МІНІСТЕРСТВО НАУКИ ТА ОСВІТИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ТА ВАРІАНТИ ТИПОВО-
РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ
З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Рекомендовано вченою радою фізико-математичного факультету протокол № 1 від 23 лютого 2015 року

КИЇВ-2015

Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт з вищої математики. Поверхневі інтеграли. Теорія поля / Уклад.: Г.В.Журавська, І.М. Копась, Г.М.Кулик, Н.В.Рева, Н.В.Степаненко –К.: НТУУ «КПІ», 2015.− 67 с.

Укладачі: *Г.В.Журавська*
І.М. Копась
Г.М.Кулик
Н.В.Рева
Н.В.Степаненко

Відповідальний редактор: З.П.Ординська, канд. фіз.-мат. наук, доцент.

Рецензенти: А.С. Романюк, докт. фіз.-мат. наук, професор,

Н.М. Задерей, канд. фіз.-мат. наук, доцент.

Зміст

1. Поверхневі інтеграли ……………………………………………………………………..5

1.1 Поверхневі інтеграли першого роду ……………………………………………..5

1.2 Поверхневі інтеграли другого роду ……………………………………………..11

1.3 Формула Гаусса-Остроградського ………………………………………………18

1.4 Формула Стокса ………….……………………………………………………23

1.5 Застосування поверхневих інтегралів в задачах механіки та геометрії …….27

2. Вступ до математичної теорії поля …………………………………………………30

2.1 Похідна скалярного поля за заданим напрямом. Градієнт …………………..31

2.2 Векторне поле ………………………………………………………………………..36

2.3 Потік векторного поля. Дивергенція ……………………………………………38

2.4. Циркуляція векторного поля. Ротор ……………………………………………44

2.5 Потенціальне, соленоідальне і гармонічне векторні поля …………………..50

Завдання до розрахункової роботи ……………………………………………………56

Література …………………………………………………………………………………..67

Передмова

Математичний аналіз функцій багатьох змінних має дуже важливе значення в механіці, гідромеханіці, електродинаміці, теорії нелінійних коливань, математичній фізиці. Розглядаючи задачі і проблеми цих областей науки часто зустрічаємо математичну постановку задач в багатовимірних просторах. Оскільки нам легше уявляти трьохвимірний простір, то більш цікавим і поширеним є дослідження основних задач і понять в $\mathbf{R}^3$.

Пропонуємо посібник, в якому описано ряд цікавих задач з теорії дійсних функцій залежних від двох і трьох змінних. Враховуючи те, що читач уже знайомий з криволінійними інтегралами першого і другого роду на площині і в просторі $\mathbf{R}^3$, в першому і другому параграфах розглянуто поверхневі інтеграли першого і другого роду і приведено їх основні властивості. Далі, в наступному параграфі, розглянуто і доведено формулу Гауса-Остроградського про зв'язок між потрійним інтегралом в $\mathbf{R}^3$ і поверхневим по поверхні обмеженого тіла. Розглянуто формулу Стокса, яка встановлює зв'язок між поверхневим та криволінійними інтегралами по просторовій кривій, яка є межею поверхні. Ці формули підкріплюються цікавими прикладами. Запропоновано деякі застосування поверхневих інтегралів в механіці та геометрії. Це стосується обчислення маси матеріальної поверхні з відомим розподілом густини маси, знаходження координат центра ваги матеріальної поверхні, обчислення моментів інерції, статичних моментів інерції.

В посібнику пропонується розглянути найважливіші питання теорії поля. Описано природнє виникнення скалярних і векторних полів. Приведено означення похідної за заданим напрямом, градієнта скалярного поля, його властивості, поняття ротора векторного поля, знаходження векторних ліній. Введено поняття потоку векторного поля через задану поверхню, показано, що являє собою потік в гідромеханіці, методи його обчислення. Розглянуто поняття циркуляції векторного поля вздовж заданої кривої. В кінці посібника розглянуто три види векторних полів: потенціальне, соленоїдальне та гармонічне.

В посібнику пропонується ряд цікавих прикладів, які можуть бути використані для самостійних робіт, що беззаперечно поможуть глибше зрозуміти застосування запропонованої теорії у практиці.

Маємо надію, що запропонований посібник сподобається студентам, які з великою охотою займаються математикою.

1. Поверхневі інтеграли

1.1 Поверхневі інтеграли першого роду

Поверхневі інтеграли 1-го роду застосовуються при обчисленні площі деякої обмеженої, чи, можливо, деякої і необмеженої поверхні, маси цього кусочка поверхні при заданій густині маси, координат центра ваги поверхні, моментів інерції поверхні з розподіленою густиною маси.

Ми будемо розглядати поверхні в просторі $\mathbf{R}^3$, це придає цій теорії наглядність.

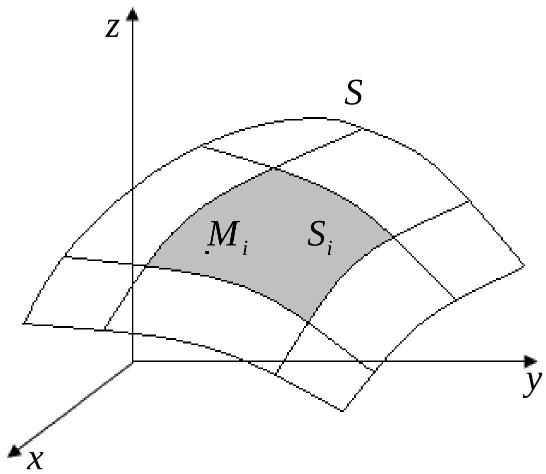


Рис.1

Нехай в просторі $\mathbf{R}^3$ задана частина деякої обмеженої поверхні S:

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1.1.1)$$

і в кожній точці (x, y, z) цієї поверхні задана деяка функція $\gamma(x, y, z)$. Розіб'ємо поверхню S на n частин ($S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots S_n$) і виберемо на кожній з цих частинок S_i поверхні довільну точку M_i з координатами (x_i, y_i, z_i) (рис.1).

Складемо наступну суму

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i = \sigma_n, \qquad (1.1.2)$$

де ΔS_i − площа частинки поверхні S_i. Позначимо через λ найбільший із діаметрів $\lambda_i = \sup\left|\tilde{M}_i, \overline{M}_i\right|, \quad \overline{M}_i, \tilde{M}_i \in S_i$ частинки поверхні S_i.

Означення. *Якщо існує скінчена границя сум (1.1.2) при* $\lambda \to 0$ *незалежна ні від вибору способу розбиття на частинки* S_i*, ні від вибору точок* $M_i \in S_i$*, то цю границю прийнято називати поверхневим інтегралом першого роду по поверхні* S *і записувати в наступному вигляді*

$$\iint_S \gamma(x, y, z)ds. \qquad (1.1.3)$$

Основні властивості поверхневого інтегралу 1-го роду.

1. Нехай дві функції $\gamma_1(x, y, z)$ *і* $\gamma_2(x, y, z)$ *є неперервними на* S*, тоді для будь-яких дійсних чисел* $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ *виконується рівність*

$$\iint_S [\alpha\gamma_1(x, y, z) + \beta\gamma_2(x, y, z)]ds = \alpha\iint_S \gamma_1(x, y, z)ds + \beta\iint_S \gamma_2(x, y, z)ds. \qquad (1.1.4)$$

2. Якщо поверхня S *складена з двох поверхонь* S_1 *і* S_2, $S = S_1 \bigcup S_2$*, і при цьому поверхні* S_1, S_2 *не мають спільних внутрішніх точок, то*

$$\iint_S \gamma(x, y, z)ds = \iint_{S_1} \gamma(x, y, z)ds + \iint_{S_2} \gamma(x, y, z)ds. \qquad (1.1.5)$$

3. Якщо $\gamma(x, y, z) \equiv 1,\ (x, y, z) \in S$*, то* $\iint_S ds = s$*, де* s *− площа поверхні* S.

4. Має місце нерівність

$$\left|\iint_S \gamma(x, y, z)ds\right| \le \iint_S |\gamma(x, y, z)|ds \le K \cdot s, \qquad (1.1.6)$$

де $K = \max\limits_{(x,y,z)\in S}|\gamma(x, y, z)|$, s *− площа поверхні* S.

5. Якщо функція $\gamma(x, y, z)$ *є неперервною на замкнутій поверхні* S*, то на цій поверхні існує точка* $(x_0, y_0, z_0) \in S$ *така, що*

$$\iint_S \gamma(x, y, z)ds = \gamma(x_0, y_0, z_0) \cdot s, \qquad (1.1.7)$$

де s *− площа поверхні* S.

Обчислення поверхневих інтегралів 1-го роду

Нехай поверхню S, яка визначається в неявному вигляді (1.1.1) можна записати в явному вигляді $z = z(x, y)$. При цьому $x,\ y$ змінюються в області D_{xy}; D_{xy} − проекція поверхні S на площину XOY. Припускаємо, що функції $z(x, y),\ z'_x(x, y),\ z'_y(x, y)$ є неперервними в області D_{xy}, функція $\gamma(x, y, z)$ є неперервною на поверхні S.

Внаслідок розбиття поверхні S на частини S_i, область D_{xy} розіб’ється на частини D_i, які є відповідними проекціями частин S_i на площину XOY.

Якщо позначити через ΔD_i площу частини D_i, то можна записати зв'язок між площами ΔD_i і ΔS_i: $\Delta D_i \approx \Delta S_i \cos\alpha_i$, α_i – кут між нормаллю $\vec{n}_i$ до поверхні S_i в точці M_i і віссю OZ (рис.2).

Враховуючи рівність

$$\cos\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2(x_i, y_i) + z_y'^2(x_i, y_i)}},$$

інтегральну суму (1.1.2) запишемо у наступному вигляді

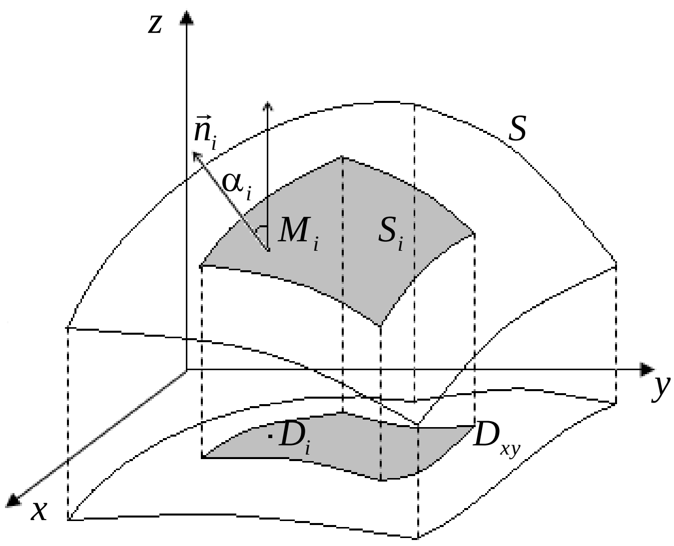


Рис.2

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\frac{\Delta D_i}{\cos\alpha_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\sqrt{1 + z_x'^2(x_i, y_i) + z_y'^2(x_i . y_i)}\Delta D_i$$

Звідси випливає зв'язок між поверхневим інтегралом 1-го роду і подвійним інтегралом

$$\iint_S \gamma(x, y, z)ds = \iint_{D_{xy}} \gamma(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}dxdy. \qquad (1.1.8)$$

Якщо із неявного запису (1.1.1) поверхню S можливо записати $y = y(x, z)$, тоді

$$\iint_S \gamma(x, y, z)ds = \iint_{D_{xz}} \gamma(x, y(x, z), z)\sqrt{1 + y_x'^2(x, z) + y_z'^2(x, z)}dxdz. \qquad (1.1.9)$$

У випадку запису поверхні S у вигляді $x = x(y, z)$ будемо мати

$$\iint_S \gamma(x, y, z)ds = \iint_{D_{yz}} \gamma(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + x_y'^2(y, z) + x_z'^2(y, z)}dydz. \qquad (1.1.10)$$

Нехай тепер поверхня S записується в параметричному вигляді

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v), \qquad z = z(u,v). \qquad (1.1.11)$$

В цьому випадку елемент площі записується у вигляді

$$ds = \sqrt{J_1^2(u,v) + J_2^2(u,v) + J_3^2(u,v)}dudv,$$

де

$$J_1(u,v)=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} = y'_u z'_v - y'_v z'_u ,$$

$$J_2(u,v)=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} = z'_u x'_v - z'_v x'_u , \qquad (1.1.12)$$

$$J_3(u,v)=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = x'_u y'_v - x'_v y'_u .$$

Таким чином, поверхневий інтеграл (1.1.3) у випадку параметричного вигляду (1.1.11) поверхні S, обчислюється наступним чином

$$\iint_S \gamma(x,y,z)ds = \iint_D \gamma(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{J_1^2(u,v)+J_2^2(u,v)+J_3^2(u,v)}dudv. \qquad (1.1.13)$$

Приклад 1. *Обчислити поверхневий інтеграл*

$$\iint_S \left(x^2+3xy+y^2-z^2\right)ds ,$$

де S *− частина площини* $x+y+z=3$*, розміщена у першому октанті.*

◀ Рівняння заданої поверхні S запишемо у вигляді $z=3-x-y$, звідси отримуємо $\sqrt{1+{z'_x}^2(x,y)+{z'_y}^2(x,y)}=\sqrt{3}$. Проекцією поверхні S на площину XOY є трикутник D_{xy} обмежений прямими $x=0$, $y=0$, $x+y=3$ (рис.3).

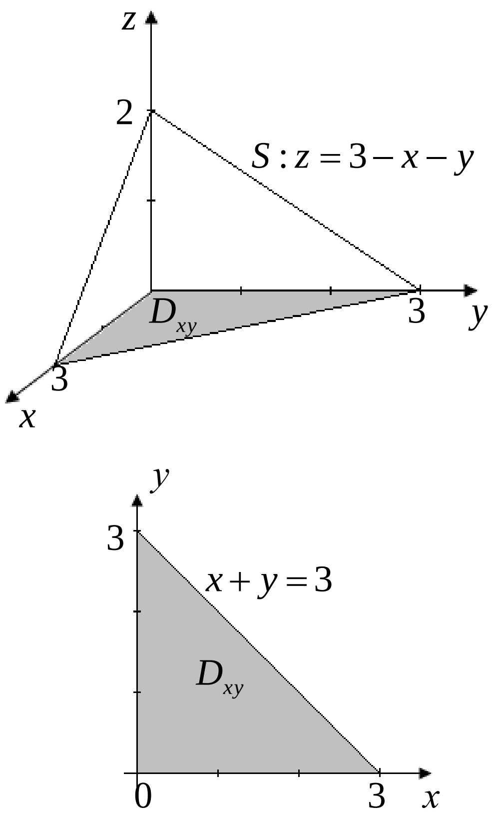


Рис.3

Тепер записаний поверхневий інтеграл зводимо до подвійного і обчислюємо його.

$$\iint_S \left(x^2+3xy+y^2-z^2\right)ds =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(x^2+3xy+y^2-(3-x-y)^2\right)\sqrt{3}dxdy =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^3 dx \int_0^{3-x} (xy+6x+6y-9)dy =$$

$$\sqrt{3}\int_0^3 \left(\frac{1}{2}x^3-6x^2+\frac{9}{2}x+27\right)dx = \frac{459\sqrt{3}}{8}. \blacktriangleright$$

Приклад 2. *Обчислити поверхневий інтеграл*

$$\iint_S \left(x^2 + y^2\right) ds,$$

де S − *повна поверхня сфери* $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

◄ Поверхню S (рис.4) *запишемо в параметричному вигляді*

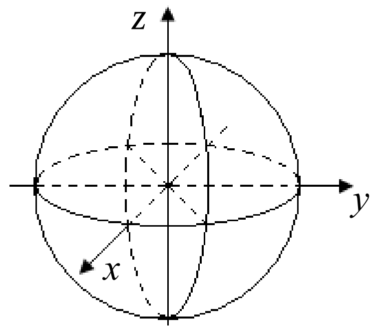


Рис. 4

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u.$$

При цьому параметри $u,\ v$ змінюються в межах

$$-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le v \le 2\pi.$$

Підраховуємо якобіани (1.1.12), маємо

$$J_1(u,v) = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin u \sin v & \cos u \\ \cos u \cos v & 0 \end{vmatrix} = -\cos^2 u \cos v,$$

$$J_2(u,v) = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u & -\sin u \cos v \\ 0 & -\cos u \sin v \end{vmatrix} = -\cos^2 u \sin v,$$

$$J_3(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin u \cos v & -\sin u \sin v \\ -\cos u \sin v & \cos u \cos v \end{vmatrix} = -\cos u \sin u.$$

Таким чином, отримуємо

$$ds = \sqrt{J_1^2(u,v) + J_2^2(u,v) + J_3^2(u,v)}\, du dv = |\cos u|\, du dv$$

і обчислюємо наш інтеграл

$$\iint_S \left(x^2 + y^2\right) ds = \iint_D \cos^2 u |\cos u|\, du dv = \int_0^{2\pi} dv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 u\, du = 2\pi \left(\sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u \right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8\pi}{3}. ►$$

Приклад 3. *Обчислити поверхневий інтеграл*

$$\iint_S z ds,$$

де S − *частина поверхні гелікоїда (рис.5)*

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v, \quad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 2\pi.$$

◀ Записуючи похідні

$$x'_u = \cos v,\quad x'_v = -u\sin v,\quad y'_u = \sin v,$$

$$y'_v = u\cos v,\quad z'_u = 0,\quad z'_v = 1,$$

отримуємо

$$J_1(u,v) = \begin{vmatrix} \sin v & 0 \\ u\cos v & 1 \end{vmatrix} = \sin v,$$

$$J_2(u,v) = \begin{vmatrix} 0 & \cos v \\ 1 & -u\sin v \end{vmatrix} = -\cos v$$

$$J_3(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -u\sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u\,.$$

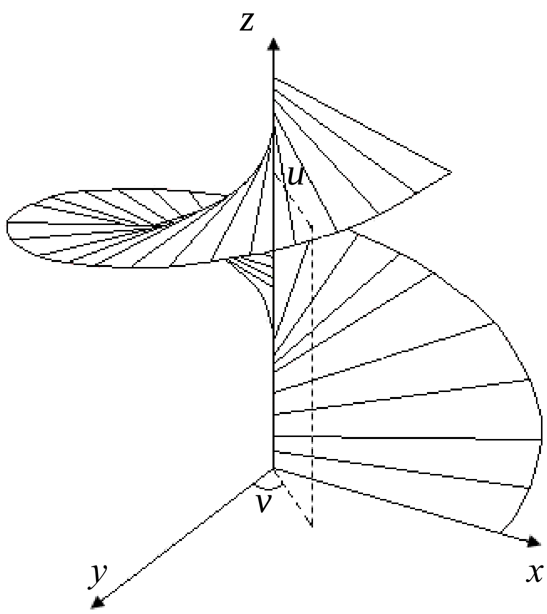


Рис. 5

Таким чином, враховуючи формулу (1.1.13), маємо

$$\iint_S z\,ds = \iint_D v\sqrt{1+u^2}\,dv\,du = \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du \int_0^{2\pi} v\,dv = \pi^2\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right). \blacktriangleright$$

Приклади для самостійного розв'язування

Обчислити поверхневі інтеграли першого роду.

