МІНІСТЕРСТВО НАУКИ ТА ОСВІТИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Рекомендовано вченою радою
фізико-математичного факультету
протокол № 2 від 27 березня 2014 р.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ВАРІАНТИ ТИПОВО-РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

РЯДИ

КИЇВ - 2013

МІНІСТЕРСТВО НАУКИ ТА ОСВІТИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ВАРІАНТИ ТИПОВО-РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

РЯДИ

Затверджено
на засіданні кафедри
математичної фізики
протокол № 7 від 30 травня 2013 року

КИЇВ - 2013
НТУУ «КПІ»

Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт з вищої математики. Ряди / Уклад.: Г.В. Журавська, І.М. Копась, Г.М. Кулик, Н.В.Рева, Н.В. Степаненко - К.: НТУУ«КПІ», 2013. - с.

Укладачі: Г.В. Журавська
І.М. Копась
Г.М. Кулик
Н.В.Рева
Н.В. Степаненко

Відповідальний редактор С.Д.Івасишен

Рецензент:

1 ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1 Числовий ряд. Збіжність, розбіжність числових рядів. Сума збіжного числового ряду. Властивості збіжних числових рядів

Нехай задано нескінченну числову послідовність $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$. Вираз

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.1}$$

називається числовим рядом. Загальним членом ряду називається u_n, а n-ою частинною сумою ряду (1.1) – сума

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n. \tag{1.2}$$

Якщо існує скінченна границя послідовності $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n, \tag{1.3}$$

то ряд (1.1) називається збіжним, а число S сумою ряду (1.1). У противному разі ряд називається розбіжним (тобто якщо границя (1.3) не існує або вона є нескінченною).

<u>Приклад 1.1.</u> Розглянемо суму членів геометричної прогресії

$$a + aq + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad . \tag{1.4}$$

Сума $S_n = \dfrac{a - aq^n}{1-q}$. Якщо $|q|<1$, то $q^n \to 0$ при $n\to\infty$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a - aq^n}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$. Якщо $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$; при $q=1$, $S_n=an\to\infty$ при $n\to\infty$. При $q=-1$ ряд (1.4) має вигляд $a - a + a + a - a + \ldots$ і, відповідно $S_{2m}=0$, $S_{2m+1}=a$, тобто границі S_n при $n\to\infty$ не існує.

Відповідь. Геометричний ряд (1.4) збігається при $|q|<1$ і розбігається при $|q|\geq 1$.

Найпростіші властивості збіжних рядів

1. Якщо ряди $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ та $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ збіжні та їх суми відповідно дорівнюють S_1 та S_2, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k+v_k)$ також збіжний та його сума дорівнює S_1+S_2.

2. Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ збіжний та його сума дорівнює S_1, то буде збіжним ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda u_k$ (λ – довільне дійсне число), та його сума дорівнює λS_1.

3. Для збіжності ряду (1.1) необхідно й досить, щоб

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k=\lim_{n\to\infty} r_n=0. \qquad (1.5)$$

З властивості 3 безпосередньо випливає, що збіжність і розбіжність не порушується, якщо до ряду додати чи відняти скінченне число доданків.

4. (Необхідна умова збіжності). Якщо ряд (1.1) збігається, то

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0. \qquad (1.6)$$

Доведення. Ряд (1.1) збіжний, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty} S_n-\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0$.

Властивість 4 доведено.

Приклад 1.2. Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2k+1}. \tag{1.7}$$

Для нього $u_k = \dfrac{k}{2k+1} \underset{k\to\infty}{\to} \dfrac{1}{2}$. Оскільки загальний член цього ряду не прямує до нуля, то ряд (1.7) розбіжний.

Приклад 1.3. Розглянемо гармонічний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}. \tag{1.8}$$

Доведемо, що він розбігається. Дійсно, якщо б ряд (1.8) збігався, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k = \lim\limits_{n\to\infty}S_n = S$. Розглянемо $S_{2m} - S_m =$ $= \dfrac{1}{m-1}+\ldots+\dfrac{1}{2m} \geq \dfrac{m}{2m} = \dfrac{1}{2}$, що суперечить припущеній збіжності гармонічного ряду.

1.2 Числові ряди з додатними членами. Теореми порівняння. Ознаки Даламбера та Коші. Інтегральна ознака збіжності та розбіжності рядів

Будемо вивчати числовий ряд (1.1) з додатними членами. У цьому випадку послідовність частинних сум S_k монотонно зростає, що істотно полегшує дослідження таких рядів. В основі такого дослідження лежать теореми порівняння.

Перша теорема порівняння. Розглянемо два ряди:

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k, \tag{1.9}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}v_k. \tag{1.10}$$

Припустимо, що для довільного k

$$u_k \le v_k \;. \tag{1.11}$$

Тоді зі збіжності ряду (1.10) випливає збіжність ряду (1.9), а з розбіжності ряду (1.9) – розбіжність ряду (1.10).

Друга теорема порівняння. Якщо існує

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_k}{v_k} = A \ne 0,\infty, \tag{1.12}$$

то ряди (1.9) та (1.10) одночасно збігаються або розбігаються.

Приклад 1.4. Розглянемо узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}, \quad 0<\alpha<1. \tag{1.13}$$

Оскільки $\dfrac{1}{k^{\alpha}} > \dfrac{1}{k}$, $k \in \{2,3,...\}$, а гармонічний ряд (1.8) розбіжний, то за першою теоремою порівняння ряд (1.13) розбіжний.

Приклад 1.5. Дослідимо на збіжність ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^2+100k+50}}\,. \tag{1.14}$$

Порівняємо його з рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$. Оскільки

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\sqrt{k^2+100k+50}} = 1, \tag{1.15}$$

то ряд (1.14) розбігається на підставі другої теореми порівняння і того, що гармонічний ряд розбіжний.

Наведемо також декілька ознак збіжності та розбіжності рядів з додатними членами, які найширше використовуються на практиці.

Ознака Даламбера. Якщо існує границя

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\ell\ , \tag{1.16}$$

то: 1) при ℓ<1 ряд (1.1) збігається; 2) при ℓ>1 ряд (1.1) розбігається; 3) при ℓ=1 ознака не дає відповіді на поставлене питання.

Приклад 1.6. Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k!}\ . \tag{1.17}$$

Для нього

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{3^{k+1}k!}{3^k(k+1)!}=\lim_{k\to\infty}\frac{3}{k+1}=0<1.$$

Отже, за ознакою Даламбера ряд (1.17) збіжний.

Ознака Коші. Якщо існує границя

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{u_k}=L\ , \tag{1.18}$$

то: 1) при L<1 ряд (1.1) збігається; 2) при L>1 ряд (1.1) розбігається; 3) при L=1 ознака не дає відповіді на поставлене питання.

Приклад 1.7. Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{3k+1}\right)^k. \tag{1.19}$$

Для нього

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{u_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{3k+1}=\frac{1}{3}<1.$$

Отже, за ознакою Коші ряд (1.19) збіжний.

Інтегральна ознака збіжності та розбіжності. Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k \tag{1.20}$$

та інтеграл

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx. \tag{1.21}$$

Якщо виконано умови:

1) $f(x)$ неперервна, додатна та монотонно спадна функція;

2) $f(n)=u_n$,

то ряд (1.20) та інтеграл (1.21) одночасно збігаються або розбігаються.

<u>Приклад 1.8.</u> Розглянемо узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \tag{1.22}$$

при будь-якому α. Вже доведено, що при $\alpha \le 1$ ряд розбіжний. Функція $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ задовольняє умови 1) і 2). Невласний інтеграл (при $\alpha \ne 1$)

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{A\to\infty} \int_{1}^{A} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{A\to\infty} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}(\alpha-1)} \right)_{1}^{A} \tag{1.23}$$

розбігається при $\alpha \le 1$ і збігається при $\alpha > 1$.

<u>Відповідь.</u> Узагальнений гармонічний ряд (1.22) збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \le 1$.

