудувати графіки функцій :

1. $\cos x+\frac{1}{2}\lvert\cos 2x\rvert$.	**2.** $\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x$.	**3.** $x\lvert\sin x\rvert$.
4. $x+\cos x$.	**5.** $\lvert x\rvert\cos x$.	**6.** $x^3\sin x$.
7. $e^{-x}\cos 2x$.	**8.** $e^{-x}\sin 3x$.	**9.** $2shx+chx$.
10. $x\cdot sign(\cos x)$.	**11.** $\sin x\cdot sign(\cos x)$.	**12.** $x^2(1-x^2)$.
13. $shx\cdot chx$.	**14.** $thx\cdot\sin x$.	**15.** $\lvert x\rvert\cos\pi x$.
16. $1/(1+x^2)$.	**17.** $x/(1+x^2)$.	**18.** $arctg\,x/(1+x^2)$.
19. $\sin x/(1+x^2)$.	**20.** $[x]sign(tgx)$.	**21.** $1/\ln x$.

22. $x+\sqrt{x}$. **23.** $arctgx \cdot sign(\sin x)$. **24.** $arctgx + x$.

25. $\sqrt[3]{x}|\sin x|$. **26.** $\sqrt[3]{x^2}\cos x$. **27.** $\cos x/|x|$.

28. $1+2\sqrt{x}+1/x^2$. **29.** $x\sqrt{x}-[x\sqrt{x}]$. **30.** $\sqrt{x}\cdot sign(\sin x)$.

$$shx=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\qquad chx=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\qquad thx=\frac{shx}{chx},\qquad cthx=\frac{chx}{shx}.$$

$$signx=\begin{cases}-1, & якщо\ \ x<0;\\ 0, & якщо\ \ x=0;\\ 1, & якщо\ \ x>0.\end{cases}$$

$[x]$ – ціла частина x, тобто якщо $x=n+r$, де n - ціле число і $0\le r<1$, то $[x]=n$.

1.2. Побудова графіка функції $y=A\cdot f(ax+b)+B$

Нехай відомий графік функції $y=f(x)$. Розглянемо частинні випадки побудови графіка функції $y=A\cdot f(ax+b)+B$.

1. $y=f(x+b)$.

Якщо функція $y=f(x)$ набуває значення y_0 при x_0, то функція $f(x+b)$ набуває це саме значення в точці $x+b=x_0$, тобто в точці $x=x_0-b$. Внаслідок цього графік функції $y=f(x+b)$ можна побудувати паралельним зсувом вздовж додатного напрямку осі OX графіка $y=f(x)$ на величину b, якщо $b<0$, і в протилежному напрямку, якщо $b>0$.

2. $y=f(ax)$, $a\neq 0$.

Якщо точка (x_0,y_0) належить графіку функції $y=f(x)$, тобто $y_0=f(x_0)$, то точка $\left(\frac{x_0}{a},y_0\right)$ належить графіку функції $y=f(ax)$. Внаслідок цього для побудови графіка функції $y=f(ax)$ достатньо виконати стиск (при $a>0$), розтяг (при $0<a<1$) вздовж осі OX графіка функції $y=f(x)$. Якщо $a<0$, можна спочатку побудувати графік функції $y=f(|a|x)$, а після цього відобразити його симетрично відносно осі OY.

3. $y=f(x)+B$.

4. $y = A \cdot f(x)$.

Випадки 3 і 4 розглядалися в пункті 3.1.

Графік функції $y = A \cdot f(ax+b)+B$ будуємо послідовним перетворенням графіка функції $y = f(x)$ наступним чином.

1. Будуємо графік $y = f(x)$.

2. Виконуючи стиск або розтяг графіка $y = f(x)$ вздовж осі OX (в залежності від a), будуємо графік функції $y = f(ax)$.

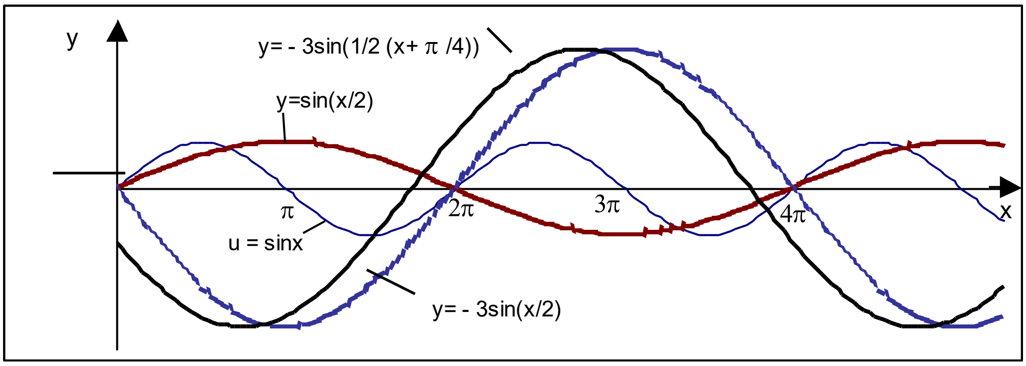
3. Змінюючи в A раз ординати графіка функції $y = f(ax)$, одержуємо графік функції $y = A \cdot f(ax)$.

4. Виконуючи паралельний зсув вздовж осі OX на величину $-\dfrac{b}{a}$, із попереднього графіка одержуємо графік функції $y = A \cdot f(ax+b)$.

5. Після того, як зробимо зсув на величину B вздовж осі OY, одержимо необхідний графік функції $y = A \cdot f(ax+b)+B$.

Зауваження. Графік функції $y = A \cdot f(ax+b)+B$ можна будувати за допомогою перетворення координат.

На мал. 1.2 зображений графік функції $y = -3\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ за наведеною схемою. Внаслідок того, що функція періодична з періодом $T = 4\pi$, графік побудований тільки на періоді, а після цього продовжений на всю область існування.



Мал. 1.2

<u>Завдання 1.2.</u> Знаючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції $y = A \cdot f(ax+b)+B$, якщо

	$f(x)$	A	B	*a*	*b*		$f(x)$	A	B	*a*	*b*
1.	$x^{3/2}$	2	-3	1/3	-1	**2.**	$\arcsin x$	4	1	-1/2	2
3.	$\sqrt{x}$	2	-4	1/2	3	**4.**	shx	-2	1	-2	1
5.	$\arccos x$	-3	3	1/2	-2	**6.**	e^x	1/3	-2	-2	4
7.	tgx	-1	1	1/2	2	**8.**	thx	1	-1	2	-1
9.	$\lg x$	2	1	2	4	**10.**	$arctgx$	-2	π	-1/2	1
11.	$x^{2/3}$	2	-1	3	1	**12.**	chx	-1	4	2	-1
13.	$\arcsin x$	-3	4	1/2	2	**14.**	$\arccos x$	3	-6	-1/3	2
15.	$\sqrt{x}$	-3	2	2	-4	**16.**	$\lg x$	3	-2	1/2	3
17.	shx	1/2	0	-2	3	**18.**	e^x	-1/2	3	1/3	-1
19.	$arcctgx$	2	--	2	2	**20.**	$arctgx$	2	--	1/2	-1
21.	$x^{4/3}$	-2	-3	2	-4	**22.**	$\lg x$	-2	4	-1/2	-1
23.	thx	-1	1	-1	1	**24.**	$arcctgx$	-1	$\pi/2$	-1	2
25.	$cthx$	1/2	0	-1	-1	**26.**	$\arccos x$	2	2	-2	4
27.	$\sqrt{x}$	2	-2	1/3	-1	**28.**	$\arcsin x$	3	-2	1/4	1
29.	$\lg x$	-1	3	2	1	**30.**	e^x	-1	2	2	-4

1.3. Побудова графіка найпростіших дробово-раціональних функцій

<u>Завдання 1.3.</u> Використовуючи результати попередніх підрозділів, побудувати графік функції

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1 x + b_1}, \quad a_1 \neq 0 \ ,$$

попередньо зводячи її до вигляду $y = kx + m + \dfrac{n}{x - x_0}$, якщо :

	A	***b***	***c***	***a₁***	***b₁***		***a***	***b***	***c***	***a₁***	***b₁***
1.	0	1	-1	2	3	**2.**	1	-1	2	3	1
3.	-2	1	0	-2	4	**4.**	0	2	1	1	-2
5.	2	0	-1	2	1	**6.**	-1	2	0	1/2	-1

7.	0	1/2	1	-1	2	**8.**	1/3	1	0	2	-1
9.	½	0	-1	3/2	1	**10.**	-1/3	1	2	3	0
11.	2	0	-1	4	2	**12.**	0	3	2	-6	3
13.	-1	2	3	2	0	**14.**	-3	0	2	6	1
15.	2	1	0	-1	3	**16.**	-1	3	2	2	-2
17.	½	0	1	-1	2	**18.**	-2	1	0	-2	1
19.	1/3	0	1	2	-1	**20.**	0	3	2	1/2	1
21.	2	1	0	-3	1	**22.**	-1	-3	1	2	0
23.	0	3	2	-3	2	**24.**	1	0	4	2	-1
25.	2	-1	0	3	4	**26.**	3	0	4	-3	2
27.	-1	3	1	2	0	**28.**	0	2	1	-4	3
29.	½	1	0	1	2	**30.**	-1/2	2	-1	2	-3

1.4. Область визначення складеної функції

Нехай маємо складену функцію $y = F(\varphi(x))$. Під час знаходження природної області визначення вимагається, щоб значення функції $\varphi(x)$ (область значень внутрішньої функції) належали області визначення функції $F(\varphi)$ (зовнішній функції) : $E_\varphi \subset D_F$.

Приклад. Знайти область визначення функції, заданої виразом

$$y = \log_2(\log_3 x).$$

Тут внутрішньою функцією є функція $\log_3 x$, а зовнішньою - $y = \log_2 \varphi$. Шукана функція є суперпозицією двох функцій: $y = \log_2 \varphi$ і $\varphi = \log_3 x$. Оскільки $\log_2 \varphi$ визначена тільки при $\varphi > 0$, то $E_\varphi \subset D_F$ тільки при виконанні умови $\log_3 x > 0$, тобто при $x > 1$. Отже, $D_F = \{x | x > 1\}$.

Завдання 1.4. Знайти область визначення функцій, заданих наступними виразами :

1. $\lg\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$. **2.** $\arcsin\frac{2x}{1+x}$.

3. $\sqrt{x}/\sin\pi x$. **4.** $\arccos(2\sin x)$.

5. $\lg[\cos(\lg x)]$.

6. $(x+|x|)\sqrt{x\sin^2\pi x}$.

7. $ctg\pi x+\arccos 2^x$.

8. $\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$.

9. $\sqrt[4]{\lg(tgx)}$.

10. $\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\sin 3x}$, $x\in[0,2\pi]$.

11. $\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

12. $\lg(1-2\cos x)$.

13. $(3x-1)/(x^2-5x+4)$.

14. $\arccos\dfrac{x-3}{5}-\lg(3x+6)$.

15. $1/\sqrt{1-x^2}+\lg(x-1)$.

16. $(x+1)/\sqrt{x^2-7x+12}-1/\sqrt[3]{x^3+3x}$.

17. $\sqrt[4]{\sin\sqrt{x}}$.

18. $\log_{x-1}x^2$.

19. $\log_{\sin x}(x+3)$.

20. $\log_2\log_2\log_2 x$.

21. $\sqrt{\log_2(1+\sin x)}+1\Big/\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

22. $\arccos(x^2-3x+1)+tg2x$.

23. $\log_3\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-1)$.

24. $\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{2x-3}{x+1}}$.

25. $\sqrt{64-x^2}+\sqrt{\sin x}$.

26. $\log_2[\cos(\log_8 x)]$.

27. $\sqrt{6+5x-x^2}+\sqrt{tgx}$.

28. $arctg[tg(\sin x)]$.

29. $\arccos(2\sin x)+\log_2(\log_2 x)$.

30. $\arccos 2^x+tg\pi x$.

1.5. Графік складеної функції

Необхідно побудувати графік функції $y=F[\varphi(x)]$ за відомими графіками функцій $y=F(x)$ і $y=\varphi(x)$. Для складеної функції вимагається виконання умови належності значення функції $\varphi(x)$ (внутрішньої) області визначення функції $F(x)$ (зовнішньої): $E_\varphi\subset D_F$.

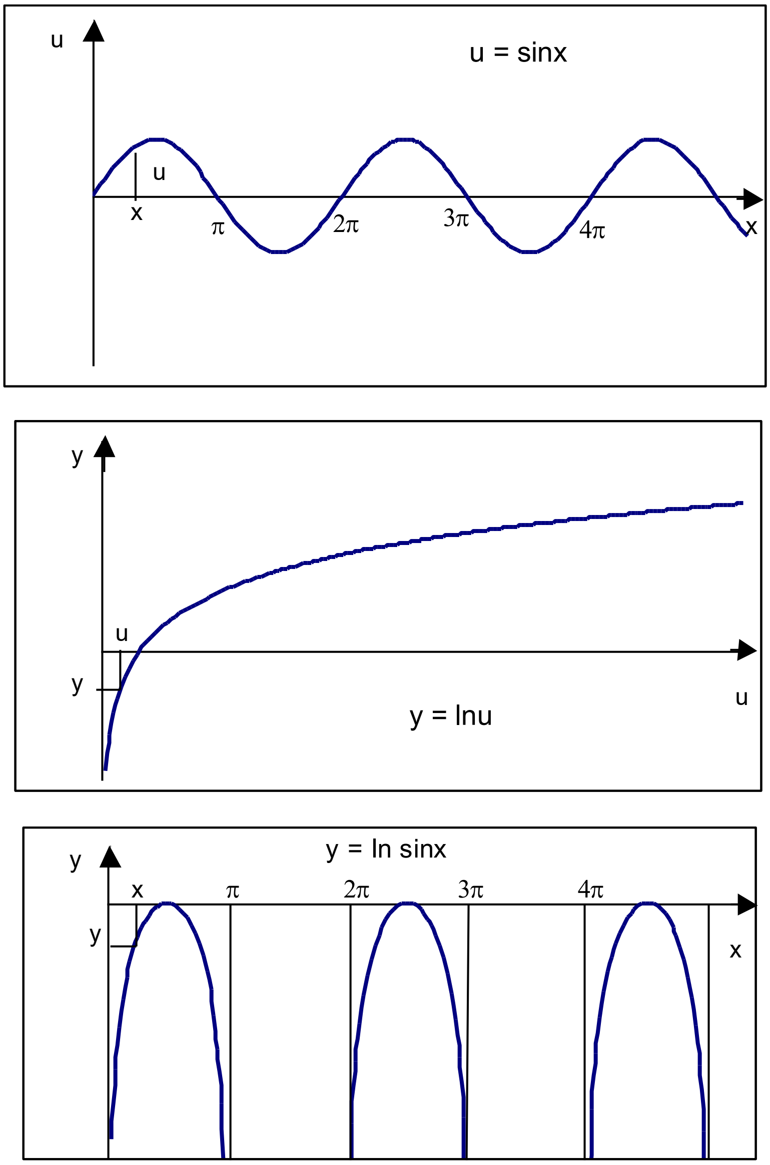
Функцію $y=F[\varphi(x)]$ зображуємо у вигляді

$$\begin{aligned} u&=\varphi(x),\\ y&=F(u). \end{aligned} \tag{1.5}$$

У системі координат XOU будуємо графік функції $u=\varphi(x)$, а в системі координат UOY - графік функції $y=F(u)$. Масштабні одиниці по осі OU в обох системах координат повинні бути рівними. Будуємо систему координат XOY, причому масштабна одиниця вздовж осі OX повинна збігатися з масштабною одиницею вздовж осі OX в системі XOU, а масштабна одиниця вздовж осі OY - з масштабною одиницею вздовж осі OY у системі UOY.

Після цих попередніх побудов будуємо графік функції $y = F[\varphi(x)]$. Для $x_0 \in D_\varphi$ за графіком функції $u = \varphi(x)$ знаходимо $u_0 = \varphi(x_0)$, а потім за u_0 визначаємо $y_0 = F(u_0)$ за графіком функції $y = F(u)$. Отже, взятому значенню x_0 відповідає значення y_0 функції $y = F[\varphi(x)]$.

На мал. 1.3 побудовано графік функції $y = \ln \sin x$.



Мал. 1.3

Завдання 1.5. Побудувати графіки функцій:

1. $\ln\cos x$.	**2.** $\ln\sin x$.	**3.** $arctg\dfrac{1-x}{x+1}$.
4. $arcctg\ \ln x$.	**5.** $arctg\dfrac{2x}{1+x^2}$.	**6.** $\ln(x^2-5x+6)$.
7. $arcctg\dfrac{x+1}{x-1}$.	**8.** $arcctg\,(\pi\sin x)$.	**9.** $arctg\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)$.
10. $\ln\dfrac{2x}{x+1}$.	**11.** $tg\left(\dfrac{\pi}{4}\sin x\right)$.	**12.** $ctg\dfrac{\pi x}{1+x^2}$.
13. $\ln tgx$.	**14.** $\ln ctgx$.	**15.** $e^{\cos x}$.
16. $e^{\sin x}$.	**17.** e^{tgx}.	**18.** e^{ctgx}.
19. $\arcsin\dfrac{1}{1+x^2}$.	**20.** $\arcsin\left(\dfrac{1}{\pi}arcctgx\right)$.	**21.** $\arcsin(thx)$.
22. $\arcsin(\cos x)$.	**23.** $\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.	**24.** $\arccos(thx)$.
25. $\arccos\left(\dfrac{1}{\pi}arctgx\right)$.	**26.** $th(\sin x)$.	**27.** $th(\cos x)$.
28. $sh(tgx)$.	**29.** $sh(ctgx)$.	**30.** $ch(ctgx)$.

2. ГРАНИЦІ

2.1. Послідовність

Означення. Нехай кожному натуральному n поставлено у відповідність деякий елемент $a_n \in Q$, де Q - множина.

Сукупність елементів a_n, $n \in \mathrm{N}$, називається послідовністю, a_n називається елементом цієї послідовності, а число n - його номером.

Якщо Q - числова множина, то $\{a_n\}$ - числова послідовність; якщо Q - множина функцій, то $\{a_n(x), x \in R\}$ - функціональна послідовність.

Числову послідовність можна розглядати як функцію цілочислового аргументу: кожному додатному значенню $x = n$ відповідає деяке значення функції $f(x) = f(n) = a_n$.

Завдання 2.1. Записати перші 10 членів послідовностей:

1. $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, $a_1=1$, $a_2=1$ (числа Фібоначчі).

2. $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$, $a_1=2$, $a_2=3$.

3. $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$, $a_1=0$, $a_2=1$.

4. $a_{n+2}=5a_{n+1}-3a_n$, $a_1=1$, $a_2=1$.

5. $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$, $a_1=2$, $a_2=3$.

6. $L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-n^2L_{n-1}(x)$, $L_0(x)=1$, $L_1(x)=-x+1$.

(многочлени Лагерра).

7. $H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$, $H_0(x)=1$, $H_1(x)=2x$.

(многочлени Ерміта).

8. $(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$, $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$.

(многочлени Лежандра).

9. $2(n+1)(n+2)(2n+1)P_{n+1}^{(0,1)}(x)=2(n+1)\left[(2n+1)(2n+3)x-1\right]P_n^{(0,1)}(x)-$

$-2n(n+1)(2n+3)P_{n-1}^{(0,1)}(x)$, $P_0^{(0,1)}(x)=1$, $P_1^{(0,1)}(x)=x-\dfrac{1}{4}$.

(многочлени Якобі).

10. $2(n+1)(n+2)(2n+1)P_{n+1}^{(0,1)}(x)=2(n+1)\left[(2n+1)(2n+3)x+1\right]P_n^{(0,1)}(x)-$

$-2n(n+1)(2n+3)P_{n-1}^{(0,1)}(x)$, $P_0^{(0,1)}(x)=1$, $P_1^{(0,1)}(x)=x+\dfrac{3}{4}$.

(многочлени Якобі).

11. $(n+1)(n+3)P_{n+1}^{(1,1)}(x)=(2n+3)(n+2)xP_n^{(1,1)}(x)-(n+1)(n+2)P_{n-1}^{(1,1)}(x)$,

$P_0^{(1,1)}(x)=1$, $P_1^{(1,1)}(x)=2x+\dfrac{1}{4}$. (многочлени Якобі).

12. $(n+4)(2n+3)P_{n+1}^{(2,1)}(x)=\left[(2n+3)(2n+5)x+3\right]P_n^{(2,1)}(x)-$

$-(n+1)(2n+5)P_{n-1}^{(2,1)}(x)$, $P_0^{(2,1)}(x)=1$, $P_1^{(2,1)}(x)=2x+\dfrac{3}{4}$.