1. $\iint_S xyz\,ds$, де S − частина площини $x + y + z = 1$, що лежить в 1-му октанті.

2. $\iint_S \left(x^2 + y^2\right)ds$, де S − поверхня тіла, заданого нерівностями $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1$.

3. $\iint_S (xy + yz + zx)ds$, де S − частина конічної поверхні $\sqrt{x^2 + y^2} = z$, вирізана циліндром $x^2 + y^2 = 2ax$.

4. $\iint_S \left(y + z + \sqrt{a^2 - x^2}\right)ds$, де S − поверхня циліндра $x^2 + y^2 = a^2$, що лежить між двома площинами $z = 0,\quad z = h$.

5. $\iint_S \left(x^2 + y^2\right)ds$, де S − поверхня тіла, заданого нерівностями $\dfrac{x^2 + y^2}{2} \le z \le 1$.

6. $\iint_S x\,ds$, де S − півсфера $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

1.2 Поверхневі інтеграли другого роду

Поверхневий інтеграл першого роду не залежить від орієнтації поверхні, оскільки площа ΔS_i частинки поверхні, яка входить у інтегральну суму (1.2) є завжди додатною. Але існує ряд важливих задач (наприклад, про величину потоку рідини через задану поверхню за одиницю часу та ін.), в яких орієнтація поверхні відіграє важливу роль. Такі задачі приводять до поняття поверхневого інтеграла 2-го роду.

Нагадаємо означення *двосторонньої* поверхні і *односторонньої.*

Розглянемо деяку гладку поверхню S і на ній замкнений контур L, який не має спільних точок з межею цієї поверхні (рис.6). У довільній точці P контуру L проведемо одиничний ортогональний вектор $\vec{N}_P$ до поверхні S. Переміщаємо точку P разом з нормаллю $\vec{N}_P$ вздовж замкнутого контуру L. Повернувшись в початкову точку P, ми можемо отримати той самий вектор $\vec{N}_P$, а можемо отримати протилежний $-\vec{N}_P$.

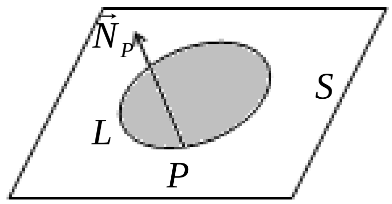
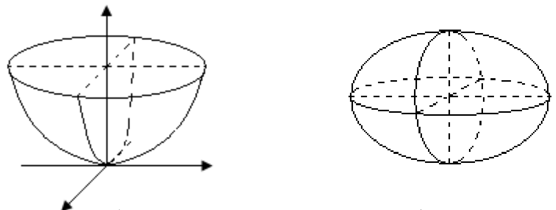


Рис.6

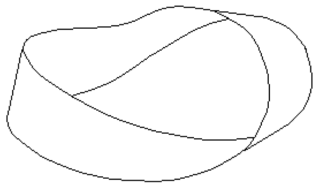
Означення 1. *Гладка поверхня S називається двосторонньою, якщо при обході вздовж будь-якого замкнутого контуру L, який належить поверхні S і не має спільних точок з краями поверхні, напрям нормалі до поверхні не змінюється. Якщо ж на поверхні S існує замкнутий контур L, при обході вздовж якого напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхня називається односторонньою.*

Прикладом двосторонніх поверхонь є площина, параболоїд, еліпсоїд і т.д (рис.7(а)). Прикладом односторонньої поверхні є листок Мебіуса (рис.7(б)).



Параболоїд Еліпсоїд

а)



Лист Мебіуса

б)

Рис.7

На двосторонній поверхні вибір напряму нормалі в одній точці однозначно визначає напрям нормалі в усіх точках даної сторони поверхні.

Означення 2. *Сукупність усіх точок поверхні із вказаним напрямом нормалі називається стороною поверхні, а вибір певної її сторони − орієнтацією поверхні.*

Нехай поверхня S визначена в неявному вигляді $F(x,y,z)=0$. Розглянемо вектор

$$\vec{a}=\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x},\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y},\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

ортогональний до поверхні S. Вектор $\vec{a}$ називають *градієнтом* і коротко записують

$$\vec{a}=\mathrm{grad}F=\left(F'_x,F'_y,F'_z\right).$$

Нормуючи вектор $\vec{a}$, отримуємо одиничний вектор, ортогональний до поверхні S (рис.8)

$$\vec{N}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\frac{F'_x}{\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}},\frac{F'_y}{\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}},\frac{F'_z}{\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}}\right)=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma).$$

При цьому

$$\cos\alpha=\frac{F'_x}{\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{F'_y}{\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{F'_z}{\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}}$$

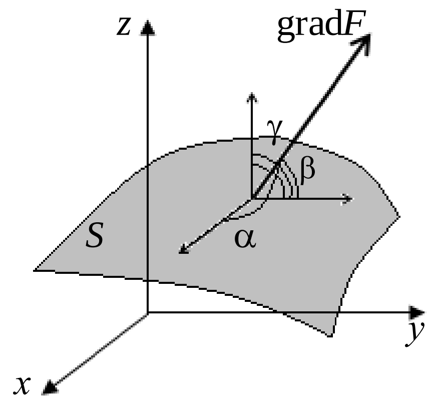


Рис. 8

прийнято називати направляючими косинусами нормального вектора до поверхні S.

По цих косинусах визначається сторона поверхні. Наприклад, якщо поверхня S визначається у явному вигляді $z=z(x,y)$, то можна покласти $F(x,y,z)=z(x,y)-z=0$ і направляючі косинуси ортогонального вектора записуються у вигляді

$$\cos\alpha=\frac{z'_x}{\sqrt{z_x'^2+z_y'^2+1}},\quad \cos\beta=\frac{z'_y}{\sqrt{z_x'^2+z_y'^2+1}},\quad \cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{z_x'^2+z_y'^2+1}}. \qquad (1.2.1)$$

Оскільки $\cos\gamma < 0$, то кут між віссю OZ і нормальним до поверхні вектором $\vec{a}$ є тупим, це і визначає нижню частину поверхні S. Для верхньої частини поверхні S направляючі косинуси нормального вектора мають вигляд

$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}},\ \cos\beta = \frac{-z'_y}{\sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}},\ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}}. \qquad (1.2.2)$$

Нехай на обмеженій поверхні S в кожній точці визначена деяка функція $R(x, y, z)$. Розглянемо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i, \qquad (1.2.3)$$

де $\Delta\sigma_i$ – площа проекції частини S_i поверхні S на площину XOY, а $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S_i$ довільна точка (рис.9).

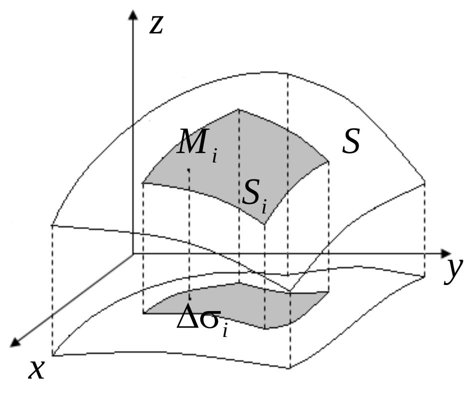


Рис.9

При цьому величину вважатимемо додатною, якщо при проектуванні частини S_i на площину XOY напрям обходу контура, що обмежує цю частину, не змінюється, і від’ємною, якщо він змінюється на протилежний.

Означення 3. *Скінченна границя інтегральних сум (1.2.3) при найдрібнішому поділі поверхні, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні на частини, ні від вибору точок M_i на них, називається поверхневим інтегралом другого роду від функції $R(x, y, z)$ по певній стороні поверхні S і записується в наступному вигляді*

$$\iint_S R(x, y, z)dxdy. \qquad (1.2.4)$$

Зауваження 1. *При заміні сторони поверхні на протилежну інтеграл змінює знак:*

$$\iint_{S^+} R(x, y, z)dxdy = -\iint_{S^-} R(x, y, z)dxdy. \qquad (1.2.5)$$

Зауваження 2. *Оскільки між елементом площі проекції $dxdy$ і елементом поверхні ds справедливе співвідношення $dxdy = \cos\gamma \cdot ds$, то між поверхневими інтегралами другого і першого роду маємо зв'язок*

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \iint_S R(x,y,z)\cos\gamma ds, \qquad (1.2.6)$$

де γ − кут між нормаллю до поверхні в напрямку вибраної сторони і віссю OZ.

Аналогічно можна проектувати поверхню S на інші координатні площини XOZ і YOZ. Тоді отримуємо ще два поверхневі інтеграли:

$$\iint_S P(x,y,z)dydz = \iint_S P(x,y,z)\cos\alpha ds, \qquad (1.2.7)$$

$$\iint_S Q(x,y,z)dxdz = \iint_S Q(x,y,z)\cos\beta ds, \qquad (1.2.8)$$

де $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ − неперервні функції визначені на поверхні S, α, β − кути утворенні нормаллю до вибраної сторони поверхні і відповідно осями OX та OY.

Суму поверхневих інтегралів (1.2.6)-(1.2.8) називають *загальним поверхневим інтегралом другого роду* і записують у вигляді

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]ds. \qquad (1.2.9)$$

Зауваження. *У формулі (1.2.9) підінтегральний вираз представляє собою скалярний добуток вектора $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ і одиничного вектора $\vec{N}$, нормального до поверхні S, направленого у вибрану сторону цієї поверхні, $\underline{\vec{N} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}}$. Тому формула (1.2.9) записується в коротшому вигляді:*

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iint_S \left(\vec{F}\cdot\vec{N}\right)ds. \qquad (1.2.10)$$

Нехай гладка поверхня S визначається рівнянням $z = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in D$, тоді одиничний нормальний вектор до певної вибраної сторони поверхні має вигляд

$$\vec{N} = \left\{ \frac{-\varphi'_x}{\sqrt{\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + 1}}, \frac{-\varphi'_y}{\sqrt{\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + 1}} \right\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

Вибрана сторона S^+ поверхні S така, що кут γ між нормаллю до поверхні і віссю OZ є гострим $\left(\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + 1}} > 0\right)$. Таким чином, враховуючи формулу

(1.2.10), можемо записати зв'язок між поверхневими інтегралами першого і другого роду

$$\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S^+} \{P(x,y,z)[-\varphi'_x(x,y)] + Q(x,y,z)[-\varphi'_x(x,y)] + R(x,y,z)\} \frac{1}{\sqrt{\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + 1}} ds. \quad (1.2.11)$$

Якщо тепер згадати зведення поверхневого інтеграла першого роду до подвійного, при цьому елемент площі $ds = \sqrt{\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + 1}dxdy$, то отримуємо формулу

$$\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} \{-P(x,y,\varphi(x,y))\varphi'_x(x,y) - Q(x,y,\varphi(x,y))\varphi'_y(x,y) + R(x,y,\varphi(x,y))\}dxdy. \quad (1.2.12)$$

Вибираючи протилежну сторону поверхні S, а саме S^-, одиничний вектор нормалі, до якої записується у вигляді:

$$\vec{N}^- = \left\{ \frac{\varphi'_x}{\sqrt{\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + 1}}, \frac{\varphi'_y}{\sqrt{\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + 1}}, \frac{-1}{\sqrt{\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + 1}} \right\} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}. \quad (1.2.13)$$

Вибрана сторона S^- поверхні S така, що кут γ між нормаллю до поверхні і віссю OZ є тупим $\left(\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + 1}} < 0 \right)$. Тепер поверхневий інтеграл другого роду зводиться до подвійного наступною формулою

$$\iint\limits_{S^-} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} \{P(x,y,\varphi(x,y))\varphi'_x(x,y) + Q(x,y,\varphi(x,y))\varphi'_y(x,y) - R(x,y,\varphi(x,y))\}dxdy. \quad (1.2.14)$$

Зауваження. *Якщо до складу поверхні S входить ділянка S_1 циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі OZ, то*

$$\iint\limits_{S_1} R(x,y,z)dxdy = 0,$$

оскільки проекцією S_1 на площину XOY буде крива, площа якої є нульовою.

Якщо гладка двохстороння поверхня S задана параметричними рівняннями

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v),\quad z = z(u,v),,\ \ (u,v)\in D,$$

то поверхневий інтеграл другого роду по одній з вибраних сторін цієї поверхні обчислюється за формулою

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint_D \{P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))J_1 + Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v))J_2 + R(x(u,v), y(u,v), z(u,v))J_3\}dudv,$$

де $J_1(u,v) = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}$, $J_2(u,v) = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}$, $J_3(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$.

Приклад 1. *Обчислити поверхневий інтеграл другого роду*

$$I = \iint_S \left(x - y + \frac{3}{2}z \right)dydz + xdzdx - zdxdy,$$

де S − зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $2x - 2y + z - 2 = 0$ з координатними площинами(рис.10).

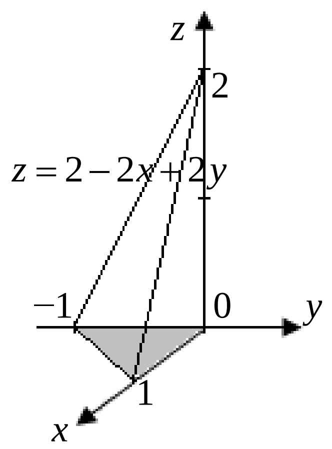


Рис.10

◄ На основі формули (1.2.12), отримуємо

$$I = \iint_D [(x - y + 1{,}5(-2x + 2y + 2))2 + x(-2) -$$

$$-(-2x + 2y + 2)]dxdy = \iint_D [-4x + 2y + 4]dxdy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (-4x + 2y + 4)dy = \int_0^1 \left(-4xy + y^2 + 4y\right)\Big|_{x-1}^0 dx = 1. ►$$

Приклад 2. *Обчислити поверхневий інтеграл другого роду*

$$I = \iint_S zdydz - 4ydzdx + 8x^2dxdy,$$

де S − частина поверхні $z = x^2 + y^2 + 1$, яка відтинається площиною $z = 2$, якщо нормаль до поверхні утворює з віссю OZ тупий кут.

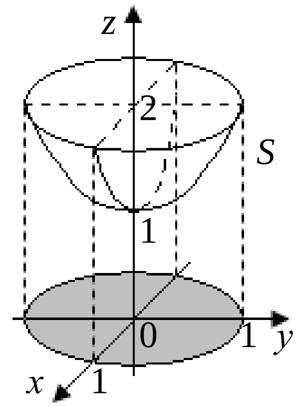


Рис.11

◄ Графіком поверхні $z = x^2 + y^2 + 1$ є параболоїд S *(рис.11)*. Ця поверхня визначається в явному вигляді

$z = x^2 + y^2 + 1$, а тому скористаємось формулою (1.2.14), маємо $z'_x = 2x,\ z'_y = 2y$ і наш інтеграл зводиться до подвійного, який легко обчислюємо

$$I = \iint_D \left[\left(x^2 + y^2 + 1 \right) 2x - 4y2y - 8x^2 \right] dxdy = \iint_D \left[2x\left(x^2 + y^2 \right) - 8\left(x^2 + y^2 \right) + 2x \right] dxdy =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \rho \le 1 \end{matrix} \right| = \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \left(2\rho^2\cos\varphi - 8\rho^2 + 2\cos\varphi \right) d\varphi = -4\pi. ▶$$

Приклади для самостійного розв'язування

Обчислити поверхневі інтеграли другого роду.

