Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Завдання до розрахункової роботи

«Теорія функції комплексної змінної. Операційне числення »

для студентів механіко-машинобудівного інституту
денної форми навчання всіх напрямків підготовки

Рекомендовано Вченою радою
фізико-математичного факультету
від 04.12.2015 р., протокол № 9

Київ – 2015

Завдання до розрахункової роботи: Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення./ Уклад.: Г.В. Журавська, І.М., Копась, Н.В. Рева –К.: НТУУ «КПІ», 2015 – 28с.

Укладачі: Г. В. Журавська
І. М. Копась
Н. В. Рева

Відповідальний редактор: В. І. Стогній

Рецензент: Н. Л. Денисенко

Завдання до розрахункової роботи «Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення» призначені для студентів другого курсу Механіко-машинобудівного інституту НТУУ "КПІ". Їх зміст охоплює всі основні питання навчальної програми за вказаною темою.

Робота містить 19 індивідуальних завдань по 30 варіантів для самостійної роботи. Перед розв'язуванням кожного завдання студент повинен ознайомитися з переліком теоретичних питань, наведених на початку кожного розділу. Із запропонованих індивідуальних завдань він обирає варіант, який відповідає номеру його прізвища в списку групи.

Розрахункова робота виконується в учнівському зошиті з оформленою за встановленим зразком сторінкою (зразок оформлення наведено в кінці завдань).

1.ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Теоретичні питання

1. Комплексні числа та дії над ними.
1. Тригонометрична та показникова форма комплексного числа.
2. Піднесення до степеня та добування кореня цілого додатного степеня з комплексного числа. Зображення коренів на комплексній площині.
3. Поняття функції комплексної змінної.
4. Основні елементарні функції комплексної змінної.
5. Границя та неперервність функції комплексної змінної.
6. Диференціювання функції комплексної змінної.
7. Умови Коші – Рімана.
8. Аналітичність функції комплексної змінної.
9. Гармонічні функції. Зв'язок між аналітичними та гармонічними функціями.
10. Відновлення аналітичної функції за відомою її дійсною або уявною частинами.
11. Геометричний зміст модуля і аргумента похідної функції комплексної змінної.
12. Конформні відображення.
13. Інтеграл від функції комплексної змінної та його обчислення.
14. Теорема та формула Коші.
15. Степеневий ряди в комплексній області.
16. Розвинення аналітичної функції в ряд Тейлора.
17. Розвинення функції, аналітичної в кільці, в ряд Лорана.
18. Класифікація ізольованих особливих точок аналітичної функції.
19. Лишки аналітичної функції та формули для їх обчислення.
20. Лишки та їх застосування.

Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини комплексного числа, побудувати його на комплексній площині.

1. а) $z = \frac{2+3i}{1-5i} + \frac{3-i}{2+6i}$; б) $z = \frac{(-\sqrt{3}+i)^{24}}{2^{27} i^{58}}$.

2. а) $z = \frac{2-3i}{1+4i} + \frac{2-i}{1+5i}$; б) $z = \frac{(-1+i)^{32}}{2^{35} i^{67}}$.

3. а) $z = \frac{3+4i}{i-6} + \frac{4-5i}{2+i}$; б) $z = \frac{(-1+i\sqrt{3})^{23}}{2^{25} i^{62}}$.

4. а) $z = \frac{4-i}{2i-3} + \frac{3+5i}{3-i}$; б) $z = \frac{(1+i\sqrt{3})^{27}}{2^{30} i^{59}}$.

5. а) $z=\dfrac{3+6i}{2-i}+\dfrac{5+i}{3+i}$; б) $z=\dfrac{(1+i)^{19}}{2^{21}i^{44}}$.

6. а) $z=\dfrac{3-5i}{4-i}+\dfrac{i-2}{1+5i}$; б) $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{18}}{2^{20}i^{46}}$.

7. а) $z=\dfrac{3-7i}{3+2i}+\dfrac{3+4i}{2-5i}$; б) $z=\dfrac{(\sqrt{3}-i)^{21}}{2^{23}i^{43}}$.

8. а) $z=\dfrac{2+7i}{3-5i}+\dfrac{4-i}{2+i}$; б) $z=\dfrac{(2-2i)^{19}}{2^{24}i^{50}}$.

9. а) $z=\dfrac{1-7i}{2-5i}+\dfrac{4+5i}{1-2i}$; б) $z=\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{17}}{2^{21}i^{61}}$.

10. а) $z=\dfrac{2+8i}{2i-6}+\dfrac{1+5i}{3-2i}$; б) $z=\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{16}}{2^{20}i^{55}}$.

11. а) $z=\dfrac{3-4i}{3-5i}+\dfrac{7+i}{2-5i}$; б) $z=\dfrac{(-2-2i)^{34}}{2^{70}i^{41}}$.

12. а) $z=\dfrac{3+6i}{2-7i}+\dfrac{7-i}{3+5i}$; б) $z=\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{12}}{2^{15}i^{72}}$.

13. а) $z=\dfrac{i-5}{3+8i}+\dfrac{2-i}{2+7i}$; б) $z=\dfrac{(-\sqrt{3}+i)^{17}}{2^{20}i^{64}}$.

14. а) $z=\dfrac{5+4i}{5+i}+\dfrac{3-i}{4+7i}$; б) $z\dfrac{(-2+2i)^{14}}{2^{30}i^{70}}$.

15. а) $z=\dfrac{1+5i}{4+5i}+\dfrac{3+2i}{7-4i}$; б) $z=\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{33}}{2^{35}i^{68}}$.

16. а) $z=\dfrac{1-7i}{2+i}+\dfrac{2-4i}{4+i}$; б) $z=\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{37}}{2^{34}i^{42}}$.

17. а) $z=\dfrac{3+8i}{1+2i}+\dfrac{3-5i}{1-3i}$; б) $z=\dfrac{(2+2i)^{12}}{2^{28}i^{45}}$.

18. а) $z=\dfrac{2-7i}{1-6i}+\dfrac{2-5i}{2+i}$; б) $z=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^{18}}{2^{19}i^{48}}$.

19. а) $z=\dfrac{5-2i}{1+5i}+\dfrac{1+7i}{1-3i}$; б) $z=\dfrac{(\sqrt{3}-i)^{24}}{2^{26}i^{56}}$.

20. а) $z=\dfrac{5-4i}{3-4i}+\dfrac{1-i}{3+5i}$; б) $z=\dfrac{(1-i)^{32}}{2^{35}i^{52}}$.

21. а) $\frac{7-2i}{7+i}+\frac{4+5i}{2+2i}$; б) $\frac{(1-i\sqrt{3})^{16}}{2^{21}i^{69}}$.

22. а) $\frac{4-6i}{5-i}+\frac{3i-1}{4-8i}$; б) $\frac{(-1-i\sqrt{3})^{23}}{2^{25}i^{73}}$.

23. а) $\frac{5-i}{8-i}+\frac{3+5i}{6-i}$; б) $\frac{(-1-i)^{18}}{2^{20}i^{63}}$.

24. а) $\frac{2-i}{i-7}+\frac{8+i}{3-4i}$; б) $\frac{(-\sqrt{3}-i)^{25}}{2^{26}i^{49}}$.

25. а) $\frac{7+2i}{3+i}+\frac{5-i}{8-i}$; б) $\frac{(-\sqrt{3}+i)^{17}}{2^{20}i^{71}}$.

26. а) $\frac{4-i}{6+3i}+\frac{5+i}{2-3i}$; б) $\frac{(-1+i)^{53}}{2^{55}i^{65}}$.

27. а) $\frac{7-6i}{5+i}+\frac{8-i}{1+5i}$; б) $\frac{(i\sqrt{3}-1)^{52}}{2^{56}i^{60}}$.

28. а) $\frac{6+i}{4+8i}+\frac{1+i}{1-9i}$; б) $\frac{(1+i\sqrt{3})^{35}}{2^{30}i^{66}}$.

29. а) $\frac{5+9i}{1+3i}+\frac{2+i}{3-6i}$; б) $\frac{(\sqrt{3}+i)^{23}}{2^{25}i^{57}}$.

30. а) $\frac{9-i}{8-i}+\frac{4+9i}{5+8i}$; б) $\frac{(1+i)^{32}}{2^{16}i^{54}}$.

Завдання 2. Знайти всі значення коренів та побудувати їх.

1. $\sqrt[5]{4+4i}$.
2. $\sqrt[4]{2+i\sqrt{12}}$.
3. $\sqrt[3]{\sqrt{27}+3i}$.
4. $\sqrt[3]{3-3i}$.
5. $\sqrt[6]{-i}$.
6. $\sqrt[5]{-64}$.
7. $\sqrt[6]{-2-2i}$.
8. $\sqrt[4]{-2+i\sqrt{12}}$.
9. $\sqrt[3]{-\sqrt{27}-3i}$.
10. $\sqrt[7]{-128}$.
11. $\sqrt[5]{32i}$.
12. $\sqrt[4]{5-5i}$.
13. $\sqrt[4]{6-6i}$.
14. $\sqrt[3]{\sqrt{48}+4i}$.
15. $\sqrt[5]{-\sqrt{27}+3i}$.
16. $\sqrt[6]{-i}$.
17. $\sqrt[4]{\sqrt{48}-4i}$.
18. $\sqrt[3]{-2-i\sqrt{12}}$.

19. $\sqrt[5]{3-3i}$.

20. $\sqrt[4]{-16i}$.

21. $\sqrt[6]{-4-4i}$.

22. $\sqrt[3]{\sqrt{12}+2i}$.

23. $\sqrt[4]{4-i\sqrt{48}}$.

24. $\sqrt[5]{-5+5i}$.

25. $\sqrt[3]{64}$.

26. $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$.

27. $\sqrt[3]{-4+4i}$.

28. $\sqrt[6]{-128i}$.

29. $\sqrt[5]{\sqrt{27}+3i}$.