Приклади для самостійного розв'язування

Дослідити збіжність наступних рядів.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^k}$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sin\frac{\pi}{3^k}$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(5k-4)(6k-5)}$

5. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty}k^3 arctg^k\,\frac{\pi}{3k}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(\frac{k^2+2}{k^2+1}\right)$

8. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)^3}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k k!}{k^k}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k^2+3}{k^2+1}\right)^{k^2+1}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(5k+3)!}{9^k k^2}$

13. $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{k^2+6}{k^2+5}$

14. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}arctg\,\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}$

15. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+4)\ln^2(2k+2)}$

16. $\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k}\left(\frac{2k}{4k-3}\right)^{2k}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k!}{\sqrt{2^k+5}}$

18. $\sum_{k=1}^{\infty}k^4\left(\frac{2k}{5k+7}\right)^{k}$

19. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\left(\frac{k+2}{4k}\right)^{k^2}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot 6^{k+2}}{7^k}$

21. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}\sqrt{n^2+6}}{(k-1)!}$

22. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin\frac{1}{k}$

23. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\sqrt[3]{(k^2+3)^5}}$

24. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^5 5^k}{(3k+1)^k}$

25. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2(3k+1)}$

26. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n+1}{k!}\sin\frac{2}{3^k}$

27. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k(k^2+1)}{k!}$

28. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot tg\,\frac{1}{\sqrt{k}}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty}k^2\sin^k\frac{\pi}{2k}$

30. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k!\cdot 5^k}{(2k)!}$

1.3 Числові ряди з членами будь-якого знака. Абсолютна та умовна збіжність. Узагальнена ознака Даламбера

Розглядатимемо ряди, які мають нескінченну кількість додатних та нескінченну кількість від'ємних членів:

$$u_1+u_2+\ldots+u_k+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}u_k. \tag{1.24}$$

Разом із рядом (1.24) будемо розглядати ряд

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_k|+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|. \tag{1.25}$$

Якщо збігається ряд (1.25), то збігається і ряд (1.24). В цьому випадку кажуть, що ряд (1.24) збігається абсолютно. Якщо ряд (1.24) збігається, а ряд (1.25) розбігається, кажуть, що ряд (1.24) збігається умовно.

Для вивчення збіжності ряду (1.24) з членами будь-якого знака можна використовувати узагальнену ознаку Даламбера. Якщо існує границя

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|=\ell, \tag{1.26}$$

то: 1) при $\ell<1$ ряд (1.24) збігається абсолютно; 2) при $\ell>1$ ряд (1.24) розбігається; 3) при $\ell=1$ ознака не дає відповіді на поставлене питання.

Приклад 1.9. Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{5k+1}{3}\pi}{3^k}\ . \tag{1.27}$$

Порівняємо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|\cos\frac{5k+1}{3}\pi\right|}{3^k} \tag{1.28}$$

з рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}. \tag{1.29}$$

Оскільки члени ряду (1.29) не менше членів ряду (1.28), а ряд (1.29) збіжний, то за першою теоремою порівняння ряд (4.27) абсолютно збіжний.

На істотну відмінність між абсолютною та умовною збіжностями рядів указують наступні властивості таких рядів.

1. Якщо ряд збігається абсолютно, то він залишається абсолютно збіжним при будь-якій перестановці членів ряду. При цьому сума ряду не залежить від порядку його членів.

2. Якщо ряд збігається умовно, можна таким чином переставити члени цього ряду, що сума отриманого ряду буде дорівнювати будь-якому наперед заданому числу A. В частинному випадку, можна так переставити члени ряду, що ряд, отриманий після перестановки, буде розбігатися.

1.4 Знакопочережні ряди. Теорема Лейбніца

Знакопочередним рядом будемо називати ряд

$$u_1 - u_2 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n , \tag{1.30}$$

де $u_n > 0$.

<u>Теорема Лейбніца (про знакопочережні ряди).</u> Якщо виконуються умови

1) $u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$,

то, по-перше, ряд (1.30) збігається; по-друге, сума цього ряду S не перевищує u_1.

Приклад 1.10. Розглянемо знакопочережний гармонічний ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}. \qquad (1.31)$$

Для нього виконано умови теореми Лейбніца, тому ряд (1.31) збігається (але не абсолютно, оскільки ряд з модулів – гармонічний). Залишок цього ряду має вигляд

$$r_n=(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots\right). \qquad (1.32)$$

Тому за теоремою Лейбніца

$$|r_n|<\frac{1}{n+1}, \qquad (1.33)$$

(для довільного знакопочережного ряду, що задовольняє умови теореми Лейбніца) для залишку цього ряду справджується оцінка

$$|r_n|\le|u_{n+1}|, \qquad (1.34)$$

Отже, якщо наближено за суму ряду (4.31) взяти його частинну суму

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \qquad (1.35)$$

то похибка не буде перевищувати $\frac{1}{n+1}$.

Приклади для самостійного розв’язування

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність знакозмінні ряди.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{(2n+1)^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{6n-5}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n\ln^3 n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\alpha n)}{n^4}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} tg \frac{1}{\sqrt{n}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(4n)}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n tg \frac{1}{n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{6n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \sqrt[4]{2n+5}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(2n)}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)4^{2n}}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{n(n+1)}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+2)}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5n}{7n+8}\right)^n$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{n^4-2n^2+2}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)7^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n-4}{4n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+5)}{\ln(n+3)}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{\sqrt{n^3}}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^{2n-1}}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 4^n}{4^n}$

2 ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

2.1 Функціональні ряди. Область збіжності. Типи збіжності

Розглянемо послідовність функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$,…, $f_n(x)$,… зі спільною областю визначення U.

Вираз вигляду

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \tag{2.1}$$

називається функціональним рядом.

При кожному фіксованому x ряд (2.1) перетворюється в числовий, поняття збіжності та розбіжності якого введено раніше.

<u>Означення 1.</u> Множина точок x, для яких збігається ряд (2.1), називається областю збіжності V цього функціонального ряду.

При вивченні функціональних рядів важливим є поняття правильно збіжного ряду.

<u>Означення 2.</u> Ряд (2.1) правильно збігається в області V, якщо для нього існує збіжна числова мажоранта, тобто існує числовий ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ з додатними членами такий, що

$$|f_k(x)| \le a_k, \quad \forall k, \quad \forall x \in V. \tag{2.2}$$

Для довільного x із області збіжності функціонального ряду

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f(x). \tag{2.3}$$

Якщо ряд (2.1) збігається правильно на сегменті $[a,b]$,то з того, що члени ряду є неперервні на $[a,b]$ функції, випливає, що й сума ряду $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$ функція і що

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)dx, \qquad (2.4)$$

тобто ряд (2.1) можна почленно інтегрувати (так само, як і для скінченних сум).

Якщо члени ряду (2.1) – диференційовні на $[a,b]$ функції, ряд (2.1) збігається на $[a,b]$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ правильно збігається на $[a,b]$ і похідні $f_k'(x)$, $k \in \{1,2,...\}$, є неперервними на $[a,b]$, то сума ряду $f(x)$ - диференційовна функція і

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x). \qquad (2.5)$$

2.2 Степеневі ряди. Теорема Абеля та наслідки з неї. Знаходження радіуса та області збіжності степеневого ряду

На практиці дуже важливим є частинний випадок функціонального ряду $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, в якому $f_k(x) = a_k(x-c)^k$, $k \in \{1,2,...\}$. Такий ряд називається степеневим. Якщо ввести нову змінну $\alpha = x - c$, то отримаємо степеневий ряд , в якому $c = 0$.

Отже, розглянемо степеневий ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_kx^k. \qquad (2.6)$$

Основою теорії степеневих рядів є

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (2.6) збігається при деякому x_0 ($x_0 \neq 0$), то він абсолютно збігається для всіх x, для яких $|x|<|x_0|$ (рис.2.1).

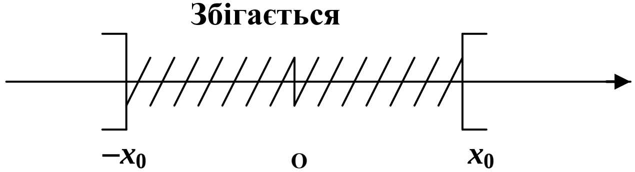


Рис.2.1

З теореми Абеля безпосередньо випливають такі наслідки.