1. $\iint_S dxdy$, де S − нижня сторона частини конуса $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ при $0 \le z \le 1$.

2. $\iint_S zdxdy + xdzdx + ydydz$, де S − зовнішня сторона трикутника, утвореного при перетині площини $x - y + z = 1$ з координатними площинами.

3. $\iint_S xdydz + z^3 dxdy$, де S − зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4. $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, де S − зовнішня сторона циліндра $x^2 + y^2 = R^2$ з основами $z = 0$ та $z = H$.

5. $\iint_S \left(y^2 + z^2 \right) dydz$, де S − зовнішня сторона частини параболоїда $x = R^2 - y^2 - z^2$, що відсікається площиною YOZ.

6. $\iint_S -x^2 zdydz + ydzdx + 2dxdy$, де S − зовнішня сторона частини еліпсоїда $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, розташованого в першому октанті.

7. $\iint_S \sqrt[4]{x^2 + y^2}\, dydz$, де S − зовнішня сторона круга $x^2 + y^2 \le R^2$.

8. $\iint_S ydzdx$, де S − зовнішня поверхня тетраедра, обмеженого площинами $x + y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

1.3 Формула Гаусса-Остроградського

Формула Гаусса-Остроградського встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом другого роду по замкнутій поверхні і потрійним інтегралом по тілу, що обмежує ця поверхня. Записується ця формула в наступному вигляді

$$\oint\!\!\!\oint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iiint_G \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} \right) dxdydz\,. \qquad (1.3.1)$$

Доведемо цю формулу для області G (тіла G, обмеженого замкнутою поверхнею S), *простої,* межа якої S перетинається з будь-якою прямою, паралельною до координатних осей не більше ніж у двох точках. Нехай замкнена область $G \subset R^3$, зверху і знизу обмежена гладкими поверхнями: $z = z_2(x,y)$ − зверху (S_2^+), $z = z_1(x,y)$ − знизу (S_1^-) (рис.12). Нехай проекцією області $G \subset R^3$ на площину XOY є область D, тоді можна записати

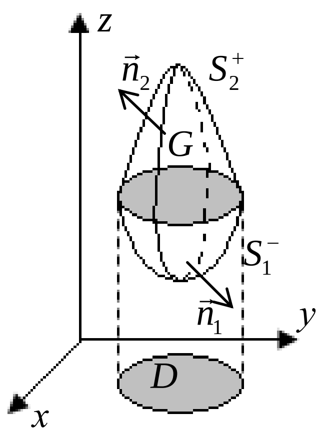


Рис.12

$$\iiint_G \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dz =$$

$$= \iint_D R(x,y,z_2(x,y))dxdy - \iint_D R(x,y,z_1(x,y))dxdy. \qquad (1.3.2)$$

Отримані два інтеграли це вже обчислені поверхневі інтеграли:

$$\iint_{S_2^+} R(x,y,z)dxdy = \iint_D R(x,y,z_2(x,y))dxdy,$$

$$\iint_{S_1^-} R(x,y,z)dxdy = \iint_D R(x,y,z_1(x,y))dxdy.$$

Віднімемо ці дві рівності, отримуємо

$$\iint_{S_2^+} R(x,y,z)dxdy - \iint_{S_1^-} R(x,y,z)dxdy = \iint_{S_2^+ \cup S_1^+} R(x,y,z)dxdy = \oint\!\!\!\oint_S R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint_D R(x,y,z_2(x,y))dxdy - \iint_D R(x,y,z_1(x,y))dxdy.$$

Таким чином, із рівності (1.3.2) видно

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dxdydz = \oiint\limits_S R(x,y,z)dxdy. \qquad (1.3.3)$$

Аналогічно отримуємо рівності

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}dxdydz = \oiint\limits_S P(x,y,z)dydz, \qquad (1.3.4)$$

$$\iiint\limits_G \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y}dxdydz = \oiint\limits_S Q(x,y,z)dzdx. \qquad (1.3.5)$$

Додавши почленно рівності (1.3.3)-(1.3.5), отримуємо формулу Гаусса-Остроградського (1.3.1).

Зауваження. *Формула (1.3.1) справедлива і для довільної замкненої області $G \subset \mathbf{R}^3$, яку можна розбити на скінчене число простих областей $G_j \subset \mathbf{R}^3, G = \bigcup\limits_{j=1}^{n} G_j$.*

Приклад 1. *Обчислити інтеграл*

$$I = \oiint\limits_S yzdxdy + xzdydz + xydzdx,$$

де S − зовнішня сторона замкнутої поверхні, яка розміщена в першому октанті і складається з циліндра $x^2 + y^2 = R^2$ і площин $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ z = H$ (рис.13).

◄ В нашому випадку маємо $P = xz,\ Q = xy,\ R = yz.$ Користуючись формулою Гаусса-Остроградського (1.3.1), отримуємо

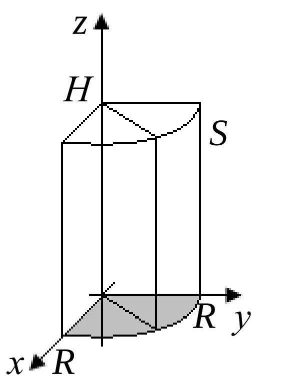


Рис.13

$$I = \iiint\limits_G (z + x + y)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_0^H (x + y + z)dz =$$

$$= H\iint\limits_{D_{xy}} \left(x + y + \frac{H}{2}\right)dxdy = \left| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi, & y = \rho\sin\varphi, \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, & 0 \le \rho \le R \end{matrix} \right| =$$

$$= H\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \left(\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + \frac{H}{2}\right)\rho d\rho = HR^2\left(\frac{2R}{3} + \frac{\pi H}{8}\right). ►$$

Приклад 2. *Обчислити поверхневий інтеграл другого роду*

$$I = \iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^2 dxdy,$$

де S *− нижня сторона параболоїда* $z = x^2 + y^2$, *що відсікається площиною* $z = 2x$.

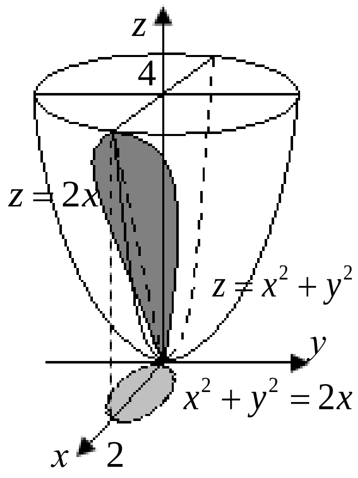


Рис.14

◄ Дана поверхня S не є замкнена (рис.14). Доповнимо її до замкненої частиною площини $z = 2x$ (рис.14). Позначимо плоску частину S_1 і виберемо її верхню сторону. Для обчислення інтегралу по замкнутій поверхні $S \cup S_1$ застосуємо формулу Гаусса-Остроградського, отримуємо

$$I = \oiint_{S \cup S_1} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^2 dxdy - \iint_{S_1} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^2 dxdy =$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(3x^2 + 3y^2 + 2z\right) dxdydz - \iint_{S_1} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^2 dxdy = I_1 - I_2.$$

Проекцією тіла Ω на площину XOY є круг обмежений колом $x^2 + y^2 = 2x$. Інтеграл I_1 зведемо до подвійного по цій проекції і перейдемо до полярної системи координат $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$, враховуючи $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \le \rho \le 2\cos\varphi$:

$$I_1 = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{x^2+y^2}^{2x} \left(3\left(x^2 + y^2\right) + 2z\right) dz = \iint_{D_{xy}} \left(6x\left(x^2 + y^2\right) + 4x^2 - 4\left(x^2 + y^2\right)^2\right) dxdy =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \left(6\rho^3 \cos\varphi + 4\rho^2 \cos^2\varphi - 4\rho^4\right) \rho d\rho = \frac{176}{15} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi = \frac{11\pi}{3}.$$

Тепер обчислюємо інтеграл I_2, який розглядається по поверхні S_1. Обчислюючи зовнішню нормаль до площини $z = 2x$, маємо $\vec{n} = \left\{-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$.

Таким чином, отримуємо

$$I_2 = \iint_{S_1} \left[x^3\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + y^3 \cdot 0 + z^2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right] ds = \iint_{D_{xy}} \left[x^3\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + y^3 \cdot 0 + z^2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right] \sqrt{5} dxdy =$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[-2x^3+4x^2\right]dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\left(-2\rho^3\cos\varphi+4\rho^2\cos^2\varphi\right)\rho d\rho=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{64}{5}\cos^8\varphi+16\cos^6\varphi\right]d\varphi=\frac{3\pi}{2}.$$

Відповідь: $I=\frac{11\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}=\frac{13\pi}{6}$.▶

Приклад 3. *Обчислити поверхневий інтеграл другого роду*

$$I=\oiint_S\left(y^{2014}+z^{2015}\right)dydz+\left(x^{2015}+z^{2016}\right)dzdx+\left(x+y+z\right)dxdy,$$

де S *− замкнена поверхня, яка утворюється при перетині параболоїда* $z=x^2+y^2$, *площиною* $z=2x$ *(рис.14). Вибирається зовнішня сторона цієї поверхні.*

◀Застосовуючи формулу Гаусса-Остроградського (1.3.1), в нашому випадку отримуємо.

$$I=\iiint_G dxdydz=\iint_{D_{xy}}dxdy\int_{x^2+y^2}^{2x}dz=\iint_{D_{xy}}\left(2x-x^2-y^2\right)dxdy=\begin{vmatrix}x=\rho\cos\varphi, & y=\rho\sin\varphi,\\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, & 0\le\rho\le2\cos\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\left(2\rho\cos\varphi-\rho^2\right)\rho d\rho=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{\pi}{2}.$$▶

Приклади для самостійного розв'язування

За формулою Гаусса-Остроградського обчислити поверхневі інтеграли по зовнішній стороні поверхні.

1. $\oiint_S(x+y)dydz+(y+z)dzdx+(z+x)dxdy$, де S − поверхня тіла обмеженого площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+2y+3z=6.$

2. $\oiint_S xydydz+2ydzdx+3xzdxdy$, де S − поверхня тіла обмеженого площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+z=3,\ y=2.$

3. $\oiint\limits_S ydzdx + xyzdxdy$, де S − зовнішня поверхня тетраедра, обмеженого площинами $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

4. $\oiint\limits_S xdydz + xy^3dzdx + yzdxdy$, де S − зовнішня сторона поверхні, що складається з циліндра $y=x^2$ та площин $z=0,\ z=2,\ y=1.$

5. $\oiint\limits_S xdydz + z^3dxdy$, де S − зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=1$.

6. $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, де S − частина поверхні $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ при $0\le z\le 1$. (вказівка: доповнити поверхню до замкненої).

7. $\oiint\limits_S xzdydz + x^2ydzdx + y^2zdxdy$, де S − зовнішня сторона поверхні, що розташована у першому октанті і складається з параболоїда $x^2+y^2=z$, циліндра $x^2+y^2=1$ та координатних площин.

8. $\oiint\limits_S -x^2zdydz + ydzdx + 2dxdy$, де S − зовнішня сторона частини еліпсоїда $4x^2+y^2+4z^2=4$.

9. $\oiint\limits_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, де S − зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=x$.

10. $\iint\limits_S xdydz + ydzdx$, де S − зовнішня сторона поверхні, що складається з поверхонь $x^2+y^2=z$ та $x^2+y^2=2z$ при $0\le z\le 1$. (вказівка: доповнити поверхню до замкненої).

1.4 Формула Стокса

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневим та криволінійним інтегралом по просторовій криві, яка є межею поверхні.

Нехай S − деяка гладка, обмежена частина поверхні, задана рівнянням $z = z(x, y)$, де x, y змінюються в деякій обмеженій області D. Можна говорити, що D це проекція поверхні S на площину XOY. Позначимо через L контур, який обмежує поверхню S, а l − проекція контура L на площину XOY, тобто l − межа області D (рис. 15). Припустимо, що на поверхні S визначена функція $P(x, y, z)$, яка є неперервною разом з частинними похідними першого порядку.

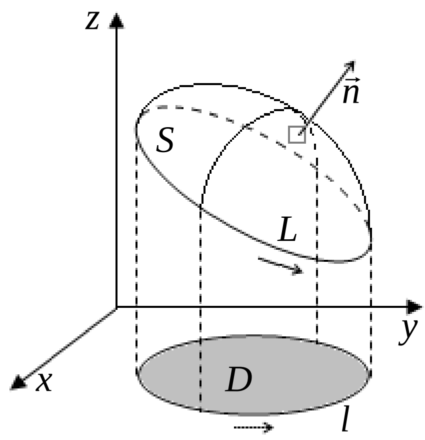


Рис.15

Обчислимо криволінійний інтеграл другого роду за замкнутим контуром L: $\oint\limits_L P(x, y, z)dx$. Оскільки контур L лежить на поверхні S, то координати його точок задовольняють рівняння $z = z(x, y)$, причому $\frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) = P_y + P_z \cdot z_y$.

Застосовуючи формулу Гріна, отримуємо

$$\oint\limits_L P(x, y, z)dx = \oint\limits_L P(x, y, z(x, y))dx = -\iint\limits_D \left(P_y + P_z \cdot z_y\right)dxdy.$$

Оскільки вибрана верхня сторона поверхні ($\cos\gamma > 0$), то нормаль до поверхні $\vec{N} = \{-z_x, -z_y, 1\}$. Таким чином $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = -z_y$ і отримуємо

$$-\iint\limits_D \left(P_y + P_z \cdot z_y\right)dxdy = -\iint\limits_D \left(P_y - P_z \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy =$$

$$= -\iint\limits_S \left(P_y - P_z \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma ds = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)ds.$$

Отже, маємо рівність

$$\oint_L P(x,y,z)dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)ds. \qquad (1.4.6)$$

Аналогічно отримуємо рівності

$$\oint_L Q(x,y,z)dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)ds, \qquad (1.4.7)$$

$$\oint_L R(x,y,z)dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)ds. \qquad (1.4.8)$$

Додаючи три рівності (1.4.6)-(1.4.8), отримуємо формулу *Стокса:*

$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]ds =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \qquad (1.4.9)$$

Зауваження 1. Для того, щоб простіше запам'ятати формулу Стокса, запишемо її в наступному вигляді:

$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (1.4.10)$$

При цьому визначник справа формально розкриваємо по верхньому рядку.

Зауваження 2. *З формули Стокса випливають умови, при яких вираз* $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ *є повним диференціалом деякої функції* $U(x,y,z)$, *тобто* $dU(x,y,z) \equiv P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$. *Ці умови записуються у вигляді трьох тотожностей:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} - \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} \equiv 0, \\ \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} \equiv 0, \\ \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} - \dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} \equiv 0. \end{cases} \qquad (1.4.11)$$

Тотожності (1.4.11) записуються в більш короткій формі:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix} \equiv 0. \qquad (1.4.12)$$

При виконанні тотожностей (1.4.11) криволінійний інтеграл

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = I$$

не залежить від шляху інтегрування, а залежить лише від початкової точки A і кінцевої B і обчислюється безпосередньо:

$$I = U(x,y,z)\Big|_A^B = U\big|_B - U\big|_A.$$

Приклад 1. *Обчислити криволінійний інтеграл*

$$I = \oint_L \left(z^2 - x^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy + \left(y^2 - z^2\right)dy$$

за замкненим контуром L, який утворюється при перетині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ і конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $z \ge 0$. Контур обходиться в додатному напрямку. Обчислити двома способами: а) безпосередньо; б) за формулою Стокса.

◄ а) Контур інтегрування L є коло $x^2 + y^2 = 4$, яке лежить у площині $z = 2$ (рис.16). Запишемо параметричне рівняння цього кола, маємо $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 2$. Звідси безпосередньо отримуємо

$$I = 8\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t - 1\right)\sin t dt + 8\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\sin^2 t\right)\cos t dt = 0.$$

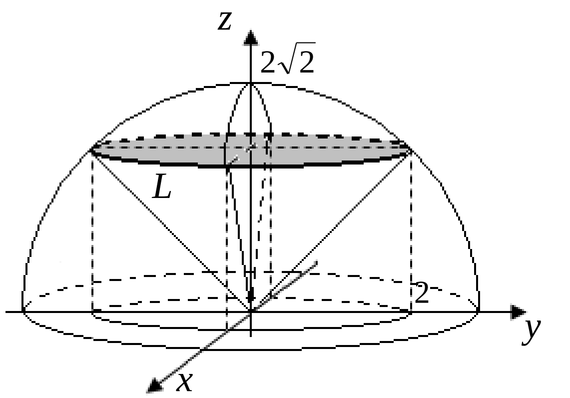


Рис.16

б) За поверхню інтегрування S вибираємо круг $x^2 + y^2 \le 4$, який лежить у площині $z = 2$. Очевидно, направляючі косинуса вектора нормалі

$$\cos\alpha = 0,\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = 1,$$

а звідси із формули (4.10) отримуємо

$$I=\iint\limits_S\begin{vmatrix}0 & 0 & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint\limits_S\left(Q_x-P_y\right)dxdy=\iint\limits_S 2xdxdy=\begin{vmatrix}x=\rho\cos\varphi, & y=\rho\sin\varphi\\ 0\le\varphi\le 2\pi, & 0\le\rho\le 2\end{vmatrix}=$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^2\rho^2 d\rho=0.\blacktriangleright$$

Приклади для самостійного розв'язування

Використовуючи формулу Стокса, обчислити криволінійні інтеграли.