30. $\sqrt[4]{-\sqrt{48}-4i}$.

Завдання 3. Побудувати на площині лінії та області, які задані наступними співвідношеннями:

1. а) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z^2 = 2$; б) $|z-1-2i|>2,\ |z-2-2i|\le 2,\ \frac{\pi}{12}\le \arg(z+1-i)\le \frac{\pi}{4}$.

2. а) $\operatorname{Re}\frac{1}{z} = 3$; б) $|z+1-i|\ge 1,\ |z-1+3i|\le 2,\ \frac{\pi}{4}\le \arg(z+3-i)\le \frac{\pi}{3}$.

3. а) $\left|\frac{z-3}{z-2}\right| = 1$; б) $|z+1+2i|>2,\ |z+2+i|\le 1,\ \frac{2\pi}{3}\le \arg(z+1+i)\le \frac{3\pi}{4}$.

4. а) $\operatorname{Im}\frac{z-1}{z+1} = 0$; б) $|z+i|\ge 2,\ |z-2+2i|\le 1,\ -\frac{\pi}{4}\le \arg(z-1+i)\le -\frac{\pi}{12}$.

5. а) $\operatorname{Im} 2z + \operatorname{Re}\bar{z}^2 = 4$; б) $|z+1-i|>2,\ |z+i|\le 2,\ \frac{5\pi}{6}\le \arg(z-2+3i)\le \frac{3\pi}{4}$.

6. а) $|z-2| = |1-2\bar{z}|$; б) $|z-3-2i|>1,\ |z-1-i|\le 2,\ \frac{\pi}{4}\le \arg(z+1-2i)\le \frac{\pi}{3}$.

7. а) $|\operatorname{Re} z| = |z-1|$; б) $|z-i|<2,\ |z-1-2i|\le 1,\ \pi<\arg(z-1-i)<\frac{2\pi}{3}$.

8. а) $\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1} = 0$; б) $|z+3+i|>2,\ |z+1+2i|\le 1,\ -\frac{\pi}{2}\le \arg(z-1+i)\le -\frac{5\pi}{3}$.

9. а) $\operatorname{Re}|z^2-\bar{z}| = 1$; б) $|z-2|>2,\ |z+i+1|\le 1,\ -\frac{\pi}{4}\le \arg(z+i)\le 0$.

10. а) $\operatorname{Re}\frac{1}{\bar{z}} = 1$; б) $|z-1-i|>1,\ |z-2-3i|\le 2,\ \frac{\pi}{6}\le \arg(z+1)\le \frac{\pi}{3}$.

11. а) $\operatorname{Re}\frac{z-i}{z-1} = 0$; б) $|z+i+1|<2,\ |z-2-i|<2,\ -\frac{3\pi}{4}<\arg(z)\le -\frac{2\pi}{3}$.

12. а) $|z|^2 + \operatorname{Im} z^2 = 4$; б) $|z+1-2i|>1,\ |z+2-i|\le 2,\ \pi<\arg(z+1-i)<\frac{3\pi}{4}$.

13. а) $\operatorname{Im}\frac{1}{z}=-\frac{1}{2}$; б) $|z-3-i|>1,\ |z-2-i|\le 2,\ \frac{\pi}{12}\le\arg(z-1)\le\frac{2\pi}{3}$.

14. а) $\operatorname{Im}2z+\operatorname{Re}z^2=4$; б) $|z+2+i|\ge 1,\ |z+1+i|\le 2,\ \frac{\pi}{6}<\arg(z+i+2)<\frac{\pi}{3}$.

15. а) $\operatorname{Im}\frac{z-i}{z-1}=0$; б) $|z+2+3i|>2,\ |z+1+2i|\le 1,\ \frac{\pi}{12}\le\arg(z+2+2i)\le\frac{\pi}{4}$.

16. а) $\operatorname{Re}z+1=|z|$; б) $|z+3|\le 3,\ |z-2i|\le 2,\ -\frac{\pi}{3}\le\arg(z+1-i)\le-\frac{\pi}{6}$.

17. а) $|z-1|=|z-2i|$; б) $|z+1-3i|<2,\ |z+2-i|>1,\ \frac{\pi}{3}\le\arg(z+2-i)\le\frac{3\pi}{4}$.

18. а) $\operatorname{Re}\frac{z+2}{z-2}=0$; б) $|z+1+3i|\ge 2,\ |z+2+i|\le 1,\ -\frac{3\pi}{4}\le\arg(z+1-i)\le-\frac{2\pi}{3}$.

19. а) $\operatorname{Re}(2z+3)-\operatorname{Im}(5-4z)=1$; б) $|z-2-i|\ge 2,\ |z-1|>1,\ \frac{\pi}{4}\le\arg(z+1+i)\le\frac{5\pi}{6}$.

20. а) $\left|\frac{z+i}{z-2i}\right|=2$; б) $|z-2-2i|>3,\ |z+1-2i|\le 1,\ \frac{\pi}{3}\le\arg(z+1-i)\le\frac{3\pi}{4}$.

21. а) $\operatorname{Im}2\bar{z}+\operatorname{Re}z^2=5$; б) $|z+1+3i|>2,\ |z+1+i|<1,\ \frac{\pi}{12}<\arg(z+2+i)\le\frac{\pi}{3}$.

22. а) $|\bar{z}|^2-2\operatorname{Re}z^2=3$; б) $|z-1+2i|>1,\ |z-2+3i|<1,\ -\frac{\pi}{3}\le\arg(z-1+i)<-\frac{\pi}{12}$.

23. а) $\operatorname{Re}\frac{1}{z+1+2i}=1$; б) $|z-i|\ge 2,\ |z-2-i|\le 2,\ \frac{2\pi}{3}<\arg(z-2i)<\frac{\pi}{4}$.

24. а) $\operatorname{Im}\frac{z+2}{z-2}=0$; б) $|z-1-i|>2,\ |z-2+i|\le 1,\ \frac{\pi}{3}<\arg(z-1+3i)\le\frac{\pi}{2}$.

25. а) $\operatorname{Re}2\bar{z}-\operatorname{Re}z^2=3$; б) $|z+2|\ge 1,\ |z+3+2i|\le 2,\ \frac{3\pi}{4}\le\arg(z-i)\le\pi$.

26. а) $\operatorname{Im}\frac{1}{z-2+i}=2$; б) $|z-1+2i|>2,\ |z+2-i|\le 2,\ \frac{5\pi}{6}\le\arg(z+3+2i)\le\frac{\pi}{2}$.

27. а) $\operatorname{Re}\frac{z-2i}{z+2i}=0$; б) $|z-1+i|\ge 1,\ |z-3+i|\le 2,\ \frac{\pi}{6}\le\arg(z-1+3i)\le\frac{\pi}{3}$.

28. а) $|z|^2+2\operatorname{Re}\bar{z}^2=-3\operatorname{Im}z+12$; б) $|z-2-3i|>2,\ |z-i|\le 3,\ \frac{\pi}{6}\le\arg(z+1+i)\le\frac{5\pi}{12}$.

29. а) $\operatorname{Im}2\bar{z}+\operatorname{Re}\bar{z}^2=6$; б) $|z+3-i|>2,\ |z+1+i|\le 3,\ \frac{\pi}{12}<\arg(z+2-i)<\frac{\pi}{4}$.

30. а) $\operatorname{Im}\dfrac{z-3i}{z+3i}=0$; б) $|z+1-i|\le 2,\ |z-1+2i|\le 3,\ -\dfrac{\pi}{3}<\arg(z+i)<-\dfrac{\pi}{12}$.

Завдання 4. Обчислити значення функцій, записати дійсну та уявну частини:

1. а) $\cos(1+3i)$; б) $\operatorname{arsh}(3i)$.
2. а) $\sin(3-5i)$; б) $\operatorname{arctg}(1+i)$.
3. а) $\operatorname{ch}(1+i)$; б) $\operatorname{arth}(1+i)$.
4. а) $\operatorname{sh}(2-i)$; б) $\arcsin(3i)$.
5. а) $\operatorname{tg}(2i)$; б) $\operatorname{arch}(3)$.
6. а) $\operatorname{ctg}(i)$; б) $(i+1)^{2-i}$.
7. а) $\operatorname{th}(\pi i)$; б) $\arccos(2)$.
8. а) $\operatorname{cth}(i)$; б) $\operatorname{arsh}(1+i)$.
9. а) $\operatorname{ch}(5+2i)$; б) $\operatorname{arctg}(3i)$.
10. а) $\operatorname{sh}(2-4i)$; б) $\operatorname{arth}(i)$.
11. а) $\operatorname{cth}(-2i)$; б) $\arccos(0{,}5)$.
12. а) $\cos(2-5i)$; б) $\arcsin(0{,}5)$.
13. а) $\sin(3-7i)$; б) $\operatorname{arch}(1)$.
14. а) $\operatorname{th}(-3i)$; б) $(i\sqrt{3}+1)^{1+i}$.
15. а) $\operatorname{tg}(4i)$; б) $\arccos(1-i)$.
16. а) $\operatorname{ctg}(3i)$; б) $\operatorname{arsh}(1+i)$.
17. а) $\sin(3-4i)$; б) $\operatorname{arctg}(1-i)$.
18. а) $\cos(7+2i)$; б) $\operatorname{arth}(-1-i)$.
19. а) $\operatorname{tg}(5i)$; б) $\arcsin(-1+i)$.
20. а) $\operatorname{th}(\pi)$; б) $\operatorname{arch}(-1+i)$.
21. а) $\sin(3-7i)$; б) $(-1-i\sqrt{3})^{1+2i}$.
22. а) $\operatorname{cth}(-\pi i)$; б) $\arccos(5i)$.
23. а) $\cos(1+5i)$; б) $\operatorname{arsh}(-1+i)$.
24. а) $\operatorname{sh}(2-6i)$; б) $\operatorname{arctg}(i-1)$.
25. а) $\operatorname{tg}(1-i)$; б) $\operatorname{arth}(2i-2)$.
26. а) $\operatorname{sh}(4+3i)$; б) $\arcsin(5i)$.
27. а) $\sin(3+8i)$; б) $\operatorname{arch}(2i)$.
28. а) $\cos(7-5i)$; б) $(-1-i)^{3-2i}$.
29. а) $\operatorname{ctg}(-i)$; б) $\arccos(1-i)$.
30. а) $\sin(6-7i)$; б) $\operatorname{arctg}(4i)$.