1. Якщо степеневий ряд (2.6) розбігається при деякому x_1, то він розбігається при всіх x, для яких $|x|>|x_1|$ (рис.2.2).

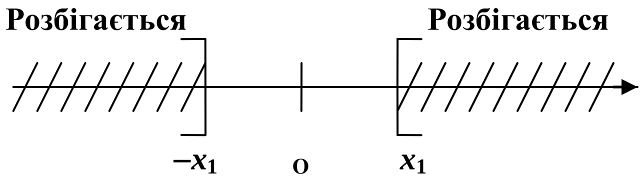


Рис.2.2

2. Для кожного степеневого ряду (2.6) існує число $R \geq 0$ таке, що для всіх $x \in (-R, R)$ ряд збігається, а для всіх $x \notin (-R, R)$ – розбігається (рис.2.3).

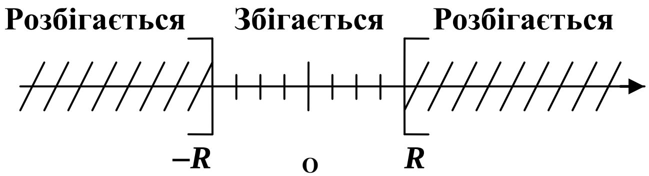


Рис.2.3

Число R називається радіусом збіжності степеневого ряду (2.6).

Для знаходження області збіжності степеневого ряду (2.6) необхідно:

1) знайти радіус R збіжності ряду (2.6);

2) дослідити збіжність числових рядів

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k (-R)^k ;$$

3) зробити висновок про область збіжності степеневого ряду.

Якщо виявиться, що

$$\exists \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \ell_1 , \tag{2.7}$$

то $R = \dfrac{1}{\ell_1}$. Якщо

$$\exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell_2 , \tag{2.8}$$

то $R = \dfrac{1}{\ell_2}$.

Наведемо серію прикладів на знаходження області збіжності степеневих рядів.

<u>Приклад 2.1.</u>

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k \tag{2.9}$$

Ряд (2.9) – сума членів геометричної прогресії. Областю збіжності є інтервал]–1, 1[.

<u>Приклад 2.2.</u>

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \tag{2.10}$$

<u>Розв'язання.</u> Згідно з формулою (2.7) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k+1}{k} = 1 = \ell_1$.

Отже, $R = 1$. Розглянемо ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{k}$. Перший ряд – гармонічний, він розбігається; другий – збіжний (за теоремою Лейбніца) знакочережний ряд.

Висновок. Область збіжності ряду (2.10) – напівінтервал $[-1, 1)$.

Приклад 2.3.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} \tag{2.11}$$

Розв’язання. $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1 = \ell_1$. Ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ – збіжні.

Висновок. Область збіжності ряду (2.11) – відрізок $[-1, 1]$.

Приклад 2.4.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k \tag{2.12}$$

Розв’язання. $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^k} = \lim\limits_{k\to\infty} k = \infty = \ell_2$.

Висновок. Область збіжності ряду (2.12) – $\{0\}$(одна точка x=0).

Приклад 2.5.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{2.13}$$

Розв’язання. Знайдемо

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0 = \ell_1.$$

Висновок. Степеневий ряд збігається на всій числовій осі.

Властивості збіжних степеневих рядів

1. Ряд (2.6) з радіусом збіжності R правильно збігається на будь-якому відрізку $[-R_1, R_1]$, де R_1 – довільне додатне число, менше ніж R.
2. Ряд, одержаний почленним диференціюванням ряду (2.6) з радіусом збіжності R, правильно збігається на $[-R_1, R_1]$, де R_1 – довільне число з інтервалу $(0, R)$.
3. Сума $f(x)$ степеневого ряду (2.6) − нескінченно диференційовна функція на $(-R, R)$ і диференціювання можна проводити почленно.
4. $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, тобто будь-який степеневий ряд можна зобразити у вигляді.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad . \qquad (2.14)$$

Ряд, який знаходиться справа, називається рядом Маклорена функції $f(x)$, тобто кожний степеневий ряд (2.14) є ряд Маклорена своєї суми.

Приклади для самостійного розв'язування

Знайти інтервал збіжності степеневого ряду та дослідити збіжність на кінцях інтервалу.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{n2^n}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(x-5)^n$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n} x^{2n}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{5^n}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n!}{2n^2} (x-2)^n$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n \ln n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3+1)(x+2)^n}{3^n}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n(3n+4)}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1)4^n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+2)x^{2n}}{(n+2)^5}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+4)2^n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-4)^2}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} (x+5)^n tg\, \frac{1}{5^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-3)^n \sin \frac{\sqrt{n}}{n^2+2}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n \cdot 7^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{(n+1) \cdot 7^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{(n+1)^2 \cdot 5^n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2)\ln(n+2)}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+3)^2 \cdot 3^n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)^3 \cdot 3^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}(x+3)^n}{5^n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x+1)^{2n}}{(n+1)^2}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+4)(x+2)^n}{(2n+1)^3 \cdot 5^n}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+2)(x+4)^n}{6^n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(3n+1) \cdot 4^n}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (x-3)^n}{(n+4)^2}$

2.3 Ряди Тейлора та Маклорена. Теореми про розклад

У попередньому підрозділі ми брали за основу степеневий ряд і вивчали властивості його суми. Тепер основою буде деяка функція, а задача полягає в тому, щоб представити цю функцію степеневим рядом.

Суттєвою буде, в даному випадку, вимога існування у функції $f(x)$ всіх її похідних в околі деякої точки x_0.

Запишемо формулу Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x). \quad (2.15)$$

Тут

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c), \quad (2.16)$$

де c – деяка точка інтервалу $(-x_0, x)$ (при $x_0<x$), називається залишковим членом формули Тейлора (2.15).

Якщо

$$\exists \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0,$$

то з формули (2.15) безпосередньо випливає, що

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \quad (2.17)$$

Ряд (2.17) називається рядом Тейлора, його частинний випадок при $x_0=0$ – рядом Маклорена.

Умову $\exists \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ безпосередньо важко перевірити. Наведемо просту достатню умову розкладу нескінченно диференційовної функції $f(x)$ в ряд Тейлора: якщо існує константа $M>0$ така, що для довільних $k\in\{1,2,\ldots\}$ і $x\in\left(x_0-R_0, x_0+R_0\right)$

$$\left| f^{(k)}(x) \right| \le M, \qquad (2.18)$$

то $f(x)$ можна подати у вигляді ряду Тейлора в інтервалі $\left(x_0 - R_0, x_0 + R_0\right)$.

У частинному випадку, якщо (2.18) справджується для будь-якого x, то й розклад (2.17) правильний для всіх x.

2.4 Розклад функцій e^x, sin$x$, cos$x$, ln(x+1), (1+x)^m, arctg$x$ в ряд Маклорена

Перейдемо до розкладу елементарних функцій у степеневі ряди. Такі розклади часто зустрічаються при розв'язуванні технічних задач.

1. Розкладемо функцію e^x в ряд Маклорена (e^x має всі похідні при всіх дійсних значеннях x). Нехай $|x| \le M$, де M – деяке фіксоване довільне число. Оцінимо

$$\left| R_n(x) \right| = \left| \frac{1}{(n+1)!} e^c x^{n+1} \right| \le e^M \, \frac{|\,x\,|^{n+1}}{(n+1)!},$$

а $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\,x\,|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, оскільки $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ – загальний член збіжного на всій осі степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ (див. приклад 2.5).

Отже, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для $|x| \le M$. Оскільки M довільне, то функція e^x розкладається в ряд Маклорена на всій числовій осі. Отримаємо цей розклад.

Оскільки $(e^x)^{(k)} = e^x$, $(e^x)^{(k)}\,|_{x=0} = 1$, то

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \; . \qquad (2.19)$$

2. Зобразимо рядом Маклорена функцію $y = \sin x$, яка має всі похідні та $\left|(\sin x)^{(k)}\right| \le 1$ для всіх x, тобто умова (2.18) виконана з M=1.

Отже, функцію $y = \sin x$ можна для всіх x розкласти в ряд Маклорена. Знайдемо цей розклад.