(многочлени Якобі).

13. $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$, $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$.

(многочлени Чебишева).

14. $G_{n+1}^1(x) = 2G_n^1(x) - G_{n-1}^1(x)$, $\quad G_0^1(x) = 1$, $G_1^1(x) = 2x$.

(многочлени Гогенбауера).

15. $(n+1)G_{n+1}^2(x) = 2(n+2)G_n^2(x) - (n+3)G_{n-1}^2(x)$,

$G_0^2(x) = 1$, $G_1^2(x) = 4x$. (многочлени Гогенбауера).

2.2. Границя числової послідовності

<u>Означення 1.</u> Число a називається границею послідовності $\{a_n, n = 1,2,...\}$, якщо для будь якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер N (залежний від ε), що для всіх номерів $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

При цьому записують $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

<u>Приклад.</u> Знайти $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1-n^2}{n^2+2}$ та визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$.

<u>Розв'язування.</u> $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1-n^2}{n^2+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^2} - 1}{1 + \frac{2}{n^2}} = -1.$

Для даної послідовності нерівність (2.1) має вигляд

$$\left|\frac{1-n^2}{n^2+2} - (-1)\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{3}{n^2+2}\right| < \varepsilon \iff n^2 + 2 > \frac{3}{\varepsilon} \iff$$

$$\iff n^2 > \frac{3}{\varepsilon} - 2 \iff n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 2}.$$

Одержали вираз, який дозволяє знайти всі номери елементів послідовності, для яких виконується основна нерівність (2.1).

Номер елемента послідовності, починаючи з якого виконується нерівність, знаходять з визначення цілої частини числа.

Означення 2. Якщо b - додатне число, то ціле число, яке позначається $[b]$, називається цілою частиною числа b, якщо виконані умови

$$b \geq [b],$$
$$b < [b] + 1.$$

Згідно з цим визначенням остаточну нерівність в даному прикладі можна записати у вигляді

$$n > \left[\sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 2}\right].$$

Тепер права частина цієї нерівності є ціле число, а отже, можна покласти $N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{3}{\varepsilon} - 2}\right]$.

Завдання 2.2. Знайти $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ та визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо:

1. $a_n = (3 - n^2)/(1 + 2n^2)$.

2. $a_n = (4n^2 + 1)/(3n^2 + 2)$.

3. $a_n = -5n/(n+1)$.

4. $a_n = (n+1)/(1-2n)$.

5. $a_n = (2n+1)/(3n-5)$.

6. $a_n = -(7+n)/(4+2n)$.

7. $a_n = (3n-5)/(2n+1)$.

8. $a_n = (2 - n^2)/(1 + 3n^2)$.

9. $a_n = (1 - 2n^2)/(3 + n^2)$.

10. $a_n = (1 - n^2)/(2 + 2n^2)$.

11. $a_n = (2 - 3n^2)/(1 + n^2)$.

12. $a_n = -3n^2/(2 - n^2)$.

13. $a_n = 3n^3/(n^3 - 1)$.

14. $a_n = (1 - 2n^2)/(n^2 + 2)$.

15. $a_n = (3n^3 - 4)/(n^3 + 1)$.

16. $a_n = n/(3n+1)$.

17. $a_n = 2n/(3-4n)$.

18. $a_n = (1-2n)/(n+1)$.

19. $a_n = (1+3n)/(6-n)$.

20. $a_n = 2n^3/(n^3 - 2)$.

21. $a_n = (1+2n)/(4-n)$.

22. $a_n = -3n/(1-n)$.

23. $a_n = (1-3n)/(n+2)$.

24. $a_n = (1 - 2n^2)/(n^2 + 3)$.

25. $a_n = n/(3n-1)$.

26. $a_n = 2n/(1-5n)$.

27. $a_n = -(1+n)/(3-2n)$.

28. $a_n = (4+n)/(1-3n)$.

29. $a_n = (19+3n)/(1-n)$.

30. $a_n = (5n+1)/(1-2n)$.

2.3. Точні верхня та нижня межі множини. Верхня та нижня границі

Розглянемо довільну множину E дійсних чисел x. Позначимо через M (m) найбільше (найменше) число, яке належить цій множині. В цьому випадку записують :

$$M = \max E = \max_{x \in E} x,$$

$$m = \min E = \min_{x \in E} x.$$

Означення 1. Число M (скінченне) називається точною верхньою межею множини E, якщо для нього виконуються умови:

1) $x \le M \quad \forall x \in E$;

2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $x_1 \in E$ таке, що виконуються нерівності $M - \varepsilon < x_1 \le M$.

Позначимо $\sup E = \sup\limits_{x \in E} x = M$.

Означення 2. Число m (скінченне) називається точною нижньою межею множини E, якщо для нього виконуються умови:

1) $x \le m \quad \forall x \in E$;

2) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $x_1 \in E$ таке, що виконуються нерівності $m \le x_1 < m + \varepsilon$.

Очевидно, якщо в множині E дійсних чисел міститься найбільше (найменше) число, тобто існує $\max E$ ($\min E$), то $\sup E = \max E$ ($\inf E = \min E$).

Якщо задана довільна послідовність дійсних чисел $\{x_n\}$, то можна розглядати породжувані нею різні збіжні підпослідовності, границі яких називаються частковими границями послідовності $\{x_n\}$.

Означення 3. Верхньою границею послідовності $\{x_n\}$ називається число M (скінченне, $+\infty$ або $-\infty$), яке має такі властивості:

1. Існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ послідовності $\{x_n\}$, яка збігається до M:

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = M,$$

2. Для будь-якої збіжної підпослідовності $\{x_{n_k}\}$ послідовності $\{x_n\}$

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} \le M ,$$

Верхню границю послідовності $\{x_n\}$ позначають одним з таких символів:

$$\overline{\lim} x_n ; \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n .$$

<u>Означення 4.</u> Нижньою границею послідовності $\{x_n\}$ називається число m (скінченне, $+\infty$ або $-\infty$), яке має такі властивості:

1. Існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ послідовності $\{x_n\}$, яка збігається до m:

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = m ,$$

2. Для будь-якої збіжної підпослідовності $\{x_{n_k}\}$ послідовності $\{x_n\}$

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} \ge m .$$

Нижню границю змінної x_n позначають одним з символів:

$$\underline{\lim} x_n ; \qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n .$$

<u>Приклад.</u> Нехай маємо послідовність $\{x_n\}$, кожен член якої можемо записати як функцію n:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \cos\frac{n\pi}{4}, \quad n = 1,2,\ldots .$$

Знайти $\max\{x_n\}$, $\min\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

<u>Розв'язування.</u> Запишемо скінченне число перших членів послідовності:

$$x_1 = -2+\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0, \quad x_3 = -\left(\frac{4}{3}\right)^3 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 - 1,$$

$$x_5 = -\left(\frac{6}{5}\right)^5 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_6 = \left(\frac{7}{6}\right)^6 + 0, \quad x_7 = -\left(\frac{8}{7}\right)^7 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_8 = \left(\frac{9}{8}\right)^8 + 1.$$

З аналізу перших членів послідовності видно, що її можна розбити на 8 збіжних підпослідовностей $\{x_{8n-k}\}$, $k = 0,1,\ldots 7$:

$$\lim_{n\to\infty}\{x_{8n-7}\} = -e + \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty}\{x_{8n-6}\} = e, \qquad \lim_{n\to\infty}\{x_{8n-5}\} = -e - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\{x_{8n-4}\} = e-1, \qquad \lim_{n\to\infty}\{x_{8n-3}\} = -e-\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty}\{x_{8n-2}\} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\{x_{8n--1}\} = -e+\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty}\{x_{8n-0}\} = e+1.$$

Тоді $\displaystyle \underline{\lim}_{n\to\infty}\{x_n\} = -e-\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\{x_n\} = e+1,$

$$\sup_n\{x_n\} = e+1, \qquad \inf_n\{x_n\} = -e-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\max\limits_n\{x_n\}$ і $\min\limits_n\{x_n\}$ не існують.

<u>Завдання 2.3.</u> Для кожної з послідовностей $\{x_n\}_{n\in N}$ знайти $\max\{x_n\}$, $\min\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

1. $x_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)\cdot(-1)^n$. **2.** $x_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2}-\dfrac{1}{n}$.

3. $x_n = \dfrac{n+2}{n-1}\cdot\sin\dfrac{n\pi}{3}$, $n\ge 2$. **4.** $x_n = n\cdot\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

5. $x_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}\Big/\lg n$, $n>1$. **6.** $x_n = n\cdot\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

7. $x_n = \dfrac{n+2}{n-1}\cdot\cos\dfrac{n\pi}{3}$. **8.** $x_n = \dfrac{n+1}{n}\cdot\cos^2\dfrac{n\pi}{4}$.

9. $x_n = \dfrac{2^n+(-2)^n}{3^n}$. **10.** $x_n = \dfrac{n+1}{n}\cdot\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$.

11. $x_n = \dfrac{1}{n}\cdot\cos\dfrac{n\pi}{2}$. **12.** $x_n = \dfrac{n+1}{n+2}\cdot\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$.

13. $x_n = \dfrac{n}{n+1}$. **14.** $x_n = \dfrac{n-1}{n}$.

15. $x_n = (-1)^{n-1}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$. **16.** $x_n = 1+\dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

17. $x_n = 1+2(-1)^{n+1}+3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. **18.** $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cdot\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

19. $x_n = -n\left[2+(-1)^n\right]$. **20.** $x_n = n\cdot\cos n\pi$.

21. $x_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cdot \cos\frac{2n\pi}{3}$.

22. $x_n = 1 + n \cdot \sin\frac{n\pi}{2}$.

23. $x_n = \frac{n}{n+1} \cdot \sin^2\frac{n\pi}{4}$.

24. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$.

25. $x_n = (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$.

26. $x_n = \frac{3^n + (-3)^n}{4^n}$.

27. $x_n = \frac{n}{n+2} \cdot \cos\frac{n\pi}{2}$.

28. $x_n = \sin^2\frac{n\pi}{2} + \frac{(-1)^n}{n}$.

29. $x_n = (-1)^n\left(3 + \frac{4}{n}\right)$.

30. $x_n = \frac{1}{n+10}$.

2.4. Границя функції

Означення . Число A називається границею функції $f(x)$ в точці $x = x_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$ (яке залежить від ε і x_0), що для всіх x, які задовольняють умову $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Границя функції позначається $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Геометрично нерівність $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, визначає δ-окіл точки x_0 на осі OX, а нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ - ε-окіл точки A на осі OY. Для графіка функції ці нерівності означають наступне: значення функції в будь-якій точці δ-околу точки x_0 попадає в ε-окіл точки A.

Нерівність $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, що забезпечує виконання основної нерівності $|f(x) - A| < \varepsilon$, у визначенні границі функції характеризує ті значення x, при яких значення функції $f(x)$ дає ε-наближене значення числа A.

Функція $\delta = \delta(\varepsilon)$ - найважливіша характеристика границі функції при $x \to x_0$. Щоб її знайти, необхідно попередньо визначити границю функції.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то, склавши нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ (у загальному вигляді, не надаючи ε конкретних значень) і розв'язавши його, одержимо функцію $\delta(\varepsilon)$.

Приклад. Знайти $\delta(\varepsilon)$ для границі функції $\dfrac{2x^2-8x+6}{x-3}$ при $x\to 3$.

Розв'язування. У точці $x=3$ функцію не визначено. При $x\neq 3$

$$f(x)=\frac{2(x-3)(x-1)}{x-3}=2(x-1),$$

і всі її значення збігаються зі значеннями функції $\varphi(x)=2x-2$.

Звідси

$$\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)(x-1)}{x-3}=\lim_{x\to 3}2(x-1)=4.$$

Тому основна нерівність має вигляд $\left|\dfrac{2(x-3)(x-1)}{x-3}-4\right|<\varepsilon$

або $2|x-3|<\varepsilon \;\Leftrightarrow\; |x-3|<\dfrac{\varepsilon}{2} \;\Rightarrow\; \delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Відмітимо наступні факти.

1. Границя функції не залежить від значення функції в точці x_0; функція може бути зовсім не визначена в точці x_0.

2. Функція повинна бути визначена в δ-околі точки x_0.

3. В означенні границі функції умова $x\to x_0$ (для послідовності $n\to\infty$) означає процес (рух), при якому аргумент функції x при своїй зміні необмежено наближається до числа x_0 (для послідовності номер n послідовно змінює натуральні значення в порядку їх зростання).

Завдання 2.4. Довести, що $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ (знайти $\delta(\varepsilon)$ за заданим ε):

1. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{x+1/2}=-4$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=-1$.

3. $\lim\limits_{x\to -1}(3x+4)=1$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{x+2}=\dfrac{5}{4}$.

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-9}{x^2+4}=-\dfrac{5}{8}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x)=4$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}=-2$.

8. $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-4)=5$.

9. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}=8$.

10. $\lim\limits_{x\to 2}(1-x^2)=-3$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+3}{x-2}=9$.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=-1$.

13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-4}{x+1}=-\dfrac{2}{3}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2)=1$.

15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x-6}{2x+1}=\dfrac{4}{5}$.

16. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}=-3$.

17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-4}{2x-3}=-1$.

18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=\dfrac{5}{3}$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4-x}{x+1}=\dfrac{3}{2}$.

20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-1}{x+1}=1$.

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+4}{x}=1$.

22. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x-7}{x-2}=8$.

23. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}=1$.

24. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\sqrt{x+1}-2\right)=1$.

25. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-5}{x-2}=1$.

26. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\sqrt{3x+1}-2\right)=2$.

27. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x-6}{3x+1}=\dfrac{4}{7}$.

28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{1-2x}=-5$.

29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}=5$.

30. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{4x+5}-1\right)=2$.

2.5. Невласні границі

Для описання значень функції при довільно великих за абсолютною величиною значеннях аргументу вводиться поняття невласних границь.

Перш за все поповнимо множину дійсних чисел двома невласними числами, позначеними $+\infty$ і $-\infty$, згідно з наступними правилами.

Для будь-якого дійсного числа a

1.1. $a+(+\infty)=+\infty+a=+\infty$.

1.2. $a+(-\infty)=-\infty+a=-\infty$.

1.3. $+\infty+(+\infty)=+\infty$.

1.4. $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$.

2.1. $a(+\infty)=\begin{cases}+\infty, & \text{якщо } a>0;\\ -\infty, & \text{якщо } a<0;\\ \text{не}\quad \text{визначено}, & \text{якщо } a=0.\end{cases}$

2.2. $a(-\infty)=\begin{cases}-\infty, & \text{якщо } a>0;\\ +\infty, & \text{якщо } a<0;\\ \text{не}\quad \text{визначено}, & \text{якщо } a=0.\end{cases}$

2.3. $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$.

2.4. $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$.

2.5. $(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$.

3.1. $a<+\infty$.

3.2. $a>-\infty$.

3.3. $-\infty<+\infty$.

Замітимо, що операції $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, $0\cdot(+\infty)$, $0\cdot(-\infty)$ і $\frac{\infty}{\infty}$ не визначені, а тому не мають сенсу. Невласні границі (тобто границі, коли граничне значення аргументу функції або значення функції є невласним числом) знаходимо таким чином:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A,\quad A\in R,$$

означає, що для будь-якого додатного числа $\varepsilon>0$ існує таке $M>0$, що як тільки $x>M$, то $|f(x)-A|<\varepsilon$;

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A,\quad A\in R,$$

означає, що для будь-якого додатнього числа $\varepsilon>0$ існує таке $M>0$, що як тільки $x<-M$, то $|f(x)-A|<\varepsilon$;

Далі невласна границя

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty,\quad x_0\in R,$$

означає, що для будь-якого $M>0$ знайдеться $\delta(M)$ таке, що як тільки $|x-x_0|<\delta$, то $f(x)>M$;

Всі інші невласні границі одержуємо комбінацією цих визначень.

Наприклад, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ означає, що для будь-якого $M>0$ знайдеться число $N>0$ таке, що як тільки $x>N$, то $f(x)<-M$.

Приклад. Виходячи з означення довести, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=2.$$

Розв'язування. Нехай ε - довільне додатне число. Треба довести, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x|>M$, буде виконуватися нерівність $\left|\frac{2x-3}{x}-2\right|<\varepsilon$. Якщо $|x|>M$, то

$$\left|\frac{2x-3}{x}-2\right|=\frac{3}{|x|}<\frac{3}{M}.$$

Отже, для виконання нерівності $\left|\frac{2x-3}{x}-2\right|<\varepsilon$ достатньо знайти M з умови $\frac{3}{M}=\varepsilon$, тобто $M=\frac{3}{\varepsilon}$.

Таким чином, для довільного $\varepsilon>0$ знайдене таке M, що з нерівності $|x|>M$ випливає нерівність $\left|\frac{2x-3}{x}-2\right|<\varepsilon$, тобто доведено, що $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}=2$.

2.6. Знаходження границь

а) Підстановка граничних значень аргументу

Будемо розглядати функції (змінні), які залежать від аргументу x (зокрема, $x=n$) при $x\to a$ або $x\to\infty$. Записуючи границю, ми не будемо писати ні $x\to a$, ні $x\to\infty$, маючи на увазі те або інше. Наведемо результати, необхідні для знаходження границь.

$$\lim C=C, \quad C-const; \tag{2.2}$$

$$\lim Cf(x)=C\lim f(x), \quad C-const; \tag{2.3}$$

якщо $\lim\varphi(x)$ і $\lim\psi(x)$ існують, то

$$\lim[\varphi(x)\pm\psi(x)]=\lim\varphi(x)\pm\lim\psi(x), \tag{2.4}$$

$$\lim\varphi(x)\cdot\psi(x)=\lim\varphi(x)\cdot\lim\psi(x), \tag{2.5}$$

$$\lim\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\lim\varphi(x)}{\lim\psi(x)}, \qquad \lim\psi(x)\neq 0, \tag{2.6}$$

$$\lim[\varphi(x)]^{\psi(x)}=[\lim\varphi(x)]^{\lim\psi(x)}. \tag{2.7}$$

Враховуючи поняття невласних границь, зазначимо, що

$$\lim \frac{C}{f(x)} = \infty, \quad \text{якщо} \quad \lim f(x) = 0; \tag{2.8}$$

$$\lim \frac{C}{f(x)} = 0, \quad \text{якщо} \quad \lim f(x) = \infty; \tag{2.9}$$

$$\lim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0, \quad \text{якщо} \quad \lim \varphi(x) = 0 \ \text{ і } \ \lim \psi(x) = \infty. \tag{2.10}$$

Зазначимо, що для всіх основних елементарних функцій в будь-якій точці їх області визначення є правильною рівність

$$\lim f(x) = f(\lim x). \tag{2.11}$$

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x + 2}$.

Розв'язування. З формул (2.2)-(2.6) випливає, що

$$\lim_{x\to 1} x^2 = \lim_{x\to 1} x \cdot x = \lim_{x\to 1} x \cdot \lim_{x\to 1} x = 1; \quad \lim_{x\to 1} 5x = 5 \cdot \lim_{x\to 1} x = 5 \cdot 1 = 5; \quad \lim_{x\to 1} 6 = 6;$$

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 5x + 6) = 1 - 5 + 6 = 2;$$

$$\lim_{x\to 1} 3x = 3 \cdot \lim_{x\to 1} x = 3 \cdot 1 = 3; \quad \lim_{x\to 1} 2 = 2; \quad \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x + 2) = 1 + 3 + 2 = 6 \neq 0;$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x + 2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 5x + 6)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2 + 3x + 2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Завдання 2.5. Знайти границі.

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{\sin \frac{\pi}{2}(2x - 1)}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}}{x^2 - 2x + 2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\lg x + x^2}{3x - 4}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x + 5}{tg \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x - 3}$.

6. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\cos \pi(x + 1)}{x^2 + 1}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x+2}{\arcsin\dfrac{x}{4}}$.

8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\arccos\dfrac{x}{2}}{\sqrt{3-x}+2}$.

9. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\lg(4-3x)}{\sqrt{x+6}+\sqrt[3]{3+x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+1+\arcsin x}{tgx-x+2}$.

11. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}{1+2\cos x}$.

12. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\lg x+\lg a}{x+a}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg\left[tg\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]}{\cos 3x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+a^{-x}}{2\cos 2x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} ctg\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos 2x$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{4}x}{1+\sqrt{x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x\cdot\sin\dfrac{x}{2}$.

18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{x}\cdot x$.

19. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x\cdot\cos 2x$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+tg^4 x}{5x^4-3x^2+2}$.