1. $\oint\limits_L y^2dx-x^2dy+z^2dz$, де L – замкнений контур, утворений при перетині параболоїда $1-y=x^2+z^2$ з координатними площинами.

2. $\int\limits_L ydx+zdy+xdz$, де L – виток гвинтової лінії $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, $0\le t\le 2\pi$, що обходиться у напрямку від точки $(1,0,0)$ до точки $(1,0,2\pi)$. (вказівка: доповнити криву відрізком до замкненого контура).

3. $\oint\limits_L (y+2z)dx+(x+2z)dy+(x+2y)dz$, де L – замкнений контур, утворений при перетині сфери $x^2+z^2+y^2=1$ з площиною $x+2y+2z=0$.

4. $\oint\limits_L y^3dx-x^3dy+z^3dz$, де L – замкнений контур, утворений при перетині циліндра $x^2+y^2=4$ з площиною $x+y+z=2$.

5. $\oint\limits_L (x+z)dx+(x-y)dy+xdz$, де L – замкнений контур, що визначається рівняннями $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\ \ z=2.$

6. $\oint\limits_L (z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz$, де L – трикутник з вершинами $A(1,0,0),\ \ B(0,2,0),\ \ C(0,0,4)$..

1.5 Застосування поверхневих інтегралів в задачах механіки та геометрії

1. **Маса** матеріальної поверхні з густиною маси розподіленої на цій поверхні S за формулою $\gamma=\gamma(x,y,z)$ обчислюється за допомогою поверхневого інтеграла першого роду:

$$m=\iint\limits_S \gamma(x,y,z)ds. \tag{1.5.1}$$

2. **Координати центра мас** матеріальної поверхні S з густиною маси розподіленої на ній $\gamma=\gamma(x,y,z)$ обчислюються за формулами:

$$x_c=\frac{\iint\limits_S x\gamma(x,y,z)ds}{\iint\limits_S \gamma(x,y,z)ds}, \quad y_c=\frac{\iint\limits_S y\gamma(x,y,z)ds}{\iint\limits_S \gamma(x,y,z)ds}, \quad z_c=\frac{\iint\limits_S z\gamma(x,y,z)ds}{\iint\limits_S \gamma(x,y,z)ds}. \tag{1.5.2}$$

Зауважимо, що у формулах (1.5.2) у знаменнику є маса матеріальної поверхні S (формула (1.5.1)), а в чисельниках – відповідні *статичні моменти:*

$\iint\limits_S x\gamma(x,y,z)ds=M_{YZ}$ – статичний момент відносно площини YOZ,

$\iint\limits_S y\gamma(x,y,z)ds=M_{XZ}$ – статичний момент відносно площини XOZ,

$\iint\limits_S z\gamma(x,y,z)ds=M_{XY}$ – статичний момент відносно площини XOY.

3. **Моменти інерції** матеріальної поверхні S відносно координатних осей OX, OY, OZ знаходять за формулами:

$$I_X=\iint\limits_S \left(y^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)ds,\ \ I_Y=\iint\limits_S \left(x^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)ds,\ \ I_Z=\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y,z)ds. \tag{1.5.3}$$

4. **Моменти інерції** матеріальної поверхні S відносно координатних площин XOY, XOZ, YOZ:

$$I_{XY}=\iint\limits_S z^2\gamma(x,y,z)ds,\ \ I_{XZ}=\iint\limits_S y^2\gamma(x,y,z)ds,\ \ I_{YZ}=\iint\limits_S x^2\gamma(x,y,z)ds. \tag{1.5.4}$$

5. **Момент інерції** матеріальної поверхні S відносно початку координат O:

$$I_O=\iint\limits_S \left(x^2+y^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)ds. \tag{1.5.5}$$

6. **Площа поверхні** $$S_{пов}=\iint\limits_S ds. \tag{1.1.6}$$

Приклад 1. *Знайти координати центра мас однорідної поверхні конуса*

$$x^2 = \frac{h^2}{a^2}\left(y^2 + z^2\right), \qquad 0 \le x \le h.$$

◄ Оскільки вісь OX є віссю симетрії цього конуса (рис.17), то центр мас знаходиться на осі OX, отже $y_c = z_c = 0$. Координату x_c знаходимо за першою з формул (1.5.2), поклавши $\gamma \equiv 1$:

$$x_c = \frac{\iint\limits_S x ds}{\iint\limits_S ds}.$$

Інтеграл в знаменнику дорівнює площі бічної поверхні конуса, яка дорівнює $\pi R l$. Для нашого випадку $R = a$, $l = \sqrt{h^2 + a^2}$, а це означає рівність $\iint\limits_S ds = \pi a\sqrt{h^2 + a^2}$.

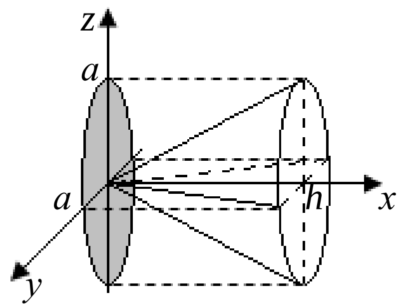


Рис.17

Обчислюючи інтеграл в чисельнику, отримуємо

$$\iint\limits_S x ds = \iint\limits_D x(y,z)\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\,dydz = \iint\limits_D \frac{h}{a}\sqrt{y^2 + z^2}\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}\,dydz = \begin{vmatrix} y = \rho\cos\varphi, & z = \rho\sin\varphi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, & 0 \le \rho \le a \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{h}{a}\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho^2 d\rho = \frac{h}{a}\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} \cdot \frac{2\pi a^3}{3}.$$

Звідси отримуємо

$$x_c = \frac{\frac{h}{a}\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} \cdot \frac{2\pi a^3}{3}}{\pi a\sqrt{h^2 + a^2}} = \frac{2}{3}h. \text{►}$$

Приклад 2. *Знайти момент інерції відносно осі OZ однорідної сферичної оболонки $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$, $\gamma \equiv 1$ (рис.18).*

◄ Момент інерції відносно вказаної осі обчислюємо за формулою

$$I_z = \iint\limits_S \left(x^2 + y^2\right) ds.$$

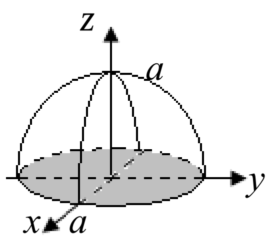


Рис.18

Поверхня S записується у явному вигляді: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Звідси отримуємо

$$ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

$$I_z=\iint\limits_S\left(x^2+y^2\right)ds=a\iint\limits_{D_{xy}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=\begin{vmatrix}x=\rho\cos\varphi, & y=\rho\sin\varphi\\ 0\le\varphi\le 2\pi, & 0\le\rho\le a\end{vmatrix}=$$

$$=a\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a\frac{\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho d\rho=\frac{4}{3}\pi a^4.\blacktriangleright$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти масу півсфери $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, якщо поверхнева густина в кожній її точці дорівнює $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2$.

2. Знайти координати центра маси конічної поверхні $z^2=x^2+y^2$, $0\le z\le 1$, якщо її поверхнева густина маси в кожній точці є пропорційна відстані від цієї точки до осі конуса.

3. Знайти статичні моменти відносно координатних площин однорідної трикутної пластини $x+y+z=a$, $x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$, $\gamma(x,y,z)\equiv 1$.

4. Знайти момент інерції відносно осі OZ частини однорідної конічної поверхні $x^2+z^2=y^2$, $y\ge 0$, що знаходиться всередині циліндра $x^2+y^2=a^2$, $\gamma(x,y,z)\equiv 1$.

5. Обчислити площу поверхні частини параболоїда $z=25-x^2+y^2$, що лежить над площиною XOY.

6. Знайти пощу поверхні півсфери радіуса R.

7. Знайти масу параболічної оболонки густини $\gamma(x,y,z)=z$, що задана рівнянням $z=x^2+y^2$, $0\le z\le 1$.

8. Найти центр мас частини сфери $x^2+y^2+z^2=4$, що розташована в першому октанті, якщо поверхнева густина дорівнює $\gamma(x,y,z)=\mu=\text{const}$..

9. Обчислити момент інерції відносно осі OZ однорідної сфери $x^2+y^2+z^2=1$ $(z\ge 0)$ з густиною $\gamma(x,y,z)=\mu=\text{const}$.

2. Вступ до математичної теорії поля

Якщо в кожній точці деякого простору чи його частини V визначено значення деякої фізичної величини, то говорять, що у V задане поле даної величини.

Так, наприклад, температура повітря в різних точках простору утворює *поле температур,* а атмосферний тиск – *поле тиску,* кожний електричний заряд утворює навколо себе *поле електростатичного потенціалу*.

У всіх випадках, коли мова йде про процес, який характеризується скалярною величиною (температура, тиск і т.д.), поле називається *скалярним.*

Тепер перейдемо до математичного визначення поля.

Нехай в області V деякого простору задана числова функція точки $U = f(M)$ (M − довільна точка із V). Тоді говорять, що у V визначено скалярне поле. Припускається, що функція $U = f(M)$ є однозначною і приймає дійсні скінченні значення. Якщо в просторі введена декартова система координат, то U є функцією від трьох змінних $x,\ y$ та z: $U = f(x, y, z)$, або, що є тим же самим, функцією від одного векторного аргументу r − радіуса-вектора точки M області V: $U = f(r)$.

Відмітимо, що величина, яка характеризує скалярне поле може також залежати від часу. Ми обмежимось вивченням полів *стаціонарних*, які не залежать від часу.

Поряд з полями, визначеними в просторових областях, часто доводиться розглядати плоскі поля, тобто такі, які залежать тільки від аргументів x і y: $U = f(x, y)$. Прикладом плоского поля може бути освітленість частини площини від деяких джерел світла.

Скалярне поле можна визначати графічно за допомогою *поверхонь рівня*, тобто таких поверхонь, при яких $f(x, y, z) \equiv C,\quad C - \text{const}$. Знаючи вигляд графіків поверхонь рівня при різних значеннях сталої $C \in R$, отримуємо відомості про саме скалярне поле $U = f(x, y, z)$.

2.1 Похідна скалярного поля за заданим напрямом. Градієнт

Нехай задано гладке скалярне поле $U = f(M)$. В багатьох задачах нас цікавить швидкість зміни значень цього поля при русі за певним заданим напрямом $\vec{a} = \{l, m, n\}$, тобто похідна скалярного поля $U = f(M)$ у деякій фіксованій точці M_0 за напрямом вектора $\vec{a}$.

Через фіксовану точку M_0 проведемо пряму P паралельну вектору $\vec{a} = \{l, m, n\}$, на цій прямій P вибираємо довільну точку M_1 (відмінну від M_0) і розглянемо відношення

$$\frac{\Delta U}{\Delta \vec{a}} = \frac{f(M_1) - f(M_0)}{M_0 M_1}, \tag{2.1.1}$$

де в знаменнику $M_0 M_1$ − відстань від точки M_0 до точки M_1 із знаком (+), якщо вектор $\overrightarrow{M_0 M_1}$ має той же напрямок, що і вектор $\vec{a}$, та вибирається із знаком (−), якщо напрямки векторів $\overrightarrow{M_0 M_1}$ та $\vec{a}$ є протилежними. Якщо існує скінченна границя відношення (1.1) при прямуванні точки M_1 до точки M_0, то цю границю називають похідною скалярного поля $U = f(M)$ в точці M_0 за напрямом вектора $\vec{a}$ і записують

$$\left.\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{a}}\right|_{M=M_0} = \frac{\partial U(M_0)}{\partial \vec{a}}. \tag{2.1.2}$$

Якщо гладке скалярне поле записане в певній системі координат $U = f(x, y, z)$ і точка M_0 з координатами (x_0, y_0, z_0), то похідна скалярного поля $U = f(x, y, z)$ в точці M_0 за напрямом вектора $\vec{a} = \{l, m, n\}$ обчислюється за формулою

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \cdot \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} + \\ + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \cdot \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{2.1.3}$$

Дійсно, якщо координати точки M_1 записати у вигляді

$$x_1 = x_0 + l t_1, \quad y_1 = x_0 + m t_1, \quad z_1 = x_0 + n t_1, \quad t_1 > 0,$$

то відстань між точками M_0 і M_1 дорівнює $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} =$ $= t_1\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$. Підставляючи в рівність (6.1), отримуємо

$$\frac{f(M_1) - f(M_0)}{M_0M_1} = \frac{f(x_0 + lt_1, y_0 + mt_1, z_0 + nt_1) - f(x_0, y_0, z_0)}{t_1\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Переходячи до границі при $t_1 \to +0$ отримуємо рівність (2.1.3).

Слід звернути увагу, що у формулі (2.1.3) коефіцієнти

$$\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \cos\beta, \quad \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \cos\gamma$$

є направляючими косинусами вектора $\vec{a} = \{l, m, n\}$, $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Якщо є деяка гладка скалярна функція $U = f(x, y, z)$*, то вектор*

$$gradU = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right\} = \left\{\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right\} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

прийнято називати градієнтом функції U.

Таким чином, формулу (2.1.3) можна записати у вигляді скалярного добутку

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial \vec{a}} = gradU \cdot \vec{e}, \tag{2.1.4}$$

де $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $gradU = gradU|_{M_0}$.

Враховуючи те, що скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ дорівнює $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, де φ − кут між цими векторами, формулу (2.1.4) можна записати

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial \vec{a}} = |gradU| \cdot \cos\varphi.$$

Звідси випливає, що похідна за напрямом $\dfrac{\partial U(M_0)}{\partial \vec{a}}$ приймає найбільше значення при $\cos\varphi = 1$, тобто $\varphi = 0$ і це найбільше значення дорівнює довжині градієнта:

$$\max\frac{\partial U(M_0)}{\partial \vec{a}} = |gradU|.$$

Таким чином, введене поняття вектора-градієнта має дві основні властивості, що характеризують його фізичний зміст та незалежність від вибору системи координат:

1. *Градієнт у кожній точці скалярного поля – це вектор, що вказує напрям найбільшого зростання поля у даній точці, а його довжина дорівнює швидкості зростання поля за цим напрямом.*

2. *Градієнт у кожній точці поля є вектором перпендикулярним до поверхні (лінії) рівня, яка проходить через цю точку.*

Приклад 1. *Знайти похідну функції* $U = xe^y + ye^x - z^2$ *в точці* $M_0(3,0,2)$ *за напрямом* $\overrightarrow{M_0M_1}$, *де точка* $M_1(4,1,3)$.

◄ Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1} = \{4-3, 1-0, 3-2\} = \{1, 1, 1\}$ має довжину $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, направляючі косинуси цього вектора: $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$$gradU = \{e^y + ye^x,\ xe^y + e^x,\ -2z\}, \quad gradU\big|_{M_0} = \{1,\ 3+e^3,\ -4\},$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial \vec{a}} = gradU \cdot \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(3+e^3\right)\frac{1}{\sqrt{3}} - 4\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{e^3}{\sqrt{3}}. \text{►}$$

Зауваження. *Формула (2.1.4) для обчислення похідної за напрямом залишається справедливою і в тому випадку, коли точка* M_1 *прямує до точки* M_0 *по кривій, для якої вектор* $\vec{a}$ *є дотичним в точці* M_0.

Приклад 2. *Знайти похідну скалярного поля* $U = \ln(xy + xz + yz)$ *в точці* $M_0(0,1,1)$ *за напрямом кола* $x = \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ z = 1,\ \ 0 \le t \le 2\pi.$

◄ Векторне рівняння кола утвореного в перетині циліндра $x^2 + y^2 = 1$ і площини $z = 1$ запишемо у наступному вигляді $\vec{r} = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j} + \vec{k}$.

Точці $M_0(0, 1, 1)$ відповідає значення параметра $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Знаходимо вектор дотичний до кола: $\vec{a}(t) = \dfrac{dr(t)}{dt} = -\sin t \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j}$. Підставимо значення $t = t_0 = \dfrac{\pi}{2}$, отримуємо $\vec{a}(t_0) = -\vec{i}$. Таким чином, направляючі косинуси одиничного вектора

$\vec{a}(t_0) = -\vec{i}$ такі: $\cos\alpha = -1$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 0$. Обчислимо градієнт скалярного поля U:

$$gradU = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\} = \left\{ \frac{y+z}{xy+xz+yz}, \frac{x+z}{xy+xz+yz}, \frac{x+y}{xy+xz+yz} \right\},$$

$gradU\big|_{M_0} = \{2,1,1\}$. Звідси отримуємо шукану похідну за напрямом:

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial \vec{a}} = 2(-1) + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = -2. \blacktriangleright$$

Звернемо увагу на деякі **властивості градієнта**.