Через те, що

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)^{(k)} = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin x\,|_{x=0} = 0, \quad (\sin x)'\,|_{x=0} = 1, \quad (\sin x)''\,|_{x=0} = 0, \; \ldots$$

$$(\sin x)^{(2k+1)}\,|_{x=0} = 1, \quad (\sin x)^{(2k)}\,|_{x=0} = 0,$$

то

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\;. \qquad (2.20)$$

3. Розкладемо в ряд Маклорена функцію $y = \cos x$. Скористаємося властивістю 3 степеневого ряду. Почленно диференціюючи ряд (2.20), отримаємо

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\;. \qquad (2.21)$$

4. Зобразимо функцію $y = \ln(x+1)$ рядом Маклорена.

Скористаємося тим, що

$$\ln(x+1)=\int_0^x \frac{dz}{z+1} \qquad (2.22)$$

і зображенням суми геометричної прогресії

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k, \qquad (2.23)$$

правильним при $|x|<1$.

На основі властивості 1 степеневий ряд (2.23) можна почленно інтегрувати. Це приведе до рівності

$$\ln(x+1)=\int_0^x \frac{dz}{z+1}=\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k dz=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x z^k dz=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ . \qquad (2.24)$$

5. Розглянемо біном $y=(x+1)^m$, де m – довільне дійсне число, а $|x|<1$. Запишемо для функції y формулу Тейлора. Оскільки

$$y^{(k)}(x)=\left[(1+x)^m\right]^{(k)}=m(m-1)\ldots(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$

$$y^{(k)}(0)=m(m-1)\ldots(m-k+1), \qquad (2.25)$$

то

$$y(x)=(1+x)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k+R_n(x).$$

Можна довести, що при $|x|<1$

$$\exists \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0. \qquad (2.26)$$

У результаті прийдемо до так званого біноміального ряду

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k+\ldots=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)x^k}{k!}. \qquad (2.27)$$

Розклад (2.27) правильний при $|x|<1$.

6. Розкладемо в ряд Маклорена функцію $y=\operatorname{arctg} x$. Проведемо такі обчислення:

$$arctgx=\int_0^x \frac{dz}{z^2+1}=\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}dz=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^x z^{2k}dz=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{4}+\dots \quad (2.28)$$

2.5 Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Степеневі ряди широко застосовуються до обчислення числових значень важливих трансцендентних функцій та складання таблиць їх значень, числового інтегрування, числового розв'язування диференціальних рівнянь та в багатьох фізичних та технічних задачах.

Приклад 2.6. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ з точністю до 0,01.

Розв'язання. Оскільки

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}+\frac{x^8}{2^4\cdot 4!}-\dots, \text{ то}$$

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_0^1 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}+\dots dx=\left[x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2^2\cdot 2!\cdot 5}-\right.$$

$$\left.-\frac{x^7}{2^3\cdot 3!\cdot 7}+\dots\right]\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2^2\cdot 2!\cdot 5}-\frac{1}{2^3\cdot 3!\cdot 7}+\dots \quad (2.29)$$

Неважко впевнитися, що $\frac{1}{2^3 \cdot 3! \cdot 7} < 0{,}01$. Отже, якщо в розкладі (2.29) взяти перші три члени, похибка не буде більше ніж 0,01 (це випливає з теореми Лейбніца).

<u>Відповідь.</u> $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} \approx 0{,}86.$

<u>Приклад 2.7.</u> Обчислити $\sin 1^\circ$ з точністю до 0,0001.

<u>Розв'язання.</u>

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - 7\ldots,$$

$$\sin\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} - \frac{\pi^3}{180^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{180^5 \cdot 5!} - \ldots\ .$$

Оскільки $\frac{\pi^3}{180^3 \cdot 3!} < 0{,}0001,$

то $\sin 1^\circ = \sin\frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175.$

<u>Приклад 2.8.</u> Обчислити $\sqrt[3]{70}$ з точністю до 0,001.

<u>Розв'язання.</u> $\sqrt[3]{70} = \sqrt[3]{64+6} = 4 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{3}{32}}$. Скористаємось біноміальним рядом (2.27) з $m = \frac{1}{3},\ \ x = \frac{3}{32}$.

Тоді

$$4 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{3}{32}} = 4\left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{32} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{3^2}{32^2 \cdot 2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \frac{3^3}{32^3 \cdot 3!} + \ldots\right].$$

Оскільки $4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{3^3}{32^3\cdot 3!}<0{,}001$, то

$$\sqrt[3]{70}\approx 4\cdot\left[1+\frac{1}{32}-\frac{1}{32^2}\right]\approx 4{,}121.$$

<u>Приклад 2.9.</u> Обчислити $\ln 3$ з точністю до 0,0001.

<u>Розв'язання.</u> Скористаємось розкладом (2.24) (при $|x|<1$):

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ , \tag{2.30}$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots. \tag{2.31}$$

З (2.30), (2.31) випливає, що

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\cdot\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right). \tag{2.32}$$

Покладемо $x=\frac{1}{2n+1}$, тоді $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$.

З (2.32) отримаємо

$$\ln(n+1)=\ln n+2\cdot\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3\cdot(2n+1)^3}+\frac{1}{5\cdot(2n+1)^5}+\ldots\right). \tag{2.33}$$

Покладемо в формулі (2.33) n=1, тоді

$$\ln 2=2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\ldots\right). \tag{2.34}$$

Потім в (2.33) покладемо n=2.

<u>Відповідь.</u> $\ln 3=\ln 2+2\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\ldots\right)\approx 1{,}0986.$

<u>Приклад 2.10.</u> Знайти розв'язки рівняння $y'=y$ за початкової умови $y(0)=1$.

<u>Розв'язання.</u> Будемо шукати розв'язок у вигляді

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots,\quad \text{де}\quad c_0=y(0)=1.$$

Тоді

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + ... + nc_nx^{n-1} + ... \ .$$

Підставимо y та y' в рівняння:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + ... \ .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо разом з початковою умовою систему рівнянь, з якої послідовно визначаємо коефіцієнти c_n:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & c_1 = c_0, \ c_0 = c_1 = 1; \\ x^1 & 2c_2 = c_1, \ c_2 = \dfrac{1}{1 \cdot 2}; \\ x^2 & 3c_3 = c_2, \ c_3 = \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \\ ... & .... \end{array}$$

Таким чином,

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = e^x.$$

У цьому прикладі розв'язок має вигляд степеневого ряду, який зображає e^x. У більшості випадків розв'язок буде мати вигляд степеневого ряду, сума якого не є елементарною функцією.

Приклад 2.11. Знайти розклад в степеневий ряд розв'язку рівняння $y'' = xy' - y + e^x$ при початкових умовах $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (зберегти три перших члени розкладу, відмінних від нуля).

Розв'язання. Другий метод визначення коефіцієнтів розкладу розв'язку даного диференціального рівняння полягає в послідовному диференціюванні цього рівняння і визначенні на основі цього коефіцієнтів ряду.

Оскільки розклад шуканого розв'язку в ряд Тейлора-Маклорена для випадку x=0 повинен мати вигляд

$$y = y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + ...,$$

то, послідовно диференціюючи цей вираз та враховуючи початкові умови, отримаємо

$$\begin{array}{ll} \ldots & y(0)=1, \\ \ldots & y'(0)=0, \\ y''=xy'-y+e^x, & y''(0)=0, \\ y'''=xy''+e^x, & y'''(0)=1, \\ y^{(4)}=y''+xy'''+e^x, & y^{(4)}(0)=1, \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

Звідси

$$y=1+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\ldots \quad .$$

Приклади для самостійного розв’язування

а) Обчислити інтеграли з точністю 0,001.

1. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x}{x}dx$

2. $\int\limits_{0}^{0,2} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

3. $\int\limits_{0}^{0,3} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx$

4. $\int\limits_{0}^{0,4} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}dx$

5. $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{1-e^{-2x}}{x}dx$

6. $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{arctgx}{x}dx$

7. $\int\limits_{0}^{2,3} \frac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}dx$

8. $\int\limits_{0}^{0,5} \sqrt{1+x^3}dx$

9. $\int\limits_{0}^{1,2} \sqrt{x}\cos xdx$

10. $\int\limits_{0}^{0,2} \sqrt[3]{x}\sin xdx$

11. $\int_0^{1,4} \frac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}}dx$

12. $\int_0^{0,5} \frac{1-e^{-x}}{x^2}dx$

13. $\int_0^{0,5} \frac{\ln(1+0,5x)}{x}dx$

14. $\int_0^{0,4} x\ln(1+x^2)dx$

15. $\int_0^{0,5} \cos\sqrt[3]{x}dx$

16. $\int_0^{0,6} \ln(1+\sqrt{x})dx$

17. $\int_0^{0,3} \ln(1+x^2)dx$

18. $\int_0^{0,4} \sqrt[4]{1+x^4}dx$

19. $\int_0^{0,3} \sqrt{x}e^{2x}dx$

20. $\int_0^{0,3} \frac{\ln(1+2x)}{x}dx$

21. $\int_0^{1,2} \frac{\cos\sqrt{x}}{x}dx$

22. $\int_0^{1,5} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$

23. $\int_0^{0,6} \sqrt[3]{1+x^4}dx$

24. $\int_0^{0,3} \sqrt[3]{27+x^3}dx$

25. $\int_0^{1,5} x\cos\sqrt{x}dx$

26. $\int_0^{1,2} \cos x^2dx$

27. $\int_0^{0,2} \sin x^2dx$

28. $\int_0^{1,3} \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}}dx$

29. $\int_0^{1,1} \frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx$

30. $\int_0^{0,6} arctgx^2dx$

б) Знайти три перших відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв’язку диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови.

1. $y' = y^2 - x, \quad y(0) = 1$
2. $y' = y + xe^x, \quad y(0) = 0$
3. $y' = \cos y + 2x, \; y(0) = 0$
4. $y' = y^3 + x^2, \quad y(0) = 1$
5. $y' = x + \dfrac{1}{y}, \quad y(0) = 1$
6. $y' = y^2 + x^3, \quad y(0) = 0{,}5$
7. $y' = x^2 y^2 - 1, \quad y(0) = 1$
8. $y' = xy + e^y, \quad y(0) = 0$
9. $y' = y^2 + x^2, \quad y(0) = 1$
10. $y' = x + e^{\cos y}, \quad y(0) = 0$
11. $y'' = xy' - 3y + 2,$ $y(0) = y'(0) = 0$
12. $y'' = yy' - 3x^2,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
13. $y' = 3y^2 + 5x - x^2,$ $y(0) = 1$
14. $y'' = -xy' + x^2 y,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
15. $y' = 3xy^2 + 2\sin x,$ $y(0) = 0$
16. $y'' = 1 + ye^{5x},$ $y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$
17. $y'' = -y' + x^2 y^2,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$
18. $y' = 3y + \dfrac{x^2}{2y}, \quad y(0) = 1$
19. $y'' = 2ye^{4x} - 1,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
20. $y'' = 2yy' + x^3 - x,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
21. $y' = -y^2 + 3x^2 e^{2x}, \quad y(0) = 1$
22. $y'' = y^2 x + 5x + 1,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
23. $y' = 6y^3 + 3x^2 y, \quad y(0) = 1$
24. $y'' = \dfrac{y}{2x} + y^2 + 1,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
25. $y'' = 4x + y' + 5ye^{3x},$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
26. $y'' = 2ye^{4x} + x^3 + 1,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
27. $y' = -3xy + y^4 + 1, \quad y(0) = 1$
28. $y' = 5x^2 y^2 + 3x^3, \quad y(0) = 1$
29. $y' = 2\sin x - 2y^2 - 1,$ $y(0) = 0$
30. $y' = -4y + e^{2xy} + x,$ $y(0) = 0$

3 РЯДИ ФУР'Є

3.1 Періодичні процеси та періодичні функції

Багато процесів у природі та техніці мають властивість повторюватись через певні проміжки часу. Такі процеси називають періодичними. Прикладами можуть бути рухи поршня в механізмах, явища, пов'язані з розповсюдженням електромагнітних хвиль, та багато інших. Математично періодичні процеси зображуються періодичними функціями.

Функцію $y=f(x)$ називають періодичною, якщо існує таке число $T\neq 0$, що $f(x+T)= f(x)$ в області визначення функції.

З означення випливає, що якщо T період функції, її періодом буде також nT, де n довільне ціле число. За період функції вважають найменше додатне число, яке задовольняє умову $f(x+T)= f(x)$.

Відзначимо такі властивості періодичних функцій:

1) сума, різниця, добуток та частка періодичних функцій періоду T є періодичною функцією періоду T;
2) якщо функція $y=f(x)$ має період T, то функція $y=f(ax)$, де a = const $\neq 0$, має період T/a;
3) якщо $f(x)$ – періодична функція періоду T, то інтеграли від цієї функції (якщо вони існують), узяті по будь-якому проміжку довжини T рівні між собою, тобто для будь-яких a та b справджується рівність

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx \tag{3.1}$$

Найпростіші періодичні функції – це тригонометричні функції $\cos x$ та $\sin x$. Період цих функції дорівнює 2π. Функції $\sin\omega x$ та $\cos\omega x$ також є періодичними, але період їх $T = 2\pi/\omega$. Сума двох періодичних функцій (наприклад, функція вигляду $f(x) = a\sin\omega_1 x + b\cos\omega_2 x)$ періодичною вже, взагалі кажучи, не буде. Але, наприклад, якщо відношення $\omega_1 : \omega_2$ – число раціональне, то сума $f(x)$ є періодичною функцією.

Найпростіший періодичний процес – гармонійне коливання – описується періодичними функціями $\sin\omega x$ та $\cos\omega x$. Більш складні періодичні процеси описуються функціями складеними або зі скінченного, або з нескінченного числа доданків вигляду $\sin\omega x$ та $\cos\omega x$.

3.2 Ряд Фур'є. Розклад періодичної функції з періодом T=2π в тригонометричний ряд

Функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ...$$

$$... + a_n \cos nx + b_n \sin nx + ... = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (3.2)$$

називається тригонометричним; числа a_0, a_n, b_n, $n \in \{1,2,...\}$, – коефіцієнтами тригонометричного ряду. Вільний член ряду записано у вигляді $\frac{a_0}{2}$ для зручності.

Оскільки члени тригонометричного ряду мають спільний період T=2π, то і сума ряду (якщо він збігається) також є періодичною функцією з періодом 2π. Можна довести, що якщо періодична функція $f(x)$ з періодом 2π – сума правильно збіжного на відрізку $[-\pi, \pi]$ тригонометричного ряду, тобто

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (3.3)$$

то коефіцієнти цього ряду

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx. \qquad (3.4)$$

Коефіцієнти ряду, що визначаються за даними формулами, називаються коефіцієнтами Фур'є цієї функції, а тригонометричний ряд (3.2) з такими коефіцієнтами – рядом Фур'є, що відповідає функції $f(x)$.

3.3 Достатні умови розкладу функції в ряд Фур'є

Функцію $y=f(x)$ назвемо кусково-монотонною на відрізку $[a, b]$, якщо цей відрізок можна розділити на скінченну кількість відрізків, всередині кожного з яких функція або лише зростає, або лише спадає, або стала.

Функцію $f(x)$ назвемо такою, що задовольняє умови Діріхле на відрізку $[a, b]$, якщо:

1) функція неперервна на відрізку $[a, b]$ або має на ньому скінченну кількість розривів І-го роду;

2) функція кусково-монотонна на відрізку $[a, b]$.

<u>Теорема Діріхле</u> (про достатні умови розкладу функції в ряд Фур'є). Нехай періодична функція $f(x)$ з періодом 2π задовольняє на будь-якому відрізку умови Діріхле. Тоді ряд Фур'є, що відповідає цій функції, збігається у всіх точках числової осі. При цьому в кожній точці неперервності функції $f(x)$ сума ряду $S(x)$ дорівнює значенню функції в цій точці. У кожній точці x_0 розриву функції сума ряду дорівнює середньому арифметичному граничних значень функції при $x \to x_0$ зліва та справа, тобто

$$S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)).$$

Якщо для деякої періодичної функції $f(x)$ умова Діріхле виконується, то можна записати

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (3.5)$$

причому в точках неперервності функції $f(x)$ маємо просто $f(x)$.