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 6x}{\sin 5x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32x^3-15x^2+x-1}}{\ln(x+1)+3x+2}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{arctgx+\dfrac{\pi}{2}}{\pi(x^2+1)}$.

24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2-1}$.

25. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{2\arccos x}{3+2x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{2x+1}\cdot(x+1)$.

27. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x-1}{2x+1}\cdot x$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x+2x}{2\cos x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(3x+1)-x}{arctg\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin\dfrac{x}{2}}{\arccos\left(\dfrac{x}{2}-1\right)}$.

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x+2}$.

Розв'язування. Відмітимо, що

$$\lim_{x\to -1}(x^2-5x+6)=12, \quad \text{а} \quad \lim_{x\to -1}(x^2 3x+2)=0.$$

Використовуючи результат (2.8), одержуємо, що

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x+2}=\infty.$$

Завдання 2.6. Обчислити границі.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{\ln\cos x}$.

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{3tg2x}{\sin x-\cos x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(2+x)}{\ln(2-x)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+2)ctg(x-2)$.

5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(tg2x+\sin 2x)$.

6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} tg\dfrac{3}{2}x+tg\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{x^2-3x+2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)}{x^2-4x+5}$.

9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{ctgx}{tg\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)}$.

10. $\lim\limits_{x\to \pi}\sin\dfrac{2}{3}x\cdot e^{\frac{1}{x-\pi}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1}\left(e^x+e^{\frac{1}{x-1}}\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to -2}\left[\ln(x+2)+ctg\,\pi x\right]$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x+2}{e^x-e^{-x}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg3x}{\cos x+2\sin x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1} arctgx\cdot\ln(1-x)$.

17. $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}\left[\ln(3x+2)-3x\right]$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{x}}+ctgx\right)$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x}{\cos 3x-\cos x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{2x^2+1}$.

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{arctgx}{x^2+1}$.

22. $\lim\limits_{x\to0}e^{2x}tg\dfrac{\pi}{2}(1+x)$.

23. $\lim\limits_{x\to0}\left(5x+\dfrac{1}{\arcsin x}\right)$.

24. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[tg3x+ctg(\pi-x)\right]$.

25. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\lg(1+x)}{\arcsin 3x}$.

26. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin x\cdot tg3x}{6x-\dfrac{\pi}{5}}$.

27. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\arcsin\dfrac{1}{2}}{ctg(x-1)}$.

28. $\lim\limits_{x\to-2}arcctg\dfrac{x}{2}\cdot e^{\frac{1}{x+2}}$.

29. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(ctg4x+\sin 2x)$.

30. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{tg2x}{\lg\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

У найпростіших випадках знаходження границі зводиться до підстановки в функцію граничного значення аргументу. Часто підстановка граничного значення аргументу приводить до невизначених виразів вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[0^{0}\right]$, $\left[\infty^{0}\right]$. Знаходження границі функції в цих випадках називають розкриттям невизначеності.

б) Безпосереднє розкриття невизначеності

Розкриття невизначеності досягається за допомогою перетворення виразу і переходу до границі.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x+2}$.

Розв'язування. Відмітимо, що $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-5x+6)=\infty$ (x^2 прямує до нескінченності швидше, ніж $5x$), $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+3x+2)=\infty$. Отже, маємо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для того щоб розкрити таку невизначеність, подамо чисельник і знаменник як добуток нескінченно великих і обмежених величин, тобто

$$x^2-5x+6=x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right),\qquad x^2+3x+2=x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right).$$

Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=1.$$

<u>Приклад 2.</u> Знайти $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}$.

<u>Розв'язування.</u> Безпосередня підстановка в даний вираз граничного значення аргументу приводить до невизначеного виразу вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Подамо чисельник і знаменник як добуток нескінченно малої величини (одна й та сама для чисельника і знаменника) і обмеженої, тобто

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3), \qquad x^2+3x+2=(x+2)(x+1).$$

Тут $x+2$ є нескінченно малою величиною при $x\to-2$. Тоді

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to-2}\frac{x+3}{x+1}=-1.$$

<u>Приклад 3.</u> Знайти $\lim\limits_{x\to15}\frac{\sqrt{x+1}-4}{15-x}$.

<u>Розв'язування.</u> У цьому випадку маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Щоб виділити одну і ту саму нескінченно малу величину в чисельнику і знаменнику, помножимо чисельник і знаменник на вираз, який є спряженим до чисельника. Тоді

$$\lim_{x\to15}\frac{\sqrt{x+1}-4}{15-x}=\lim_{x\to15}\frac{\left(\sqrt{x+1}-4\right)\left(\sqrt{x+1}+4\right)}{(15-x)\left(\sqrt{x+1}+4\right)}=\lim_{x\to15}\frac{x-15}{(15-x)\left(\sqrt{x+1}+4\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to15}\frac{1}{\sqrt{x+1}+4}=-\frac{1}{8}.$$

<u>Приклад 4.</u> Знайти $\lim\limits_{x\to1\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+5}\right)$.

<u>Розв'язування.</u> У цьому прикладі маємо невизначеність вигляду $[\infty-\infty]$. Перетворимо цей вираз таким чином, щоб одержаний вираз представляв невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ або $\left[\frac{0}{0}\right]$. Помножимо чисельник і знаменник на $x+\sqrt{x^2-x+5}$.

$$\lim_{x\to 1\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+5}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-x+5}\right)\left(x+\sqrt{x^2-x+5}\right)}{x+\sqrt{x^2-x+5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{x+\sqrt{x^2-x+5}}.$$

Одержимо невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{x+\sqrt{x^2-x+5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{5}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}=\frac{1}{2}.$$

<u>Завдання 2.7.</u> Обчислити границю числових послідовностей:

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}$.

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$.

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n+3}{(n^2-2)(1-2n)}$.

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3n+2}{4-n^2}$.

5. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n+3)}{n^3-1}$.

6. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)(n^2-4)}{n^3+2n^2+1}$.

7. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)(n+3)}{n^2-2n+1}$.

8. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$.

9. $\lim_{n\to\infty}\frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$.

10. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^3+2n^2+1}$.

11. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n^2+4}{3-6n^3}$.

12. $\lim_{n\to\infty}\frac{(5-2n^2)^3}{(n-2)(n^2+2)^3}$.

13. $\lim_{n\to\infty}\frac{(4n+2)(2-3n^2)}{4-5n^3}$.

14. $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^5-6n^4+3n^2-4}{(2n^2-2n+3)(n^3-6)}$.

15. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n^2+4n-2}{(n^2-2)(5-6n)}$.

16. $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^4-3n^2+2}{(3n^2-1)^2}$.

17. $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^3+2)(4-n^2)}{n^2(2n-6)^3}$.

18. $\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$.

19. $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$.

20. $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2-2)(4-2n)}{(5n-4)^3}$.

21. $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2-2)(4-n^3)}{(n-4)(2n^2-3)^2}$.

22. $\lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)(4-3n^2)}{(2n+1)^3}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-6n^2+9}{(3n^2-2n+1)^2}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(n-2)(n+6)}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-2n}{3n(n^2-6)}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)(7n^3-2)}{(2n^2-6n+2)^2}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^3-6)(5-2n)}{(2n-3)(n^2+2)}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-2)(3-5n^2)}{4n^2-3}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3}{(3-4n)^4}$.

Завдання 2.8. Обчислити границю числових послідовностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt[3]{n^3-5})n\sqrt{n}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}\right)\Big/\sqrt{n}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-1)}\right)$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4})$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2})$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3n+2}-n)$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^4-2}-\sqrt{n^4+3})$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-1)}\right)$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+5)}-n)$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt[3]{4-n^2})$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n-2}-n)$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+5)}-n)$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt{2-n^2})$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3})$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1})$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{5-8n^3}-2n)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-2)}\right)$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}\right)$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-2})$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\cdot n$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{n}(n-\sqrt[3]{n^3-1})$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}(\sqrt[3]{n^3-1}-\sqrt[3]{n^3+3})$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n+1}-n)\cdot n$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty} 3n(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+3})$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}\right)$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt[3]{2-n})$.

Завдання 2.9. Обчислити границю функцій:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x(x+1)}\right)$. **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x}-\sqrt{x(x+1)(x-3)}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^4+3}-\sqrt{x^4-2)}\right)$. **4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x(x-1)}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-8x+3}-x\right)$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt[3]{5+x^3}-\sqrt[3]{3+x^3}\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{5+8x^3}-2x\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{4-x^3}\right)$. **10.** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^3+8}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x^4+1)(x^2+1)}-\sqrt{x^6-1}\right)/x$. **12.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sqrt{x}\left(x-\sqrt[3]{x^3-5}\right)$. **14.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^5-9}-x\sqrt{x(x^2+3)}\right)/\sqrt{x}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x-24}-\sqrt{x^2+10x+9}\right)$. **16.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x\sqrt{x+3}}\right)$. **18.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{6x}-\sqrt{x+2\sqrt{x+3\sqrt{x}}}\right)$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+1)\sqrt{x-1}}-\sqrt{(x-1)\sqrt{x+1}}\right)$. **20.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}\right)$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+\sqrt[3]{\sqrt{x^3+1}-x^6}\right)$. **22.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x\sqrt{x^2-5}}-\sqrt{(x^2+5)\sqrt{x}}\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}}-x\right)$. **24.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^{12}+x^9+3}-x^3\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}\right)$. **26.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x-1)^3\sqrt{x+1}}-\sqrt[3]{x}\right)$. **28.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+11}\right)$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)$. **30.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)$.

Завдання 2.10. Обчислити границю функцій:

1. $\lim\limits_{x\to2}\left(\sqrt[3]{4x}-2\right)/\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}\right)$. **2.** $\lim\limits_{x\to1}\left(\sqrt{x}-1\right)/\left(x^2-1\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt[n]{1+x}-1\right)/x$. **4.** $\lim\limits_{x\to-8}\left(\sqrt{1-x}-3\right)/\left(2+\sqrt[3]{x}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to4}\left(\sqrt{1+2x}-3\right)/\left(\sqrt{x}-2\right)$. **6.** $\lim\limits_{x\to3}\left(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}\right)/\left(x^2-9\right)$.

7. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\sqrt[3]{x-6}+2\right)/\left(x^3+8\right)$. **8.** $\lim\limits_{x\to16}\left(\sqrt[4]{x}-2\right)/\left(\sqrt{x}-4\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\sqrt{9+2x}-5\right)/\left(\sqrt[3]{x}-2\right)$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}\right)/\left(x+2\sqrt[3]{x^4}\right)$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)/\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}\right)$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)/x$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)/\left(\sqrt{x^2-16}-4\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}\right)/x$.

15. $\lim\limits_{h\to 0}\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)/h$.

16. $\lim\limits_{x\to 5}\left(\sqrt{x-1}-2\right)/(x-5)$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-1\right)/x^2$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)/x^2$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-\sqrt{x}\right)/\left(\sqrt{x}-1\right)$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)/x^2$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)/\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2\right)/\left(x+x^2\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt[3]{9x}-3\right)/\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}\right)$.

24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)/\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\sqrt[3]{x-6}+2\right)/(x+2)$.

26. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x}-2\right)/\sqrt[3]{x^2-16}$.

27. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\sqrt{9+2x}-5\right)/\left(\sqrt[3]{x^2}-4\right)$.

28. $\lim\limits_{x\to -8}\left(\sqrt{1-x}-3\right)/\left(2+\sqrt[3]{x}\right)$.

29. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}/\sqrt[3]{x^2-1}$.

30. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt[3]{16x}-4\right)/\left(\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}\right)$.

в) Використання чудових границь

Для знаходження границь трансцендентних функцій використовуються чудові границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1; \tag{2.12}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e; \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e; \tag{2.13}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \tag{2.14}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1; \tag{2.15}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m. \tag{2.16}$$

<u>Приклад 1.</u> Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

Розв'язування. При $x \to 0$ $5x$ також прямує до нуля. Помножимо чисельник і знаменник на 5 і застосуємо формулу (2.12), одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x} = 5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = 5\cdot 1 = 5.$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$.

Розв'язування. Маємо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Зробимо заміну $\arcsin 2x = t$. Тоді $2x = \sin t$ або $x = \dfrac{\sin t}{2}$. Зауважимо, що при $x \to 0$ і $t \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\sin t}{2}} = 2\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{2}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}} = 2.$$

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-1}{2n^2-3}\right)^{n^2}$.

Розв'язування. У даному випадку маємо невизначеність вигляду $\left[1^\infty\right]$, тобто основа прямує до 1 при $n\to\infty$, а показник прямує до ∞. Завдяки тому, що границя основи дорівнює 1, перетворимо її до вигляду $1+\alpha$, де α - нескінченно мала величина.

$$\frac{2n^2-1}{2n^2+3} = 1 + \frac{2n^2-1}{2n^2+3} - 1 = 1 - \frac{4}{2n^2+3}.$$ Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-1}{2n^2-3}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{2n^2+3}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{4}{2n^2+3}\right)^{-\frac{2n^2+3}{4}}\right]^{-\frac{4}{2n^2+3}n^2} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2}{2n^2+3}} = e^{-2}.$$

Завдання 2.11. Обчислити границю функцій:

1. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}$.

2. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{tg^2 x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{4x^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin 3x}{5x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{tg 5x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} 3x \cdot ctg\,\pi x$.

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$.

9. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 5x}{tg 4x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\cos x-\cos 5x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot \sin x}{1-\cos x}$.

16. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{tg\pi x}{x+2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$.

18. $\lim\limits_{x\to +2} \dfrac{tg\pi x}{x-2}$.

19. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$.

20. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3\sin^2 x}$.

21. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$.

22. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 4x}{tg 3x}$.

23. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\pi-4x}$.

24. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{3x}$.

26. $\lim\limits_{x\to a} tg\dfrac{\pi x}{2a}\cdot \sin\dfrac{x-a}{2}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-ctgx\right)$.

28. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos 5x}{4\sin^2 3x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x\cdot \sin 3x}{1-\cos 2x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{tg\pi x}{x-1}$.

Завдання 2.12. Обчислити границю числових послідовностей:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+1}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+4}{n-2}\right)^{n+1}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n+2}{7n-3}\right)^{n-4}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n-6}\right)^{n/6}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{2n-n^2}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^2}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{n+4}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)^{n^2+2}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{6n+3}\right)^{2n+1}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n-2}{3n-1}\right)^{2n+3}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-5n}{2n^2-5n+7}\right)^{n+1}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{2n+1}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n-2}{7n+1}\right)^{n+3}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2}{3n^2-5}\right)^{n^2-1}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-2n^2}{3-2n^2}\right)^{5n^2-1}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+7}{n-2}\right)^{n/3}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-2n^3}{3-2n^3}\right)^{n^2+3n}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+2n}{n^3+1}\right)^{4n^3-2}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n-4}{2n^2-3}\right)^{n^2/2}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n+2}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^3}$.

__Завдання 2.13.__ Обчислити границю функцій:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3x+2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{2x/(x^2-4)}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{x/(3x-3)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{2/(x-3)}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+3)/(x-2)\right]^{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(2x-1)/(2x+1)\right]^{x}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(4x+1)/4x\right]^{x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left[\ln(x-1)-\ln x\right]$.

10. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{1/(x-2)}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\left[\ln(x+3)-\ln x\right]$.

12. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{2x/(x^2-4)}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)\left[\ln(x-3)-\ln x\right]$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{(x+1)/3}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+kx)/x$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x+a)/(x-a)\right]^{x}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x^2+1)/(x^2-2)\right]^{x^2}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x^2-1)/(x^2+1)\right]^{(x-1)/(x+1)}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+x)/(2+x)\right]^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x^2+1)/(x^2-1)\right]^{x^2}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(3x-4)/(3x+2)\right]^{(x+1)/3}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x/(1+x)\right]^{x}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(3x+2)/(3x-3)\right]^{(x+1)/3}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left[\ln(x+a)-\ln x\right]$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-2)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$.

г) Порівняння нескінченно малих величин. Еквівалентність

<u>Означення 1.</u> Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

<u>Означення 2.</u> Якщо $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ - нескінченно малі величини і $\lim\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=a$, де $a\neq 0$, $a\neq\infty$, то $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ є нескінченно малими одного порядку.

<u>Означення 3.</u> Якщо $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ - нескінченно малі величини і $\lim\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$, то $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ називаються еквівалентними (позначається $\varphi\sim\psi$).

<u>Означення 4.</u> Якщо $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ - нескінченно малі величини і $\lim\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$, то $\varphi(x)$ - нескінченно мала більш високого порядку малості, ніж $\psi(x)$.

<u>Означення 5.</u> Якщо $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ - нескінченно малі величини і $\lim\frac{\varphi(x)}{[\psi(x)]^k}=a$, де $a\neq 0$, $a\neq\infty$, то $\varphi(x)$ є нескінченно малою порядку k відносно до нескінченно малої $\psi(x)$.

<u>Означення 6.</u> Якщо $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ - нескінченно малі величини і $\lim\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ не існує, то $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ називаються непорівнянними нескінченно малими.

Зауваження. Порівняння нескінченно великих величин здійснюється аналогічно.

<u>Приклад 1.</u> Порівняти нескінченно малі при $x\to 0$ функції $\varphi(x)=\cos 5x-\cos x$ і $\psi(x)=\sin 3x$.

<u>Розв'язування.</u> Порівняння нескінченно малих визначається через границю їх відношення.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\cdot\sin 2x}{\sin 3x}=-2\lim_{x\to 0}\sin 2x=0.$$

Отже, нескінченно мала $\varphi(x)=\cos 5x-\cos x$ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж $\psi(x)=\sin 3x$.

<u>Приклад 2.</u> Визначити порядок малості при $x\to 0$ нескінченно малої $\varphi(x)=\cos 5x-\cos x$ відносно $\psi(x)=\sin 3x$.

<u>Розв'язування.</u> Згідно з означенням порядку малості, потрібно знайти таке число k, щоб $\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{[\psi(x)]^k}=a$, де $a\neq 0$, $a\neq\infty$. У даному випадку

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{[\psi(x)]^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos x}{[\sin 3x]^k}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 2x}{[\sin 3x]^k}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 2x}{\sin 3x(\sin 3x)^{k-1}}=-\frac{4}{3}$$

при $k=2$.

Таким чином, $\varphi(x)=\cos 5x-\cos x$ є нескінченно малою величиною другого порядку відносно нескінченно малої $\psi(x)=\sin 3x$.

Завдання 2.14. Порівняти нескінченно малі $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, а також визначити порядок нескінченно малої $\varphi(x)$ відносно $\psi(x)$ при $x \to a$.

1. $\varphi = x^2 - 3x + \sqrt[3]{x}$, $\quad \psi = x\sqrt{x}$, $\quad x \to 0$.
2. $\varphi = x^2\sqrt{x} - x\sqrt[3]{x} + x$, $\quad \psi = x^2 + x$, $\quad x \to 0$.
3. $\varphi = a^x - 1$, $\quad \psi = x^3$, $\quad x \to 0$.
4. $\varphi = \sqrt[3]{x} - 2$, $\quad \psi = (x-8)^2$, $\quad x \to 8$.
5. $\varphi = e^{2x} - 1 + x$, $\quad \psi = x^2$, $\quad x \to 0$.
6. $\varphi = \sqrt{x^2 - 15} - 1$, $\quad \psi = \sqrt{x} - 2$, $\quad x \to 4$.
7. $\varphi = \dfrac{1}{x^3 - 1}$, $\quad \psi = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, $\quad x \to \infty$.
8. $\varphi = \arcsin(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})$, $\quad \psi = x$, $\quad x \to 0$.
9. $\varphi = \sqrt[3]{1 - x^2} - 1$, $\quad \psi = \sqrt{x+4} - 2$, $\quad x \to 0$.
10. $\varphi = tgx - \sin x$, $\quad \psi = \cos 2x - \cos x$, $\quad x \to 0$.
11. $\varphi = x \sin\dfrac{1}{x}$, $\quad \psi = x + \sqrt{x}$, $\quad x \to 0$.
12. $\varphi = \sqrt{x} \sin\dfrac{1}{x}$, $\quad \psi = x + x^2$, $\quad x \to 0$.
13. $\varphi = arctg(2 - \sqrt[3]{x})$, $\quad \psi = x - 8$, $\quad x \to 8$.
14. $\varphi = \ln(1 + \sqrt{x})$, $\quad \psi = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$, $\quad x \to 0$.
15. $\varphi = e^{3x} - e^{2x}$, $\quad \psi = \sqrt{x}$, $\quad x \to 0$.
16. $\varphi = \sqrt[4]{1 + \sqrt{x}} - 1$, $\quad \psi = \sqrt[3]{x}$, $\quad x \to 0$.
17. $\varphi = \sin 5x - \sin 2x$, $\quad \psi = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$, $\quad x \to 0$.
18. $\varphi = x^2 \cos\dfrac{1}{x}$, $\quad \psi = \sqrt[4]{x}$, $\quad x \to 0$.
19. $\varphi = \ln\dfrac{1-2x}{1+x}$, $\quad \psi = \sqrt{x}$, $\quad x \to 0$.
20. $\varphi = \arccos x - \dfrac{\pi}{2}$, $\quad \psi = x$, $\quad x \to 0$.

