МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ВИКОНАННЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ

для студентів технічних спеціальностей

Затверджено Методичною Радою НТУУ «КПІ»

Київ

НТУУ «КПІ»

2012

Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Метод. вказівки до виконання типового розрахунку / Уклад. : Л.В.Барановська, В.В.Листопадова. – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – 44 с.

Гриф надано Вченою радою

Фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»

(Протокол № 5 від 24.05.201)

Навчальне видання

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО ВИКОНАННЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ

для студентів технічних спеціальностей

Укладачі: *Барановська Леся Валеріївна,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

Листопадова Валентина Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук

Відповідальний редактор *С.Д.Івасишен*, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент *Н.О.Вірченко*, д-р фіз.-мат. наук, проф.

ВСТУП

На сьогоднішній день накопичено багаторічний досвід складання і використання типових індивідуальних робіт для студентів технічних спеціальностей. У результаті цього створено нову зручну для використання форму типового варіанта.

Запропонований збірник містить 30 варіантів індивідуальних завдань із таких тем: границя числової послідовності, границя функції, нескінченно велика функція, нескінченно мала функція, знаходження границь функцій, перша визначна границя, друга визначна границя, порівняння нескінченно малих функцій, еквівалентні нескінченно малі функції, розкриття деяких невизначеностей, неперервність функції, точки розриву, похідна функції, диференціал та його застосування до наближених обчислень, правило Лопіталя, застосування диференціального числення до дослідження функцій.

Для виконання завдань варіанта розрахункової роботи укладачі пропонують студентам ознайомитися з теоретичним матеріалом за відповідними темами зі списку рекомендованої літератури, а також розібратися у наведених прикладах розв’язування типових задач.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАВДАНЬ

1.За означенням доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1.$

Рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$ означає, що для будь-якого наперед заданого додатного і як завгодно малого числа ε існує такий номер N=N(ε), що для всіх номерів n>N(ε) виконується нерівність $\left|\frac{n}{n+2}-1\right|<\varepsilon$. Розв'яжемо дану нерівність відносно n:

$$\left|\frac{n}{n+2}-1\right|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad 1-\frac{n}{n+2}<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{n+2}<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad n>\frac{2}{\varepsilon}-2.$$

Візьмемо за N(ε) цілу частину $\left[\frac{2}{\varepsilon}-2\right]$ числа $\frac{2}{\varepsilon}-2$. Отже, для кожного $\varepsilon>0$ існує таке N(ε), що для всіх n>$\mathrm{N}(\varepsilon)$ буде справджуватися нерівність $\left|\frac{n}{n+2}-1\right|<\varepsilon$. Цим самим доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1.$

Візьмемо, наприклад, $\varepsilon=0{,}0001$. Тоді $\mathrm{N}(\varepsilon)=\left[\frac{2}{0{,}0001}-2\right]=19998$. Це означає, що, починаючи з номера $n=19999$ всі наступні члени послідовності $\left\{\frac{n}{n+2}\right\}$ будуть знаходитись в 0,0001-околі точки 1.

2.1.Знайдемо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-n+5}{n^3+1}$.

При $n\to\infty$ чисельник та знаменник даного дробу прямують до нескінченності. Для розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ *поділимо чисельник та знаменник дробу на* n^3 (3 – максимальний степінь n чисельника та знаменника):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-n+5}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}}=3.$$

Тут врахували те, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$, та використали властивість границі послідовності.

2.2. Знайдемо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n-1}-2n\right)$.

Перетворимо формулу для загального члена послідовності:

$$\sqrt{4n^2+3n-1}-2n=\frac{\left(\sqrt{4n^2+3n-1}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+3n-1}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+3n-1}+2n}=$$

$$=\frac{4n^2+3n-1-(2n)^2}{\sqrt{4n^2+3n-1}+2n}=\frac{3n-1}{\sqrt{4n^2+3n-1}+2n}=\frac{3-\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}+2}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n-1}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}+2}=\frac{3}{\sqrt{4}+2}=\frac{3}{4}.$$

2.3. Знайдемо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{2n-1}$.