3.4 Ряди Фур'є для парних та непарних функцій з періодом 2π

Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[-\pi, \pi]$ і є парною або непарною, тобто для неї виконуються відповідно умови $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$.

Відома така властивість визначених інтегралів:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x) - \text{парна}; \\ 0, & f(x) - \text{непарна}. \end{cases} \qquad (3.6)$$

Зауважимо, що добуток двох парних або двох непарних функцій є функція парна, а добуток парної на непарну – непарна. Формули (3.4) для обчислення коефіцієнтів Фур'є можуть бути спрощені для парних та непарних функцій.

Нехай $f(x)$ – парна й періодична з періодом 2π функція, що задовольняє умови розкладу в ряд Фур'є. Тоді, використовуючи властивість (3.6) інтегралів, отримуємо

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n \in \{0,1,2,...\};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0, \quad n \in \{1,2,...\}. \qquad (3.7)$$

Отже, ряд Фур'є для парної функції складається лише з парних функцій – косинусів і має вигляд

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \qquad (3.8)$$

Якщо $f(x)$ – непарна й періодична з періодом 2π функція, що задовольняє умови Діріхле, отримаємо

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0, \quad n \in \{0,1,2,...\};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n \in \{1,2,...\}. \qquad (3.9)$$

Отже, ряд Фур'є для непарної функції складається лише з непарних функцій – синусів і має вигляд

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \qquad (3.10)$$

Приклад 3.1. Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0; \\ 3, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

що задовольняє умову $f(x+2\pi) = f(x)$ для будь-якого x (рис. 3.1).

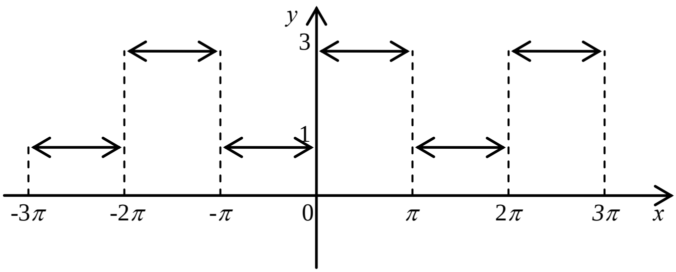


Рис. 3.1

Розв’язання. Функція $f(x)$ задовольняє умови розкладу в ряд Фур’є, тому можна записати

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Обчислюємо коефіцієнти Фур’є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}dx+3\int_{0}^{\pi}dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(x\Big|_{-\pi}^{0}+3x\Big|_{0}^{\pi}\right)=4;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx+3\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}+3\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right)=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx+3\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-3\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{n\pi}(-1+\cos n\pi-3\cos n\pi+3)=$$

$$=\frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)=\begin{cases}0, & n\text{ - парне};\\ \dfrac{4}{n\pi}, & n\text{ - непарне}.\end{cases}$$

Отже, в кожній точці неперервності функції маємо

$$f(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\text{-}1)x}{2n-1}\ .$$

У точках розриву функції ряд збігається до значення 2 – середнього арифметичного граничних значень функції справа та зліва.

Приклад 3.2. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію періоду 2π, що задається на інтервалі $(-\pi, \pi)$ формулою $f(x)=|x|$ (рис.3.2).

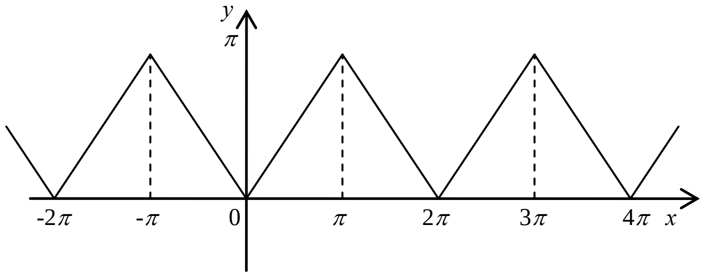


Рис.3.2

Розв'язання. Функція $f(x)$ задовольняє умови розкладу в ряд Фур'є і є парною, тому можна записати

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.$$

Обчислюємо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}=\pi;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos nx}{n^2}\bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n\pi}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & n \text{ - парне};\\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, & n \text{ - непарне}.\end{cases}$$

Отже,

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\ .$$

Ряд збігається на всій числовій осі і має своєю сумою функцію $|x|$.

Приклад 3.3. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію періоду 2π, що задається на інтервалі $(-\pi, \pi)$ таким чином:

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x < 0; \\ 2, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Графік функції зображено на рис. 3.3.

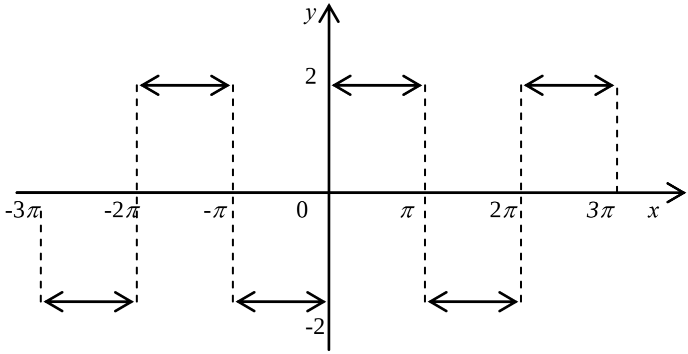


Рис.3.3

Розв'язання. Функція $f(x)$ задовольняє умови розкладу в ряд Фур'є та є непарною, тому коефіцієнти Фур'є визначаються за формулами (3.9):

$$a_n = 0, \quad n \in \{0,1,2,...\};$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx = -\frac{4}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{4}{n\pi}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ - парне}; \\ \dfrac{8}{n\pi}, & n \text{ - непарне}. \end{cases}$$

У кожній точці неперервності функції маємо

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\text{-}1)x}{2n-1} \quad ,$$

а в точках розриву функції ряд збігається до значення 0 – середнього арифметичного граничних значень функції справа та зліва.

3.5 Розклад в ряд Фур'є функції з періодом 2ℓ

Часто треба розкласти в тригонометричний ряд функції, період яких відмінний від 2π. Якщо періодична функція $f(x)$ періоду 2ℓ задовольняє умови теореми Діріхле, то в точках неперервності функції має місце розклад

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right), \qquad (3.11)$$

де

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \qquad b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \qquad (3.12)$$

У точках розриву функції ряд збігається до середнього арифметичного граничних значень функції справа та зліва. Покладаючи в формулах (3.11), (3.12) $\ell=\pi$, отримаємо формули (3.3), (3.4).

Зокрема, якщо функція $f(x)$ парна, то

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}, \qquad (3.13)$$

$$a_0=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}f(x)dx; \quad a_n=\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \qquad (3.14)$$

а якщо ж $f(x)$ непарна, то

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}, \qquad (3.15)$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{0}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \qquad (3.16)$$

Приклад 3.4. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-2, 2)$ виразом

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2<x\le 0;\\ \frac{1}{2}x, & 0<x<2,\end{cases}$$

і таку, що має період $2\ell=4$ (рис.3.4).

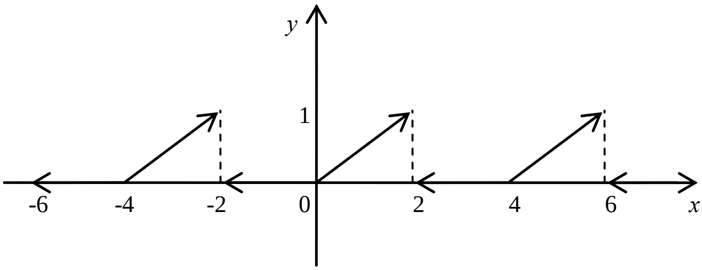


Рис.3.4

Розв'язання. Функція $f(x)$ задовольняє умови розкладу в ряд Фур'є. У даному випадку $\ell=2$. Покладаючи в формулі (3.11) $\ell=2$, отримаємо ряд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Обчислюємо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2=\frac{1}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{x}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{4}\int_{0}^{2}x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{n\pi}\cdot x\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2-\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=\frac{1}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\frac{1}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & n \text{ - парне};\\ -\frac{2}{n^2\pi}, & n \text{ - непарне}.\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x}{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{4}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{n\pi}\cdot x\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{4}{n\pi}\cdot\cos n\pi+\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

У кожній точці неперервності функції маємо

$$f(x)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{(2n\text{-}1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right),$$

а в точках розриву функції ряд збігається до значення $\frac{1}{2}$ – середнього арифметичного граничних значень функції справа та зліва.