Завдання 5. Відновити аналітичну функцію за її дійсною або уявною частиною.

1. $\operatorname{Im} f(z)=2xy+3x$.
2. $\operatorname{Re} f(z)=2e^x\sin y$.
3. $\operatorname{Re} f(z)=x^3-3xy^2$.
4. $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2+3x$.
5. $\operatorname{Re} f(z)=e^x\cos y-x$.
6. $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2+5y$.
7. $\operatorname{Im} f(z)=3xy-7y+x$.
8. $\operatorname{Im} f(z)=6y-x-5xy$.
9. $\operatorname{Re} f(z)=-2xy+y-x$.
10. $\operatorname{Re} f(z)=x^3-2xy-3xy^2$.
11. $\operatorname{Re} f(z)=4xy+5x$.
12. $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2+6y$.
13. $\operatorname{Im} f(z)=y-x-xy$.
14. $\operatorname{Re} f(z)=7xy-7y+4x$.
15. $\operatorname{Im} f(z)=-2e^x\cos y$.

16. $\operatorname{Im} f(z) = 3x^2y - y^3$.

17. $\operatorname{Im} f(z) = y^2 - x^2 - y$.

18. $\operatorname{Im} f(z) = \cos x \operatorname{sh} y$.

19. $\operatorname{Re} f(z) = y^2 - x^2 - 3x$.

20. $\operatorname{Im} f(z) = x^3 - 3xy^2 - 7y$.

21. $\operatorname{Im} f(z) = 3x^2y - y^3 - x$.

22. $\operatorname{Re} f(z) = 4x^2 - 4y^2 - 9x - y$.

23. $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 - 3y$.

24. $\operatorname{Im} f(z) = e^x \sin y + y$.

25. $\operatorname{Im} f(z) = 2x^2 - 2y^2 + x$.

26. $\operatorname{Im} f(z) = \sin x \operatorname{ch} y$.

27. $\operatorname{Re} f(z) = 5y^2 - 3x^2 - x$.

28. $\operatorname{Re} f(z) = e^y \cos x - y$.

29. $\operatorname{Re} f(z) = e^y \sin x + x$.

30. $\operatorname{Im} f(z) = \sin y \operatorname{ch} x$.

Завдання 6. Обчислити інтеграли за формулою Коші.

1. а) $\oint\limits_{|z-1-i|=1} \frac{\cos z}{(z-1-i)(z+5)} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\operatorname{sh} 3z}{(z-i)^4} dz$.

2. а) $\oint\limits_{|z-1+i|=1} \frac{\sin z}{(z-1+i)(z-3)} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2 \operatorname{ch} z}{(z+i)^3} dz$.

3. а) $\oint\limits_{|z+1+i|=1} \frac{\cos 2z}{(z+1+i)(z-3i)} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} 2z}{(z-1)^5} dz$.

4. а) $\oint\limits_{|z+1-i|=1} \frac{\sin 2z}{(z+1-i)(z-1)} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^3 + z \operatorname{sh} z}{(z+1)^2} dz$.

5. а) $\oint\limits_{|z-1+2i|=1} \frac{\cos 3z}{(z-1+2i)(z-2i)} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\operatorname{sh}(z-1)}{(z-1-i)^3} dz$.

6. а) $\oint\limits_{|z+1+2i|=1} \frac{\sin 3z}{(z+1+2i)(z-1)} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{ch}^2(z+1)}{(z+1-i)^3} dz$.

7. а) $\oint\limits_{|z-1-2i|=1} \frac{\cos z}{(z-1-2i)(z+i)} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\operatorname{ch}(z-i)}{(z-1+i)^3} dz$.

8. а) $\oint\limits_{|z+1-2i|=1} \frac{\sin z}{(z+1+2i)(z+3)} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=3,5} \frac{z \operatorname{sh}(z+i)}{(z+1+i)^2} dz$.

9. а) $\oint\limits_{|z-2-i|=1} \frac{\cos 2z}{(z-2-i)(z+3i)} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=5} \frac{\operatorname{sh} 2z}{(z+2)^5} dz$.

10. а) $\oint\limits_{|z-2+i|=1} \frac{\sin 2z}{(z-2+i)(z-i)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\mathrm{ch}3z}{(z-2)^4}dz$.

11. а) $\oint\limits_{|z+2-i|=1} \frac{\cos 3z}{(z+2-i)(z-4)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2,5} \frac{z\mathrm{ch}z}{(z-2i)^3}dz$.

12. а) $\oint\limits_{|z+2+i|=1} \frac{\sin 3z}{(z+2+i)(z-1)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\mathrm{sh}(3z-2)}{(z+2i)^4}dz$.

13. а) $\oint\limits_{|z-2-2i|=1} \frac{\cos(z-1)}{(z-2-2i)(z+2i)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z+i\mathrm{sh}z}{(z+2-i)^3}dz$.

14. а) $\oint\limits_{|z-2+2i|=1} \frac{\sin(z+1)}{(z-2+2i)(z+1)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=5} \frac{\mathrm{ch}(iz)}{(z-2+i)^4}dz$.

15. а) $\oint\limits_{|z+2+2i|=1} \frac{\mathrm{ch}z}{(z+2+2i)(z-4)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 2z}{(z-1)^3}dz$.

16. а) $\oint\limits_{|z+2-2i|=1} \frac{\mathrm{sh}2z}{(z+2-2i)(z-i)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin 3z}{(z-i)^4}dz$.

17. а) $\oint\limits_{|z-1-3i|=1} \frac{\mathrm{sh}z}{(z-1-3i)(z+2i)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{z\cos 2z}{(z+1)^3}dz$.

18. а) $\oint\limits_{|z-1+3i|=1} \frac{\mathrm{ch}2z}{(z-1+3i)(z-i)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin(z-i)}{(z+i)^4}dz$.

19. а) $\oint\limits_{|z+1-3i|=1} \frac{\mathrm{ch}3z}{(z+1-3i)(z-3)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos(2i-z)}{(z+2)^3}dz$.

20. а) $\oint\limits_{|z+1+3i|=1} \frac{\mathrm{sh}3z}{(z+1+3i)(z-i)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2,5} \frac{\sin 2z}{(z-2i)^4}dz$.

21. а) $\oint\limits_{|z-3-i|=1} \frac{\mathrm{sh}(z-1)}{(z-3-i)(z+3i)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\cos 3z}{(z+i)^2}dz$.

22. а) $\oint\limits_{|z-3+i|=1} \frac{\mathrm{ch}(z+1)}{(z-3+i)(z-2i)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin(2z-i)}{(z-1+i)^3}dz$.

23. а) $\oint\limits_{|z+3-i|=} \frac{\mathrm{ch}(z-1)}{(z+3-i)(z-1)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos(i-z)}{(z-1-i)^4}dz$.

24. а) $\oint\limits_{|z+3+i|=1} \frac{\mathrm{sh}(z+1)}{(z+3+i)(z-2)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2-\sin z}{(z+1-i)^3}dz$.

25. а) $\oint\limits_{|z-3-2i|=1} \frac{\operatorname{sh}(z-i)}{(z-3-2i)(z+1)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2,5} \frac{z^3+\cos z}{(z+1+i)^4}dz$.

26. а) $\oint\limits_{|z-3+2i|=1} \frac{\operatorname{ch}(z+i)}{(z-3+2i)(z+i)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin 4z}{(z-i)^5}dz$.

27. а) $\oint\limits_{|z+3+2i|=} \frac{\operatorname{ch}(z-2i)}{(z+3+2i)(z-2)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos^2 z}{(z-2i)^2}dz$.

28. а) $\oint\limits_{|z+3-2i|=1} \frac{\operatorname{sh}(2z-1)}{(z+3-2i)(z-2i)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\sin^2 z}{(z+2i)^2}dz$.

29. а) $\oint\limits_{|z-3-3i|=1} \frac{\operatorname{sh}(z-2)}{(z-3-3i)(z+1)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=3,5} \frac{z-z\cos z}{(z-2)^3}dz$.

30. а) $\oint\limits_{|z+3+3i|=1} \frac{\operatorname{ch}(2z-i)}{(z+3+3i)(z-i)}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2,5} \frac{z\sin(i-3z)}{(z+2)^3}dz$.

Завдання 7. Зобразити функцію $f(z)$ у вигляді ряду Тейлора за степенями $(z-z_0)$.

1. $f(z)=\sin(z+1),\ z_0=1+i$.
2. $f(z)=\cos(z+i),\ z_0=2-i$.
3. $f(z)=shz,\ z_0=1-2i$.
4. $f(z)=chz,\ z_0=2+i$.
5. $f(z)=z\ln(1+z),\ z_0=i$.
6. $f(z)=zarctg(z-2i),\ z_0=2i$.
7. $f(z)=z\sin(z+1-2i),\ z_0=-1+2i$.
8. $f(z)=\cos(z+2i),\ z_0=2+2i$.
9. $f(z)=sh2z,\ z_0=1+2i$.
10. $f(z)=ch2z,\ z_0=-1-i$.
11. $f(z)=(z-1-i)\ln(1+z),\ z_0=1+i$.
12. $f(z)=zarctg(z+i),\ z_0=-i$.
13. $f(z)=z\cos(z-1),\ z_0=3i$.
14. $f(z)=\sin 2z,\ z_0=2-3i$.
15. $f(z)=\cos(z-i),\ z_0=1+3i$.
16. $f(z)=sh(z+i),\ z_0=3-i$.
17. $f(z)=ch(3z),\ z_0=3-2i$.
18. $f(z)=\ln(1+z),\ z_0=4$.
19. $f(z)=zarctg(z),\ z_0=2$.
20. $f(z)=\cos(z-2i),\ z_0=3+2i$.
21. $f(z)=zarctg(z+i),\ z_0=-i$.
22. $f(z)=\sin(z+2),\ z_0=-1-2i$.
23. $f(z)=\cos(z),\ z_0=-1-3i$.
24. $f(z)=sh(z+i),\ z_0=3-i$.
25. $f(z)=ch2z,\ z_0=2-2i$.
26. $f(z)=z\ln(1+z),\ z_0=i$.
27. $f(z)=\cos(z+2i),\ z_0=-2-2i$.
28. $f(z)=(z-i)arctg(z+3),\ z_0=-3$.
29. $f(z)=z\sin z,\ z_0=3+i$.
30. $f(z)=\cos(2z+i),\ z_0=4-i$.