Нехай задані два гладких скалярних поля $U = U(x,y,z)$, $V = V(x,y,z)$, *тоді:*

1. $grad(U+V) = gradU + gradV$,
2. $grad(UV) = VgradU + UgradV$,
3. $grad\,\dfrac{U}{V} = \dfrac{VgradU - UgradV}{V^2}$.
4. *Якщо* $F(U)$ *− диференційовна скалярна функція, то*

$$gradF(U) = F'(U)gradU.$$

Приклад 3. *Знайти градієнт електростатичного поля* $U = \dfrac{e}{r} = \dfrac{e}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, *утвореного точковим зарядом* e $\left(r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$.

$$\blacktriangleleft\ gradU = \left(\frac{e}{r}\right)' \cdot grad(r) = \left(-\frac{e}{r^2}\right) grad\sqrt{x^2+y^2+z^2} =$$

$$= \left(-\frac{e}{x^2+y^2+z^2}\right)\left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\} == -\frac{e}{r^3}\{x,y,z\} = -\frac{e}{r^3}\vec{r}. \blacktriangleright$$

Приклад 4. *У якому напрямку повинна рухатись точка* $M(x,y,z)$ *при переході через точку* $M_1(-1,1,-1)$, *щоб функція* $U = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$ *зростала з найбільшою швидкістю.*

◀ Щоб функція зростала найшвидше, точка повинна рухатись у напрямі градієнта функції в точці M_1.

$$gradU = \left\{ \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}, \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}, \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} \right\}, \quad gradU\big|_{M_1} = \{2, 0, -2\}.$$

Таким чином, найбільша швидкість росту функції

$$\left(\frac{\partial U(M_1)}{\partial \vec{a}} \right)_{\max} = \left| gradU(M_1) \right| = 2\sqrt{2}\,. \blacktriangleright$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти похідну скалярного поля $U = x^3 y + y^3 z + 6x$ в точці $M_0(1,-1,2)$ за напрямом вектора $\vec{a}$ від точки M_0 до точки $M_1(3,-2,-1)$.

2. В якому напрямі в точці M(−2,1,3) скалярне поле $U = xyz - z^3 x + x^4 y$ змінюється найшвидше? Знайти максимальну швидкість цієї зміни.

3. Знайти похідну скалярного поля $U = (x^2 + y^2)z$ вздовж гвинтової лінії $r(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ в точці M_0, що відповідає значенню параметра $t = \pi$.

4. Знайти похідну скалярного поля $U = x^3 + z^3 + xy^2 z^3$ в точці $M_0(1,2,-1)$ за напрямом вектора $\vec{a}$, що лежить в площині XOY під кутом $\frac{\pi}{6}$ до осі OX.

2.2 Векторне поле

Якщо в кожній точці простору $\mathbf{R}^3$ *або деякої його частини* V *визначений вектор*

$$\vec{F}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}\,,\qquad(2.2.5)$$

то говорять, що у V визначене ***векторне*** *поле.*

Якщо векторне поле визначене на площині $\mathbf{R}^2$ *або на частині* W *цієї площини:* $\vec{F}=\{P(x,y),Q(x,y)\}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ *, то поле називається плоским.*

Однією з важливих характеристик векторного поля є ***векторна лінія, або силова лінія***. *Векторная лінія − це така гладка крива, дотична в кожній точці якої збігається з напрямом вектора* $\vec{F}$.

Як знайти векторні лінії?

Нехай визначене векторне поле (2.2.5), де функції $P,\ Q,\ R$ є неперервними і мають обмежені частинні похідні першого порядку. Нехай далі $\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ − радіус-вектор точки, яка рухається вздовж векторної лінії поля (2.2.5). Із означення векторної лінії поля випливає, що вектор (2.2.5) і вектор дотичний до кривої

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dy(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

повинні бути паралельними. Умовою паралельності векторів є пропорційність координат:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}\ .\qquad(2.2.6)$$

Система (2.2.6) є системою диференціальних рівнянь векторних ліній векторного поля (2.2.5).

Приклад. *Знайти векторні лінії векторних полів*

а) $\vec{F}=(y+z)\vec{i}-x\vec{j}-x\vec{k}$;

б) $\vec{F}=grad(xyz)$.

◀ Запишемо систему (2.2.6):

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{-x}\Rightarrow\begin{cases}xdy=xdx;\\ xdx=-(y+z)dy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x(dy-dz)=0;\\ xdx=-(y+z)dy.\end{cases}\qquad(2.2.7)$$

Із першого рівняння отримуємо $dy-dz=0\Rightarrow y-z=C_1,\ C_1=\mathrm{const}$.

Враховуючи рівність $dy=dz$, із другого рівняння системи (2.2.7) отримуємо $xdx+ydy+zdz=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}d\left(x^2+y^2+z^2\right)=0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=C_2.$.

Таким чином, векторними лініями поля $\vec{F}=(y+z)\vec{i}-x\vec{j}-x\vec{k}$ є сім'я кіл, які утворюються при перетині сім'ї сфер $x^2+y^2+z^2=C_2,\ C_2>0$ і площин $y-z=C_1$ паралельних осі OX.

б) $\vec{F}=grad(xyz)=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$.

Згідно з (2.2.6), матимемо $\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{xy}$. Звідси отримуємо $xdx=ydy$ і $ydy=zdz$. Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо таку сім'ю поверхонь (гіперболічні циліндри): $x^2-y^2=C_1,\ y^2-z^2=C_2$. Будь-яка векторна лінія нашого поля є перетин цих двох поверхонь при певних сталих $C_1,\ C_2$:

$$\begin{cases}x^2-y^2=C_1,\\ y^2-z^2=C_2.\end{cases}$$

Серед цих поверхонь є і площини при $C_1=C_2=0$. Вибираючи, наприклад, дві площини $x=y$ і $y=z$, отримаємо пряму $x=y=z$, яка є векторною лінією нашого поля $\vec{F}$.▶

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти векторні лінії векторних полів

а) $\vec{F}=x\vec{i}-y\vec{j}-z\vec{k}$;

б) $\vec{F}=x\vec{i}+2z^2\vec{j}-z\vec{k}$;

в) $\vec{F}=\frac{1}{x}\vec{i}+\frac{1}{y}\vec{j}$.

2.3 Потік векторного поля. Дивергенція

Розглянемо спочатку гідродинамічну задачу, яка допоможе зрозуміти поняття потоку векторного поля через деяку поверхню.

1. Нехай всередині деякого каналу тече потік води зі швидкістю $\vec{V}$. У цьому потоці перпендикулярно до вектора $\vec{V}$ установлена плоска пластина з площею S, через яку протікає вода (наприклад, фільтр). Потоком $\Pi_S\left(\vec{V}\right)$ вектора $\vec{V}$ через пластину з площею S назвемо об’єм води, що протікає через цю пластину за одиницю часу. Оскільки всі частинки рідини рухаються з постійною швидкістю, то за одиницю часу вони перемістяться на відстань $h=\left|\vec{V}\right|\cdot 1=\left|\vec{V}\right|$. Об’єм рідини, що пройде через S дорівнює об’єму циліндра з основою S і висотою h: $\left|\vec{V}\right|\cdot S$. Отже, у даному випадку потік $\Pi_S\left(\vec{V}\right)=\left|\vec{V}\right|\cdot S$.

2. Нехай тепер у тому ж каналі пластину площею S установлено не перпендикулярно до руху води, а під деяким кутом φ. Тоді об’єм рідини, що пройде через пластину з площею S, дорівнює об’єму похилого циліндра з площею основи S і висотою $h=\left|\vec{V}\right|\cos\varphi$ і при цьому потік $\Pi_S\left(\vec{V}\right)=\left|\vec{V}\right|\cdot S\cos\varphi$.

3. Нехай тепер буде не рівна пластина, а деяка орієнтована поверхня σ. Розділимо поверхню σ на маленькі частинки σ_k, $k=\overline{1,n}$, площі яких позначимо $\Delta\sigma_k$ (рис.19). Сумарний потік $\Pi_\sigma\left(\vec{V}\right)$ через поверхню σ приблизно буде дорівнювати $\Pi_\sigma\left(\vec{V}\right)\approx\sum_{k=1}^{n}\left|\vec{V}\right|\cos\varphi_k\cdot\Delta\sigma_k$. Рівність буде тим точнішою, чим дрібніший буде поділ поверхні σ на частинки σ_k. Таким чином, приходимо до поверхневого інтегралу.

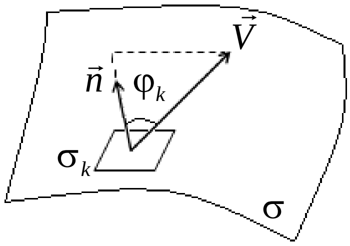


Рис.19

Означення. **Потоком $\Pi_S(\vec{F})$ векторного поля**

$$\vec{F}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

через задану поверхню S в напрямку нормалі $\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}=\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$

називається поверхневий інтеграл

$$\Pi_S(\vec{F})=\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=$$

$$=\iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]ds. \qquad (2.3.1)$$

Приклад 1. *Обчислити потік векторного поля $\vec{u}=x\vec{i}-2y\vec{j}+z\vec{k}$ через верхню частину площини $x+2y+3z-6=0$, розміщену в першому октанті (рис.20).*

◄ Потік через поверхню S знаходимо за формулою (2.3.1), маємо

$$\Pi_S(\vec{u})=\iint_S xdydz-2ydzdx+zdxdy\,. \qquad (2.3.2)$$

Ортогональний вектор до площини $x+2y+3z-6=0$ записується в наступному вигляді

$$grad(x+2y+3z-6)=\{1,2,3\}=\vec{N}\,.$$

$$\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}=\left\{\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

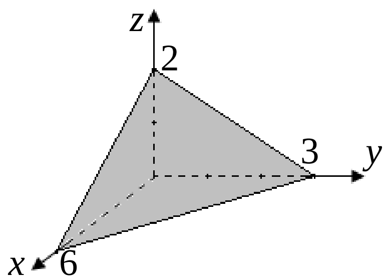


Рис.20

Оскільки $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}>0$, то це і вказує на верхню частину площини. Таким чином, поверхневий інтеграл другого роду (2.3.2) зв'язаний з поверхневим інтегралом першого роду:

$$\Pi_S(\vec{u})=\iint_S xdydz-2ydzdx+zdxdy=\iint_S\left(x\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}-2y\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+z\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}\right)ds\,. \qquad (2.3.3)$$

Оскільки рівняння площини $z=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+2$, то елемент площі

$$ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{\sqrt{14}}{3}dxdy$$

і інтеграл (2.3.3) зводиться до подвійного

$$\Pi_S(\vec{u}) = \iint\limits_{D_{xy}} \left(x\cdot\frac{1}{3} - 2y\cdot\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + 2 \right) \right) dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} (2-2y)dxdy = 2\int\limits_0^3 (1-y)dy \int\limits_0^{6-2y} dx = 36 . \blacktriangleright$$

Приклад 2. *Обчислити потік векторного поля $\vec{F} = \{x^2, y^2, z^2\}$ через зовнішню частину сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, розміщену в першому октанті.*

◀ Потік векторного поля через поверхню записуємо по формулі (2.3.1)

$$\Pi_S(\vec{F}) = \iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy = \iint\limits_{D_{yz}} (R^2 - y^2 - z^2)dydz + \iint\limits_{D_{xz}} (R^2 - x^2 - z^2)dxdz +$$

$$+ \iint\limits_{D_{xy}} (R^2 - x^2 - y^2)dxdy = I_1 + I_2 + I_3.$$

Проекціями даної частини сфери на координатні площини D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} (рис.21) є одинакові четвертини кругів радіуса R, а оскільки підінтегральні функції одинакові, то $I_1 = I_2 = I_3$.

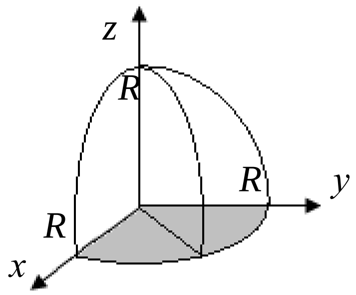


Рис.21

$$I_1 = \begin{vmatrix} y = \rho\cos\varphi, & z = \rho\sin\varphi \\ 0 \le \rho \le R, & 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \end{vmatrix} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R (R^2 - \rho^2)\rho d\rho = \frac{\pi R^4}{8}.$$

Тоді

$$\Pi_S(\vec{F}) = \frac{3\pi R^4}{8}. \blacktriangleright$$

Приклад 3. *Знайти потік векторного поля $\vec{F} = \{x, y, z\}$ через повну зовнішню поверхню циліндра радіуса R і висотою H, якщо початок координат знаходиться у центрі нижньої основи циліндра, а вісь циліндра збігається з віссю OZ.*

◀ Повна поверхня S складається з бічної поверхні S_1, нижньої основи S_2, та верхньої основи S_3 (рис.21). Тому $\Pi_S(\vec{F}) = \Pi_{S_1}(\vec{F}) + \Pi_{S_2}(\vec{F}) + \Pi_{S_3}(\vec{F})$.

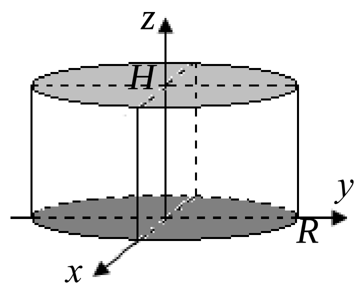


Рис.21

Рівняння бічної поверхня циліндра $x^2 + y^2 = R^2$. Звідси вектор нормалі до цієї поверхні $\vec{N} = \{2x, 2y, 0\}$, а тому направляючі косинуси

$$\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},0\right\}=\left\{\frac{x}{R},\frac{y}{R},0\right\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\},$$

$$\Pi_{S_1}(\vec{F})=\iint_{s_1} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{S_1}\frac{x^2+y^2}{R}ds=\iint_{S_1}Rds=R\iint_{S_1}ds=R2\pi RH=2\pi HR^2,$$

$$\Pi_{S_2}(\vec{F})=\iint_{s_2} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{S_2}(x\cdot 0+y\cdot 0+z\cdot 1)ds=0,$$

оскільки рівняння нижньої основи $z=0$, то $\Pi_{S_2}(\vec{F})=0$. Остаточно отримуємо

$$\Pi_{S_3}(\vec{F})=\iint_{s_3} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iint_{S_3}(x\cdot 0+y\cdot 0+z\cdot 1)ds=\iint_{S_3}Hdxdy=\pi HR^2,$$

$$\Pi_{S_1}(\vec{F})+\Pi_{S_2}(\vec{F})+\Pi_{S_3}(\vec{F})=3\pi HR^2. \blacktriangleright$$

Нехай замкнена поверхня S обмежує деяку область Ω в $\mathbf{R}^3$. Розглянемо поле швидкостей $\vec{u}$ протіканння рідини, Π_S − потік через цю поверхню. Якщо $\Pi_S>0$, то це означає, що із Ω виливається більше рідини, ніж вливається. В цьому випадку говорять, що всередині Ω є джерела, які поповнюють потік рідини. Якщо ж $\Pi_S<0$, то в Ω є стоки, які поглинають рідину з потоку. Отже, величина потоку $\Pi_S(\vec{u})$ характеризує продуктивність джерел (стоків), що знаходяться в області Ω, її ще називають продуктивністю області.

Аналогічно, потік довільного векторного поля $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ через замкнену поверхню S називають *продуктивністю області* $\Omega\subset\mathbf{R}^3$, яка обмежена цією поверхнею. Якщо позначити через V об'єм області Ω, то відношення

$$\frac{\Pi_S(\vec{F})}{V} \tag{2.3.4}$$

є середньою продуктивністю джерел (стоків) поля $\vec{F}$ всередині області Ω.

Якщо область Ω зменшуючись стягується в точку M_0, то таку границю прийнято називати *дивергенцією векторного поля* $\vec{F}$ *в точці* M_0.

Отже, за означенням,

$$div\vec{F}(M_0)=\lim_{\Omega\to M_0}\frac{\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy}{V}. \qquad (2.3.5)$$

Використовуючи формулу Гаусса-Острогорадського, спростимо формулу (2.3.5):

$$div\vec{F}(M_0)=\lim_{\Omega\to M_0}\frac{\iint\limits_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy}{V}=$$

$$=\lim_{\Omega\to M_0}\frac{1}{V}\iiint\limits_\Omega\left[\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right]dxdydz=\lim_{\Omega\to M_0}\left[\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right]\Bigg|_{\tilde{M}},$$

де $\tilde{M}$ − деяка точка всередині області Ω. Якщо область Ω стягується в точку M_0, то $\tilde{M}\to M_0$. Звідси випливає твердження:

Якщо задане векторне поле

$$\vec{F}=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},$$

то його ***дивергенція***

$$div\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (2.3.6)$$

Зауваження. *Формулу Гаусса-Остроградського (1.3.1) можна коротко записати, використовуючи рівність (2.3.6):*

$$\oiint\limits_S(\vec{F},\vec{e})ds=\iiint\limits_\Omega\left[div\vec{F}\right]dxdydz,$$

де $\vec{e}=\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$, $\vec{N}$ *− вектор ортогональний до поверхні* S.

Дивергенція має наступні властивості.

1. *Лінійність:* $div(c_1\vec{F}_1+c_2\vec{F}_2)=c_1 div\vec{F}_1+c_2 div\vec{F}_2$, *де* c_1, c_2 *− деякі числа.*

2. *Дивергенція сталого вектора* $\vec{C}$ *дорівнює нулю,* $div\vec{C}=0$.