3.6 Зображення функції рядом Фур’є на деякому обмеженому проміжку

Нехай функція $f(x)$ або задана на деякому обмеженому інтервалі (a, b), або визначена на всій числовій осі, але не є періодичною. Треба зобразити цю функцію на інтервалі (a, b) рядом Фур’є. Припустимо, що функція $f(x)$ задовольняє на цьому інтервалі умови Діріхле. Розглянемо періодичну функцію $\varphi(x)$ з періодом $T=2\ell=|b-a|$, яка збігається з $f(x)$ на (a, b). Розкладемо функцію $\varphi(x)$ в ряд Фур’є. Сума цього ряду в усіх точках неперервності функції $\varphi(x)$ збігається з

$\varphi(x)$, а, отже, дорівнює з $f(x)$ у кожній точці її неперервності, що належить до інтервалу (a, b).

Розглянемо важливий частинний випадок. Нехай функція $f(x)$ задана на інтервалі $(0, \ell)$ і задовольняє на цьому інтервалі умови Діріхле. Можна довільним способом продовжувати цю функцію на інтервал $(-\ell, 0)$ (головне, щоб виконувались умови Діріхле на $(-\ell,\ell)$) та розглянути періодичну функцію $\varphi(x)$ з періодом 2ℓ, яка збігається з $f(x)$ на інтервалі $(0, \ell)$. Тому задана функція в інтервалі $(0, \ell)$ нескінченною кількістю способів може бути розкладена в ряд Фур'є. Суми цих рядів будуть збігається з заданою функцією $f(x)$ в точках її неперервності на інтервалі $(0, \ell)$. Але доцільно продовжити функцію на інтервал $(-\ell, 0)$ таким чином, щоб ряд Фур'є був найбільш простим, тобто продовжити парним або непарним способом.

<u>Приклад 3.5.</u> Розкласти в ряд Фур'є по косинусах функцію $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2$, яка задана в інтервалі (0, 2).

<u>Розв'язання.</u> Для розкладу функції в ряд по косинусах треба спочатку продовжити її на інтервал (–2, 0) парним способом (рис.3.5), а потім отриману функцію періодично продовжити на всю числову вісь. Таким чином, отримаємо функцію $\varphi(x)$ з періодом $T=2\ell=4$, яка збігається з $f(x)$ на інтервалі (0, 2).

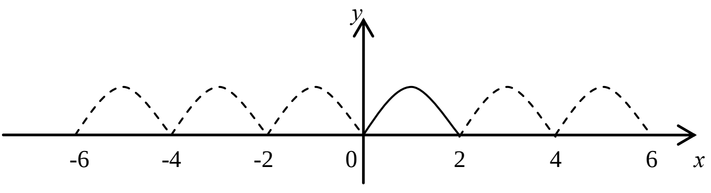


Рис. 3.5

Парна функція задовольняє умови розкладу в ряд Фур'є, отже, використовуючи формули (3.13), (3.14), отримаємо

$$\varphi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2},$$

де

$$a_0=\int_0^2\varphi(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_0^2=\frac{2}{3};$$

$$a_n=\int_0^2\varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{n\pi x}{2}dx.$$

Інтегруючи частинами, отримаємо

$$a_n=\frac{2}{n\pi}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2-\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4}{n^2\pi^2}(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2+$$

$$+\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{n^2\pi^2}(-\cos n\pi-1)=$$

$$=\frac{-4}{n^2\pi^2}((-1)^n+1)=\begin{cases}0, & n \text{ - непарне};\\ -\dfrac{8}{n^2\pi}, & n \text{ - парне}.\end{cases}$$

Таким чином,

$$\varphi(x)=\frac{1}{3}-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{(2n)^2}=\frac{1}{3}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{n^2}.$$

На відрізку (0, 2) функція $\varphi(x)$ дорівнює $f(x)$, тобто,

$$x-\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{3}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{n^2},\qquad 0\le x\le 2.$$

Приклади для самостійного розв'язування

I. Розкласти задану T-періодичну функцію в ряд Фур'є.

1. $f(x) = 1 + |x|, \quad -1 < x < 1, \quad T = 2$

2. $f(x) = \begin{cases} 4, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \le x < \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi$

3. $f(x) = x^2, \quad -2 < x < 2, \quad T = 4$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ -x + 1, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi$

5. $f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 1, \end{cases} \quad T = 2$

6. $f(x) = x - 1, \quad -\pi < x < \pi, \quad T = 2\pi$

7. $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi, \quad T = 2\pi$

8. $f(x) = x(\pi - x), \quad -\pi < x < \pi, \quad T = 2\pi$

9. $f(x) = 4 - 2x, \quad -2 < x < 2, \quad T = 4$

10. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 1, \end{cases} \quad T = 2$

11. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \le x < \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi$

12. $f(x) = x + 2, \quad -2 < x < 2, \quad T = 4$

13. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \end{cases} \quad T = 4$

14. $f(x) = x^2 + 2x, \quad -\pi < x < \pi, \quad T = 2\pi$

15. $f(x) = \begin{cases} -2x, & -\pi < x < 0, \\ 3x, & 0 \le x < \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi$

16. $f(x)=\begin{cases} -x, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi$

17. $f(x)=\begin{cases} 1, & -\pi < x < 0, \\ 3, & 0 \le x < \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi$

18. $f(x)=3-x, \quad -3 < x < 3, \quad T = 6$

19. $f(x)=\begin{cases} 1, & -2 < x < -1, \\ -x, & -1 < x \le 0, \\ 0, & 0 < x < 2, \end{cases} \quad T = 4$

20. $f(x)=\begin{cases} 2x, & -1 < x < 0, \\ -3x, & 0 \le x < 1, \end{cases} \quad T = 2$

21. $f(x)=\begin{cases} x, & -1 < x < 0, \\ 2x, & 0 \le x < 1, \end{cases} \quad T = 2$

22. $f(x)=\begin{cases} -2, & -1 < x < 0, \\ 0, & 0 \le x < 1, \end{cases} \quad T = 2$

23. $f(x)=\begin{cases} x-1, & -1 < x < 0, \\ 2, & 0 \le x < 1, \end{cases} \quad T = 2$

24. $f(x)=10-x, \quad -5 < x < 5, \quad T = 10$

25. $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \le x < \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi$

26. $f(x)=\begin{cases} 0, & -2 < x < 0, \\ 2, & 0 \le x < 2, \end{cases} \quad T = 4$

27. $f(x)=\begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ -2, & 0 \le x < 1, \end{cases} \quad T = 2$

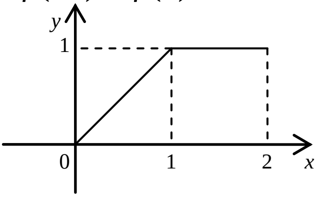
28. $f(x)=\begin{cases} -x-1, & -1 < x < 0, \\ 0, & 0 \le x < 1, \end{cases} \quad T = 2$

29. $f(x)=\begin{cases} x+\pi, & -\pi<x<0, \\ 0, & 0\le x<\pi, \end{cases} \qquad T=2\pi$

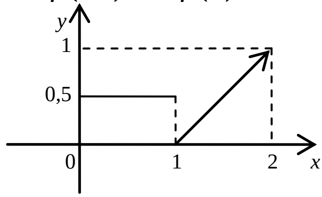
30. $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-x, \quad -\pi<x<\pi, \quad T=2\pi$