Завдання 8. Знайти всі розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана за степенями $(z-z_0)$.

1. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-3+2i)(z-1)^2}$, $z_0=3-2i$; б) $f(z)=\dfrac{z-2}{(z-1)(z+4i)}$, $z_0=2+i$.

2. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-3+i)(z-i)^2}$, $z_0=3-i$; б) $f(z)=\dfrac{z-1}{(z-2)(z-3i)}$, $z_0=-1-2i$.

3. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z+2-3i)(z+2)^3}$, $z_0=-2+3i$; б) $f(z)=\dfrac{z+i}{(z-1)(z-5i)}$, $z_0=-1-i$.

4. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1-2i)(z+i)^2}$, $z_0=1+2i$; б) $f(z)=\dfrac{2z+1}{(z-4)(z-2i)}$, $z_0=-3+i$.

5. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z+2-i)(z-i)^3}$, $z_0=-2+i$; б) $f(z)=\dfrac{z-1-i}{(z-3)(z-4i)}$, $z_0=2+3i$.

6. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1-3i)(z+1)^2}$, $z_0=1+3i$; б) $f(z)=\dfrac{3z+4i}{(z-1)(z+4i)}$, $z_0=3+i$.

7. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z+2+3i)(z-2)^2}$, $z_0=-2-3i$; б) $f(z)=\dfrac{z+1}{(z+2)(z-i)}$, $z_0=1+2i$.

8. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1-i)(z-i)^3}$, $z_0=1+i$; б) $f(z)=\dfrac{2z+i}{(z-2)(z+5i)}$, $z_0=2-3i$.

9. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-3-2i)(z+2)^2}$, $z_0=3+2i$; б) $f(z)=\dfrac{3z-1}{(z+4)(z-3i)}$, $z_0=3-i$.

10. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2+2i)(z-2i)^3}$, $z_0=2-2i$; б) $f(z)=\dfrac{z+i}{(z+5)(z-4i)}$, $z_0=-1-i$.

11. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-3-i)(z+2)^2}$, $z_0=3+i$; б) $f(z)=\dfrac{4z-2}{(z-2)(z+i)}$, $z_0=-2-2i$.

12. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z+2+i)(z-i)^2}$, $z_0=-2-i$; б) $f(z)=\dfrac{2z-i}{(z+1)(z-3i)}$, $z_0=1-3i$.

13. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2+3i)(z-2)^3}$, $z_0=2-3i$; б) $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-5)(z-2i)}$, $z_0=-2+i$.

14. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z+2-2i)(z-3i)^2}$, $z_0=-2+2i$; б) $f(z)=\dfrac{z+i}{(z+3)(z+4i)}$, $z_0=1-i$.

15. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1+2i)(z-1)^3}$, $z_0=1-2i$; б) $f(z)=\dfrac{z-2i}{(z-1)(z+3i)}$, $z_0=-3-2i$.

16. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z+3-i)(z-i)^3}$, $z_0=-3+i$; б) $f(z)=\dfrac{z+1}{(z+2)(z+5i)}$, $z_0=3-2i$.

17. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2-3i)(z+2)^2}$, $z_0=2+3i$; б) $f(z)=\dfrac{z-1}{(z-5)(z-i)}$, $z_0=-2+i$.

18. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z+1+i)(z+1)^3}$, $z_0=-1-i$; б) $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+2)(z-3i)}$, $z_0=1+2i$.

19. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z+1+2i)(z+3)^2}$, $z_0=-1-2i$; б) $f(z)=\dfrac{2z+i}{(z-4)(z-5i)}$, $z_0=-2+3i$.

20. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2-i)(z-3i)^2}$, $z_0=2+i$; б) $f(z)=\dfrac{z-1}{(z-3)(z-5i)}$, $z_0=3-i$.

21. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1+i)(z-1)^3}$, $z_0=1-i$; б) $f(z)=\dfrac{3z-i}{(z+3)(z-4i)}$, $z_0=-2-3i$.

22. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z+3+2i)(z+i)^2}$, $z_0=-3-2i$; б) $f(z)=\dfrac{z+4}{(z-2)(z+4i)}$, $z_0=1-3i$.

23. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z+2-i)(z-2)^2}$, $z_0=-2+i$; б) $f(z)=\dfrac{2z+i}{(z-5)(z-2i)}$, $z_0=1+i$.

24. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1+3i)(z+3i)^3}$, $z_0=1-3i$; б) $f(z)=\dfrac{2z-3}{(z+1)(z+4i)}$, $z_0=3+2i$.

25. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z+2+2i)(z+2i)^3}$, $z_0=-2-2i$; б) $f(z)=\dfrac{z}{(z+3)(z+4i)}$, $z_0=2-2i$.

26. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-3+i)(z+i)^3}$, $z_0=3-i$; б) $f(z)=\dfrac{z-2i}{(z+3)(z+2i)}$, $z_0=1-2i$.

27. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2+3i)(z+i)^2}$, $z_0=2-3i$; б) $f(z)=\dfrac{3z+1}{(z+1)(z+5i)}$, $z_0=-2+2i$.

28. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1-2i)(z-2)^2}$, $z_0=1+2i$; б) $f(z)=\dfrac{2z-i}{(z-5)(z-2i)}$, $z_0=2-3i$.

29. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-3-i)(z+1)^2}$, $z_0=3+i$; б) $f(z)=\dfrac{z+3i}{(z+1)(z-5i)}$, $z_0=-2+i$.

30. а) $f(z)=\dfrac{1}{(z-3-3i)(z+1)^2}$, $z_0=3+3i$; б) $f(z)=\dfrac{2i-z}{(z-2)(z+3i)}$, $z_0=3-i$.

Завдання 9. Визначити тип ізольованих особливих точок підінтегральних функцій та обчислити інтеграли за основною теоремою про лишки.

1. а) $\oint\limits_{|z-1-2i|=2} \frac{\sin z}{z(z-1-i)(z-2i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} (z-1)^2 \operatorname{sh}\frac{3}{z-1}dz$.

2. а) $\oint\limits_{|z+2-i|=2} \frac{2^z-1}{z(z+2)(z+2-2i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z+i|=1} (z+i)^3 \operatorname{ch}\frac{1}{z+i}dz$.

3. а) $\oint\limits_{|z+3+2i|=2} \frac{tgz}{z(z+3+i)(z+2+2i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z-1|=3} \cos\frac{z}{z-2}dz$.

4. а) $\oint\limits_{|z-1+3i|=2} \frac{1-\cos z}{z^2(z+3i)(z+2i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z+2|=2} (z+3)^4 \sin\frac{2}{z+3}dz$.

5. а) $\oint\limits_{|z-2-i|=2} \frac{e^{z-2}-1}{(z-2)(z-3)(z-1-i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z-2i|=1} (z-2i)e^{\frac{1}{z-2i}}dz$.

6. а) $\oint\limits_{|z+1-2i|=2} \frac{\sin(z-1)}{(z-1)(z+1-i)(z-2i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z-i|=1} (z-i)^2 e^{\frac{z}{z-i}}dz$.

7. а) $\oint\limits_{|z+1+2i|=2} \frac{7^{z-i}-1}{(z-i)(z+3i)(z+2+2i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z+1|=2} (z+2)^3 \operatorname{sh}\frac{2}{(z+2)^2}dz$.

8. а) $\oint\limits_{|z-2+i|=2} \frac{tg(z+1)}{(z+1)(z-1)(z-2+2i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} (z+1)\operatorname{ch}\frac{1}{(z+1)^2}dz$.

9. а) $\oint\limits_{|z-3-2i|=3} \frac{\cos z-1}{z^2(z-3)(z-2-3i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} (z-i)^4 \sin\frac{2}{z-i}dz$.

10. а) $\oint\limits_{|z+1-3i|=2} \frac{e^{z-2}-1}{(z-2)(z-2i)(z+1-2i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z-1|=1} (z-1)\cos\frac{z}{z-1}dz$.

11. а) $\oint\limits_{|z+1+3i|=2} \frac{\sin(z-i)}{(z-i)(z+3i)(z+1+2i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} (z-1)^4 \sin\frac{3}{z-1}dz$.

12. а) $\oint\limits_{|z-3+2i|=3} \frac{6^z-1}{z(z-3)(z-3+i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z-i|=2} (z-i)^5 \cos\frac{2}{z-i}dz$.

13. а) $\oint\limits_{|z+2+i|=2} \frac{tgz}{z(z+2)(z+1+i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=3} (z+2)^3 e^{\frac{1}{(z+2)^2}}dz$.

14. а) $\oint\limits_{|z+3-i|=2} \frac{1-\cos z}{z^2(z+3)(z+2-i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} (z-i)^5 \operatorname{ch}\frac{2}{z-i}dz$.

15. а) $\oint\limits_{|z-2-3i|=2,5} \frac{e^{z+i}-1}{(z+i)(z-3i)(z-2-2i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} (z-i)^3 \operatorname{sh}\frac{1}{(z-i)^2}dz$.