3. *Якщо* $\varphi=\varphi(x,y,z)$ *− неперервно-диференційовна скалярна функція, то має місце рівність*

$$div(\varphi\vec{F})=\varphi div\vec{F}+(\vec{F},grad\varphi). \qquad (2.3.7)$$

Дійсно, якщо $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$, то $\varphi\vec{F}=\varphi P\vec{i}+\varphi Q\vec{j}+\varphi R\vec{k}$. Обчислюючи частинні похідні, отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi P)=\frac{\partial \varphi}{\partial x}P+\varphi\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\varphi Q)=\frac{\partial \varphi}{\partial y}Q+\varphi\frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}(\varphi R)=\frac{\partial \varphi}{\partial z}R+\varphi\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Додаючи всі три рівності, приходимо до формули (2.3.7).

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти дивергенцію векторних полів

а) $\vec{F}=e^{xy}\left(y\vec{i}+z\vec{j}-xyz\vec{k}\right)$;

б) $\vec{F}=xy^3\vec{i}+xyz^2\vec{j}-x^2yz\vec{k}$ в точці $M(1,-1,2)$;

в) $\vec{F}=grad\,(xy^2z^3)$.

2. Обчислити потік векторного поля $\vec{F}=\{z,-x,y\}$ через верхню сторону трикутника, який вирізається координатними площинами із площини $3x+6y-2z-6=0$.

3. Обчислити потік векторного поля $\vec{F}=\{1-2x,2y,2z\}$ через поверхню $x^2+y^2=z^2$, $0<z<1$ в напрямі зовнішньої нормалі.

4. Обчислити потік векторного поля $\vec{F}=\{x^2,y^2,z^2\}$ через нижню сторону параболоїда $x^2+y^2=a(a-2z)$, що розташована у другому октанті ($x\le 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$).

5. Обчислити потік векторного поля $\vec{F}=\{yz,xz,xy\}$ через повну зовнішню поверхню піраміди $ABCD$, якщо $A(0,0,3)$, $B(0,0,0)$, $C(2,0,0)$, $D(0,1,0)$.

6. Обчислити потік векторного поля $\vec{F}=\{yz,-x,-y\}$ через замкнену поверхню, що складається з конуса $y=\sqrt{x^2+z^2}$ і площини $y=1$.

7. Обчислити потік векторного поля $\vec{F}=\{6x,3y,-4z\}$ через замкнену поверхню, що складається з параболоїда $x^2+y^2=16-z$ і площини $z=0$.

8. Обчислити потік векторного поля $\vec{F}=\{2x,z^2-x^2,-z\}$ через замкнену поверхню, що складається з параболоїда $x^2+y^2=2-z$ і конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

2.4. Циркуляція векторного поля. Ротор

Розглянемо векторне поле

$$\vec{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

та деяку орієнтовану гладку криву L в цьому полі.

Циркуляцією векторного поля $\vec{F}(x,y,z)$ *вздовж кривої* L *називається криволінійний інтеграл*

$$Ц_L(\vec{F})=\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz. \qquad (2.4.1)$$

Нагадаємо, що у силовому полі циркуляція означає роботу цього поля по переміщенню матеріальної точки вздовж кривої L.

Якщо $\vec{r}$ – радіус-вектор точки M на кривій L, то вектор $d\vec{r}=\vec{i}\,dx+\vec{j}dy+\vec{k}dz$ направлений по дотичній до кривої і $|d\vec{r}|=ds$, тоді формулу (2.4.1) можна записати у вигляді

$$Ц_L(\vec{F})=\int_L \vec{F}d\vec{r}=\int_L F_s ds,$$

де F_s − проекція вектора $\vec{F}$ на вектор дотичної до кривої.

Часто розглядається циркуляція вздовж замкненого контура L, тоді прийнято записувати

$$Ц_L(\vec{F})=\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz.$$

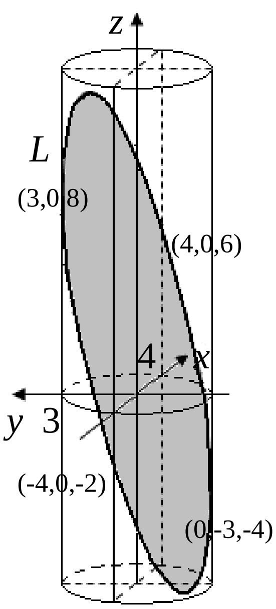


Рис. 22

Приклад 1. *Знайти циркуляцію векторного поля* $\vec{F}(M)=x\vec{i}-2z^2\vec{j}+y\vec{k}$ *вздовж лінії перетину циліндра* $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ *з площиною* $z=x+2y+2$ *у додатному напрямі обходу відносно нормалі до площини, яка утворює гострий кут з віссю* OZ *(рис.22).*

◄ Записуємо параметричне рівняння кривої L

$$x=4\cos t,\quad y=3\sin t,\quad z=4\cos t+6\sin t+2.$$

Додатному обходу кривої L відповідає зміна параметру від

0 до 2π.

Маємо

$$Ц_L(\vec{F}) = \oint_L x dx - 2z^2 dy + y dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[4\cos t(-4\sin t) - 2(4\cos t + 6\sin t + 2)^2 (3\cos t) + 3\sin t(4\cos t + 6\sin t + 2)\right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-16\cos t \sin t - 96\cos^3 t - 216\sin^2 t \cos t - 24\cos t - 288\cos^2 t \sin t - 96\cos^2 t\right] dt +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left(-132\sin t \cos t + 18\sin^2 t + 6\sin t\right) dt = \int_0^{2\pi} \left(-96\cos^2 t + 18\sin^2 t\right) dt = -78\pi. ▶$$

Приклад 2. *Знайти циркуляцію векторного поля лінійних швидкостей тіла, що обертається із сталою кутовою швидкістю* ω *навколо осі* OZ.

◀ Спочатку переконаємось, що поле лінійних швидкостей має вигляд

$$\vec{V} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}. \qquad (2.4.2)$$

Як відомо з кінематики, лінійна швидкість $\vec{V}$ через кутову швидкість $\vec{\omega}$ виражається формулою $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки M тіла, що обертається відносно деякої точки осі обертання, $\vec{\omega}$ − вектор кутової швидкості, відкладений на осі обертання, довжина якого дорівнює кутовій швидкості ω, а напрямлений так, що коли дивитись з його кінця, то обертання відбувається проти годинникової стрілки. Виберемо прямокутну систему так, що вісь OZ − вісь обертання, тоді $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega\left(-y\vec{i} + x\vec{j}\right)$$

і приходимо до рівності (2.4.2).

Нехай контур L лежить у деякій площині P, нормаль $\vec{n}$ до якої утворює гострий кут γ з віссю OZ. Напрям обходу контура узгодимо з напрямом нормалі $\vec{n}$. При обчисленні циркуляції застосуємо формулу Стокса, маємо

$$Ц_L(\vec{V}) = \oint_L -\omega y dx + \omega x dy = \omega \iint_\sigma 2 dx dy = 2\omega \iint_\sigma \cos\gamma d\sigma = 2\omega \cos\gamma \cdot S,$$

де S − площа поверхні σ, обмеженої контуром L. Якщо врахувати, що $\omega\cos\gamma = np_{\vec{n}}\vec{\omega} = \omega_n$, то отримаємо $Ц_L\left(\vec{V}\right) = 2\omega\cos\gamma \cdot S = 2\omega_n S$.

При повороті площини (зміні кута γ) циркуляція змінюється. Найбільше значення вона матиме при $\gamma = 0$, коли площина P перпендикулярна до осі обертання. Коли площина P перпендикулярна до площини OXY, циркуляція дорівнює нулю. ►

Приклад 3. *Знайти циркуляцію векторного поля* $\vec{F} = y\vec{i} + x^2\vec{j} - z\vec{k}$ *по колу* L: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 3$, *у додатному нарямі обходу відносно одиничного вектора* $\vec{k}$.

◄ Циркуляцію обчислюємо за формулою (2.4.1). Оскільки параметричне рівняння кола має вигляд $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 3$, то безпосередньо обчисляємо циркуляцію, маємо

$$Ц_L\left(\vec{F}\right) = \oint_L ydx + x^2dy - zdz = \int_0^{2\pi}\left[2\sin t(-2\sin t) + 4\cos^2 t(2\cos t)\right]dt =$$

$$= -4\int_0^{2\pi}\sin^2 t dt = -4\pi. ►$$

Нехай задане векторне поле

$$\vec{F}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

тоді ротор $rot\vec{F}$ визначається рівністю

$$rot\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{2.4.3}$$

Ротор векторного поля зручно записувати у вигляді символічного визначника, який розкривається за елементами першого рядка:

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Використовуючи поняття ротора векторного поля, можемо формулу Стокса (1.3.9) записати у векторному вигляді

$$\oint_L P(x, y.z)dx + Q(x, y.z)dy + R(x, y.z)dz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\cos\gamma \right] ds =$$

$$= \iint_S \left(rot\vec{F} \cdot \vec{n} \right) ds \qquad (2.4.4)$$

Векторне поле $\vec{F}(M)$ породжує нове векторне поле − поле ротора $rot\vec{F}(M)$. У формулі (2.4.4) маємо потік цього поля через поверхню S. Звідси випливає наступний висновок:

Циркуляція векторного поля вздовж замкненого контура дорівнює потоку ротора цього поля через поверхню, обмежену цим контуром.

Приклад 1*. Знайти ротор векторного поля* $\vec{F} = 2x^2 y\vec{i} - yz^2\vec{j} + \frac{x}{y}\vec{k}$ *у точці* $M_0(-1,1,2)$.

◄ Знайдемо ротор у довільній точці.

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2 y & -yz^2 & \frac{x}{y} \end{vmatrix} = \vec{i}\left(-\frac{x}{y^2} + 2yz \right) - \vec{j}\left(\frac{1}{y} - 0 \right) + \vec{k}\left(0 - 2x^2 \right).$$

Підставляючи координати точки $M_0(-1,1,2)$, отримуємо

$$rot\vec{F}(M_0) = 5\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}\,.$$ ►

Приклад 2*.Знайти ротор векторного поля лінійних швидкостей* $\vec{V} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$ *при обертанні твердого тіла навколо осі* OZ.

◄Записуємо і обчислюємо ротор

$$rot\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\,0 - \vec{j}\,0 + \vec{k}(\omega + \omega) = 2\omega\vec{k}, \qquad \left|rot\vec{V}\right| = 2\omega .$$

Отже, ротор швидкостей тіла, яке обертається навколо осі OZ з кутовою швидкістю ω, у кожній точці напрямлений вздовж вектора кутової швидкості і чисельно дорівнює подвоєній кутовій швидкості. ►

Приклад 3*. Знайти циркуляцію векторного поля* $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$ *вздовж замкненого контура* L*, що складається із ділянки гвинтової лінії*

$$\vec{r}(t) = a\cos t\vec{i} + a\sin t\vec{j} + bt\vec{k}, \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

та відрізка прямої, що з'єднує точки $B(a,0,2\pi b)$ *та* $A(a,0,0)$ *(рис.23).*

◄ Знаходимо ротор $rot\vec{F} = 2\vec{k}$. Нехай поверхня σ, напнута на контур L, складається із двох частин σ_1 і σ_2, де σ_1 − циліндрична поверхня $x^2 + y^2 = a^2$, а σ_2 − круг $x^2 + y^2 \le a^2$, $z = 2\pi b.$ На циліндричній поверхні σ_1 вектор $rot\vec{F} = 2\vec{k}$ є ортогональним до нормального вектора $\vec{n}$ до поверхні σ_1, а тому скалярний добуток $rot\vec{F} \cdot \vec{n}$ дорівнює нулю. На поверхні σ_2 маємо $\vec{n} = \vec{k}$ і тому $rot\vec{F} \cdot \vec{n} = 2\vec{k} \cdot \vec{k} = 2$. За формулою Стокса отримуємо

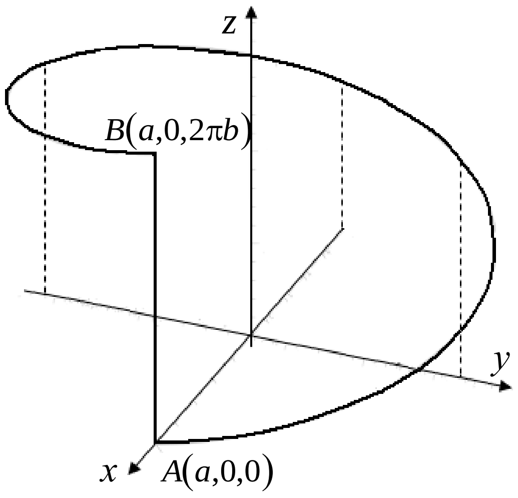


Рис. 23

$$Ц_L(\vec{F}) = \iint_{\sigma} (rot\vec{F} \cdot \vec{n})d\sigma = \iint_{\sigma_1} 0 d\sigma + \iint_{\sigma_2} 2 d\sigma = 2\pi a^2 . ►$$

Приклади для самостійного розв'язування

1. Знайти ротор заданих векторних полів

а) $\vec{F} = \mathrm{arctg}(x - y + z)\left(5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}\right);$

б) $\vec{F} = \dfrac{x}{y^3}\vec{i} + \dfrac{xy}{z^2}\vec{j} - \dfrac{zy}{x^3}\vec{k}$;

в) $\vec{F} = xyz\vec{i} + \sin z\vec{j} + y\cos x\vec{k}$ в точці $M\left(\frac{\pi}{4}, 3, \frac{\pi}{6}\right)$.

2. Знайти ротор векторного поля, яке задається векторним добутком $\vec{F} = [\vec{a} \times \vec{b}]$, де $\vec{a} = xz\vec{i} + y^3\vec{j} + yz^2\vec{k}$, а $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}$.

3. Знайти ротор векторного поля, яке задається векторним добутком $\vec{F} = [\vec{a} \times \vec{b}]$, де $\vec{a} = grad(x^3y^2z)$, а $\vec{b} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

4. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{F} = (x - 3z)\vec{i} + (x + y + z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$ вздовж контура трикутника з вершинами $A(1,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,4)$.

5. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ вздовж замкненого контура $\{x^2 + y^2 = 1,\ \ x + y + z = 1\}$.

6. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} - z\vec{k}$ вздовж замкненого контура, що утвоюється перетином циліндра $(x-1)^2 + y^2 = 1$ і сфери $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

7. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{F} = z\vec{i} + (x + y + z)\vec{j} + x\vec{k}$ вздовж замкненого контура $\{z = x^2 + y^2 - 6,\ z = -2\}$.

8. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} - 2z\vec{j} + 4y\vec{k}$ вздовж замкненого контура, що утвоюється перетином поверхні $y^2 = 4 - x - z$ з координатними площинами.

9. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{F} = xz\vec{i} - yz^2\vec{j} + xy\vec{k}$ вздовж замкненого контура, що утвоюється перетином двох поверхонь $x^2 + y^2 = 1$ і $z = x^2 - y^2 + z^2 + 2$.

10. Обчислити роботу силового поля $\vec{F} = xy\vec{i} - y\vec{j}$ вздовж першої арки циклоїди $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$.

11. Обчислити роботу силового поля $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (z - y)\vec{j} + y\vec{k}$ вздовж контура трикутника, утвореного претином площини $x + y + z = 2$ з координатними площинами.

2.5 Потенціальне, соленоїдальне і гармонічне векторні поля

Розглянемо векторне поле

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k} \tag{2.5.1}$$

задане в деякій просторовій області Ω, $(x,y,z)\in\Omega$.

Означення 1. *Векторне поле (2.5.1) називається потенціальним, якщо існує неперервно диференційовна скалярна функція* $U=U(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\Omega$, *така що*

$$gradU(x,y,z)\equiv\vec{F}(x,y,z) \qquad \forall(x,y,z)\in\Omega\ . \tag{2.5.2}$$

Тотожність (2.5.2) означає, що одночасно виконуються три тотожності

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\equiv P(x,y,z), \\ \dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\equiv Q(x,y,z), \\ \dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\equiv R(x,y,z), \quad \forall(x,y,z)\in\Omega\,. \end{cases} \tag{2.5.3}$$

При цьому скалярну функцію $U=U(x,y,z)$ називають потенціалом векторного поля (2.5.1).

Теорема. *Для того, щоб векторне поле (2.5.1) було потенціальним в області* Ω, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась тотожність*

$$rot\vec{F}(x,y,z)\equiv 0, \qquad \forall(x,y,z)\in\Omega\,. \tag{2.5.4}$$

Оскільки

$$rot\vec{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\,,$$

то тотожність (2.5.4) еквівалентна одночасному виконанню трьох тотожностей

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\equiv\dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}, \quad \forall(x,y,z)\in\Omega \end{cases} \tag{2.5.5}$$

Зауваження. У випадку, коли векторне поле (2.5.1) є потенціальним криволінійний інтеграл

$$\int_{M_1M_2} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

не залежить від форми кривої, яка з'єднує точки M_1 і M_2, а залежить тільки від початкової M_1 і кінцевої M_2 точок. При цьому інтеграл можна обчислити за наступною формулою

$$\int_{M_1M_2} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = U\Big|_{M_1}^{M_2} = U(M_2) - U(M_1)$$

Наслідок. *Якщо поле (2.5.1) є потенціальним, то відповідний криволінійний інтеграл по замкнутому контуру L дорівнює нулю:*

$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0.$$

Приклад. *Переконатись, що векторне поле*

$$\vec{F} = \left(3x^2 + 2xy\right)\vec{i} + \left(x^2 + 2y + z\right)\vec{j} + \left(y + 3z^2\right)\vec{k}$$

є потенціальним і знайти потенціал $U = U(x,y,z)$.