21. $\varphi = arctgx - \frac{\pi}{4}$, $\psi = x - 1$, $x \to 1$.

22. $\varphi = \cos x \cdot \sin 2x$, $\psi = \sqrt{x}$, $x \to 0$.

23. $\varphi = (1+x)\sin^2 x$, $\psi = x\sqrt{x}$, $x \to 0$.

24. $\varphi = \sqrt[3]{\frac{1+3x}{1-5x}} - 1$, $\psi = \sqrt[3]{x}$, $x \to 0$.

25. $\varphi = a^{2x} - a^x$, $\psi = \sqrt{x}$, $x \to 0$.

26. $\varphi = e^{x^2} - \cos 2x$, $\psi = \sqrt[3]{x}$, $x \to 0$.

27. $\varphi = \ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $\psi = x^2 + x$, $x \to 0$.

28. $\varphi = \sqrt{\frac{x^2+5}{4x^2-7}} - 1$, $\psi = x$, $x \to 0$.

29. $\varphi = \cos 2x - 1 + \sin x$, $\psi = \arcsin x$, $x \to 0$.

30. $\varphi = \sqrt[4]{\frac{1+3x}{1-x}} - 1$, $\psi = \sin x$, $x \to 0$.

Розкриваючи невизначеності в трансцендентних виразах, часто використовують такий результат: границя відношення двох нескінченно малих дорівнює границі відношення еквівалентних їм величин.

Наведемо приклади еквівалентних нескінченно малих при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x; \qquad \ln(1+x) \sim x;$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}; \qquad \log_a(1+x) \sim x\log_a e;$$

$$tgx \sim x; \qquad e^x - 1 \sim x;$$

$$\arcsin x \sim x; \qquad a^x - 1 \sim x\ln a;$$

$$arctgx \sim x; \qquad (1+x)^a - 1 \sim ax.$$

<u>Приклад 3.</u> Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\arcsin x^2)^5 - 1}{xtgx}.$$

Розв'язування. Враховуючи, що при $x \to 0$ $\arcsin x^2 \sim x^2$, $tgx \sim x$, $(1+x^2)^5 - 1 \sim 5x^2$, маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\arcsin x^2)^5 - 1}{xtgx} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^5 - 1}{x^2} = 5.$$

Приклад 4. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{\sin 4x}.$$

Розв'язування. Маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Зробимо заміну $x - \frac{\pi}{4} = t$. Тоді $x = \frac{\pi}{4} + t$. При $x \to \frac{\pi}{4}$ $t \to 0$.

Маємо

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{\sin 4x} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{\sin(\pi + 4t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{1+tgt}{1-tgt}}{-\sin 4t} = -\lim_{t\to 0}\frac{\ln\frac{1-t+2t}{1-t}}{\sin 4t} =$$

$$= -\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2t}{1-t}\right)}{\sin 4t} = -\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2t}{1-t}}{4t} = -\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-t} = -\frac{1}{2}.$$

Завдання 2.15. Обчислити границю функцій:

1. $\lim_{x\to 0}(7^{2x} - 2^{3x})/(tgx + x^3)$.

2. $\lim_{x\to 0}(3^{2x} - 5^{x})/(\arcsin 3x - 5x)$.

3. $\lim_{x\to 0}(4^{3x} - 9^{-2x})/(\sin x - tgx^3)$.

4. $\lim_{x\to 0}(5^{2x} - 2^{3x})/(arctg 2x - 5x)$.

5. $\lim_{x\to 0}(8^{x} - 3^{2x})/(\sin x + \sin x^2)$.

6. $\lim_{x\to 0}(3^{4x} - 2^{-4x})/(2x - tgx)$.

7. $\lim_{x\to 0}(2^{3x} - 3^{7x})/(\sin 7x - 3x)$.

8. $\lim_{x\to 0}(2^{3x} - 3^{2x})/(x + \arcsin x^3)$.

9. $\lim_{x\to 0}(3^{5x} - 2^{x})/(x - \sin 9x)$.

10. $\lim_{x\to 0}(6^{2x} - 8^{-2x})/(\sin 3x - x)$.

11. $\lim_{x\to 0}(3^{x} - 5^{3x})/(arctgx + x^3)$.

12. $\lim_{x\to 0}(7^{2x} - 5^{4x})/(2x - arctg 4x)$.

13. $\lim_{x\to 0}(11^{x} - 5^{-3x})/(3\arcsin x - x)$.

14. $\lim_{x\to 0}(4^{x} - 2^{7x})/(tg 4x - x)$.

15. $\lim_{x\to 0}(10^{2x} - 9^{-x})/(2tgx - arctgx)$.

16. $\lim_{x\to 0}(e^{4x} - e^{2x})/(2tgx - \sin x)$.

17. $\lim_{x\to 0}(e^{2x} - e^{-5x})/(2\sin x - tgx)$.

18. $\lim_{x\to 0}(e^{3x} - e^{2x})/(\sin 3x - tg 2x)$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x}-e^{-3x})/(\sin x-tg5x)$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x}-e^{2x})/(x+\sin x^{2})$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-e^{x})/(\sin 2x-\sin x)$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-e^{-x})/(x+tgx^{2})$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x}-e^{-x})/(tg2x-\sin x)$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{5x}-e^{x})/(\arcsin x+x^{3})$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-e^{x})/(\sin 3x-\sin 5x)$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{7x}-e^{-2x})/(\sin 2x-x)$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{4x}-e^{-2x})/(2arctgx-\sin x)$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x}-e^{3x})/(arctgx-x^{2})$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{6x}-e^{3x})/(\sin x+\arcsin x)$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-e^{-2x})/(tgx+arctgx)$.

<u>Завдання 2.16.</u> Обчислити границю функцій:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1-x^{2})^{20}-1\right)/\sin^{2}2x$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left((2+x)^{10}-2^{10}\right)/x$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1+tgx)^{15}-1\right)/\sin 15x$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1+x^{2})^{9}-1\right)/(1-\cos x)$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1-\sqrt{x})^{50}-1\right)/\sqrt[4]{1-\cos^{4}x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos^{100}x-1)/x^{2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1+x)^{99}-1\right)/tg3x$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1+\cos x)^{30}-1\right)/(\pi-2x)$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1+x^{3})^{7}-1\right)/(2\sin x-\sin 2x)$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1-\arcsin x^{2})^{5}-1\right)/x\sin x$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left((3-\cos x)^{10}-2^{10}\right)/xtgx$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1+\cos x)^{15}-2^{15}\right)/x^{2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1-arctgx)^{12}-(1+arctgx)^{9}\right)/2x$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{100}-(1-x^{2})^{50}}{x\cos x}$.

15. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(tg^{10}x-1)/(20x-5\pi)$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{300}-(1-x)^{200}}{\arcsin 5x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left((3-x)^{20}-(1+x)^{15}\right)/(x^{2}-1)$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sqrt{x})^{40}-(1-x)^{20}}{\sqrt{x}+x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1+\sin^{2}x)^{8}-1\right)/(1-\cos x)$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin^{3}x)^{5}-(1+\sin x)^{15}}{3tgx}$.

21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin^{16}x-2^{-8})/(\cos x-\sin x)$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{12}-(1+\sin x)^{10}}{\sin 2x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1-tg^{2}x)^{7}-(1+x^{3})^{5}\right)/(x^{2}-x^{3})$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x+\sin x)^{3}-1}{\arcsin x\cdot\arccos x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left((5-x^{2})^{6}-4096\right)/(1-x^{3})$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\arcsin x^{2})^{8}-1}{\sin x\cdot\arcsin x}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\left((x-1)^{80}-1\right)/(\sin x-\sin 2x)$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x+x^2)^{25}-1}{x+x^2+x^3}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\left((2-\sin x)^{14}-2^{14}\right)/x\cdot\cos x$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^7-(1-x)^{15}}{x-2x^2+3x^7}$.

Завдання 2.17. Обчислити границю функцій:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+\sin x)/\sin 4x$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1-7x)/\sin(\pi(x+7))$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)/\ln x$.

4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\ln 2x-\ln\pi)\Big/\sin\frac{3}{2}x\cdot\cos x$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}9\ln(1-2x)/4\,arctg\,3x$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x^2-x+1}-1)/\ln x$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\ln(5-2x)/(\sqrt{10-3x}-2)$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\pi(x+1))/\ln\sqrt{1+2x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 2}\ln(9-2x^2)/\sin 2\pi x$.

10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\ln tgx/\cos 2x$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}tg\left(\pi\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)\Big/\ln(1+2x+x^2)$.

12. $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-\sqrt[3]{2x-3})/(x^2-4)$.

13. $\lim\limits_{x\to 2}(tgx-tg2)/\sin\ln(x-1)$.

14. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\ln\sin 3x/(6x-\pi)^2$.

15. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\ln(4x-1)/(\sqrt{1-\cos\pi x}-1)$.

16. $\lim\limits_{x\to \pi}\ln\cos 2x\Big/\left(1-\frac{\pi}{x}\right)^2$.

17. $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1)/(1+\cos\pi x)$.

18. $\lim\limits_{x\to \pi}\ln\cos 2x/\ln\cos 4x$.

19. $\lim\limits_{x\to 5}(tgx-tg5)/(\ln x-\ln 5)$.

20. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)/\ln\sqrt{tgx}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x-2\sin x)/x\ln\cos 5x$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)/\log_{\pi}x$.

23. $\lim\limits_{x\to 3}(\log_3 x-1)/tg\pi x$.

24. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-4x-6}{\ln(x-1)-\ln(x+1)+\ln 2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x+x^2)/(\sin x+tg^2x)$.

26. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\ln(x+\sqrt{x})-\ln 2\right)/(1-\sqrt{x})$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+\arcsin x^2)^2/(\cos x-\cos^2 x)$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}(tgx-tgx^2)/\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+xe^x)/\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\sqrt{\cos x}/x^2$.

3. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

3.1. Неперервність функції

<u>Означення 1.</u> Функція $f(x)$ з областю визначення X називається неперервною в точці x_0, якщо

а) вона визначена в точці x_0, тобто $x_0 \in X$;

б) існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

в) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо умову а) виконано, то умови б), в) еквівалентні такому:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 ,$$

де $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приріст функції $y = f(x)$ у точці x_0, який відповідає приросту аргументу $\Delta x = x - x_0$.

Якщо в точці x_0 не виконується хоча б одна з умов а)-б), функція називається розривною в точці x_0, а сама точка x_0 - точка розриву функції.

Розрізняють наступні вигляди розривів:

1) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ існує, але функція $f(x)$ в точці x_0 не визначена або визначена, але так, що $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то розрив в точці x_0 називається усувним;

2) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не існує, але існують обидві односторонні границі $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ (очевидно не рівні одна одній), розрив в точці x_0 називається розривом першого роду або стрибком;

3) якщо одна з односторонніх границь не існує (зокрема , дорівнює нескінченності), а отже, не існує і $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то розрив в точці x_0 називається розривом другого роду.

<u>Властивість 1.</u> Основні елементарні функції неперервні в усіх точках природної області визначення.

<u>Властивість 2.</u> Якщо в точці x_0 функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ неперервні, то в цій же точці неперервними будуть функції $\varphi(x) \pm \psi(x)$, $\varphi(x) \cdot \psi(x)$, а також

$\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, якщо $\psi(x_0) \neq 0$.

Властивість 3. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складна функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0.

Означення 2. Функція $y = f(x)$ називається неперервною на $[a,b]$, якщо вона неперервна в кожній точці $x \in [a,b]$.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то вона:

а) обмежена на $[a,b]$,

б) досягає на $[a,b]$ своїх верхньої та нижньої граней;

в) набуває на будь-якому інтервалі $]\alpha, \beta[\subset [a,b]$ всіх проміжних значень між $f(\alpha)$ та $f(\beta)$.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x}, & x < 2; \\ (1/2)x, & 2 < x \le 4; \\ (1/4)x^2, & x > 4. \end{cases}$$

На кожному з інтервалів $]-\infty,2[$, $]2,4[$, $]4,+\infty[$ функція являє собою композицію (різну на всіх інтервалах) елементарних функцій, неперервних на своїй області визначення. Отже, $f(x)$ неперервна на множині $]-\infty,2[\cup]2,4[\cup]4,+\infty[$. Залишилося дослідити неперервність функції в точках $x = 2$ та $x = 4$. У точці $x = 2$ функцію не визначено, але

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \sqrt{3-x} = 1 \qquad \text{і} \qquad \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{2}x = 1;$$

тому $x = 2$ - точка усувного розриву.

Нехай тепер $x = 4$:

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = \lim_{x\to 4-0} \frac{1}{2}x = 2 \qquad \text{і} \qquad \lim_{x\to 4+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{4}x^2 = 4;$$

тому $x = 4$ - точка розриву першого роду.

Завдання 3.1. Дослідити функцію на неперервність:

1. $y = \begin{cases} x^2, & x < 0; \\ \sin x, & 0 < x < \pi/2; \\ \pi/2, & x \ge \pi/2. \end{cases}$

2. $y = \begin{cases} x+1, & x < -2; \\ (1/4)x^2 - 2, & -2 \le x < 0; \\ -\cos x, & x \ge 0. \end{cases}$

3. $y=\begin{cases} arctgx, & x\le 1;\\ -x+2, & 1<x<2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$

4. $y=\begin{cases} x^2, & x<-1;\\ -x, & -1\le x\le 0;\\ 1/x, & x>0.\end{cases}$

5. $y=\begin{cases} 2\sin x, & x<-\pi/2;\\ \sin x-1, & -\pi/2<x<\pi/2;\\ x/\pi, & x\ge \pi/2.\end{cases}$

6. $y=\begin{cases} \sqrt[3]{-x}, & x<-1;\\ |x|, & -1\le x\le 0;\\ x^2, & x>0.\end{cases}$

7. $y=\begin{cases} 2^x, & x\le 0;\\ (x+1)^2, & 0<x<2;\\ 2x^2, & x\ge 2.\end{cases}$

8. $y=\begin{cases} arctgx, & x<0;\\ \arccos x, & 0<x<1;\\ x-2, & x\ge 1.\end{cases}$

9. $y=\begin{cases} 1/x, & x<0;\\ \ln x, & 0<x<e;\\ 1, & x\ge e.\end{cases}$

10. $y=\begin{cases} 1/(1+x^2), & x<0;\\ 1-x^2, & 0\le x<1;\\ x+1, & x\ge 1.\end{cases}$

11. $y=\begin{cases} 0, & x\le -4;\\ \sqrt{25-x^2}, & -4<x<3;\\ 2x-2 & x\ge 3.\end{cases}$

12. $y=\begin{cases} -(\pi/3)x, & x\le -1;\\ -\arcsin x, & -1<x<0;\\ \sqrt{x}, & x>0.\end{cases}$

13. $y=\begin{cases} (1/2)x, & x\le 0;\\ \ln x, & 0<x<1;\\ x-1, & x\ge 1.\end{cases}$

14. $y=\begin{cases} -2x^2+2, & x\le 1;\\ \cos x, & 1<x<\pi;\\ -1, & x>\pi.\end{cases}$

15. $y=\begin{cases} 1, & x\le 0;\\ |1-x|, & 0<x<3;\\ 3/x, & x\ge 3.\end{cases}$

16. $y=\begin{cases} -(1/10)x^2, & x<-4;\\ -(1/10)(x+1), & -1\le x<0;\\ -10^{x-1} & x\ge 0.\end{cases}$

17. $y=\begin{cases} \sin 2x, & x\le -\pi/2;\\ \cos x, & -\pi/2<x<0;\\ 2(x+1/2)^2, & x\ge 0.\end{cases}$

18. $y=\begin{cases} 0, & x\le -4;\\ \sqrt{25-x^2}, & -4<x<3;\\ 2x-2 & x\ge 3.\end{cases}$

19. $y=\begin{cases} -x^2, & x<-1;\\ x^3, & -1\le x\le 2;\\ x^2+2, & x>2.\end{cases}$

20. $y=\begin{cases} \ln(-x), & x<4;\\ 1/x, & 0<x<1;\\ x^2, & x>1.\end{cases}$

21. $y=\begin{cases}-\sin x, & x<-\pi;\\ \cos x-1, & -\pi\le x<0;\\ x^2+1, & x\ge 0.\end{cases}$

22. $y=\begin{cases}-(1/10)(x+1), & x<0;\\ x^2-1, & 0\le x\le 1;\\ \ln x, & x>1.\end{cases}$

23. $y=\begin{cases}(1/2)^x, & x<-1;\\ -x, & -1\le x<1;\\ -x^2, & x>1.\end{cases}$

24. $y=\begin{cases}arctg(x+2), & x<-1;\\ tgx, & -1\le x<\pi/2;\\ 0, & x\ge\pi/2.\end{cases}$

25. $y=\begin{cases}|\sin x|, & x<-\pi/4;\\ \sin x, & -\pi/4\le x<\pi/2;\\ \cos x+1, & x\ge\pi/2.\end{cases}$

26. $y=\begin{cases}e^x, & x<0;\\ tgx, & 0<x<\pi/4;\\ \sin 2x, & x\ge\pi/4.\end{cases}$

27. $y=\begin{cases}\cos x, & x<-\pi/2;\\ ctgx, & -\pi/2\le x<0;\\ \sqrt{x}, & x\ge 0.\end{cases}$

28. $y=\begin{cases}(x+3)^2, & x<-2;\\ 2x+5, & -2\le x<1;\\ (x-3)^2, & x\ge 1.\end{cases}$

29. $y=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \ln(x+1), & -1<x<0;\\ x^2, & x\ge 0.\end{cases}$

30. $y=\begin{cases}1/(x+6), & x<-5;\\ \sqrt{25-x^2}, & -5\le x<4;\\ 5, & x\ge 4.\end{cases}$

Завдання 3.2. Дослідити функцію на неперервність:

1. $y=5^{1/(x-3)}$. **2.** $y=2^{2/(x+2)}$. **3.** $y=1/(1+3^{1/x})$.

4. $y=e^{1/x}$. **5.** $y=10^{1/(x+5)}$. **6.** $y=3^{1/(x-2)}$.

7. $y=2^{1/(4-x)}$. **8.** $y=(4^{1/x}-1)/(4^{1/x}+1)$. **9.** $y=5^{2/(4-x)}$.

10. $y=8^{1/(x+1)}$. **11.** $y=(1/2)^{1/(x-3)}$. **12.** $y=7^{(x+4)/(x-2)}$.

13. $y=5^{(x-1)/(x+1)}$. **14.** $y=2/(1+2^{1/x})$. **15.** $y=10^{1/(x-4)}$.

16. $y=9^{8/(7-x)}$. **17.** $y=(2^{1/x}-4)/(2^{1/x}+2)$. **18.** $y=5^{(x+3)/(x-2)}$.

19. $y=2^{3x/(x+1)}$. **20.** $y=3^{-3x/(x-1)}$. **21.** $y=1/(2+2^{1/(x-1)})$.

22. $y=e^{-1/(x+1)}$. **23.** $y=5^{(2x+3)/(x+1)}$. **24.** $y=2^{x/(3x+1)}$.

25. $y=(3-3^{1/x})/(3+3^{1/x})$. **26.** $y=11^{-1/(x+8)}$. **27.** $y=4^{2/(4x+1)}$.

28. $y=3^{5x/(x-3)}$. **29.** $y=3^{(1-x)/(1+2x)}$. **30.** $y=5^{(2-3x)/(1+5x)}$.

3.2. Рівномірна неперервність функції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається рівномірно неперервною на множині D, яка належить області визначення X, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при всіх $x', x'' \in D$ з нерівності $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ випливає $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема Кантора. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона рівномірно неперервна на цьому відрізку.

Теорема *(достатня умова рівномірної неперервності функції).* Якщо функція $f(x)$ має на множині D обмежену похідну, то $f(x)$ рівномірно неперервна на цій множині.

Приклад 1. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $y = x^3$ на інтервалі $]-l,l[$, де $l > 0$ - будь-яке фіксоване число.