16. а) $\oint\limits_{|z-1+2i|=2} \frac{\sin(z+i)}{(z+i)(z+2i)(z-1+i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z-1+i|=2} \cos\frac{z}{z+i}dz$.

17. а) $\oint\limits_{|z+2-3i|=3} \frac{4^{z-1}-1}{(z-1)(z-3i)(z+1-2i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z-1|=1,5} z\sin\frac{1}{z-2}dz$.

18. а) $\oint\limits_{|z+2+3i|=3} \frac{tg(z-i)}{(z-i)(z+3i)(z+1+2i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z-1|=1} \operatorname{ch}\frac{z}{z-1}dz$.

19. а) $\oint\limits_{|z-3+i|=2} \frac{1-\cos z}{z^2(z-2)(z-3+2i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} (z+i)^2 \operatorname{sh}\frac{1}{(z+i)^3}dz$.

20. а) $\oint\limits_{|z-3-i|=2} \frac{e^{z+1}-1}{(z+1)(z-2)(z-2-i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z-1|=1} z e^{\frac{z-2}{z-1}}dz$.

21. а) $\oint\limits_{|z-1-3i|=2} \frac{\sin(z-i)}{(z-i)(z-2i)(z-1-2i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z-i|=1,5} (z-2i)^3 \sin\frac{1}{(z-2i)^2}dz$.

22. а) $\oint\limits_{|z+3-2i|=3} \frac{3^{z-1}-1}{(z-1)(z+3)(z+2-i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z+1|=1,5} (z+2)^2 \operatorname{sh}\frac{1}{z+2}dz$.

23. а) $\oint\limits_{|z+3-i|=2} \frac{tg(z-i)}{(z-i)(z+3)(z+2+i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z-2|=2} (z-2)^5 \operatorname{ch}\frac{1}{z-2}dz$.

24. а) $\oint\limits_{|z-2+3i|=2,5} \frac{\cos z-1}{z^2(z+3i)(z-1+3i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z-i|=2} (z-2i)^3 \cos\frac{1}{(z-2i)^2}dz$.

25. а) $\oint\limits_{|z-2+2i|=3} \frac{e^{z+i}-1}{(z+i)(z-2)(z-1+i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} z e^{\frac{z}{z+1}}dz$.

26. а) $\oint\limits_{|z+1+i|=2} \frac{\sin(z+3i)}{z(z-3i)(z+1)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} \cos\frac{z-1}{(z+1)^2}dz$.

27. а) $\oint\limits_{|z+2-2i|=2,5} \frac{5^{z+2}-1}{(z+2)(z-2i)(z+2-i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z+1|=1,5} (z+2)^4 \operatorname{sh}\frac{3}{z+2}dz$.

28. а) $\oint\limits_{|z-1+i|=2} \frac{tg(z-i)}{(z-i)(z+i)(z-1)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z+i|=1,5} \sin\frac{z}{z+2i}\,dz$.

29. а) $\oint\limits_{|z-2-2i|=2,5} \frac{1-\cos z}{z^2(z-2)(z-2-i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z-i|=2} (z-2i)^3 \operatorname{ch}\frac{1}{(z-2i)^2}\,dz$.

30. а) $\oint\limits_{|z+1-i|=2} \frac{e^{z-2}-1}{z(z-2)(z-i)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z+i|=0,5} (z+i)^2 e^{\frac{z}{(z+i)^2}}\,dz$.

Завдання 10. Обчислити інтеграли за допомогою лишків.

1. а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{15-2\cos t}dt$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+1)\sin t}{(t^2+64)(t^2-2t+5)^2}\,dt$.

2. а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{11+8\sin t}dt$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-2)\cos t}{(t^2+16)(t^2+4t+8)^2}\,dt$.

3. а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{7+3\cos t}dt$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-1)\sin t}{(t^2+81)(t^2-8t+25)^2}\,dt$.

4. а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{10+9\sin t}dt$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-3)\cos t}{(t^2+25)(t^2-4t+5)^2}\,dt$.

5. а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{13+4\cos t}dt$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-4)\sin t}{(t^2+16)(t^2+6t+13)^2}\,dt$.

6. а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{11-2\sin t}dt$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+2)\cos t}{(t^2+49)(t^2-4t+13)^2}\,dt$.

7. а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{15-6\cos t}dt$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+3)\sin t}{(t^2+25)(t^2-6t+10)^2}\,dt$.

8. а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{9+7\sin t}dt$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-1)\cos t}{(t^2+16)(t^2+6t+10)^2}\,dt$.

9. а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{8-7\cos t}dt$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+2)\sin t}{(t^2+36)(t^2-2t+10)^2}\,dt$.

10. а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{11-6\sin t}dt$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-3)\cos t}{(t^2+4)(t^2+6t+18)^2}\,dt$.

11. а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{9+8\cos t}dt$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+1)\sin t}{(t^2+49)(t^2+4t+5)^2}\,dt$.

12. а) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{15+4\sin t}dt$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+1)\cos t}{(t^2+16)(t^2+8t+17)^2}dt$.

13. а) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{7-5\cos t}dt$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+3)\sin t}{(t^2+64)(t^2+4t+13)^2}dt$.

14. а) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{17+3\sin t}dt$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-4)\cos t}{(t^2+25)(t^2-8t+20)^2}dt$.

15. а) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{11+9\cos t}dt$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-1)\sin t}{(t^2+81)(t^2+4t+8)^2}dt$.

16. а) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{13-9\sin t}dt$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+3)\cos t}{(t^2+49)(t^2-6t+13)^2}dt$.

17. а) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{7-3\cos t}dt$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-2)\sin t}{(t^2+16)(t^2-4t+5)^2}dt$.

18. а) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{7+5\sin t}dt$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+4)\cos t}{(t^2+64)(t^2+4t+13)^2}dt$.

19. а) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{15-4\cos t}dt$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+1)\sin t}{(t^2+25)(t^2-4t+13)^2}dt$.

20. а) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{9-8\sin t}dt$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-4)\cos t}{(t^2+49)(t^2+4t+5)^2}dt$.

21. а) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{11+6\cos t}dt$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-1)\sin t}{(t^2+36)(t^2+6t+10)^2}dt$.

22. а) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{13-4\sin t}dt$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+2)\cos t}{(t^2+16)(t^2-2t+10)^2}dt$.

23. а) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{9+7\cos t}dt$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-3)\sin t}{(t^2+49)(t^2+6t+18)^2}dt$.

24. а) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{8+7\sin t}dt$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+1)\cos t}{(t^2+25)(t^2-6t+10)^2}dt$.

25. а) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{13+2\cos t}dt$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+3)\sin t}{(t^2+64)(t^2+8t+17)^2}dt$.

26. а) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{15+6\sin t}dt$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-2)\cos t}{(t^2+49)(t^2+6t+13)^2}dt$.

27. а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{10-9\cos t}\,dt$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-1)\sin t}{(t^2+81)(t^2-8t+20)^2}\,dt$.

28. а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{10+3\sin t}\,dt$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-3)\cos t}{(t^2+36)(t^2-8t+25)^2}\,dt$.

29. а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{11-8\cos t}\,dt$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+2)\sin t}{(t^2+16)(t^2-6t+13)^2}\,dt$.

30. а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{15+2\sin t}\,dt$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t+1)\cos t}{(t^2+25)(t^2-2t+5)^2}\,dt$.

Завдання 11. Знайти відображення області D функцією $w=f(z)$.

1. $w=\frac{1}{z},\ D:\begin{cases}|z-i|<1,\\ \operatorname{Im} z>\operatorname{Re} z.\end{cases}$

2. $w=\frac{2z+1}{z+2},\ D:\begin{cases}|z|<1,\\ \operatorname{Im} z\ge 0.\end{cases}$

3. $w=e^{2z},\ D:\begin{cases}0<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{2},\\ \operatorname{Re} z>0.\end{cases}$

4. $w=z^2,\ D:\begin{cases}|z|>\frac{1}{2},\\ \operatorname{Re} z>0.\end{cases}$

5. $w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\ D:\begin{cases}|z|=1,\\ \operatorname{Im} z>0.\end{cases}$

6. $w=z^3,\ D:\begin{cases}|z|\le 1,\\ 0<\arg z<\frac{\pi}{6}.\end{cases}$

7. $w=\frac{z-1}{2z-6},\ D:|z-1|<2$.

8. $w=e^{iz},\ D:\begin{cases}0<\operatorname{Re} z<\pi,\\ \operatorname{Im} z>0.\end{cases}$

9. $w=\frac{1}{z},\ D:\begin{cases}\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2},\\ \operatorname{Im} z>\frac{1}{2}\operatorname{Re} z.\end{cases}$

10. $w=\frac{z+1}{z-2},\ D:|z-1|<2$.

11. $w=z^2,\ D:\begin{cases}\operatorname{Im} z\le\operatorname{Re} z,\\ 0\le\operatorname{Re} z\le 1,\\ 0\le\operatorname{Im} z\le 1.\end{cases}$

12. $w=\operatorname{Ln} z,\ D:\operatorname{Im} z>0$.

13. $w=4+2iz,\ D:|z-i|<1$.

14. $w=\frac{2}{z-1},\ D:1<|z|<2$.

15. $w=e^{z},\ D:-\pi<\operatorname{Im} z<0$.

16. $w=z^2,\ D:\begin{cases}|z|<2,\\ 0<\arg z<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

17. $w=\frac{1}{z},\ D:\begin{cases}|z-i|>1,\\ \operatorname{Im} z>0.\end{cases}$

18. $w=\frac{1-z}{1+z},\ D:\begin{cases}|z|<1,\\ \operatorname{Im} z>0.\end{cases}$

19. $w=z^4,\ D:\begin{cases}|z|\ge 2,\\ \frac{\pi}{8}\le\arg z\le\frac{\pi}{4}.\end{cases}$

20. $w=3z-1,\ D:|z|\ge 2$.