II. Розкласти в ряд Фур’є, функцію, задану графічно, продовживши її на період заданим способом.

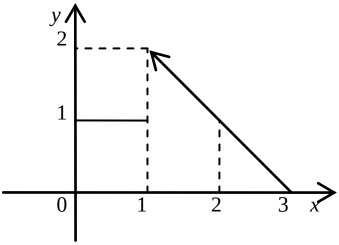
1. $f(-x)=f(x)$



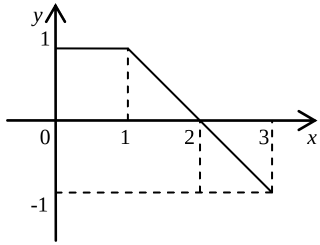
2. $f(-x)=-f(x)$



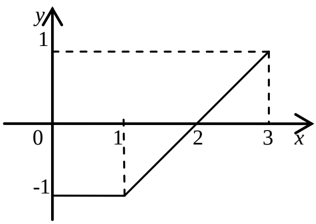
3. $f(-x)=-f(x)$



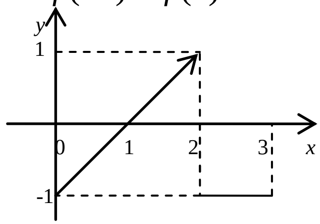
4. $f(-x)=f(x)$



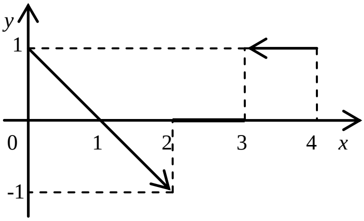
5. $f(-x)=-f(x)$



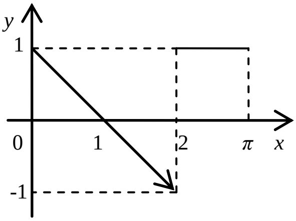
6. $f(-x)=f(x)$



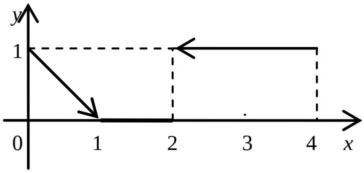
7. $f(-x) = -f(x)$



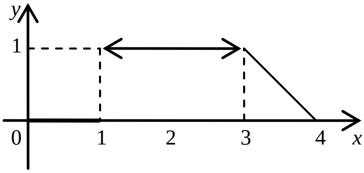
8. $f(-x) = f(x)$



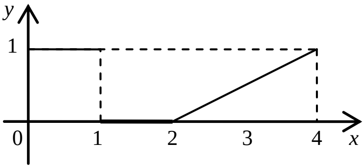
9. $f(-x) = -f(x)$



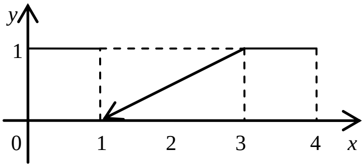
10. $f(-x) = f(x)$



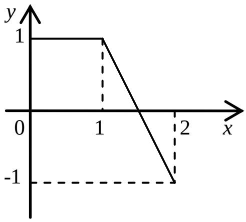
11. $f(-x) = -f(x)$



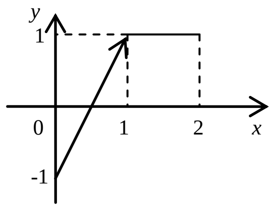
12. $f(-x) = f(x)$



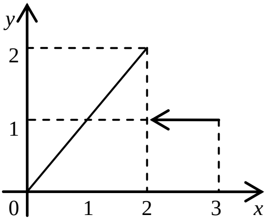
13. $f(-x) = -f(x)$



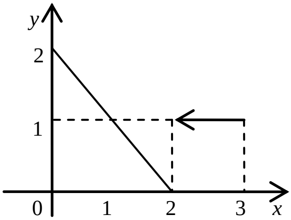
14. $f(-x) = f(x)$



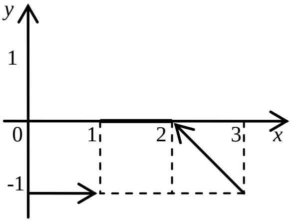
15. $f(-x) = -f(x)$



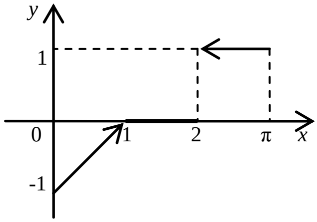
16. $f(-x) = f(x)$



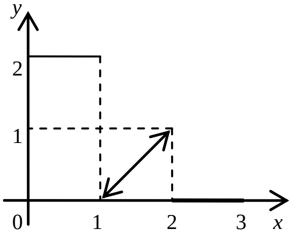
17. $f(-x)=-f(x)$



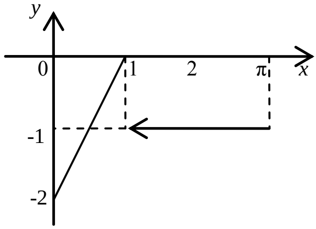
18. $f(-x)=f(x)$



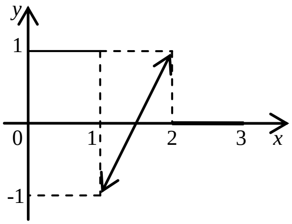
19. $f(-x)=-f(x)$



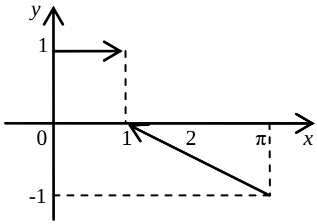
20. $f(-x)=f(x)$



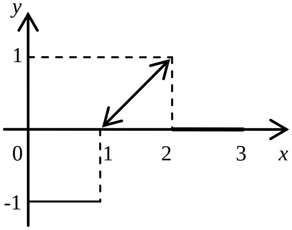
21. $f(-x)=-f(x)$



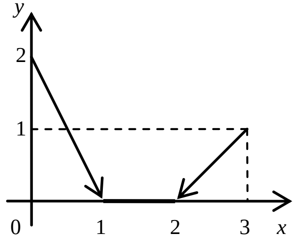
22. $f(-x)=f(x)$



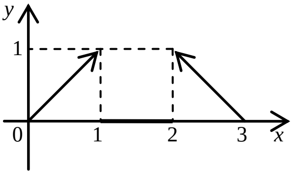
23. $f(-x)=-f(x)$



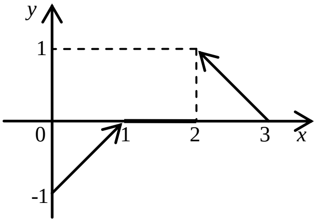
24. $f(-x)=f(x)$



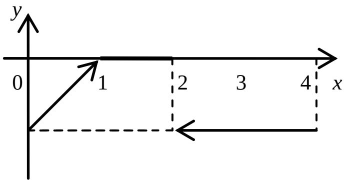
25. $f(-x) = -f(x)$



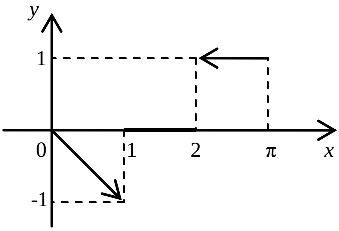
26. $f(-x) = f(x)$



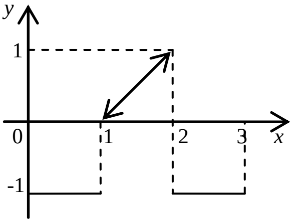
27. $f(-x) = -f(x)$



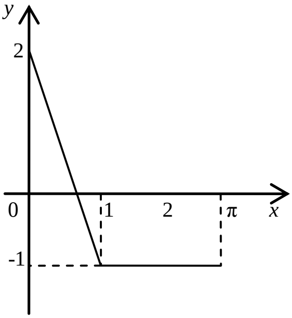
28. $f(-x) = f(x)$



29. $f(-x) = -f(x)$



30. $f(-x) = f(x)$



Список літератури

1. Пискунов Н.С. , Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1970 - 1985.- Т. 2.
2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1967.
3. Берман Г.Н., Сборник задач по курсу математического анализа . – М.: Наука, 1971 - 1984.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в примерах и задачах. - М.: Высш. шк., 1980.
5. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. Г.И. Кручковича. - М.: Высш. шк., 1973.