Розв'язування. Рівномірну неперервність на інтервалі $]-l,l[$ можна довести трьома способами:

1) користуючись визначенням рівномірної неперервності;

2) використовуючи теорему Кантора;

3) використовуючи достатню умову рівномірної неперервності.

1 спосіб. Складемо різницю $f(x') - f(x'')$:

$$f(x') - f(x'') = (x')^3 - (x'')^3 = (x' - x'')\left((x')^2 + (x'x'') + (x'')^2\right). \qquad (*)$$

Якщо $x', x'' \in]-l,l[$, то модуль суми $\left((x')^2 + (x'x'') + (x'')^2\right)$ обмежений числом $3l^2$. Тому модуль різниці $|f(x') - f(x'')|$ буде як завгодно малим для будь-яких $x', x'' \in]-l,l[$, якщо тільки модуль різниці $|x' - x''|$ достатньо малий. Ці міркування показують, що функція $y = x^3$ рівномірно неперервна на інтервалі $]-l,l[$.

Наведемо більш строгі міркування, використовуючи визначення рівномірної неперервності. Задамо довільно $\varepsilon > 0$ і покладемо $\delta = \varepsilon/(3l^2)$. Тоді для будь-яких $x', x'' \in]-l,l[$, які задовольняють нерівності $|x' - x''| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(x') - f(x'')| = |x' - x''|\left((x')^2 + x'x'' + (x'')^2\right) < \delta \cdot 3l^2 = \varepsilon.$$

За визначенням це означає, що функція $y = x^3$ рівномірно неперервна на інтервалі $]-l,l[$.

2 спосіб. Розглянемо функцію $y = x^3$ на відрізку $\left]-l, l\right[$. Вона неперервна на цьому відрізку і, отже, за теоремою Кантора вона буде рівномірно неперервною. Звідси випливає, що функція $y = x^3$ рівномірно неперервна на інтервалі $\left]-l, l\right[$. Дійсно, $\left]-l, l\right[\subset \left[-l, l\right]$, і оскільки нерівність $\left| f(x') - f(x'') \right| < \varepsilon$ виконується для будь-яких $x', x'' \in \left[-l, l\right]$, які задовольняють нерівність $\left| x' - x'' \right| < \delta(\varepsilon)$, воно виконується і для будь-яких $x', x'' \in \left]-l, l\right[$, які задовольняють тій самій нерівності.

3 спосіб. Похідна $y = 3x^2$ обмежена на інтервалі $\left]-l, l\right[$: $\left| f'(x) \right| = 3\left| x^2 \right| = 3l^2$. Звідси з достатньої ознаки випливає, що функція $y = x^3$ рівномірно неперервна на інтервалі $\left]-l, l\right[$.

Приклад 2. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $y = x^3$ на множині $\left]-\infty, \infty\right[$.

Розв'язок. З виразу $(*)$ видно, що, якщо $x', x'' \in \left]-\infty, \infty\right[$, то при як завгодно малому модулі різниці $\left| x' - x'' \right|$ модуль різниці $\left| f(x') - f(x'') \right|$ не буде малим при достатньо великих x' і x'' із-за множника $(x')^2 + x'x'' + (x'')^2$. З цього випливає, що функція $y = x^3$ не є рівномірно неперервною на множині $\left]-\infty, \infty\right[$. Доведемо це, користуючись запереченням визначення рівномірної неперервності. Треба довести, що існує $\varepsilon > 0$ таке, що для будь-якого $\delta > 0$ існують x', x'', які задовольняють нерівність $\left| x' - x'' \right| < \delta$, для яких $\left| f(x') - f(x'') \right| \geq \varepsilon$.

Візьмемо $\varepsilon = 1$ і для будь-якого $\delta > 0$ покладемо

$$x' = \frac{1}{\sqrt{\delta}} + \frac{\delta}{4}, \qquad x'' = \frac{1}{\sqrt{\delta}} - \frac{\delta}{4}.$$

Тоді $\left| x' - x'' \right| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, але при цьому

$$\left| f(x') - f(x'') \right| = \left| x' - x'' \right| \left((x')^2 + x'x'' + (x'')^2 \right) = \frac{\delta}{2}\left(\frac{3}{\delta} + \frac{\delta^2}{16} \right) = \frac{3}{2} + \frac{\delta^3}{32} > 1 = \varepsilon.$$

Це доводить, що функція $y = x^3$ не є рівномірно неперервною на $\left]-\infty, \infty\right[$.

Завдання 3.3. Для $\varepsilon > 0$ знайти $\delta(\varepsilon)$, яке фігурує в означенні рівномірної неперервності функції f на заданій множині, якщо $f(x)$ дорівнює:

1. $x^2 - 2x - 1$, $x \in [-1, 3]$. **2.** $1/x$, $x \in [0{,}2; 1]$.

3.	$\sin 2x$,	$x \in [0, \pi]$.	**4.**	$3x + 4$,	$x \in [-5,1]$.
5.	$2x^2 - 5$,	$x \in [0,2]$.	**6.**	$5x - 3$,	$x \in [-4,3]$.
7.	$\cos 4x$,	$x \in [0, \pi/2]$.	**8.**	$1 - x$,	$x \in [-1,2]$.
9.	$x^2 + 4x + 5$,	$x \in [-3,1]$.	**10.**	$2x - 1$,	$x \in [0,3]$.
11.	$2 - 3x$,	$x \in [-3,3]$.	**12.**	$x^2 + 1$,	$x \in [-2,3]$.
13.	$2 - x^2$,	$x \in [1,3]$.	**14.**	$x^2 - x + 1$,	$x \in [0,1]$.
15.	$2 - 5x$,	$x \in [-3,-1]$.	**16.**	$\sin x$,	$x \in [0,2\pi]$.
17.	$\cos x$,	$x \in [0,2\pi]$.	**18.**	$1/x$,	$x \in [0{,}5;1]$.
19.	x^2,	$x \in [-2,3]$.	**20.**	x^2,	$x \in [1,4]$.
21.	$3x^2 - 1$,	$x \in [-1,1]$.	**22.**	$\varepsilon > 0$,	$x \in [1,3]$.
23.	$3x^2 - 1$,	$x \in [0,3]$.	**24.**	$2x + 3$,	$x \in [0,2]$.
25.	$3 - 2x$,	$x \in [0,2]$.	**26.**	$3 - 2x^2$,	$x \in [0,3]$.
27.	$3x^2 + x$,	$x \in [0,2]$.	**28.**	$x^2 + x$,	$x \in [0,2]$.
29.	$x^2 - 2x$,	$x \in [0,2]$.	**30.**	$2x^2 + x$,	$x \in [0,3]$.

<u>Завдання 3.4.</u> Дослідити на рівномірну неперервність у заданих областях наступні функції:

1.	$2x/(x^2 - 9)$,	$x \in]-2,2[$.	**2.**	$x \cdot \sin x$,	$x \in]0,4\pi[$.
3.	$\ln x$,	$x \in]0,1[$.	**4.**	$\sin x / x$,	$x \in]0, \pi[$.
5.	$arctgx$,	$x \in]-\infty, \infty[$.	**6.**	$\sqrt{x}$,	$x \in [1, \infty[$.
7.	$\sin(\pi/x)$,	$x \in]0,1[$.	**8.**	$\sin x^2$,	$x \in]-\infty, \infty[$.
9.	$x/(4 - x^2)$,	$x \in]0,2[$.	**10.**	$x^2 \cdot \cos x$,	$x \in [0,2\pi]$.
11.	$\ln x$,	$x \in]0, e[$.	**12.**	$e^x \ln x$,	$x \in]0, e[$.
13.	$e^x \sin x$,	$x \in]0,2\pi[$.	**14.**	$\sin x/(1 - x^2)$,	$x \in]-\pi/4, \pi/4[$.
15.	$e^x \cos x$,	$x \in]0,2\pi[$.	**16.**	$\sqrt{2x+1}$,	$x \in]0,4[$.
17.	$1/\sqrt{x}$,	$x \in]0,1[$.	**18.**	$1/x^2$,	$x \in]0, \infty[$.
19.	$x \cdot \cos x$,	$x \in]0, \pi[$.	**20.**	$\cos x / x$,	$x \in]0, \pi[$.
21.	$x \cdot \ln x$,	$x \in]0,1]$.	**22.**	$x^2 + 1/x$,	$x \in]0,1[$.

23. $x-1/x$, $x\in\left]1/2,1\right]$. **24.** $arcctgx$, $x\in\left]-\infty,\infty\right[$.

25. $tg(1/x)$, $x\in\left]0,4/\pi\right]$. **26.** $x\cdot arctgx$, $x\in\left]0,1\right[$.

27. $x/(x-1)$, $x\in\left]1,2\right[$. **28.** $x/(x-1)$, $x\in\left]2,3\right[$.

29. $e^{-|x|}\cos x$, $x\in\left]-\infty,\infty\right[$. **30.** $\sqrt{x-2}$, $x\in\left]2,6\right[$.

3.3. Абсолютна та відносна похибки

Якщо приріст Δf у точці x_0 може бути зображений у вигляді $\Delta f = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$, де $A = const$, то для знаходження приблизного значення $\Delta\tilde{f}$ приросту можна скористатися формулою $\Delta\tilde{f} = A\cdot\Delta x$. Різниця $\left|\Delta f - \Delta\tilde{f}\right|$ називається абсолютною похибкою $\delta_{абс}$ значення Δf, а $\left|\dfrac{\Delta f - \Delta\tilde{f}}{\Delta f}\right|$ - відносною похибкою $\delta_{відн}$. Наприклад, якщо $f(x) = x^5$, то

$$\Delta f = (x-\Delta x)^5 - x^5 = 5x^4\Delta x + 10x^3\Delta x^2 + 10x^2\Delta x^3 + 5x\Delta x^4 + \Delta x^5.$$

При $x = 2$, $\Delta x = 0{,}1$ одержимо

$$\Delta f = 8{,}84101\,; \qquad \Delta\tilde{f} = 8\,;$$

$$\delta_{абс} = 0{,}84101; \qquad \delta_{відн} = \frac{0{,}84101}{8{,}84101} \approx 0{,}095\,.$$

Іноді відносну похибку записують у процентах, тоді $\delta_{відн} = 9{,}5\%$.

<u>Завдання 3.5.</u> Знайти приріст функції $y = f(x)$, який відповідає приросту Δx незалежної змінної (в загальному вигляді). Обчислити Δf, якщо $x = a$, $\Delta x = \alpha$. Якою буде абсолютна та відносна похибка значення Δf, якщо обмежитися лінійним членом приросту (який містить Δx в першому степені)?

1. $y = 5x^3 + 3$; $a = 1{,}5$; $\alpha = 0{,}1$.

2. $y = x^2 + 3x - 4$; $a = 2{,}4$; $\alpha = 0{,}08$.

3. $y = x^4 + 2x^2$; $a = 3$; $\alpha = 0{,}1$.

4. $y = 3x^2 - 8x + 1$; $a = 4{,}2$; $\alpha = 0{,}2$.

5. $y = 3x^2 - x$; $a = 2$; $\alpha = 0{,}2$.

6.	$y = 2x^2 + 3x - 6$;	$a = 5{,}1$;	$\alpha = 0{,}3$.
7.	$y = x^4 - x + 4$;	$a = 1{,}9$;	$\alpha = 0{,}1$.
8.	$y = 5x^3 + x - 3$;	$a = 6$;	$\alpha = 0{,}05$.
9.	$y = -x^2 - x + 10$;	$a = 4$;	$\alpha = 0{,}3$.
10.	$y = 2x^4 - 11$;	$a = 3$;	$\alpha = 0{,}1$.
11.	$y = 2x^2 - 3x + 7$;	$a = 3{,}6$;	$\alpha = -0{,}1$.
12.	$y = x^3 + x^2 + 1$;	$a = -3$;	$\alpha = 0{,}2$.
13.	$y = 10x^2 + x + 1$;	$a = 4$;	$\alpha = -0{,}4$.
14.	$y = -2x^2 + x + 5$;	$a = -10$;	$\alpha = 0{,}3$.
15.	$y = 3x^3 + x + 1$;	$a = 3$;	$\alpha = -0{,}1$.
16.	$y = -x^4 + 2x$;	$a = -4{,}2$;	$\alpha = 0{,}2$.
17.	$y = 7x^2 + 5x - 9$;	$a = -1{,}1$;	$\alpha = -0{,}2$.
18.	$y = x^2 - 10x - 8$;	$a = -2$;	$\alpha = 0{,}05$.
19.	$y = -x^3 + 4x^2$;	$a = 1{,}2$;	$\alpha = 0{,}1$.
20.	$y = 3x^2 + 2x - 1$;	$a = 5$;	$\alpha = -0{,}2$.
21.	$y = 3x^4 + x^3 - x^2$;	$a = 8$;	$\alpha = 0{,}1$.
22.	$y = -5x^2 + 12$;	$a = 2{,}5$;	$\alpha = 0{,}15$.
23.	$y = x^2 + 20x$;	$a = 8{,}2$;	$\alpha = 0{,}15$.
24.	$y = 2x^3 - x^2 + 2x$;	$a = 3$;	$\alpha = 0{,}2$.
25.	$y = -9x^2 + 5x$;	$a = 2{,}2$;	$\alpha = -0{,}1$.
26.	$y = 4x^2 + 4x - 3$;	$a = 12$;	$\alpha = 0{,}4$.
27.	$y = x^4 - x + 15$;	$a = 8$;	$\alpha = -0{,}2$.
28.	$y = 3x^2 - 8x + 13$;	$a = -5$;	$\alpha = -0{,}3$.
29.	$y = -10x^2 - 11x + 2$;	$a = 2$;	$\alpha = 0{,}2$.
30.	$y = -x^3 - x^2 + 14$;	$a = -1{,}1$;	$\alpha = 0{,}05$.

4. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1. Знаходження похідних

За означенням

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операція знаходження похідної $f'(x)$ даної функції $f(x)$ називається диференціюванням цієї функції.

Для диференціювання функцій необхідно знати таблицю похідних і основні правила диференціювання.

а) Таблиця похідних

$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha - const$;

$(a^x)' = a^x \ln a$; $\quad (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(e^x)' = e^x$; $\quad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e$; $\quad (arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\quad (arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

$(\sin x)' = \cos x$; $\quad (shx)' = chx$;

$(\cos x)' = -\sin x$; $\quad (chx)' = shx$;

$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\quad (thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$;

$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$; $\quad (cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$.

б) Основні правила диференціювання

$(C)' = 0$; $\quad (Cu)' = Cu'$; $\quad (u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$(u+v)' = u' + v'$; $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

(C - стала, u і v - функції, які залежать від x і мають похідні).

в) Похідна складної функції

Нехай $y = F[\varphi(x)]$ - складна функція, тобто $y = F(u)$, а $u = \varphi(x)$. Якщо для відповідних значень x і u існують похідні $F'(u)$ і $u' = \varphi'(x)$, то існує і похідна від y за x, причому

$$y' = F'(u) \cdot u'. \tag{4.1}$$

Приклад 1. Знайти похідну від функції

$$y = \sqrt[3]{3 - x^2}.$$

Розв'язування. Вводимо допоміжну функцію u, поклавши $u = 3 - x^2$. Тоді можна записати

$$y = \sqrt[3]{u}, \quad \text{де} \quad u = 3 - x^2.$$

За формулою (4.1) маємо

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}(-2x) = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{3 - x^2}}.$$

Приклад 2. Знайти похідну від функції

$$y = tg^5 x.$$

Розв'язування. У даному випадку за u береться tgx: $y = u^5$. За формулою (4.1) маємо

$$y' = 5u^4 \cdot (tgx)' = 5tg^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Приклад 3. Знайти y', якщо $y = e^{\arccos x}$.

Розв'язування. Поклавши $u = \arccos x$, маємо $y = e^u$. Тоді

$$y' = e^u \cdot u' = e^{\arccos x}(\arccos x)' = -e^{\arccos x}\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Приклад 4. Знайти y', якщо $y = \ln(\cos x)$.

Розв'язування. Поклавши $u = \cos x$, маємо $y = \ln u$. За формулою (4.1) одержуємо

$$y' = (\ln u)' \cdot (\cos x)' = \frac{1}{u} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -tgx.$$

г) Логарифмічне диференціювання

Логарифмічне диференціювання застосовується для знаходження похідної від функцій, попереднє логарифмування яких спрощує процес диференціювання.

Так, для складної функції вигляду $y = u^v$, де u і v - функції аргументу x, логарифмуючи обидві частини рівності, одержимо

$$\ln y = v \cdot \ln u .$$

Диференцюючи це співвідношення, маємо

$$\frac{y'}{y} = v\frac{u'}{u} + v'\ln u$$

або
$$y' = u^v\left(\frac{v}{u}u' + v'\ln u\right) = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v' . \tag{4.2}$$

Знаходячи похідну від функції вигляду $y = u^v$, потрібно користуватися методом логарифмічного диференціювання або застосовувати формулу (4.2).

Приклад 1. Знайти y', якщо $y = \sqrt[x]{arctgx}$.

Розв'язування. Поклавши $u = arctgx$, $v = \dfrac{1}{x}$, маємо $y = u^v$.
Застосуємо метод логарифмічного диференціювання.

$$\ln y = v\ln u = \frac{1}{x}\ln(arctgx);$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln(arctgx) + \frac{1}{xarctgx}\cdot\frac{1}{1+x^2};$$

$$y' = \sqrt[x]{arctgx}\left[\frac{1}{x(1+x^2)arctgx} - \frac{\ln(arctgx)}{x^2}\right].$$

Приклад 2. Знайти y', якщо $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 tgx}{\sqrt{1+x}\cdot\arcsin x}}$.

Розв'язування. Логарифмуючи обидві частини рівності, маємо

$$\ln y = \frac{1}{3}\left[\ln x^2 + \ln tgx - \frac{1}{2}\ln(1+x) - \ln\arcsin x\right].$$

Диференціюємо одержане співвідношення:

$$\frac{y'}{y} = \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}\right];$$

$$y' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2 tgx}{\sqrt{1+x}\cdot \arcsin x}}\cdot\left[\frac{2}{x}+\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}\right].$$

д) Диференціювання неявних функцій

Якщо y як функція від x задається співвідношенням $F(x,y)=0$, де $F(x,y)$ - вираз, який містить x і y, то y називається неявною функцією від x.

Для знаходження похідної диференціюємо $F(x,y)$, розглядаючи при цьому y як функцію від x, і прирівнюємо одержаний вираз до нуля. Розв'язуємо одержане рівняння відносно y'.

Приклад. $x^2y^3+\cos\frac{y}{x}=0$, знайти y'.

Розв'язування. Диференціюємо задане співвідношення, розглядаючи y як функцію від x:

$$2xy^3+3x^2y^2y'-\sin\frac{y}{x}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=0.$$

Розв'язуємо одержане рівняння відносно y':

$$y'=\frac{2x^3y^3+y\sin\frac{y}{x}}{x\sin\frac{y}{x}-3x^4y^2}.$$

е) Диференціювання параметрично заданих функцій

Якщо функція y аргументу x задається за допомогою параметричних співвідношень

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t), \tag{4.3}$$

де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ - диференційовні функції за t і $\varphi'(t)\neq 0$, то похідна від y за x y'_x знаходиться шляхом диференціювання рівностей (4.3):

$$dx=\varphi'(t)dt,\qquad dy=\psi'(t)dt,$$

звідки

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{4.4}$$

Другу похідну від y за x y''_{xx} знаходимо, диференціюючи за x співвідношення (4.4):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{dx}.$$

Приклад. $x=\sqrt{t}$, $y=\sqrt[3]{t}$, знайти y'_x та y''_{xx}.