21. $w=\operatorname{ctg} z,\ D:0<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{4}$.

22. $w=e^{z},\ D:0<\operatorname{Im} z<\frac{\pi}{2}$.

23. $w=\frac{i-z}{i+z},\ D:\begin{cases}\operatorname{Re} z>0,\\ \operatorname{Im} z>0.\end{cases}$

24. $w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $D:\begin{cases}|z|<1,\\ 0<\arg z<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

25. $w=z^2$, $D:\begin{cases}\operatorname{Im} z\geq \operatorname{Re} z,\\ 0\leq \operatorname{Re} z\leq 2,\\ 0\leq \operatorname{Im} z\leq 2.\end{cases}$

26. $w=\cos z$, $D:-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Re} z<\frac{\pi}{2}$.

27. $w=\frac{1}{z}$, $D:\begin{cases}|z-1|<1,\\ \operatorname{Im} z>\operatorname{Re} z.\end{cases}$

28. $w=\frac{2iz}{z+3}$, $D:|z-1|<2$.

29. $w=\operatorname{Ln} z$, $D:\begin{cases}|z|\leq 1,\\ \operatorname{Im} z>0.\end{cases}$

30. $w=\frac{1}{z+i}$, $D:\operatorname{Im} z\geq 0$.

2. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Теоретичні питання

1. Означення функції-оригіналу та її перетворення Лапласа. Функція Хевісайда та її перетворення Лапласа.
2. Теореми лінійності та подібності перетворення Лапласа.
3. Теореми зміщення та запізнення перетворення Лапласа.
4. Теорема про диференціювання оригіналу.
5. Теорема про диференціювання зображення.
6. Теорема про інтегрування оригіналу.
7. Теорема про інтегрування зображення.
8. Теорема множення зображень.
9. Знаходження оригіналу за його зображенням.
10. Розв’язування лінійних диференціальних рівнянь і систем таких рівнянь операційним методом.
11. Інтеграл Дюамеля.
12. Розв’язування інтегральних рівнянь операційним методом.

Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти зображення наступних функцій:

1. $f(t)=t^2\cos 2t$;
2. $f(t)=t^2\sin 3t$;
3. $f(t)=(1+t)\sin 2t$;
4. $f(t)=t(e^{-t}+\operatorname{ch} t)$;
5. $f(t)=\int_0^t e^{\tau}\tau^4 d\tau$;
6. $f(t)=e^{-t}\cos 2t$;
7. $f(t)=e^t\sin^2 t$;
8. $f(t)=t\cdot\sin 2t\cdot\sin 3t$;
9. $f(t)=t\cdot\cos t\cdot\operatorname{ch} 2t$;
10. $f(t)=\frac{e^{-t}\sin 3t}{t}$;
11. $f(t)=\frac{\operatorname{sh}^2 2t}{t}$;

12. $f(t)=\dfrac{\sin t\cdot\sin 3t}{t}$;

13. $f(t)=\dfrac{\mathrm{sh}3t}{t}$;

14. $f(t)=\dfrac{\cos 2t-\cos 4t}{t}$;

15. $f(t)=\dfrac{1-\cos t}{t}e^{t}$;

16. $f(t)=\dfrac{e^{t}\sin^{2}2t}{t}$;

17. $f(t)=\int\limits_0^t \tau\,\mathrm{sh}2\tau\,d\tau$;

18 $f(t)=\int\limits_0^t (\tau+1)\cos 3\tau\,d\tau$;

19. $f(t)=\int\limits_0^t e^{-2\tau}\tau^{3}d\tau$;

20. $f(t)=\int\limits_0^t \dfrac{\sin 2\tau}{\tau}\,d\tau$;

21. $f(t)=\sin t\cdot\cos 2t$;

22. $f(t)=\cos t\cdot\cos 4t$;

23. $f(t)=e^{-t}\cdot\sin 2t\cdot\sin 4t$;

24. $f(t)=\int\limits_0^t e^{-3\tau}\,\mathrm{ch}2\tau\,d\tau$;

25. $f(t)=\cos 2t\cdot\mathrm{ch}t$;

26. $f(t)=t\cdot\mathrm{sh}2t$;

27. $f(t)=\dfrac{e^{-t}-t-1}{t}$;

28. $f(t)=\int\limits_0^t \cos^{2}2\tau\,d\tau$;

29. $f(t)=\sin^{3}t$;

30. $f(t)=\cos^{4}t$.

Завдання 2. Знайти оригінали за заданими зображеннями.

1. $\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$;

2. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$;

3. $\dfrac{6}{p^3-3}$;

4. $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$;

5. $\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$;

6. $\dfrac{4}{p^3+8}$;

7. $\dfrac{p+4}{p^2+4p+3}$;

8. $\dfrac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$;

9. $\dfrac{1}{p^3+p^2+p}$;

10. $\dfrac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}$;

11. $\dfrac{1}{p^3(p^2-4)}$;

12. $\dfrac{1}{p^3-1}$;

13. $\dfrac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$;

14. $\dfrac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}$;

15. $\dfrac{1-p}{p(p^2+3p+3)}$;

16. $\dfrac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}$;

17. $\dfrac{2-p}{p^3-2p^2+5p}$;

18. $\dfrac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}$;

19. $\dfrac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}$;

20. $\dfrac{3p+2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$;

21. $\dfrac{p-2}{p^2-4p+13}$;

22. $\dfrac{2-p}{p^2-2p+5}$;

23. $\dfrac{1}{(p-1)(p^2-4)}$;

24. $\dfrac{p+3}{p(p^2-4p+3)}$;

25. $\dfrac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$;

26. $\dfrac{p+2}{p^2(p^2+5p+4)}$;

27. $\dfrac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}$;

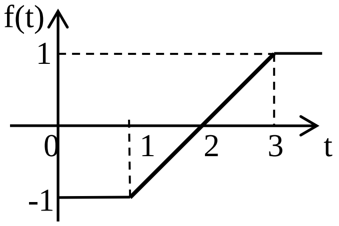
28. $\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$;

29. $\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$;

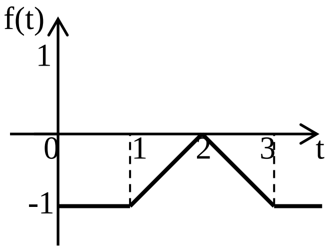
30. $\dfrac{p+4}{p^3+1}$.

Завдання 3. За поданим графіком оригіналу знайти зображення.

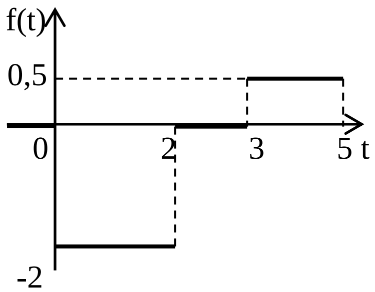
1.



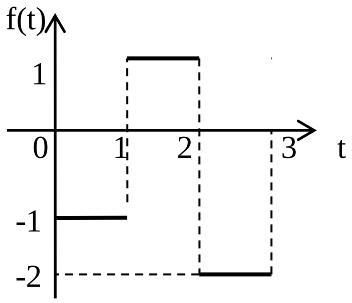
2.



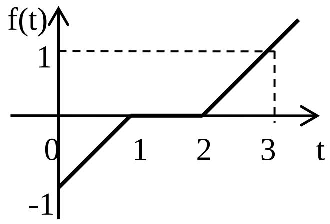
3.



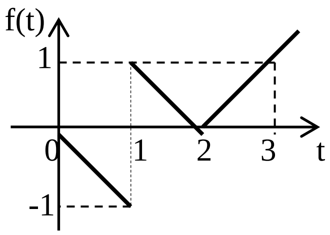
4.



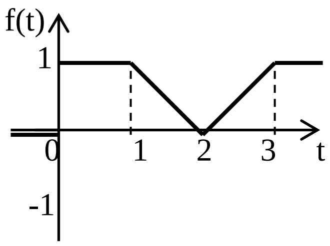
5.



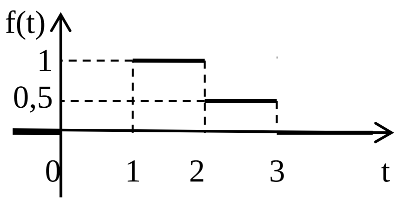
6.



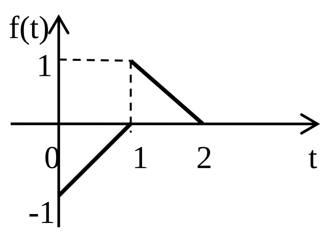
7.



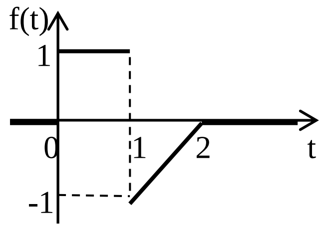
8.



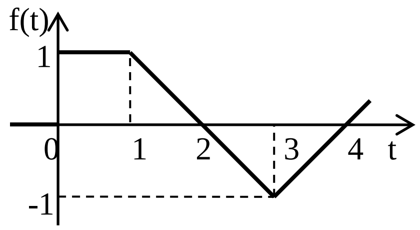
9.



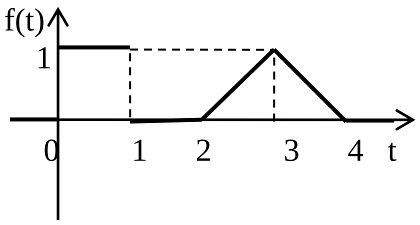
10.



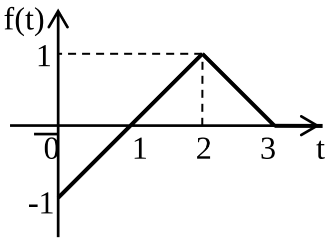
11.