◄ Обчислюємо ротор цього поля, маємо

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 + 2xy & x^2 + 2y + z & y + 3z^2 \end{vmatrix} = \vec{i}(1-1) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(2x - 2x) = 0$$

Отже поле є потенціальним і диференціал функції $U(x,y,z)$ має вигляд

$$dU(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \left(3x^2 + 2xy\right)dx + \left(x^2 + 2y + z\right)dy + \left(y + 3z^2\right)dz.$$

Для знаходження функції $U = U(x,y,z)$ маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = 3x^2 + 2xy, \\ \dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} = x^2 + 2y + z, \\ \dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} = y + 3z^2. \end{cases}$$

З першого рівняння отримуємо $U = x^3 + x^2 y + \varphi(y,z)$, де $\varphi(y,z)$ − невідома функція.

Підставляючи отриманий вираз для U в друге рівняння, дістанемо

$$x^2 + \varphi'_y(y,z) = x^2 + 2y + z\,,$$

тобто $\varphi'_y(y,z) = 2y + z$, звідси випливає

$$\varphi(y,z) = y^2 + zy + \psi(z).$$

Далі отримуємо

$$U = x^3 + x^2 y + y^2 + zy + \psi(z).$$

Останній вираз підставимо в третє рівняння системи:

$$y + \psi'(z) = y + 3z^2 \;\Rightarrow\; \psi(z) = z^3 + c, \quad \text{де } c - \text{довільна стала.}$$

Остаточно маємо потенціал даного поля

$$U(x,y,z) = x^3 + x^2 y + y^2 + yz + z^3 + c\,.\blacktriangleright$$

Означення 2. *Векторне поле (2.5.1) називається соленоїдальним, якщо в усіх точках $(x,y,z)\in\Omega$ виконується рівність*

$$div\vec{F} = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} = 0. \tag{2.5.6}$$

З формули Гаусса-Остроградського випливає, потік соленоїдального поля через довільну замкнену поверхню, що знаходиться в деякій однозв’язній області, дорівнює нулеві.

Слово „соленоїдальне” у перекладі з грецької мови означає „трубчасте”, бо для таких полів справедливий закон збереження інтенсивності векторної трубки.

В гідродинаміці соленоїдальне поле − це поле без джерел, у якому через кожен переріз векторної трубки протікає одна й та сама кількість рідини. В електростатиці − це поле без зарядів.

Теорема. *Для того, щоб векторне поле (2.5.1) було соленоїдальним в області Ω, необхідно і достатньо, щоб існував такий вектор*

$$\vec{V}(x,y,z) = A(x,y,z)\vec{i} + B(x,y,z)\vec{j} + C(x,y,z)\vec{k}\,, \tag{2.5.7}$$

для якого в усіх точках $(x,y,z)\in\Omega$ виконується тотожність

$$\vec{F}(x,y,z) \equiv rot\vec{V}(x,y,z)\quad. \tag{2.5.8}$$

Тотожність (2.5.8) можна записувати у координатній формі:

$$\begin{cases} P(x,y,z) \equiv \dfrac{\partial C(x,y,z)}{\partial y} - \dfrac{\partial B(x,y,z)}{\partial z}, \\ Q(x,y,z) \equiv \dfrac{\partial A(x,y,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial C(x,y,z)}{\partial x}, \\ R(x,y,z) \equiv \dfrac{\partial B(x,y,z)}{\partial x} - \dfrac{\partial A(x,y,z)}{\partial y}. \end{cases} \tag{2.5.9}$$

Вектор (2.5.7) називають векторним потенціалом поля (2.5.1).

Зауваження. *Якщо існує один вектор (2.5.7), що задовольняє тотожності (2.5.8), то і будь-який вектор* $\vec{V}(x,y,z) + gradU(x,y,z)$, *при довільній неперервно диференційовній скалярній функції* $U(x,y,z)$, *також буде задовольняти тотожність (2.5.8).*

Отже, векторні потенціали соленоїдального поля відрізняються один від одного на градієнт довільного скалярного поля.

Приклад. *Знайти векторний потенціал* $V(x,y,z)$ *соленоїдального векторного поля* $\vec{F} = y^2\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$.

◄ Із тотожностей (2.5.9) отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{\partial C(x,y,z)}{\partial y} - \dfrac{\partial B(x,y,z)}{\partial z}, \\ z = \dfrac{\partial A(x,y,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial C(x,y,z)}{\partial x}, \\ x = \dfrac{\partial B(x,y,z)}{\partial x} - \dfrac{\partial A(x,y,z)}{\partial y}. \end{cases} \tag{2.5.10}$$

Оскільки векторний потенціал визначається неоднозначно: $\vec{V}(x,y,z) + gradU(x,y,z)$, то можна припускати, що $A \equiv 0$. Система (2.5.10) запишеться в наступному вигляді

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{\partial C(x,y,z)}{\partial y} - \dfrac{\partial B(x,y,z)}{\partial z}, \\ z = -\dfrac{\partial C(x,y,z)}{\partial x}, \\ x = \dfrac{\partial B(x,y,z)}{\partial x}. \end{cases}$$

Із останнього рівняння вибираємо $B = \frac{1}{2}x^2$. Тоді із першого і другого рівнянь отримуємо $C = \frac{1}{3}y^3 - xz$. Таким чином, один з векторних потенціалів має вигляд

$$\vec{V} = \frac{x^2}{2}\vec{j} + \frac{y^3 - 3xz}{3}\vec{k}\,. \blacktriangleright$$

Означення 3. *Векторне поле (2.5.1) називається гармонічним, якщо в усіх точках* $(x, y, z) \in \Omega$ *воно є одночасно і потенціальним, і соленоїдальним, тобто в усіх точках* $(x, y, z) \in \Omega$ *виконуються умови*

$$1)\ rot\vec{F} = 0,$$
$$2)\ divF = 0.$$

З умови 1) випливає існування скалярної функції $U = U(x, y, z)$, такої що $\vec{F} = gradU$.

З умови 2) $div\vec{F} = div(gradU) = \Delta U = 0$, де Δ − оператор Лапласа. Отже, в гармонічному полі, маємо

$$\Delta U(x, y, z) = \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial z^2} = 0.$$

Це рівняння називається рівнянням Лапласа, а його розв'язки – *гармонічними* функціями.

Гармонічне поле ще означають як потенціальне, потенціалом якого є гармонічна функція. Прикладами гармонічних функцій є наступні

$$U(x, y, z) = ax + by + cz,$$
$$U(x, y, z) = xyz,$$
$$U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Довільне векторне поле $\vec{a}(x, y, z)$ завжди можна подати у вигляді суми

$$\vec{a}(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z) + \vec{V}(x, y, z),$$

де $\vec{F}(x, y, z)$ − потенціальне поле, $\vec{V}(x, y, z)$ − соленоїдальне поле.

Приклади для самостійного розв'язування

1.Всатновити, що векторне поле $\vec{F}$ є соленоїдальним та знайти його векторний потенціал.

а) $\vec{F} = yz\left(4x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}\right)$;

б) $\vec{F} = 2xyz\vec{i} - y(yz+1)\vec{j} + z\vec{k}$;

в) $\vec{F} = x^2 y\vec{i} + 2xy^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$.

2. Перевірити, що векторне поле градієнта скалярного поля $U = \sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}\,\sqrt[4]{z}$ є потенціальним.

3. Перевірити, що векторне поле $\vec{F} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$ є гармонічним.

4. Встановити потенціальність векторного поля $\vec{F}$ та знайти його потенціал.

а) $\vec{F} = (yz - 2x)\vec{i} + (xz - 2y)\vec{j} + xy\vec{k}$;

б) $\vec{F} = xy(3x - 4y)\vec{i} + x^2(x - 4y)\vec{j} + 3xz^2\vec{k}$;

в) $\vec{F} = 6x^2\vec{i} + 3\cos(3x + 2z)\vec{j} + \cos(3y + 2z)\vec{k}$.

Завдання до розрахункової роботи

Задача 1. *Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні* S*, де* S − *частина площини* (p)*, яка відсікається координатними площинами.*

1. $\iint\limits_S (3x+10y-z)ds$, (p): $x+3y+2z=6$.

2. $\iint\limits_S (5x-y+5z)ds$, (p): $3x+2y+z=6$.

3. $\iint\limits_S (6x-y+8z)ds$, (p): $x+y+2z=2$.

4. $\iint\limits_S (2x+3y+2z)ds$, (p): $x+3y+z=3$.

5. $\iint\limits_S (2-7x+y+9z)ds$, (p): $2x-y+2z=-2$.

6. $\iint\limits_S (6x+y+4z)ds$, (p): $3x+3y+z=3$.

7. $\iint\limits_S (x+2y+3z)ds$, (p): $x+y+z=2$.

8. $\iint\limits_S (3x-2y+6z)ds$, (p): $2x+y+2z=2$.

9. $\iint\limits_S (2x+5y-z)ds$, (p): $x+2y+z=2$.

10. $\iint\limits_S (5x-8y-z)ds$, (p): $2x-3y+z=6$.

11. $\iint\limits_S (-x+3y-z)ds$, (p): $x-y+z=2$.

12. $\iint\limits_S (-2x+3y-2z)ds$, (p): $2x-y-2z=-2$.

13. $\iint\limits_S (2x-3y+z)ds$, (p): $x+2y+z=2$.

14. $\iint\limits_S (5x+y-z)ds$, (p): $x+2y+2z=2$.

15. $\iint\limits_S (3x+2y+2z)ds$, (p): $3x+2y+2z=6$.

16. $\iint\limits_S (2x+3y-z)ds$, (p): $2x+y+z=2$.

17. $\iint\limits_S (9x + 2y + z)ds$, $\quad (p): 2x + y + z = 4$.

18. $\iint\limits_S (3x + 8y + 8z)ds$, $\quad (p): x + 4y + 2z = 8$.

19. $\iint\limits_S (-x + 4y + 4z)ds$, $\quad (p): x - 2y + 2z = 2$.

20. $\iint\limits_S (7x + y + 2z)ds$, $\quad (p): 3x - 2y + 2z = 6$.

21. $\iint\limits_S (2x + 3y + z)ds$, $\quad (p): 2x + 3y + z = 6$.

22. $\iint\limits_S (4x - y + z)ds$, $\quad (p): x - y + z = 2$.

23. $\iint\limits_S (4x - 4y - z)ds$, $\quad (p): x + 2y + 2z = 4$.

24. $\iint\limits_S (2x + 5y + z)ds$, $\quad (p): x + y + 2z = 2$.

25. $\iint\limits_S (4x - y + 4z)ds$, $\quad (p): 2x + 2y + z = 4$.

26. $\iint\limits_S (5x + 2y + 2z)ds$, $\quad (p): x + 2y + z = 2$.

27. $\iint\limits_S (2x + 5y + 10z)ds$, $\quad (p): 2x + y + 3z = 6$.

28. $\iint\limits_S (2x + 15y + z)ds$, $\quad (p): x + 2y + 2z = 2$.

29. $\iint\limits_S (2x + 3y + z)ds$, $\quad (p): 2x + 2y + z = 2$.

30. $\iint\limits_S (x + 3y + 2z)ds$, $\quad (p): 2x + y + 2z = 2$.

Задача 2. *Обчислити поверхневий інтеграл другого роду за вказаною стороною поверхні* S.

1. $\iint\limits_S (y^2 + z^2)dydz$, де S − частина поверхні параболоїда $x = 9 - y^2 - z^2$, яка відсікається площиною $x = 0$, сторона цієї поверхні вибрана так, що нормаль до неї утворює гострий кут з віссю OZ.

2. $\iint\limits_S z^2 dxdy$, де S − зовнішня сторона поверхні $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

3. $\iint\limits_S zdxdy + ydzdx + ydydz$, де S − зовнішня сторона поверхні куба, обмеженого площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=1,\ z=1.$

4. $\iint\limits_S (z+1)dxdy$, де S − зовнішня сторона поверхні $x^2+y^2+z^2=16$.

5. $\iint\limits_S yzdydz + xzdzdx + xydxdy$, де S − верхня сторона площини $x+y+z=4$, яка відсікається координатними площинами.

6. $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, де S − зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=16$, що лежить в першому октанті.

7. $\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, де S − зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=1$.

8. $\iint\limits_S xydydz + yzdzdx + xzdxdy$, де S − верхня сторона площини $x+y+z=1$, яка відсікається координатними площинами.

9. $\iint\limits_S xzdydz + xydzdx + yzdxdy$, де S − зовнішня сторона циліндра $x^2+y^2=1$, що знаходиться між площинами $z=0,\ z=5$.

10. $\iint\limits_S xzdydz + x^2ydzdx + y^2zdxdy$, де S − частина поверхні параболоїда $z=x^2+y^2$, що вирізається циліндром $x^2+y^2=1$. Сторона поверхні вибирається такою, що нормаль до неї утворює тупий кут з віссю OZ.

11. $\iint\limits_S z(x^2+y^2)dxdy$, де S − зовнішня сторона нижньої половини сфери $x^2+y^2+z^2=9$.

12. $\iint\limits_S x^2dydz + z^2dxdy$, де S − частина поверхні конуса $z^2=x^2+y^2$, що лежить між площинами $z=0$, $z=1$. Вибирається та сторона поверхні, нормаль до якої утворює тупий кут з віссю OZ.

13. $\iint\limits_S (2y^2-z)dxdy$, де S − частина поверхні параболоїда $z=x^2+y^2$, що відтинається площиною $z=2$. Сторона поверхні вибирається такою, що нормаль до неї утворює тупий кут з віссю OZ.

14. $\iint\limits_S \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$, де S − частина поверхні гіперболоїда $z^2+1=x^2+y^2$, яка відтинається площинами $z=0$, $z=\sqrt{3}$. Вибирається та сторона поверхні, нормаль до якої утворює тупий кут з віссю OZ.

15. $\iint\limits_S xydydz + yzdxdz + xzdxdy$, де S − зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=1$, що лежить в першому октанті.

16. $\iint\limits_S x^2dydz + zdxdy$, де S − частина поверхні параболоїда $z=x^2+y^2$, що відтинається площиною $z=4$. Сторона поверхні вибирається такою, що нормаль до неї утворює тупий кут з віссю OZ.

17. $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dzdx - zdxdy$, де S − частина поверхні конуса $z^2=x^2+y^2$, що відтинається площинами $z=0$, $z=3$. Сторона поверхні вибирається такою, що нормаль до неї утворює гострий кут з віссю OZ.

18. $\iint\limits_S x^2dydz - z^2dzdx + zdxdy$, де S − частина поверхні $z=3-x^2-y^2$, що відтинається площиною $z=0$. Сторона поверхні вибирається такою, що нормаль до неї утворює гострий кут з віссю OZ.

19. $\iint\limits_S yzdydz - x^2dzdx - y^2dxdy$, де S − частина поверхні конуса $y^2=x^2+z^2$, що відтинається площинами $y=0$, $y=1$. Сторона поверхні вибирається такою, що нормаль до неї утворює тупий кут з віссю OY.

20. $\iint\limits_S x^2dydz + 2y^2dzdx - zdxdy$, де S − частина поверхні параболоїда $z=x^2+y^2$, що відтинається площиною $z=1$. Сторона поверхні вибирається такою, що нормаль до неї утворює гострий кут з віссю OZ.

21. $\iint\limits_S 2xdydz + (1-z)dxdy$, де S − внутрішня сторона циліндра $x^2+y^2=4$, що відтинається площинами $z=0$, $z=1$.

22. $\iint\limits_S 2xdydz - ydzdx + zdxdy$, де S − зовнішня сторона замкненої поверхні, утвореної параболоїдом $3z = x^2 + y^2$ та півсферою $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

23. $\iint\limits_S 4xdydz + 2ydzdx - zdxdy$, де S − зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

24. $\iint\limits_S (x+z)dydz + (z+y)dxdy$, де S − зовнішня сторона циліндра $x^2 + y^2 = 1$, що відтинається площинами $z = 0$, $z = 2$.

25. $\iint\limits_S 3xdydz - ydzdx - zdxdy$, де S − частина поверхні параболоїда $9 - z = x^2 + y^2$, що відтинається площиною $z = 0$. Сторона поверхні вибирається такою, що нормаль до неї утворює гострий кут з віссю OZ.

26. $\iint\limits_S (y-x)dydz + (z-y)dzdx + (x-z)dxdy$, де S − внутрішня сторона замкненої поверхні, утвореної конусом $x^2 = z^2 + y^2$ і площиною $x = 1$.

27. $\iint\limits_S 3x^2dydz - y^2dzdx - zdxdy$, де S − частина поверхні параболоїда $1 - z = x^2 + y^2$, що відтинається площиною $z = 0$. Сторона поверхні вибирається такою, що нормаль до неї утворює гострий кут з віссю OZ.

28. $\iint\limits_S (1 + 2x^2)dydz + y^2dzdx + zdxdy$, де S − частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, що відтинається площинами $z = 0$, $z = 4$. Сторона поверхні вибирається такою, що нормаль до неї утворює тупий кут з віссю OZ.

29. $\iint\limits_S x^2dydz + z^2dzdx + ydxdy$, де S − частина поверхні параболоїда $4 - z = x^2 + y^2$, що відтинається площиною $z = 0$. Сторона поверхні вибирається такою, що нормаль до неї утворює гострий кут з віссю OZ.