Розв'язування. Диференціюємо вихідні рівності

$$dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt,\qquad dy=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}dt,$$

звідси

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{t}}{3\sqrt[3]{t^2}}=\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{6}}.$$

Знаходимо другу похідну:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{6}}\right)}{dx}=\frac{-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}t^{-\frac{7}{6}}}{\frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}}}=-\frac{2}{9}t^{-\frac{2}{3}}=-\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}.$$

Завдання 4.1. Знайти похідні даних функцій:

1. **а)** $y=e^{ax}(a\sin nx-n\cos nx)$ **при** $x=0$,

б) $y=(e^{\cos x}+3)^2$, **в)** $y=ctg\sqrt[3]{1+x^2}$,

г) $y=x^{\ln x}$, **д)** $y=10^{x\cdot tgx}$,

е) $y^2x=e^{y/x}$, **ж)** $y=\dfrac{x}{x^2+1}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases}x=\cos\dfrac{t}{2},\\ y=t-\sin t,\end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

2. **а)** $y=(1+2x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ **при** $x=0$,

б) $y=\dfrac{\sin^2 x}{2+3\cos^2 x}$, **в)** $y=3^{arctgx^2}$,

г) $y=(arcctgx)^{\ln x}$, **д)** $y=x\cdot e^{1-\cos x}$,

е) $x-y=a\sin y$, **ж)** $y=\ln ctg\,2x$, **знайти** y'', з) $\begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 2t^2, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

3. а) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2}tgx)$ **при** $x = 0$,

б) $y = \cos\dfrac{\arcsin x}{2}$, в) $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$,

г) $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$, д) $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$,

е) $x - y + e^y arctgx = 0$, ж) $y = x^3 \ln x$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = t^3 + 8t, \\ y = t^5 + 2t, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4. а) $y = (x+2)^2 \cdot e^{-x}$ **при** $x = 0$,

б) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, в) $y = \arccos\sqrt{1 - 3x^2}$,

г) $y = e^{x^x}$, д) $y = 10^{1-\sin^4 3x}$,

е) $x - y + arcctgy = 0$, ж) $y = x \arcsin x$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = t + \ln\cos t, \\ y = t - \ln\sin t, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

5. а) $y = x^4\left(\dfrac{1}{2}\ln x + 1\right)^2$ **при** $x = 1$,

б) $y = 5\sqrt[5]{x^2 + x + \dfrac{1}{x}}$, в) $y = \dfrac{1}{3}tg^3 x - tgx + x$,

г) $y = (x + x^2)^x$, д) $y = 2^{3x}$,

е) $x^y = y^x$, ж) $y = x\sqrt{1+x}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

6. а) $y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} - \ln tg\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$ **при** $x = 0$,

б) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$, в) $y = xshx - chx$,

г) $y = (\ln x)^x$, д) $y = \ln\ln(1 + x^2)$, е) $y = x \cdot tgy$, ж) $y = arctgx$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \cos t, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

7. а) $y = \dfrac{1}{2a}\dfrac{x}{x^2 + a^2} + \dfrac{1}{2a^3} arctg\dfrac{x}{a}$ **при** $x = 0$,

б) $y = arctg\sqrt{\dfrac{3 - x}{x - 2}}$, в) $y = e^{ch^2 x}$,

г) $y = (\sin x)^{\cos x}$, д) $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$,

е) $\cos(xy) = x$, ж) $y = e^{ctg^2 x}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

8. а) $y = \sqrt{x^2 - a^2}\,\arccos\dfrac{a}{x}$ **при** $x = a$,

б) $y = e^x \sin x \cos^3 x$, в) $y = (1 + xarctgx)\big/\sqrt{1 + x^2}$,

г) $y = \left(\dfrac{x}{1 + x}\right)^x$, д) $y = 3^{tgx}$,

е) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$, ж) $y = e^{arctg^2 x}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

9. а) $y = \sqrt{2}e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ **при** $x = 0$,

б) $y = \log_3(x^2 - 1)$, в) $y = \arcsin(tg2x)$,

г) $y = (\cos 3x)^{x^2}$, д) $y = 2^{tg\frac{1}{x}}$,

е) $y + x - arctg\dfrac{x}{y} = 0$, ж) $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

10. **а)** $y = \dfrac{1+\cos 2x}{\sin^2 \dfrac{x}{2}}$ **при** $x = 0$,

б) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$, **в)** $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$,

г) $y = x^{\sqrt{x+1}}$, **д)** $y = 4^{1-\cos\frac{x}{2}}$,

е) $tg(x+y) - xy = 0$, **ж)** $y = \dfrac{\ln x}{x}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^5 t, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

11. **а)** $y = \dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+4}}$ **при** $x = 0$,

б) $y = arcctg(ctg^2 x)$, **в)** $y = 2^x \cdot e^{-2x}$,

г) $y = (\ln x)^{\sin x}$, **д)** $y = 3^{\arcsin\frac{x}{2}}$,

е) $x^3 + y^3 + 3xy = 5$, **ж)** $y = 2\sqrt{4x^2+3}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

12. **а)** $y = \dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}}$ **при** $x = 0$,

б) $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, **в)** $y = arctg(\cos^2 x)$,

г) $y = 5x^{\sqrt{x-1}}$, **д)** $y = 5^{\ln^2 x}$,

е) $\ln y = arctg\dfrac{x}{y}$, **ж)** $y = \dfrac{x^2+1}{x}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = e^{t^3}, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

13. **а)** $y = x\sqrt{1-x^2} + \ln(x + \sqrt{1-x^2})$ **при** $x = 0$,

б) $y = \dfrac{\arccos\sqrt[3]{x}}{x}$, **в)** $y = \sqrt{x^3 + x + \dfrac{1}{x}}$, г) $y=(x-x^2)^x$, д) $y=3^{ctg^2 x}$,

е) $x\cdot tgy-y\cdot ctgx=0$, ж) $y=x-arctgx$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t), \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

14. а) $y=e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ **при** $x=1$,

б) $y=\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^2)^5}$, в) $y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$,

г) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, д) $y=4^{-\sin^2 x}$,

е) $ye^y=e^{x+y}$, ж) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\dfrac{1}{2}t^2, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

15. а) $y=a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+x\sqrt{a^2+x^2}$ **при** $x=0$,

б) $y=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{(1-x^2)^2}$, в) $y=\sqrt{x}arctg\dfrac{1}{x}$,

г) $y=x^{x^2}$, д) $y=7^{\cos^2\frac{x}{2}}$,

е) $x-y=e^y$, ж) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\cos 3x}{3}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x=e^{-t}, \\ y=e^{2t}, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

16. а) $y=\sqrt{1-x}\arccos\sqrt{x}$ **при** $x=0$,

б) $y=\dfrac{b}{a}3\dfrac{\sin ax}{\cos ax}$, в) $y=arctg^2(\ln x)$,

г) $y=(tgx)^{\sqrt{x}}$, д) $y=5\sqrt[5]{(1-3x^2)^3}$,

е) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{a^2}$, ж) $y=-x^4+2x$, **знайти** y'', з) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t^2}, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **.**

17. а) $y = \sqrt{4 - x^2} \arcsin\dfrac{x}{2}$ **при** $x = 0$**,**

б) $y = \ln\sin 2x$**,** в) $y = \sqrt{\cos x} \cdot a^{\sqrt{\cos x}}$**,**

г) $y = \sqrt[x]{x}$**,** д) $y = (12)^{\frac{1}{x^2}}$**,**

е) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$**,** ж) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$**,** **знайти** y''**,**

з) $\begin{cases} x = tgt, \\ y = \sin t, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **.**

18. а) $y = \sin\dfrac{x}{2}\cos^3\dfrac{x}{3}$ **при** $x = \pi$**,**

б) $y = e^{\sin^2 x} tgx$**,** в) $y = \dfrac{arctgx}{x^2}$**,**

г) $y = \left(tg\dfrac{x}{2}\right)^{3x}$**,** д) $y = 3^{\ln^2 3x}$**,**

е) $\sqrt{xy^3} = \dfrac{y - 1}{x}$**,** ж) $y = \sqrt[3]{x}(1 + x^2)$**, знайти** y''**,**

з) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \sqrt[3]{t}, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **.**

19. а) $y = ctg\dfrac{x}{3}\sin^2 x$ **при** $x = \dfrac{\pi}{2}$**,**

б) $y = e^{3x} sh^2 x$**,** в) $y = \dfrac{3x^3}{\sqrt{1 - 2x^2}}$**,**

г) $y = (arctgx)^x$**,** д) $y = 3^{1/\sqrt[3]{x^2}}$**,**

е) $tg\dfrac{y}{x} = y\sqrt{x}$**,** ж) $y = x \cdot arctgx$**, знайти** y''**,**

з) $\begin{cases} x = arctgt, \\ y = 1/(1 + t^2), \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **.**

20. **а)** $y = e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$ **при** $x = 0$,

б) $y = \arcsin 2x \big/ \sqrt{1-4x^2}$, **в)** $y = \sqrt[3]{x}\ln x \cdot \sin 3x$,

г) $y = x^{e^x}$, **д)** $y = 2^{arctg\frac{1}{x}}$,

е) $xy = e^{\frac{y}{x}}$, **ж)** $y = x^2\sqrt{1-x^2}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2}, \\ y = arctgt, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

21. **а)** $y = \sqrt{x^2+1}\ln(x + \sqrt{x^2+1})$ **при** $x = 0$,

б) $y = \sqrt[3]{x} \big/ (1 - \sqrt[3]{x^2})$, **в)** $y = x^2 arctg 3x^2$,

г) $y = (\sin 2x)^{\sqrt{x}}$, **д)** $y = 10^{\lg 3x}$,

е) $\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{y}{x^2}$, **ж)** $y = x^2\ln x$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = 1/t, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

22. **а)** $y = (1 + x - x^2)e^{-\frac{x}{2}}$ **при** $x = 0$,

б) $y = \sqrt[3]{x}\arcsin\dfrac{x}{2}$, **в)** $y = x\sqrt{x} \big/ (1 - 2x^2)$,

г) $y = (\sqrt{2}x)^{\ln x}$, **д)** $y = 9^{\sin^2 x}$,

е) $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = x^2 + y^2$, **ж)** $y = \sqrt[3]{1-x^2}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = a\cos\dfrac{t}{2}, \\ y = a\sin^2\dfrac{t}{2}, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

23. **а)** $y=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ **при** $x=0$,

б) $y=\ln tg\dfrac{x}{4}$, **в)** $y=1/\cos x(1+\cos x)$,

г) $y=\sqrt[x]{a^2-x^2}$, **д)** $y=10^{\log_2 x}$,

е) $\ln(1-y^2)=x\sqrt{y}$, **ж)** $y=x\sqrt{a+bx}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x=\ln(1-t), \\ y=t^2, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

24. **а)** $y=(\sin 2x+2x+2)\dfrac{1}{\cos x}$ **при** $x=\pi$,

б) $y=x\sin\dfrac{x}{2}ctg^2\dfrac{x}{2}$, **в)** $y=(1-x)/\sqrt[3]{x}$,

г) $y=\sqrt[2x]{tg\dfrac{x}{2}}$, **д)** $y=\sqrt[3]{x}\cdot arctg\dfrac{x}{2}$,

е) $e^{xy}=x+y$, **ж)** $y=\log_2 5x$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x=\ln(1-t^2), \\ y=t^2, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

25. **а)** $y=e^{-ax}(\cos bx+\sin bx)$ **при** $x=0$,

б) $y=xtg6x/(1-\cos 3x)$, **в)** $y=\sqrt[5]{x^2}\ln(1-x^2)$,

г) $y=(tgx)^{2/x}$, **д)** $y=10^{1/(1+x^2)}$,

е) $xy=arctg\dfrac{y}{x}$, **ж)** $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x=1/\sqrt[3]{t}, \\ y=t^2, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

26. **а)** $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\dfrac{x}{a}$ **при** $x=0$,

б) $y=x^2(e^{1/x}-1)$, **в)** $y=(e^{2x}-1)/e^x$,

г) $y=(arctgx)^{1/x}$, **д)** $y=5^{tg\frac{1}{x}}$, е) $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = x^2 - y^2$, ж) $y = xe^{\frac{1}{x}}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = \sqrt[3]{t}, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

27. а) $y = (x+1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ **при** $x = 0$,

б) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})/x$, в) $y = x\arcsin\dfrac{a}{x}$,

г) $y = \sqrt[3]{1+e^x}$, д) $y = (1/2)^{1/\sin x}$,

е) $\sqrt{xy} = \ln y$, ж) $y = arctgx$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t}, \\ y = \dfrac{1}{t}, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

28. а) $y = \sqrt[3]{9+3x^2} \cdot \sin^2\dfrac{x}{2}$ **при** $x = 0$,

б) $y = 2^{tgx} \cdot \cos^2 x$, в) $y = \arcsin x/\sqrt[3]{x^2}$,

г) $y = x^{\sin 2^x}$, д) $y = \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$,

е) $\sqrt{xy^3} = \log_2(x+y)$, ж) $y = x\sqrt{1+x^3}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \ln(1+t^2), \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

29. а) $y = (tg3x + \cos^2 x)/\sin 2x$ **при** $x = \dfrac{\pi}{3}$,

б) $y = 3^{\cos 2x} \cdot ctg2x$, в) $y = (x\sqrt[3]{x} - 3)/\sqrt{x^3}$,

г) $y = (\sin 5x)^{3x}$, д) $y = \log_3(5x - \sqrt[3]{x})$,

е) $e^{x/y} = y\sqrt{x}$, ж) $y = x^2/\sqrt{1+x^2}$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = 2t^2, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

30. **а)** $y = e^{1/x}\sqrt{1+x^2} - \arcsin\dfrac{x}{2}$ **при** $x = 1$,

б) $y = 2^{\ln(1+x^2)} \cdot \sqrt{1+x^2}$ **,** **в)** $y = (\sin^2 x - \cos x)/\cos x$,

г) $y = (arctgx)^{3x}$, **д)** $y = x^2\sqrt[3]{1-x^2}$ **,**

е) $\ln(x+y) = \sqrt{1-xy}$ **,** **ж)** $y = arctg^2 x$, **знайти** y'',

з) $\begin{cases} x = \cos 3t, \\ y = \sin^2 3t, \end{cases}$ **знайти** $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **.**

4.2. Механічний і геометричний зміст похідної

<u>Завдання 4.2.</u> Розв’язати задачі.

1. Дано рівняння прямолінійного руху $s = t^3 + \dfrac{3}{t}$. Знайти середню швидкість руху за проміжок часу від $t = 4$ до $t = 4 + \Delta t$, покладаючи $\Delta t = 2$; 1; $0{,}1$; $0{,}03$.

2. Маємо тонкий неоднорідний стержень AB довжиною $l = 20$ см. Маса відрізка AM збільшується пропорційно квадрату відстані від точки M до точки A, причому відомо, що маса відрізка $AB = 20$ см дорівнює 8 г. Знайти: а) середню лінійну густину відрізка стержня $AM = 2$ см; б) всього стержня ; в) густину стержня в точці M .

3. Шосе проходить через річку. Міст має форму параболи $x^2 = 2py$. Яким треба зробити схил насипу до мосту, щоб перехід з мосту на уклін був плавний? Довжина мосту $l = 20$ см, стріла провису $f = 0{,}5$ м.

4. Траєкторія руху точки задається рівнянням $16x^2 + 9y^2 = 400$. В якій точці проекції швидкості мають однакові значення, але протилежні знаки?

5. Насос подає воду в циліндричний бак, діаметр якого 60 м. Висота підйому води збільшується на 1 дм в секунду. Знайти швидкість наповнення баку.

6. Тіло масою 4 г рухається прямолінійно за законом $x = t^2 + t + 1$. Визначити кінетичну енергію тіла в момент 5 с.

7. Колесо обертається таким чином, що кут повороту пропорційний квадрату часу. Перший оберт був зроблений колесом за час $T = 8$ с. Знайти кутову швидкість через $T = 32$ с після початку руху.

8. Знайти кут між кривою $y = x - x^3$ і прямою $y = 5x$.

9. Ланцюг висячого мосту розташовано по дузі параболи $x^2 = 2py$. Проліт мосту $AB = 2l = 50$ м, стріла провису $OC = f = 5$ м. Визначити кут провису в точці A.

10. Визначити середню швидкість зміни функції $y = \sin\frac{1}{x}$ на відрізку $[2/\pi, 6/\pi]$.

11. Точка рухається по параболі $y = 8x - x^2$ так, що її абсциса змінюється за законом $x = \sqrt{t}$ (x вимірюються в метрах, t - в секундах). Якою буде швидкість зміни ординати точки через 9 с після початку руху?

12. Радіус кулі зростає рівномірно з швидкістю 5 см/с. Якою буде швидкість зміни об'єму кулі в момент, коли його радіус стає рівним 50 см?

13. Колесо обертається так, що кут повороту пропорційний квадрату часу. Перший оберт був зроблений за 8 с. Знайти кутову швидкість через 64 с після початку руху.

14. По осі абсцис рухаються дві точки, які мають закони руху $t = 100 + 5t$ і $x = t^2/2$. З якою швидкістю віддаляються вони одна від одної в момент зустрічі (x вимірюється в метрах , t - в секундах)?

15. Закон руху матеріальної точки, яку кинуто під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0, без урахування опору повітря має вигляд

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \qquad y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2},$$

де t - час, g - прискорення вільного падіння. Визначити координати і величину вектора швидкості.

16. Профіль підйому шосе має формулу кривої $y = \frac{x}{1+x}$. Визначити кут нахилу підйому в його початку.

17. Камінь, який кинуто у ставок, викликає ряд концентричних хвиль. З якою швидкістю зростає площа, яку захоплено хвилею, до кінця другої секунди, якщо радіус зовнішньої хвилі збільшується з швидкістю 2 м/с?

18. Верхній кінець сходів довжиною 6 м зісковзує по вертикальній стіні. Знайти відношення швидкостей верхнього та нижнього кінців сходів, коли вони утворюють із стіною кут 60^0.

19. Людина зростом $1{,}8$ м віддаляється з швидкістю $1{,}5$ м/с від ліхтаря, який підвішений на висоті 3 м від землі. Знайти швидкість, з якою рухається кінець його тіні.

20. Вагон надземної залізниці, яка проходить на висоті 9 м понад землею, в даний момент знаходиться над трамвайним вагоном, що рухається. Колії їх утворюють прямий кут. Швидкість першого вагона 12 м/с, другого - 6 м/с. З якою швидкістю будуть збільшуватись відстані між вагонами через 6 с?

21. Кількість теплоти Q *Дж*, яка необхідна для нагріву 1 кг води від 0 до t^0C, визначається за формулою

$$Q = t + 2\cdot 10^{-5}t^2 + 3\cdot 10^{-7}t^3.$$

Знайти теплоємність води при $t = 100^0C$.

22. Маса $m(t)$ радіоактивної речовини змінюється за законом

$$m = m_0 2^{(t_0 - t)/T},$$

де m_0 - маса в момент t_0; t - час; T - період піврозпаду.

Довести, що швидкість піврозпаду радіоактивної речовини пропорційна її кількості. Знайти коефіцієнт пропорційності.

23. Кінці відрізка $AB = 5$ м ковзають по перпендикулярних прямих OX і OY. Швидкість переміщення кінця A дорівнює 2 м/с. Якою буде швидкість переміщення кінця B в той момент, коли кінець A знаходиться від початку координат на відстані $OA = 3$ м?

24. Знайти точки, в яких дотична до кривої $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ паралельна осі абсцис.

25. В якій точці дотична до параболи $y = x^2 - 7x + 3$ паралельна прямій $5x + y - 3 = 0$?

26. Знайти рівняння параболи $y = x^2 + bx + c$, що дотикається до прямої $y = x$ у точці $(1;1)$?

27. В якій точці кривої $y^2 = 2x^3$ дотична перпендикулярна до прямої $4x - 3y + 2 = 0$?

28. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ у точці з ординатою $y = 3$.

29. Визначити, в яких точках і під яким кутом перетинаються графіки функцій $f_1(x) = 1/x$, $f_2(x) = \sqrt{x}$.

30. Визначити, в яких точках і під яким кутом перетинаються графіки функцій $f_1(x) = 4x^2 + 2x - 8$, $f_2(x) = x^3 - x + 10$.

4.3. Наближені обчислення за допомогою диференціала

Диференціал dy функції $y = f(x)$ являє собою головну частину приросту Δy цієї функції, лінійну відносно Δx.

Різниця між приростом і диференціалом функції є нескінченно малою більш високого порядку відносно Δx (Δy і dy - еквівалентні нескінченно малі). Тому при малих Δx має місце наближена рівність

$$\Delta y \approx dy$$

або

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (4.5)$$

Приклад. Знайти наближене значення

$$\sqrt[4]{16,64}.$$

Розв'язування. даному випадку

$$f(x) = \sqrt[4]{x}, \qquad f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$$

Поклавши $x = 16$, $\Delta x = 0,64$ і застосувавши формулу (4.5), одержимо

$$\sqrt[4]{16,64} = \sqrt[4]{16 + 0,64} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4 \cdot 8} \cdot 0,64 = 2,02.$$

Завдання 4.3. Обчислити приблизно.

1. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 26,46$.

2. $y = x^{21}$, $x = 0,998$.

3. $y = \sqrt[5]{x^2}$, $x = 1,03$.

4. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$, $x = 0,97$.

5. $y = 1 / \sqrt{2x^2 + x + 1}$, $x = 1,016$.

6. $y = \arcsin x$, $x = 0,51$.

7. $y = \ln tgx$, $x = 47^0 15'$.

8. $y = arctgx$, $x = 1,05$.