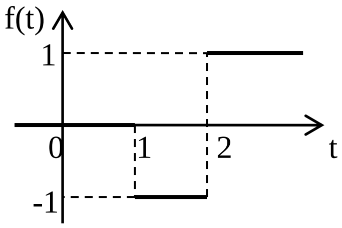
12.



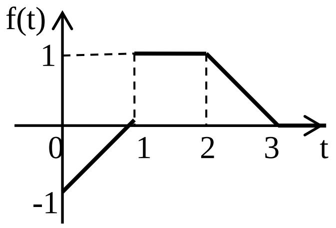
13.



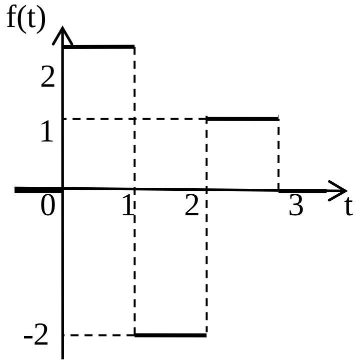
14.



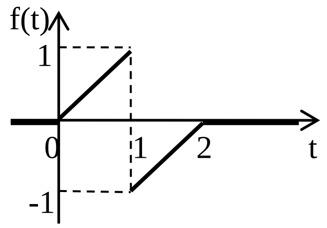
15.



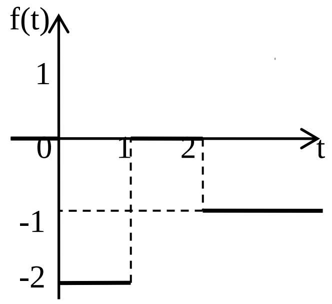
16.



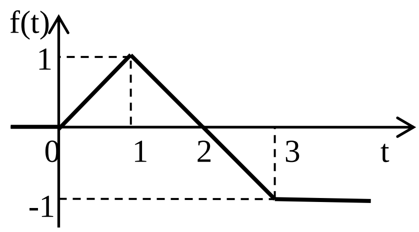
17.



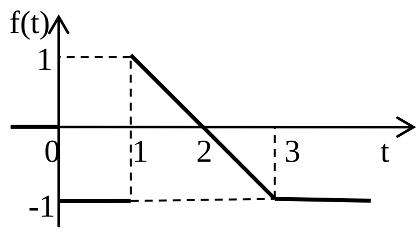
18.



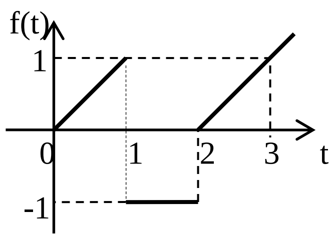
19.



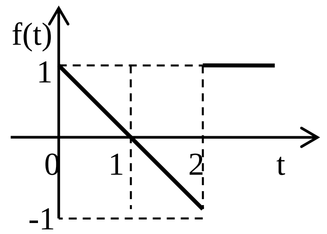
20.



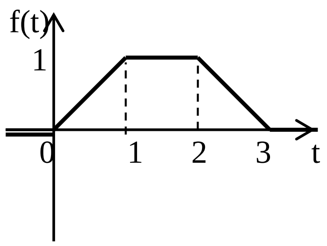
21.



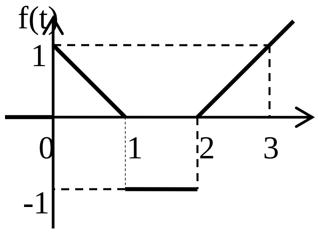
22.



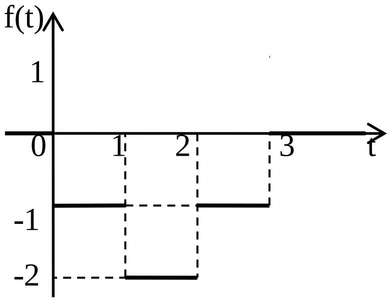
23



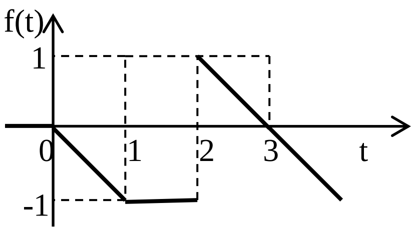
24.



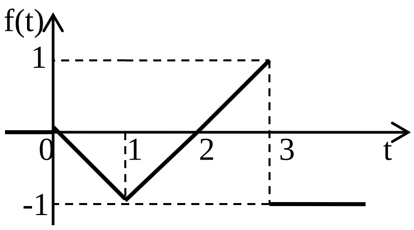
25.



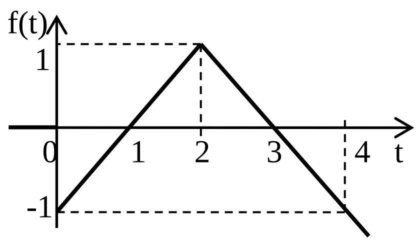
26.



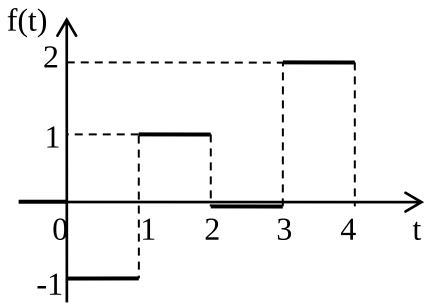
27.



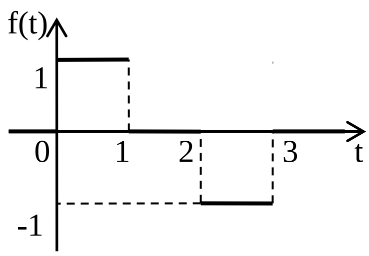
28.



29.



30.



Завдання 4. Операційним методом розв’язати задачу Коші:

1. $y'' + y = 6e^t, \quad y(0) = 3, y'(0) = 1$.
2. $y'' + y' = t^2 + 2t, \; y(0) = 0, y'(0) = -2.$
3. $y'' + y' + y = 7e^{2t}, \; y(0) = 1, y'(0) = 4$
4. $y'' - 9y = \sin t - \cos t, \quad y(0) = -3, y'(0) = 2$.
5. $y'' - y' = t^2, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$
6. $y'' - y = \cos 3t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$.
7. $y'' + y' - 2y = -2(t+1), \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$
8. $y'' + 2y' = 2 + e^t, \; y(0) = 1, y'(0) = 2$.
9. $2y'' - y' = \sin 3t, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1.$
10. $y'' + 2y' = \sin\dfrac{t}{2}, \quad y(0) = -2, y'(0) = 4$.

11. $y'' + y = \mathrm{sh}t, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$.

12. $y'' + 4y' + 29y = e^{-2t}$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

13. $y'' - 3y' + 2y = e^{t}$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

14. $2y'' + 3y' + y = 3e^{t}$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

15. $y'' - 2y' - 3y = 2t, \; y(0) = 1, y'(0) = 1$.

16. $y'' + 4y = \sin 2t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$.

17. $2y'' + 5y' = 29\cos t, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$.

18. $y'' + y' + y = t^2 + t, \; y(0) = 1, y'(0) = -3$.

19. $y'' + 4y = 8\sin 2t, \quad y(0) = 3, y'(0) = -1$.

20. $y'' - y' - 6y = 2, \; y(0) = 1, y'(0) = 0$.

21. $y'' + 4y = 4e^{2t} + 4t^2, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$.

22. $y'' + 4y' + y = 16e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 2$.

23. $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 6$.

24. $y'' + 4y = 3\sin t + 10\cos 3t, \quad y(0) = -2, y'(0) = 3$.

25. $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t}\cos 3\mathrm{t}, \quad y(0) = 5, y'(0) = 1$.

26. $y'' + 3y' - 10y = 40, \quad y(0) = 3, y'(0) = 6$.

27. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$, $y(0) = -1, y'(0) = 0$.

28. $y'' - 2y' = e^{t}(\mathrm{t}^2 + \mathrm{t} - 3), \quad y(0) = 2, y'(0) = 2$.

29. $y'' + y = 2\cos t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$.

30. $y'' - y = 4\sin t + 5\cos 2t, \quad y(0) = -1, y'(0) = -2$.

Завдання 5. Розв’язати рівняння, побудувати графік правої частини ($\eta(t)$ – функція Хевісайда).

1. $y' + 2y = \eta(t) + \eta(t-3), \; y(0) = 1$.
2. $y' + 4y = 2(\eta(t) + \eta(t-1)), \; y(0) = 0$.
3. $2y' + y = \eta(t) - \eta(t-2), \; y(0) = 2$.
4. $y'' + y = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2), \; y(0) = y'(0) = 0$.
5. $y' + 3y = 2\eta(t) - \eta(t-1), \; y(0) = 3$.
6. $y'' + y = \eta(t) + \eta(t-2), \; y(0) = 1, y'(0) = 0$.
7. $y'' + 2y' + 2y = \eta(t) - \eta(t-2), \; y(0) = y'(0) = 0$.
8. $y'' + 3y' = \eta(t-1), \; y(0) = 4, y'(0) = 0$.
9. $y' + 3y = \eta(t) - 2\eta(t-1) + 2\eta(t-2), \; y(0) = 1$.
10. $y' - y = -2\eta(t) + 2\eta(t-2) + \dfrac{1}{2}\eta(t-3) - \dfrac{1}{2}\eta(t-5), \; y(0) = 0$.
11. $y' - y = \eta(t) + 2\eta(t - \dfrac{\pi}{2}), \; y(0) = 0$.
12. $y'' - 2y' + y = t\eta(t) - (t-1)\eta(t-1), \; y(0) = y'(0) = 0$.
13. $y' + 2y = 2\eta(t) - \eta(t-1) - \eta(t-2), \; y(0) = 3$.