30. $\iint\limits_S (y^2 + z^2)dydz - y^2dzdx + 2yz^2dxdy$, де S − частина поверхні конуса $x^2 + z^2 = y^2$, що відтинається площиною $y = 0$. Сторона поверхні вибирається такою, що нормаль до неї утворює тупий кут з віссю OY.

Задача 3. *Дана функція* $u(M)=u(x,y,z)$ *та точки* $M_1,\ M_2$. *Знайти:*

а) похідну цієї функції у точці M_1 *у напрямі вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *;*

б) величину та напрям найбільшої зміни функції у точці M_1.

1. $u(M)=x^2y+y^2z+z^2x,\quad M_1(1,-1,2),\quad M_2(3,4,-1)$.

2. $u(M)=5xy^3z^2,\quad M_1(2,1,-1),\quad M_2(4,-3,0)$.

3. $u(M)=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right),\quad M_1(-1,2,1),\quad M_2(3,1,-1)$.

4. $u(M)=ze^{x^2+y^2+z^2},\quad M_1(0,0,0),\quad M_2(3,-4,2)$.

5. $u(M)=\ln(xy+yz+xz),\quad M_1(-2,3,-1),\quad M_2(2,1,-3)$.

6. $u(M)=\sqrt{1+x^2+y^2+z^2},\quad M_1(1,1,1),\quad M_2(3,2,1)$.

7. $u(M)=x^2y+z^2x-2,\quad M_1(1,1,-1),\quad M_2(2,-1,3)$.

8. $u(M)=xe^y+ye^x-z^2,\quad M_1(3,0,2),\quad M_2(4,1,3)$.

9. $u(M)=3xy^2-xyz+z^2,\quad M_1(1,1,2),\quad M_2(3,-1,4)$.

10. $u(M)=5x^2yz-xy^2z+z^2y,\quad M_1(1,1,1),\quad M_2(9,-3,9)$.

11. $u(M)=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad M_1(1,2,2),\quad M_2(-3,2,-1)$.

12. $u(M)=y^2z-2xyz+z^2,\quad M_1(3,1,-1),\quad M_2(-2,1,4)$.

13. $u(M)=x^2+y^2+z^2-2xyz,\quad M_1(1,-1,2),\quad M_2(5,-1,4)$.

14. $u(M)=\ln\left(1+x^2+y^2+z^2\right),\quad M_1(1,1,1),\quad M_2(3,-5,1)$.

15. $u(M)=x^2+2y^2-4z^2-5,\quad M_1(1,2,1),\quad M_2(-3,-2,6)$.

16. $u(M)=\ln\left(1+x^3+y^3+z\right),\quad M_1(1,3,0),\quad M_2(-4,1,3)$.

17. $u(M)=x-2y+e^z,\quad M_1(-4,-5,0),\quad M_2(2,3,4)$.

18. $u(M)=x^y-3xyz,\quad M_1(2,2,-4),\quad M_2(1,0,-3)$.

19. $u(M)=3x^2yz^3,\quad M_1(-2,-3,1),\quad M_2(5,-2,0)$.

20. $u(M)=e^{xy+z^2},\quad M_1(-5,0,2),\quad M_2(2,4,-3)$.

21. $u(M)=x^{yz},\quad M_1(3,1,4),\quad M_2(1,-1,-1)$.

22. $u(M)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^3$, $\quad M_1(1,2,-1)$, $\quad M_2(0,-1,3)$.

23. $u(M)=(x-y)^z$, $\quad M_1(1,5,0)$, $\quad M_2(3,7,-2)$.

24. $u(M)=x^2y+zy^2-3z$, $\quad M_1(0,-2,-1)$, $\quad M_2(12,-5,0)$.

25. $u(M)=\dfrac{10}{x^2+y^2+z^2+1}$, $\quad M_1(-1,2,-2)$, $\quad M_2(2,0,1)$.

26. $u(M)=\ln\left(1+x^2-y^2+z^2\right)$, $\quad M_1(1,1,1)$, $\quad M_2(5,-4,8)$.

27. $u(M)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{x}$, $\quad M_1(-1,1,1)$, $\quad M_2(2,3,4)$.

28. $u(M)=x^3+xy^2-6xyz$, $\quad M_1(1,3,-5)$, $\quad M_2(4,2,-2)$.

29. $u(M)=\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{z}-\dfrac{x}{z}$, $\quad M_1(2,2,2)$, $\quad M_2(-3,4,1)$.

30. $u(M)=e^{x-yz}$, $\quad M_1(1,0,3)$, $\quad M_2(2,-4,5)$.

Задача 4. *Знайти потік векторного поля* $\vec{F}(M)$ *через зовнішню поверхню піраміди, утвореної площиною* (p) *та координатними площинами, двома способами:*

а) за означенням потоку;

б) за допомогою формули Гаусса-Остроградського.

1. $\vec{F}(M)=3x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$, $\quad (p): x+3y+z=3$.

2. $\vec{F}(M)=(3x-1)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k}$, $\quad (p): 2x-y-2z=2$.

3. $\vec{F}(M)=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$, $\quad (p): 3x+3y+z=3$.

4. $\vec{F}(M)=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x+2y+z)\vec{k}$, $\quad (p): x+y+z=2$.

5. $\vec{F}(M)=(y+2z)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}$, $\quad (p): 2x+y+2z=2$.

6. $\vec{F}(M)=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$, $\quad (p): x+2y+z=2$.

7. $\vec{F}(M)=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$, $\quad (p): 2x-3y+z=6$.

8. $\vec{F}(M)=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k}$, $\quad (p): x-y+z=2$.

9. $\vec{F}(M)=(x+y)\vec{i}+3y\vec{j}+(y-z)\vec{k}$, $\quad (p): 2x-y-2z=-2$.

10. $\vec{F}(M)=(x+y-z)\vec{i}-2y\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$, $(p): x+2y+z=2$.

11. $\vec{F}(M)=(y-z)\vec{i}+(y+2x)\vec{j}+z\vec{k}$, $(p): 2x+y+z=2$.

12. $\vec{F}(M)=x\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(2x-y+2z)\vec{k}$, $(p): x+2y+2z=2$.

13. $\vec{F}(M)=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k}$, $(p): 3x+2y+2z=6$.

14. $\vec{F}(M)=4x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}$, $(p): 2x+y+z=4$.

15. $\vec{F}(M)=(2z-x)\vec{i}+(2y+x)\vec{j}+3z\vec{k}$, $(p): x+4y+2z=8$.

16. $\vec{F}(M)=4z\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+z)\vec{k}$, $(p): x-2y+2z=2$.

17. $\vec{F}(M)=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+2(x+z)\vec{k}$, $(p): 3x-2y+2z=6$.

18. $\vec{F}(M)=(x+y+z)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-7z)\vec{k}$, $(p): 2x+3y+z=6$.

19. $\vec{F}(M)=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$, $(p): x-y+z=2$.

20. $\vec{F}(M)=(2y-z)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+x\vec{k}$, $(p): x+2y+2z=4$.

21. $\vec{F}(M)=(2z-x)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(3x+z)\vec{k}$, $(p): x+y+2z=2$.

22. $\vec{F}(M)=(x+z)\vec{i}+(3y+x)\vec{j}+y\vec{k}$, $(p): x+y+2z=2$.

23. $\vec{F}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$, $(p): 2x+2y+z=4$.

24. $\vec{F}(M)=(3x+y)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+y\vec{k}$, $(p): x+2y+z=2$.

25. $\vec{F}(M)=(y+z)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y+3z)\vec{k}$, $(p): 2x+y+3z=6$.

26. $\vec{F}(M)=(y+z)\vec{i}+(6y+x)\vec{j}+y\vec{k}$, $(p): x+2y+2z=2$.

27. $\vec{F}(M)=(2y-z)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+y\vec{k}$, $(p): x+3y+2z=6$.

28. $\vec{F}(M)=(y+z)\vec{i}+x\vec{j}+(y-2z)\vec{k}$, $(p): 2x+2y+z=2$.

29. $\vec{F}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$, $(p): 3x+2y+z=6$.

30. $\vec{F}(M)=z\vec{i}+(y+x)\vec{j}+y\vec{k}$, $(p): 2x+y+2z=2$.

Задача 5. *Знайти циркуляцію векторгого поля* $\vec{F}(M)$ *по контуру трикутника, що утворюється при перетині площини*(p) $Ax+By+Cz=D$ *з координатними* *площинами, при додатному напрямі обходу відносно нормалі* $\vec{n}=\{A,B,C\}$ *до площини двома способами:*

а) за означенням циркуляції;

б) за допомогою формули Стокса.

1. $\vec{F}(M)=z\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}$, $(p): 2x+y+2z=2$.

2. $\vec{F}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$, $(p): 3x+2y+z=6$.

3. $\vec{F}(M)=(y+z)\vec{i}-x\vec{j}+(y-2z)\vec{k}$, $(p): 2x+2y+z=2$.

4. $\vec{F}(M)=(2y-z)\vec{i}-(x+2y)\vec{j}+y\vec{k}$, $(p): x-3y+2z=6$.

5. $\vec{F}(M)=(y+z)\vec{i}+(x+6y)\vec{j}+y\vec{k}$, $(p): x+2y+2z=2$.

6. $\vec{F}(M)=(y+z)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y+3z)\vec{k}$, $(p): 2x+y+3z=6$.

7. $\vec{F}(M)=(3x+y)\vec{i}-(z+x)\vec{j}+y\vec{k}$, $(p): x+2y+z=2$.

8. $\vec{F}(M)=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$, $(p): 2x+2y+z=4$.

9. $\vec{F}(M)=(x+z)\vec{i}+(x+3y)\vec{j}+y\vec{k}$, $(p): x+y+2z=2$.

10. $\vec{F}(M)=(2y-z)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+x\vec{k}$, $(p): x+2y+2z=4$.

11. $\vec{F}(M)=(2z-x)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(3x+z)\vec{k}$, $(p): x+y+2z=2$.

12. $\vec{F}(M)=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$, $(p): x-y+z=2$.

13. $\vec{F}(M)=(x+y+z)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-7z)\vec{k}$, $(p): 2x+3y+z=6$.

14. $\vec{F}(M)=(x+y)\vec{i}+(z+y)\vec{j}+2(x+z)\vec{k}$ $(p): 3x-2y+2z=6$.

15. $\vec{F}(M)=4z\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+z)\vec{k}$, $(p): x-2y+2z=2$.

16. $\vec{F}(M)=(2z-x)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+3z\vec{k}$, $(p): x+4y+2z=8$.

17. $\vec{F}(M)=4x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}$, $(p): 2x+y+z=4$.

18. $\vec{F}(M)=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k}$, $(p): 3x+2y+2z=6$.

19. $\vec{F}(M)=x\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(2x-y+2z)\vec{k}$, $(p): x+2y+2z=2$.

20. $\vec{F}(M)=(y-z)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+z\vec{k}$, $(p): 2x+y+z=2$.

21. $\vec{F}(M)=(x+y-z)\vec{i}-2y\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$, $(p): x+2y+z=2$.

22. $\vec{F}(M)=(x+y)\vec{i}+3y\vec{j}+(y-z)\vec{k}$, $\quad (p): 2x-y-2z=-2$.

23. $\vec{F}(M)=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k}$, $\quad (p): x-y+z=2$.

24. $\vec{F}(M)=(3x-y)\vec{i}+(z+2y)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$, $\quad (p): 2x-3y+z=6$.

25. $\vec{F}(M)=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$, $\quad (p): x+2y+z=2$.

26. $\vec{F}(M)=(y+2z)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}$, $\quad (p): 2x+y+2z=2$.

27. $\vec{F}(M)=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x+2y+z)\vec{k}$, $\quad (p): x+y+z=2$.

28. $\vec{F}(M)=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$, $\quad (p): 3x+3y+z=3$.

29. $\vec{F}(M)=(3x-1)\vec{i}+(z-x+y)\vec{j}+4z\vec{k}$, $\quad (p): 2x-y-2z=-2$.

30. $\vec{F}(M)=3x\vec{i}+(z+y)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$, $\quad (p): x+3y+z=3$.

Задача 6. *З'ясувати, чи буде векторне поле* $\vec{F}(x,y,z)$ *соленоїдальним.*

1. $\vec{F}(x,y,z)=(\alpha-\beta)x\vec{i}+(\gamma-\alpha)y\vec{j}+(\beta-\gamma)z\vec{k}$.

2. $\vec{F}(x,y,z)=xy\vec{i}-2xy^2\vec{j}+2xyz\vec{k}$.

3. $\vec{F}(x,y,z)=(yz-2x)\vec{i}+(xz+2y)\vec{j}+xy\vec{k}$.

4. $\vec{F}(x,y,z)=(x^2-z^2)\vec{i}-3xy\vec{j}+(y^2+z^2)\vec{k}$.

5. $\vec{F}(x,y,z)=2xyz\vec{i}-y(yz+1)\vec{j}+z\vec{k}$.

6. $\vec{F}(x,y,z)=(2x-3y)\vec{i}+2xy\vec{j}-z^2\vec{k}$.

7. $\vec{F}(x,y,z)=(x^2-y^2)\vec{i}+(y^2-z^2)\vec{j}+(z^2-x^2)\vec{k}$.

8. $\vec{F}(x,y,z)=yz\vec{i}+(x-y)\vec{j}+z^2\vec{k}$.

9. $\vec{F}(x,y,z)=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$.

10. $\vec{F}(x,y,z)=3x^2y\vec{i}-2xy^2\vec{j}-2xyz\vec{k}$.

11. $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\vec{i}-2(y+z)\vec{j}+(z-x)\vec{k}$.

З'ясувати, чи буде векторне поле $\vec{F}(x,y,z)$ *потенціальним, якщо так, то знайти потенціал.*

12. $\vec{F}(x,y,z)=(yz-2x)\vec{i}+(xz+yz)\vec{j}+xy\vec{k}.$

13. $\vec{F}(x,y,z)=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}.$

14. $\vec{F}(x,y,z)=6xy\vec{i}+\left(3x^2-2y\right)\vec{j}+z\vec{k}.$

15. $\vec{F}(x,y,z)=(2x-yz)\vec{i}+(2x-xy)\vec{j}+yz\vec{k}.$

16. $\vec{F}(x,y,z)=(y-z)\vec{i}+3xyz\vec{j}+(z-x)\vec{k}.$

17. $\vec{F}(x,y,z)=(y-z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+\left(x^2-y^2\right)\vec{k}.$

18. $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\vec{i}-2xz\vec{j}-3(y+z)\vec{k}.$

19. $\vec{F}(x,y,z)=xy(3x-4y)\vec{i}+x^2(x-4y)\vec{j}+3z^2\vec{k}.$

20. $\vec{F}(x,y,z)=z^2\vec{i}+(xz+y)\vec{j}+x^2y\vec{k}.$

21. $\vec{F}(x,y,z)=6x^2\vec{i}+3\cos(3x+2z)\vec{j}+\cos(3y+2z)\vec{k}.$

22. $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\vec{i}+(z-y)\vec{j}+2(x+z)\vec{k}.$

23. $\vec{F}(x,y,z)=3(x-z)\vec{i}+\left(x^2-y^2\right)\vec{j}+3z\vec{k}.$

24. $\vec{F}(x,y,z)=(2x-yz)\vec{i}+(xz-2y)\vec{j}+2xyz\vec{k}.$

25. $\vec{F}(x,y,z)=3x^2\vec{i}+4(x-y)\vec{j}+(x-z)\vec{k}.$

З'ясувати, чи буде векторне поле $\vec{F}(x,y,z)$ *гармонічним.*

26. $\vec{F}(x,y,z)=x^2z\vec{i}+y^2\vec{j}-xz^2\vec{k}.$

27. $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\vec{i}+(z+y)\vec{j}+(x+z)\vec{k}.$

28. $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{x}{y}\vec{i}+\dfrac{y}{z}\vec{j}+\dfrac{z}{x}\vec{k}.$

29. $\vec{F}(x,y,z)=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}.$

30. $\vec{F}(x,y,z)=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}.$

Література

1. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1968.− Т.2.
2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А.Ф.Бермант, И. Г. Араманович − М.: Наука, 1967.
3. Шкіль М.І. Вища математика / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник – Либідь, 1994. − Кн.3.
4. Дубовик В.П. Вища математика / В.П. Дубовик, І.І. Юрик – К.: Вища шк., 1993.
5. Лісова Т.В. Інтегральне числення функцій багатьох змінних: Навч.-метод. посібник – Ніжин: Ред.-видав. Відділ НДПУ, 2000.
6. Лісова Т.В. Поверхневі інтеграли та елементи теорії поля. Навч.-метод. посібник / Т.В. Лісова, М.М. Астаф'єва – Ніжин: Ред.-видав. Відділ НДПУ, 2001.
7. Вища математика. Основні розділи: підручник / За ред. Г.Л.Кулініча – К.: Либідь, 1995.-Кн.1.
8. Грималюк В.П. Вища математика, ч.2 / В.П. Грималюк, М.М. Кухарчук, В.В. Ясинський − К.: «Віпол», 2004.
9. Овчинников П.П. Вища математика, ч.1/ П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко – К.: «Техніка», 2000.
10. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу.− Москва: Высшая школа, 1966.
11. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. Г.И. Кручковича. – Москва: Высш. шк., 1973.
12. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.– Москва: Наука, 1985.