9. $y = e^{1-x^2}$, $x = 1,05$.

10. $y = e^{0,1x(1-x)}$, $x = 1,05$.

11. $arctg\, 0,97$.

12. $\sqrt{\frac{(2,037)^2 - 3}{(2,037)^2 + 5}}$.

13. $e^{0,2}$.

14. $\cos 61^0$.

15. $\sqrt[3]{200}$.

16. $\sqrt[5]{243{,}45}$.

17. $\sqrt[10]{1000}$.

18. $tg45^0 3'20''$.

19. $\cos(7\pi/36)$.

20. $\cos 151^0$.

21. $y = \sin x$, $x = 359^0$.

22. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 125{,}1324$.

23. $y = \sqrt{1 + x + \sin x}$, $x = 0{,}01$.

24. $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}$, $x = 1{,}01$.

25. $y = \sqrt[4]{2x - \sin\frac{\pi x}{2}}$, $x = 0{,}02$.

26. $y = \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}}$, $x = 1{,}05$.

27. $y = \sqrt[4]{x}$, $x = 15{,}8$.

28. $\sqrt[7]{100}$.

29. $\sqrt{120}$.

30. $\sqrt[3]{9}$.

4.4. Задачі про найбільші та найменші значення

Для розв’язування таких задач необхідно, виходячи з умови задачі, вибрати незалежну змінну, виразити через неї досліджувану величину, а потім знайти шукане найбільше або найменше значення одержаної функції. Область зміни незалежної змінної визначається з умови задачі.

<u>Завдання 4.4.</u> Розв’язати задачі:

1. У точках A і B знаходиться джерело світла силою відповідно F_1 та F_2. Відстань між точками дорівнює a. На відрізку AB знайти найменш освітлену точку M.

Вказівка. Освітлення точки джерелом світла силою F обернено пропорційне квадрату відстані r її від джерела світла: $E = \frac{kF}{r^2}$, $k = const$.

2. З круглого бруса діаметром α потрібно вирізати балку прямокутного поперечного перерізу. Якими повинні бути ширина та висота цього перерізу для того, щоб балка чинила найбільший опір на вигин?

Вказівка. Опір балки на вигин пропорційний добутку ширини x її поперечного перерізу на квадрат його висоти y: $Q = kxy^2$, $k = const$.

3. Опір балки прямокутного поперечного перерізу на стиск пропорційний площі цього перерізу. Якими повинні бути розміри перерізу балки, яку вирізано з круглого брусу діаметром α, щоб його опір на стиск був найбільшим?

4. Стріла прогину балки прямокутного поперечного перерізу обернено пропорційна добутку ширини цього перерізу на куб його висоти. Якими повинні бути розміри перерізу балки, яку вирізано з круглого бруса діаметром α, з найменшою стрілою прогину (найбільшої жорсткості)?

5. Дві точки рухаються по осях координат у додатних напрямках зі сталими швидкостями v_1 та v_2. В який момент відстань між точками, що рухаються, буде найменшою, якщо в початковий момент вони займали положення $(-3;0)$ і $(0;5)$?

6. Водний канал повинен мати задані глибину та площу поперечного перерізу. Якщо поперечний переріз є рівнобічна трапеція, то яким повинен бути кут нахилу її бічних сторін, щоб при посуванні води по каналу втрати на опір тертя були б найменшими, тобто щоб сума нижньої основи та бічних сторін трапеції була б найменшою?

7. Завод A розташовано на відстані $a(км)$ від залізниці, яка прямує до міста B, і на відстані $b(км)$ - від міста B. Під яким кутом до залізниці належить провести шосе від заводу A, щоб доставка вантажу з A до B була найдешевшою, якщо вартість перевезення по шосе в k разів більша, ніж по залізниці?

8. Від каналу шириною $a(м)$ відходить під прямим кутом інший канал шириною $b(м)$. Якої найбільшої довжини деревину можна сплавляти цими каналами з одного в другий (не враховуючи товщини деревин)?

9. На якій висоті над центром круглого столу радіуса R належить помістити електричну лампочку, щоб освітленість краю столу була б найбільшою?

Вказівка. Яскравість освітлення виражається формулою $I = \dfrac{k\sin\varphi}{r^2}$, де k - сила джерела світла; φ - кут нахилу променів; r - відстань джерела світла від освітлюваної площини.

10. Вікно має форму прямокутника, завершеного півколом. Периметр вікна дорівнює a. При яких розмірах сторін прямокутника вікно буде пропускати найбільшу кількість світла?

11. Добові витрати при плаванні судна складалися з двох частин: сталої $a(грн.)$ та змінної, яка зростає пропорційно кубу швидкості. При якій швидкості v плавання судна буде найбільш економічним?

12. Який сектор належить вирізати з кола радіуса R, щоб з частини яка залишилася, можна було б зверстати лійку найбільшої місткості?

13. У фокусах еліпса, велика піввісь якого a і ексцентриситет ε, розташовані точкові заряди q_1 і q_2. Знайти на даному еліпсі точки найбільшого та найменшого потенціалів цих зарядів.

Вказівка. Потенціал точкового заряду $u(r)=\dfrac{q}{r}$, де q - величина заряду; r - відстань від точки до заряду. Потенціал суми зарядів дорівнює сумі потенціалів. Відстань від фокусів до точки на еліпсі знаходиться за формулами: $r_1=a-\varepsilon x$, $r_2=a+\varepsilon x$.

14. У точках $(-a,0)$ і $(a,0)$ еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ розташовані точкові заряди q_1 і q_2. Знайти на даному еліпсі точки найбільшого та найменшого потенціалів цих зарядів. (Див. вказівку до задачі **13**).

15. Важіль другого роду має точку опори A; в точці B ($AB=a$) підвішений вантаж P . Вага одиниці довжини важеля дорівнює k. Якою повинна бути довжина важеля, щоб вантаж P зрівноважувався найменшою силою?

Вказівка. Момент, який зрівноважує сили, повинен дорівнювати сумі моментів вантажу P та важеля.

16. Вантаж вагою P, який розташовано на горизонтальній площині, повинен бути зрушений прикладеною до нього силою F. Сила тертя пропорційна силі, яка притискає тіло до площини, і направлена проти зсувної сили. Коефіцієнт пропорційності (коефіцієнт тертя) дорівнює k. Під яким кутом φ до горизонту треба прикласти силу F, щоб значення її було найменшим?

17. На сторінці книги друкований текст повинен займати S квадратних сантиметрів. Верхнє та нижнє поля повинні бути по $a(см)$, праве та ліве - по $b(см)$. Якщо брати до уваги тільки економію паперу, якими повинні бути найбільш вигідні розміри сторінки?

18. З якої точки осі OX відрізок осі OY, який лежить між точками $(0,h)$ і $(0,H)$, буде видно під найбільшим кутом $(H>h>0)$?

19. Через точку всередині прямого кута провести пряму так, щоб її відрізок між сторонами кута був найменшим.

20. Через точку всередині прямого кута провести пряму так, щоб периметр одержаного трикутника був найменшим.

21. Знайти на параболі $y^2=2px$ точку, найближчу до точки $(a,0)$. Дослідити результат у залежності від a.

22. По кутах прямокутної пластинки зі сторонами a і b вирізані чотири рівних квадрата. З хрестоподібної фігури, що залишилася, зроблено коробочку, висота якої дорівнює стороні квадрата. Знайти довжину сторін вирізаного квадрата, при якій одержується найбільший об'єм коробочки.

23. Визначити відстань розташованої на осі кільця точки A, при якій напруженість поля тяжіння тонкого кільця радіуса R і масою m у точці A має екстремум.

Вказівка. Напруженість E виражається залежністю $E = \frac{mx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$,

де x - відстань точки A від центра кільця.

24. Консоль довжиною l квадратного перерізу $(a \times a)$ навантажена на вільному кінці силою P, яка діє під кутом α до осі стержня. Визначити кут α, при якому напруження σ на забиванні консолі досягає максимального значення та визначається залежністю

$$\sigma = -\frac{P}{a^2}(\cos\alpha + \frac{6l}{a}\sin\alpha).$$

25. Знайти точку A прикладення сили P до троса довжиною l з горизонтальним натягом H, в якій прогин дуги буде найбільшим, якщо $f = \frac{P(l-a)a}{Hl}$, де a - відстань від точки A до точки закріплення троса.

26. Визначити, яким повинен бути опір r електронагрівного приладу, який включено в ланцюг струму, що має опір R, для того щоб у нього виділити максимальну кількість теплоти, якщо $Q = rI^2$, $I = \frac{E}{R+r}$.

27. Опір f дороги руху автомобіля при швидкості v виражається формулами :

1) на асфальті $f = 14{,}5 + 0{,}25v$; 2) на деревині $f = 18 + 0{,}25v$; 3) на гарному шосе $f = 24 - \frac{2}{3}v + \frac{1}{30}v^2$; 4) на поганому шосе $f = 28 - 0{,}25v + 0{,}02v^2$; 5) на гранітній бруківці $f = 17{,}5 - \frac{1}{40}v^2$; 6) на бруківці $f = 29 - \frac{2}{3}v + \frac{1}{15}v^2$; 7) на м'якій ґрунтовій дорозі $f = 36{,}5 - \frac{3}{4}v + \frac{1}{30}v^2$.

Визначити для тих випадків, де це можливо:

а) швидкість, при якій опір повинен бути найменшим ; б) цей найменший опір.

28. Канал, який підводить воду до турбіни, має в перерізі рівнобічну трапецію площею S та глибиною h. Визначити гідравлічно найвигіднішу форму перерізу.

Вказівка. Гідравлічно найвигіднішою формою є така, при якій змочений периметр - найменший.

29. Вибрати місце для будівництва моста через річку, щоб довжина дороги між двома пунктами, які розташовані по різні боки від річки, була найменшою.

30. Потяг рухається прямолінійно зі швидкістю v_0. Раптово на шляху виникає перешкода і машиніст вмикає гальмовий механізм. З цього моменту гальмовий шлях змінюється за законом $s = v_0 t - \alpha t^3/3$, де - $\alpha - const$. Через який час після початку гальмування він зупиниться? Який шлях гальмування потяга?

4.5. Правило Лопіталя

Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ такі, що:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$

або $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \pm\infty$;

2) вони мають перші похідні в околі точки $x = a$;

3) існує $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$,

тоді існує також $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$

і є правильною рівність $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Суть цього правила полягає в тому, що у випадку невизначеностей вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ обчислення границі відношення функцій при дотриманні вказаних вимог замінюють обчисленням границі відношення їх похідних.

Якщо і відношення похідних приводить до одного з цих виглядів невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ до цього відношення можна застосувати правило Лопіталя і т.д.

Невизначеність вигляду $[0\cdot\infty]$ можна звести до невизначеності вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Дійсно, нехай

$$\lim_{x\to a} f(x)=0, \qquad \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty.$$

Записавши $f(x)\cdot\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$ або $f(x)\cdot\varphi(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$, зводимо задачу до розглянутої раніше.

Невизначеності виглядів $[1^{\infty}]$, $[\infty^{0}]$, $[0^{0}]$ зводяться до невизначеності вигляду $[0\cdot\infty]$ за допомогою тотожності

$$[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)} \tag{4.6}$$

у припущенні, що $f(x)>0$ (це припущення необхідно зробити, оскільки у показнику степеня в правій частині рівняння $f(x)$ стоїть під знаком логарифма). Тепер можна записати

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)},$$

тобто все зводиться до знаходження границі $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)$.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{1/x^2}$ (невизначеність вигляду $[1^{\infty}]$).

Розв'язування. На підставі (4.6) $\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{1/x^2}=e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{tgx}{x}}$, тому

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{1/x^2}=\lim_{x\to+0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{tgx}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{tg}{x}},$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{tgx}{x}}{x^2}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln tgx-\ln x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{tgx}\cdot\sec^2 x-\frac{1}{x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{2x-\sin 2x}{x^2\sin 2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{2-2\cos 2x}{2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{2\sin 2x}{\sin 2x+2x\cos 2x+2x\cos 2x-2x^2\sin 2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{4\cos 2x}{2\cos 2x+4\cos 2x-8x\sin 2x-4x\sin 2x-4x^2\cos 2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{2+4}=\frac{1}{3}.$$

Тоді $\lim_{x\to0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{1/x^2}=e^{1/3}$.

Завдання 4.5. Знайти границю функцій:

1. $\lim_{x\to\infty}x^{1/x}$.

2. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$.

3. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)^{1/x}$.

4. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)^{1/x}$.

5. $\lim_{x\to0}(\cos ax)^{1/x^2}$.

6. $\lim_{x\to0}x^x$.

7. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$.

8. $\lim_{x\to+0}(-\ln x)^x$.

9. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{\sin 2x}$.

10. $\lim_{x\to2\pi}(\cos x)^{1/\sin^2 2x}$.

11. $\lim_{x\to4\pi}(\cos x)^{ctgx/\sin 4x}$.

12. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(ctg\frac{x}{2}\right)^{1/\cos x}$.

13. $\lim_{x\to3}(\sin x/\sin 3)^{1/(x-3)}$.

14. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{18\sin x/ctgx}$.

15. $\lim_{x\to\pi}\left(ctg\frac{x}{4}\right)^{1/\cos\frac{x}{2}}$.

16. $\lim_{x\to2\pi}(\cos x)^{1/\sin 3x}$.

17. $\lim_{x\to a}(\sin x/\sin a)^{1/(x-a)}$.

18. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{1/\cos\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)}$.

19. $\lim\limits_{x\to 2}(\cos x/\cos 2)^{1/(x-2)}$.

20. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{tg\frac{\pi x}{2a}}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{x}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(tg\,\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$.

24. $\lim\limits_{x\to a}(tgx/tga)^{ctg(x-a)}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{1/x^2}$.

26. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

28. $\lim\limits_{x\to 1}x^{1/(1-x)}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}x^{k/(1+\ln x)}$.

30. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2\sin x/ctgx}$.

Завдання 4.6. Знайти границю функцій:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(arctgx/x)^{1/x^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right)^{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(thx/x)^{x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(tgx/x)^{1/x^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6-x}{3}\right)^{tg\frac{\pi x}{6}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

10. $\lim\limits_{x\to +0}x^{\frac{3}{1+2\ln x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{9-2x}{3}\right)^{tg\frac{\pi x}{6}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}(1/x)^{tg5x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{1/x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\frac{2}{x}\right)^{3x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} x^{2x}$.

20. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{8}} (tg2x)^{tg4x}$.

21. $\lim\limits_{x\to \pi} \left(tg\dfrac{x}{2}\right)^{\sin x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/\sin^2 2x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 2\pi} (ctgx)^{ctgx/\sin 4x}$.

24. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (ctgx)^{1/\cos 2x}$.

25. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \left(\sqrt[3]{tgx}-1\right)/(2\sin^2 x-1)$.

26. $\lim\limits_{x\to 0} (e^{tgx}-e^{x})/(tgx-x)$.

27. $\lim\limits_{x\to 0} (e^{x}-1-x^3)/\sin^6 2x$.

28. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (tgx)^{2x-\pi}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0} x^{1/\ln(e^x-1)}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0} (e^{x}+x)^{1/x}$.

4.6. Дослідження функцій $y = f(x)$

Дослідження функцій за допомогою похідних та побудову їх графіків зручно виконувати за наступною схемою.

1. Знайти область визначення функції, інтервали неперервності та з’ясувати характер поведінки функції при підході до граничних точок області визначення та інтервалів монотонності.

2. З’ясувати, чи буде функція парною, непарною або періодичною.

3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат та інтервали її знакосталості.

4. Знайти асимптоти графіка функції.

5. Визначити похідну функції, область визначення похідної, нулі похідної, інтервали зростання та спадання функції, точки екстремуму та значення функції в цих точках.

6. Знайти другу похідну функції, область визначення другої похідної, нулі другої похідної, інтервали опуклості та вгнутості, точки перегину графіка функції.

7. Побудувати графік функції, використовуючи всі одержані результати дослідження.

Приклад. Побудувати графік функції $y = \sqrt{x^3/(x-2)}$.

1. Область визначення $D_f = \left]-\infty, 0\right] \cup \left]2, \infty\right[$.

На інтервалах $]-\infty,0]$ і $]2,\infty[$ функція є неперервною, оскільки підкореневий вираз - відношення неперервних функцій в D_f, де знаменник відмінний від нуля, а добування кореня не порушує неперервності. Для з'ясування поведінки функції при підході до граничних точок знайдемо

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}=+\infty; \qquad f(0)=0;$$

$$\lim_{x\to2+0}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}=+\infty; \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}=+\infty.$$

2. Функцію визначено на несиметричній множині $]-\infty,0]\cup]2,\infty[$. Отже, з визначення парності та непарності функції випливає, що дана функція не може бути ні парною, ні непарною. Функція також не періодична.

3. З рівняння $f(x)=0$ знаходимо нулі функції. Дана функція має тільки один нуль: $x=0$. Для знаходження точки перетину графіка функції з віссю OY в рівнянні $y=f(x)$ покладаємо $x=0$. Одержуємо $y=0$. В своїй області визначення функція додатна.

4. Оскільки $\lim\limits_{x\to2+0}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}=+\infty$, пряма $x=2$ є вертикальною асимптотою кривої. Горизонтальних асимптот крива не має, оскільки $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}=+\infty$ і $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}=+\infty$ не є скінченними величинами.

Визначимо, чи існують похилі асимптоти :

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x-2}}=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-k_1x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x-2}}=1.$$

Отже, існує права похила асимптота $y=x+1$.

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{x}=-1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - k_2 x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{(-x^3)}{2-x}} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{-x} + x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{-x} - \sqrt{2-x}\right)}{\sqrt{2-x}} = -1.$$

Існує ліва похила асимптота $y = -x - 1$.

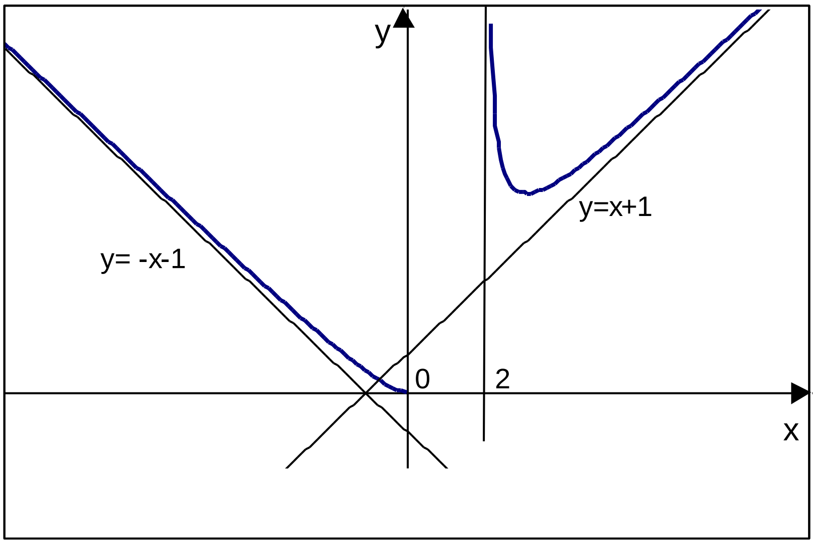
5. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}} \cdot \dfrac{3x^2(x-2) - x^3}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2(x-3)}{\sqrt{x^3(x-2)^3}}$.

Похідна має розрив при $x = 2$ і дорівнює нулю при $x = 3$. Враховуючи область визначення функції, маємо такі інтервали монотонності похідної : $]-\infty,0[$; $]2,3[$; $]3,+\infty[$. Підстановка в y' довільних значень із цих інтервалів показує, що інтервалами спадання є $]-\infty,0[$; $]2,3[$, а $]3,+\infty[$ - інтервал зростання. Характер монотонності змінюється при $x = 3$ (мінімум функції має значення $y = 3\sqrt{3}$).

6. $y'' = \dfrac{3signx \cdot sign(x-2)}{(x-2)^2\sqrt{x(x-2)}}$.

Друга похідна не існує при $x \in [0,2]$ та зовсім не має нулів; множини $]-\infty,0[$, $]2,+\infty[$ є інтервалами, де опуклість направлена донизу (друга похідна додатна).

7. На основі одержаних даних будуємо графік (мал. 4.1).



мал. 4.1

Завдання 4.7. Дослідити функцію $y = f(x)$ і побудувати її графік.