14. $y' + y = -\eta(t-1) + 2\eta(t-2),\ y(0) = 0.$
15. $y'' - 3y' + 2y = \eta(t-2) - \eta(t-3),\ y(0) = y'(0) = 0.$
16. $y'' - 3y' + 2y = \eta(t-1) - \eta(t-2),\ y(0) = y'(0) = 0.$
17. $y'' + 4y' + 4y = 2(\eta(t) - \eta(t-1)),\ y(0) = 1, y'(0) = 0.$
18. $4y' + 2y = \eta(t) - \eta(t-1),\ y(0) = 2.$
19. $y' + 2y = 2\eta(t) - \eta(t-1),\ y(0) = 3.$
20. $y' + y = \eta(t) + \eta(t-2) - \eta(t-1) - \eta(t-3),\ y(0) = 1.$
21. $y'' + 2y' + 2y = \eta(t) + \eta(t-2),\ y(0) = y'(0) = 0.$
22. $y' + 4y = \eta(t) + 4\eta(t-1),\ y(0) = 0.$
23. $2y' + 3y = \eta(t) - 2\eta(t-1) + 2\eta(t-2),\ y(0) = 0.$
24. $y' + y = \eta(t-1) + \eta(t-2) + \eta(t-3),\ y(0) = 0.$
25. $y'' + 4y = \eta(t) - \eta(t-2\pi),\ y(0) = y'(0) = 0.$
26. $y'' + y = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t+2),\ y(0) = y'(0) = 0.$
27. $y'' + 3y' = \eta(t-2),\ y(0) = 4, y'(0) = 0.$
28. $y'' + 4y = 2\eta(t-2) - \eta(t-1),\ y(0) = y'(0) = 0.$
29. $y'' + 9y = \eta(t-3),\ y(0) = y'(0) = 0.$
30. $y'' + 2y' = \eta(t-1),\ y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Завдання 6. Розв’язати систему диференціальних рівнянь операційним методом.

1. $\begin{cases} x' = x + 2y + 2e^t, \\ y' = 2x + y, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 1.$

2. $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2(x + y), \end{cases} x(0) = y(0) = 1.$

3. $\begin{cases} x' = x + 3y + 2, \\ y' = x - y + 1, \end{cases} x(0) = -1, y(0) = 2.$

4. $\begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x - 2, \end{cases} x(0) = y(0) = 0.$

5. $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 2x + y, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 1.$

6. $\begin{cases} x' + y' = 1, \\ x' = x - y, \end{cases} x(0) = -1, y(0) = 0.$

7. $\begin{cases} x' = y, \\ x' - y' = x + y, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 1.$

8. $\begin{cases} x' + x = 3y + 1, \\ y' = x + y, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 2.$

9. $\begin{cases} x' + 2x - y = 0, \\ y' - 3x = 0, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 1.$

10. $\begin{cases} x' + 3x + y = 0, \\ y' - x + y = 0, \end{cases} x(0) = y(0) = 1.$

11. $\begin{cases} x' + 4x + 4y = 0, \\ y' + 2x + 6y = 0, \end{cases} x(0) = 3, y(0) = 15.$

12. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ y' - 2x - y = t, \end{cases} x(0) = 2, y(0) = 4.$

13. $\begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ y' = -3x, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 1.$

14. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x, \end{cases} x(0) = y(0) = 1.$

15. $\begin{cases} x' = -4(x + y), \\ x' + 4y' = -4y, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 0.$

16. $\begin{cases} x' = 4x - 5y, \\ y' = x, \end{cases} x(0) = 0, y(0) = 1.$

17. $\begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = -x - 3y, \end{cases} x(0) = -2, y(0) = 1.$

18. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x - y + 9, \end{cases} x(0) = 1, y(0) = 0.$

19. $\begin{cases} x' = 2x + 5y, \\ y' = x - 2y + 2, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$.

20. $\begin{cases} x' = x + 2y + 1, \\ y' = 4x - y, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1$.

21. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1, \\ y' = x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 2$.

22. $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1, \\ y' = x + 2y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 2$.

23. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' + 5x + 3y = 2, \end{cases}$ $x(0) = 2, y(0) = 0$.

24. $\begin{cases} x' + 3x + 4y = 1, \\ y' = 2x + 3y, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 2$.

25. $\begin{cases} x' + 2x = 6y + 1, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1$.

26. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1, \\ y' = 4x - 2y, \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 0$.

27. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1, \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 5$.

28. $\begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = -4x, \end{cases}$ $x(0) = 3, y(0) = 1$.

29. $\begin{cases} x' = -x - 2y + 1, \\ y' = -\dfrac{3}{2}x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 0$.

30. $\begin{cases} x' = 1 + 2y, \\ y' = 2x + 3, \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 0$.

Завдання 7. Використовуючи формулу Дюамеля, знайти розв’язок диференціального рівняння, який задовольняє умови $y(0) = 0, y'(0) = 0$:

1. $y'' - y = \operatorname{th} t$.
2. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{1 + t^2}$.
3. $y'' - y = \operatorname{th}^2 t$.
4. $y'' - y' = \dfrac{e^t}{1 + e^t}$.
5. $y'' + y' = \dfrac{e^{2t}}{3 + e^t}$.
6. $y'' - 4y = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 2t}$.
7. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{2e^{2t}}{\operatorname{ch}^2 2t}$.
8. $y'' - y = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$.
9. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{(1 + t)^2}$.
10. $y'' - y = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 t}$.
11. $y'' + 2y' + y = \dfrac{te^{-t}}{1 + t}$.
12. $y'' - y = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}$.
13. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{1 + t^2}$.
14. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-t}}{\operatorname{ch}^2 t}$.
15. $y'' + 2y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$.
16. $y'' - y' = \dfrac{1}{1 + e^t}$.
17. $y'' - 2y' + 2y = 2e^t \cos t$.
18. $y'' - y = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$.
19. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{1 + t}$.
20. $y'' - 2y' = \dfrac{e^t}{\operatorname{ch} t}$.
21. $y'' + y' = \dfrac{1}{1 + e^t}$.
22. $y'' - 4y = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 2t}$

23. $y'' + y' = \dfrac{e^t}{1+e^t}$.

24. $2y'' - y' = \dfrac{e^t}{\left(1+e^{\frac{t}{2}}\right)^2}$.

25. $y'' - y' = \dfrac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}$.

26. $y'' - y' = \dfrac{e^{2t}}{2+e^t}$.

27. $y'' + y' = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$.

28. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{\mathrm{ch}^2 t}$.

29. $y'' - 4y = \mathrm{th}^2\, 2t$.

30. $y'' + y' = \dfrac{1}{(1+e^t)^2}$.

Завдання 8. Знайти розв’язок інтегрального рівняння операційним методом.

1. $y(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)y(t)dt$.

2. $y(x) = x - \int_0^x e^{x-t}y(t)dt$.

3. $\int_0^x \mathrm{ch}(x-t)y(t)dt = x$.

4. $y(x) = \cos x + \int_0^x (x-t)y(t)dt$.

5. $y(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{t-x}y(t)dt$.

6. $\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt = x^3(x-1)$.

7. $y(x) = e^x + \int_0^x y(t)dt$.

8. $y(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\int_0^x \sin 2(x-t)y(t)dt$.

9. $y(x) = \cos x + \int_0^x y(t)dt$.

10. $\int_0^x e^{x-t}y(t)dt = x^2$.

11. $y(x) = e^x - 2\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt$.

12. $\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt = \sin x$.

13. $y(x) = \mathrm{sh}\, x - \int_0^x \mathrm{ch}(x-t)y(t)dt$.

14. $\mathrm{sh}\, x = \int_0^x \mathrm{ch}(x-t)y(t)dt$.

15. $y(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t}y(t)dt$

16. $y(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t}y(t)dt$

17. $y(x) = 1 + \dfrac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 y(t)dt$

18. $y(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt$

19. $y(x) = x - \int_0^x (x-t)y(t)dt$

20. $y(x) = 1 + x + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt$

21. $y(x) = \mathrm{sh}\, x + \int_0^x (x-t)y(t)dt$

22. $y(x) = 1 + 2\int_0^x \cos(x-t)y(t)dt$

23. $y(x) = e^x + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)y(t)dt$

24. $\int\limits_0^x \cos(x-t)y(t)dt = x + x^2$

25. $\int\limits_0^x e^{2(x-t)}y(t)dt = x^2 e^x$

26. $\int\limits_0^x \cos(x-t)y(t)dt = x\cos x$

27. $y(x) = x - \int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)y(t)dt$

28. $y(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2 y(t)dt$

29. $y(x) = \frac{x^2}{2} + \int\limits_0^x (x-t)e^{x-t}y(t)dt$

30. $y(x) = x + 2\int\limits_0^x [(x-t) - \sin(x-t)]y(t)dt$

Література

1. Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной./ Свешников А.Г., Тихонов А.Н. – Москва: Наука, 1970 – 315 с.
2. Араманович И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости./ Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Єльсгольц Л.Є. – Москва: Наука, 1965. – 416 с.
3. Дубовик В. П. Вища математика. Навчальний посібник./ Дубовик В. П., Юрик І. І. – Киев, 2006. – 648 с.
4. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. Г.И. Кручковича. – Москва: Высш. шк., 1973 –512 с.
5. Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. / Волковыский Л.И., Лунц И.Г., Араманович И.Г. – М.: Физматгиз, 1960. – 367 с.
6. Гурский Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике: Учеб.пособие. В 2 ч. // Гурский Е.И., Домашов В.П., Кравцов В.К.,Сильванович А.П. – Мн.: Выш. Шк., 1990. – Ч.2 – 400 с.
7. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч.// Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М: Высш. Шк., 1986. – Ч.2 – 415 с.

Додаток 1

Зразок оформлення титульного листа

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

кафедра математичної фізики

Розрахункова робота
на тему
“Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення”

Виконав студент гр.____ , ММІ

____
(Прізвище, ініціали)

Варіант №___

Перевірив:____________________
(посада, прізвище, ініціали)

Зараховано ____________________
(підпис)

“___”_________201_ р.
(дата, місяць, рік)