1. $y = x/(1+x^2)$.	**2.** $y = x/(x^2-1)$.
3. $y = x^3/(x^2-4)$.	**4.** $y = x^3-3x^2+2$.
5. $y = (x-3)^2(x+1)$.	**6.** $y = \dfrac{1}{4}x^4-2x^2-\dfrac{9}{4}$.
7. $y = 1/(x^2+8x)$.	**8.** $y = (1-x)/(x-2)^3$.
9. $y = (x^2-1)/(x^2+1)$.	**10.** $y = (x^2+1)/(x^2-1)$.
11. $y = x^3/(x^2+2)$.	**12.** $y = (x+2)/(x^2-9)$.
13. $y = (x^2+4)/(x-1)$.	**14.** $y = [(x+2)/(x-1)]^2$.
15. $y = (2x-1)/(x-1)^2$.	**16.** $y = x/(x-1)^2$.
17. $y = x^2/(x^2-1)$.	**18.** $y = (x^3-1)/4x^2$.
19. $y = x^3e^{-x}$.	**20.** $y = \sqrt[3]{1-x^3}$.
21. $y = x^3/(x-2)^2$.	**22.** $y = [(x+1)/(x-1)]^2$.
23. $y = x^2/(x-1)$.	**24.** $y = x^4/(x^3-1)$.
25. $y = (2-4x^2)/(1-4x^2)$.	**26.** $y = (x^2-5)/(x-3)$.
27. $y = 4x^3/(x^3-1)$.	**28.** $y = (x^2-2x+3)/(x+2)$.
29. $y = (x-2)^{2/3}(2x+1)$.	**30.** $y = (x^2-x-6)/(x-2)$.

4.7. Побудова графіків функцій, які задані в полярній системі координат

Функція, яку задано в полярній системі координат, має вигляд

$$\rho = \rho(\varphi),$$

де φ - кут з вершиною в полюсі O, який відраховується від полярної осі проти годинникової стрілки; ρ - відстань, яка відраховується від полюса по проміню, який складає кут φ з полярною віссю, $\rho \geq 0$.

Для того щоб побудувати графік функції $\rho = \rho(\varphi)$ в полярній системі координат, необхідно перш за все знайти область визначення функції, тобто множину тих значень φ, при яких ρ буде невід'ємним: $\rho(\varphi) \geq 0$. Потім визначити поведінку функції при φ, які прямують до граничних точок області визначення. Знайти точки розриву, з'ясувати їх характер, визначити інтервали неперервності, найбільше та найменше значення $\rho(\varphi)$, нулі функції. При тих значеннях кута φ_0, при яких $\rho'(\varphi_0)=0$, графік функції буде дотикатися кола радіуса $\rho_0=\rho(\varphi_0)$. Об'єднуючи одержані дані, будуємо графік функції $\rho=\rho(\varphi)$.

<u>Приклад.</u> Побудувати лінію, яку задано в полярних координатах

$$\rho = a\sin 4\varphi \qquad (a>0).$$

<u>Розв'язування.</u>

1. Завдяки тому, що ρ - невід'ємне, то і $\sin 4\varphi \ge 0$, звідки

$$\frac{\pi}{2}n \le \varphi \le \frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}.$$

2. Функція $\sin 4\varphi$ є періодичною з періодом $T=\frac{\pi}{2}$. Достатньо розглянути цю функцію для $\varphi \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Функція $\rho = a\sin 4\varphi$ існує при $\varphi \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$:

$$\lim_{\varphi\to 0}\rho(\varphi) = \lim_{\varphi\to 0} a\sin 4\varphi = 0.$$

$$\lim_{\varphi\to \frac{\pi}{4}}\rho(\varphi) = \lim_{\varphi\to \frac{\pi}{4}} a\sin 4\varphi = 0.$$

Функція точок розриву не має. На інтервалі $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ функція $\rho(\varphi)$ неперервна.

3. Дослідимо функцію за першою похідною.

$$\rho'(\varphi) = 4a\cos\varphi.$$

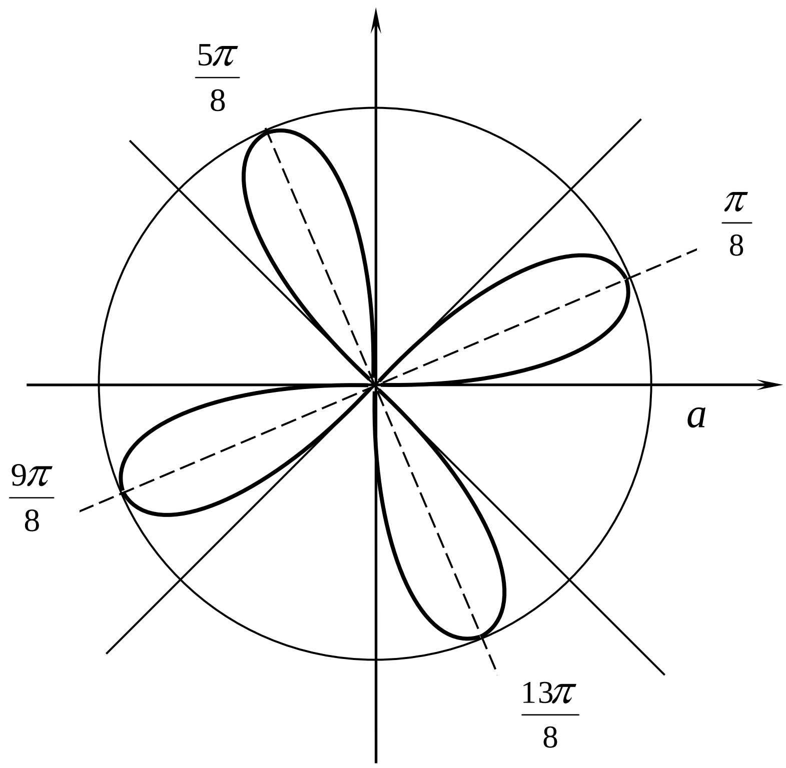
Знайдемо критичні точки:

$$\rho'(\varphi)=0, \quad \cos 4\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{8}.$$

Значення $\varphi=\frac{\pi}{8}$ розбиває інтервал $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ на дві частини. При

$\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$ $\rho'(\varphi) > 0$, тобто функція $\rho(\varphi)$ зростає. На інтервалі $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right)$ $\rho'(\varphi) < 0$ - функція спадає. При $\varphi = \frac{\pi}{8}$ функція має максимум і його значення $\rho\left(\frac{\pi}{8}\right) = a$. Максимальне значення функції є і його найбільшим значенням.

4. Будуємо графік функції.



мал. 4.2

При зміні φ від 0 до $\frac{\pi}{8}$ ρ неперервно зростає від 0 до a, а при зміні φ від $\frac{\pi}{8}$ до $\frac{\pi}{4}$ ρ неперервно спадає від a до 0.

Завдяки періодичності ($T = \dfrac{\pi}{2}$) для зображення графіка при $\varphi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ достатньо графік функції, побудований в першій чверті, повернути навколо полюса на кут $\dfrac{\pi}{2}$, в третій чверті на π, а в четвертій на $\dfrac{3}{2}\pi$.

Завдання 4.8. Побудувати графіки функцій :

1. $\rho = 1 + 2\sin 2\varphi$.

2. $\rho = 2 + \sin 2\varphi$.

3. $\rho = 1 + 2\sin 3\varphi$.

4. $\rho = 3/\sqrt{\cos 3\varphi}$.

5. $\rho = 2 + \sin 3\varphi$.

6. $\rho = 2 + \sin 4\varphi$.

7. $\rho = 3 + 5\sin 2\varphi$.

8. $\rho = 3 + 5\sin 3\varphi$.

9. $\rho = 3 + 5\sin 4\varphi$.

10. $\rho = 5 + 3\sin 2\varphi$.

11. $\rho = 5 + 3\sin 3\varphi$.

12. $\rho = 5 + 3\sin 4\varphi$.

13. $\rho = 1 + 2\cos 2\varphi$.

14. $\rho = 2/\sqrt{\sin 2\varphi}$.

15. $\rho = 2 + \cos 3\varphi$.

16. $\rho = 2 - \sin 2\varphi$.

17. $\rho = 2 - \sin 3\varphi$.

18. $\rho = 5 + 3\cos 3\varphi$.

19. $\rho = 5 - 3\sin 3\varphi$.

20. $\rho = 5 - 3\cos 3\varphi$.

21. $\rho = a(1 + \cos 3\varphi)$.

22. $\rho = a(1 + \cos 2\varphi)$.

23. $\rho = a(1 - \cos 2\varphi)$.

24. $\rho = a \cdot ctg\,\varphi$.

25. $\rho = a \cdot tg\,\varphi$.

26. $\rho = a(1 - \sin 2\varphi)$.

27. $\rho = a(1 + \sin\varphi)$.

28. $\rho = a \cdot \cos 3\varphi$.

29. $\rho = a \cdot \sin 3\varphi$.

30. $\rho = a(1 - \sin\varphi)$.

Часто у випадках, коли рівняння функції в декартовій системі координат задано неявно, зручно перейти в рівнянні до звичайної полярної системи координат заміною

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi$$

або до узагальненої полярної системи координат заміною

$$x = a\rho\cos\varphi,$$
$$y = b\rho\sin\varphi.$$

Якщо неявно задане рівняння функції при одній з указаних замін можна записати у вигляді $\rho = \rho(\varphi)$, то графік функції будуємо в полярній системі координат.

Завдання 4.9. Побудувати графіки неявно заданих функцій, спочатку перейшовши до полярної або до узагальненої полярної систем координат.

1. $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

2. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

3. $(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$.

4. $(x^2+y^2)^3 = a^2(x^4+y^4)$.

5. $x^4+y^4 = a^2(x^2+y^2)$.

6. $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{2xy}{\sqrt{6}}$.

7. $(x^2+y^2)^2 = 2y^3$.

8. $(x^2+y^2)^2 = xy$.

9. $(x^2+y^2)^2 = 3x^2-y^2$.

10. $x^4+y^4 = 2a^2xy$.

11. $\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)^2 = xy$.

12. $(x^2+y^2-x)^2 = \frac{9}{4}(x^2+y^2)$.

13. $(x^2+y^2-2x)^2 = x^2+y^2$.

14. $(x^2+y^2-x)^2 = 9(x^2+y^2)$.

15. $(x^2+y^2)^2 = x^3-xy^2$.

16. $(x^2+y^2)^2 = 3y^2-x^2$.

17. $(x^2+y^2)^2 = y^3-3x^2y$.

18. $(x^2+y^2)^2 = x^2+y^2$.

19. $(x^2+y^2)^2 = y^2-x^2$.

20. $(x^2+y^2)^3 = x^4+y^4$.

21. $(x^2+y^2)^3 = x^2y^2$.

22. $(x^2+y^2)^2 = x^2y$.

23. $(x^2+y^2)^2 = xy^2$.

24. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = 2xy^2$.

25. $x^4+y^4 = 2x^2$.

26. $x^4+y^4 = 2y^2$.

27. $(x^2-y^2)^2 = 2xy$.

28. $(x^2-y^2)^2 = x^2$.

29. $(x^2-y^2)^2 = xy^2$.

30. $(x^2-y^2)^2 = x^2y$.

4.8. Побудова графіків функцій, які задані параметрично

Параметричне рівняння плоскої кривої має вигляд

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in T.$$

Дослідження та побудову такої кривої можна виконати за наступною схемою.

1. Знайти множину $T = D_x \cap D_y$, відзначивши ті значення параметра t_i (включаючи $t_i = \pm\infty$), для яких хоча б одна з односторонніх границь $\lim\limits_{t \to t_i \pm 0} x(t)$, $\lim\limits_{t \to t_i \pm 0} y(t)$ дорівнює $+\infty$ або $-\infty$.

Якщо при $t \to t_i$ ($t \to t_i + 0$ або $t \to t_i - 0$) $x \to x_0$, а $y \to \infty$, то $x = x_0$ - вертикальна асимптота кривої.

Якщо при $t \to t_i$ ($t \to t_i + 0$ або $t \to t_i - 0$) $x \to \infty$, а $y \to y_0$, то $y = y_0$ - горизонтальна асимптота кривої.

Якщо при $t \to t_i$ ($t \to t_i + 0$ або $t \to t_i - 0$) $x \to \infty$, а $y \to \infty$, $\lim\limits_{t \to t_i} \dfrac{y(t)}{x(t)} = k$, $\lim\limits_{t \to t_i} [y(t) - kx(t)] = b$ існують, то крива має похилу асимптоту $y = kx + b$.

2. З'ясувати, чи буде крива симетричною, періодичною, що дозволяє скоротити викладення. Відмітимо, що графік функції симетричний, якщо $\forall t \in T$:

а) $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = -y(t)$ (симетрія відносно осі OX);

б) $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = y(t)$ (симетрія відносно осі OY);

в) $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = -y(t)$ (симетрія відносно початку координат);

г) $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = y(t)$ (накладення);

3. Знайти нулі функції $x(t)$, $y(t)$ та області знакосталості цих функцій.

4. Знайти точки t_k, в яких хоча б одна з похідних $x'(t)$, $y'(t)$ дорівнює нулю або розривна. Встановити інтервали зростання або спадання функції.

5. Знайти точки t_j, в яких $y''_{xx} = 0$.

6. Скласти таблицю такого вигляду:

$]t_p, t_{p+1}[$		…	
$]x_p, x_{p+1}[$		…	
$]y_p, y_{p+1}[$		…	
Знак y''_{xx}		…	

У першому рядку записуємо інтервали зміни параметра t, граничними точками яких t_p і t_{p+1} є точки з упорядкованої множини точок, які були знайдені в пп. 1, 2, 3, 4, 5. У другому та третьому рядках наводимо інтервали зміни змінних x та y. Знак y''_{xx} вказує напрямок опуклості графіка гілки кривої.

7. Користуючись таблицею, побудувати гілки кривої, які відповідають інтервалам $\left]t_p, t_{p+1}\right[$.

Приклад. Побудувати криву, задану параметрично :

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad x = \frac{3t^2}{1+t^3} \qquad \text{(декартів листок)}.$$

1. $t \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, +\infty\right[$,

$x \in \left]0, +\infty\right[\cup \left]-\infty, 0\right[$,

$y \in \left]0, -\infty\right[\cup \left]+\infty, 0\right[$.

Крива не має вертикальних та горизонтальних асимптот. Можлива похила асимптота. Знайдемо

$$\lim_{t\to -1-0} \frac{3t^2(1+t^3)}{(1+t^3)3t} = -1, \qquad \lim_{t\to -1-0}\left(\frac{3t^2}{1+t^3} + \frac{3t}{1+t^3}\right) = \lim_{t\to -1-0} \frac{3t(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = -1.$$

Вказані границі існують і скінченні, тому крива має похилу асимптоту

$$y = -x - 1.$$

Аналогічно $\lim\limits_{t\to -1+0} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$, $\lim\limits_{t\to -1+0}\left[y(t) + x(t)\right] = -1$. Крива має єдину похилу асимптоту $x + y + 1 = 0$.

2. $x(-t) = -\frac{3t}{1-t^3}$, $y(-t) = \frac{3t^2}{1-t^3}$. Очевидно, що графік функції не буде симетричним, оскільки не виконуються п. 2а), б), в), г).

Функція не є періодичною, оскільки $x(t)$ і $y(t)$ не періодичні.

3. $x(t) = 0$: $\quad \frac{3t}{1+t^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$,

$y(t) = 0$: $\quad \frac{3t^2}{1+t^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$.

Знайдемо інтервали знакосталості. Розіб’ємо вісь змінної t на інтервали $\left]-\infty, -1\right[$, $\left]-1, 0\right[$, $\left]0, \infty\right[$ та визначимо знаки функцій $x(t)$, $y(t)$ на цих інтервалах. Результати доцільно зобразити на схематичному малюнку

x	+		-		+	
y	-	-1	+	0	+	t

4. Обчислимо похідні :

$$x'_t = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \quad y'_t = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}, \quad y'_x = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

Похідна $y'_x = 0$ при $t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt[3]{2}$, y'_x розривна при $t_3 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Знайдемо інтервали монотонності. Результати зафіксуємо на схематичному малюнку

x	↗		↗		↗		↘		↘
y	↘	-1	↘	0	↗	$1/\sqrt[3]{2}$	↗	$\sqrt[3]{2}$	↘
y'_x	-		-	$\cup$	+		-	$\cap$	+

5. $$y''_{xx} = \frac{2(1+t^3)^4}{3(1-2t^3)^3}.$$

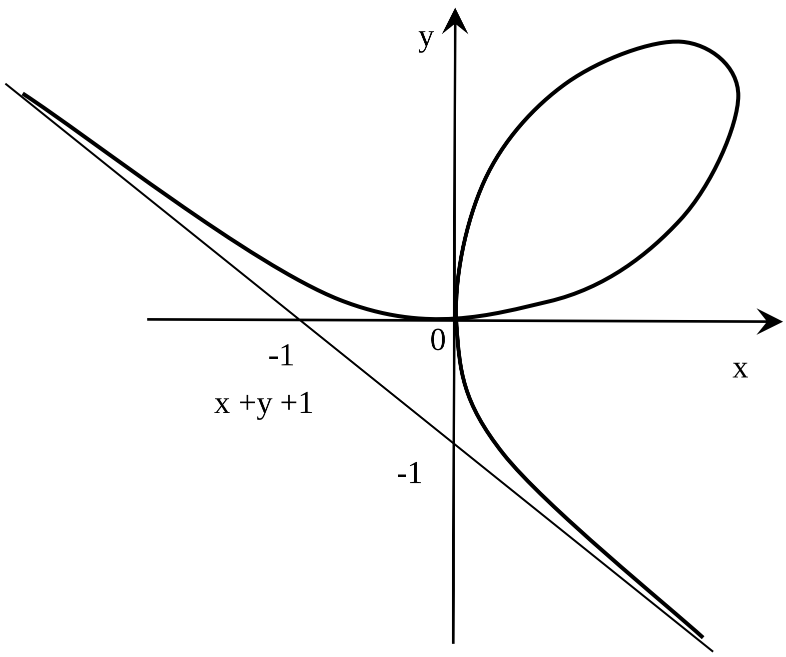
Похідна $y''_{xx} = 0$ при $t = -1$ і y''_{xx} розривна при $t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Інтервали знакосталості y''_{xx} покажемо на схематичному малюнку

y''_{xx}	+		+		-	
		-1		$1/\sqrt[3]{2}$		t

6. Замість таблиці можна скористатися вже готовими схематичними малюнками.

7. За даними дослідженнями будуємо графік (мал. 4.3).



мал. 4.3

Завдання 4.10. Побудувати графіки функцій, які задані параметрично.

1. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

2. $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

3. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$.

4. $x = 3t^2$, $y = 3t - t^2$.

5. $x = 2\cos t - \cos 2t,$ $y = 2\sin t - \sin 2t.$

6. $x = 2\cos t + \cos 2t,$ $y = 2\sin t - \sin 2t.$

7. $x = 1 - t$, $y = 1 - t^2$.

8. $x = 1 + \dfrac{1}{t}$, $y = 1 + \dfrac{1}{t^2}$.

9. $x = t^2$, $y = t^3$.

10. $x = \dfrac{1}{4}(t+1)^2$, $x = \dfrac{1}{4}(t-1)^2$.

11. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

12. $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t}{t^2-1}$.

13. $x = \dfrac{t^2}{1-t^2}$, $y = \dfrac{1}{1+t^2}$.

14. $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$.

15. $x = a\cos 2t$, $y = a\cos 3t$.

16. $x = cht$, $y = sht$.

17. $x = t\ln t$, $y = \dfrac{\ln t}{t}$.

18. $x = \dfrac{a}{\cos^3 t}$, $y = atg^3 t$.

19. $x=a(sht-t)$, $y=a(cht-1)$.

20. $x=e^{2t}$, $y=e^{3t}$.

21. $x=t^2$, $y=t+t^3$.

22. $x=t^2$, $y=\dfrac{1}{t^2-1}$.

23. $x=t+1$, $y=1-t^2$.

24. $x=\dfrac{1+t}{1-t}$, $y=arcctgt$.

25. $x=\ln t$, $y=arctgt$.

26. $x=t^3$, $y=t^2-2$.

27. $x=\sin t$, $y=\cos^2 t$.

28. $x=t^2$, $y=\dfrac{t^3}{3}-t$.

29. $x=\sin t$, $y=\sin 3t$.

30. $x=tgt$, $y=\cos^2 t$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. -М.: Наука, 1966.

2. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. –М.: Наука, 1974.

3. Сборник задач по математике. Т.1. / Под редакцией *Ефимова А.В., Демидовича Б.П.* – М.: Наука, 1981.

4. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. –М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.,1959.

5. Справочное пособие по математическому анализу / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук и др. -К.: Вища шк., 1978.

ЗМІСТ