Використаємо другу визначну границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)}=e.$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+2n+3+(2n-4)}{4n^2+2n+3}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{2n-1}=$$

Маємо

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{\frac{4n^2+2n+3}{2n-4}}\right]^{\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\cdot(2n-1)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-10n+4}{4n^2+2n+3}}=e.$$

2.4. Знайдемо границю $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$.

Тут чисельник та знаменник прямують до нуля при $x \to 3$. Для розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ *поділимо чисельник та знаменник дробу на* $(x-3)$. Тоді

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x+1}=\frac{5}{4}.$$

2.5. Знайдемо границю $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.

Для розкриття невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ помножимо і поділимо дріб на спряжені вирази:

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt{9+2x}-5\right)\left(\sqrt{9+2x}+5\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}-4\right)\left(\sqrt{9+2x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{9+2x-25}{\left(\sqrt[3]{x^2}-4\right)\left(\sqrt{9+2x}+5\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{2x-16}{\left(\sqrt[3]{x^2}-4\right)\left(\sqrt{9+2x}+5\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(2x-16)\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+4\sqrt[3]{x^2}+4^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2}-4\right)\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+4\sqrt[3]{x^2}+4^2\right)\left(\sqrt{9+2x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(2x-16)\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+4\sqrt[3]{x^2}+4^2\right)}{\left(x^2-4^3\right)\left(\sqrt{9+2x}+5\right)}=\lim_{x\to 8}\frac{2(x-8)\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+4\sqrt[3]{x^2}+4^2\right)}{(x-8)(x+8)\left(\sqrt{9+2x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{2\left(\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+4\sqrt[3]{x^2}+4^2\right)}{(x+8)\left(\sqrt{9+2x}+5\right)}=\frac{2\left(2^4+4\cdot 2^2+4^2\right)}{16\cdot 10}=\frac{96}{160}=\frac{3}{5}.$$

2.6.Знайдемо границю $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

При $x\to\pi$ маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для знаходження границі перейдемо до нової змінної *t*:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left|\begin{matrix}t=x-\pi\\ t\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(3t+3\pi)-\cos(t+\pi)}{\operatorname{tg}^2(2t+2\pi)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\cos 3t+\cos t}{\operatorname{tg}^2(2t+2\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin 2t\sin t}{\operatorname{tg}^2(2t+2\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin 2t\sin t}{\dfrac{\sin^2 2t}{\cos^2 2t}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t\cos^2 2t}{\sin 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t}{\sin 2t}\cdot\lim_{t\to 0}\cos^2 2t=1\cdot 1=1.$$

Тут використали формулу $\cos t-\cos 3t=2\sin 2t\sin t$, а також наслідок з першої визначної границі $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

2.7. Знайдемо границю $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/\operatorname{tg}3x}$.

Для розкриття невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ застосуємо другу визначну границю $\lim\limits_{x\to 0}(1+f(x))^{1/f(x)}=e$:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/\operatorname{tg}3x}=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{1/\sin x}\right]^{\frac{\sin x}{\operatorname{tg}3x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{\operatorname{tg}3x}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}.$$

Тут також використали наслідок з першої визначної границі $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

2.8. Знайдемо границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}$.

Тут при $x\to 0$ маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. У чисельнику додамо й віднімемо 1; весь дріб поділимо і помножимо на x $(x\neq 0)$. Тоді, використовуючи границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad a>0,$ одержуємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2^{3x}-1)-(3^{5x}-1)}{\sin 7x-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(2^{3x}-1)}{x}-\dfrac{(3^{5x}-1)}{x}}{\dfrac{\sin 7x}{x}-2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\dfrac{(2^{3x}-1)}{3x}-5\dfrac{(3^{5x}-1)}{5x}}{7\dfrac{\sin 7x}{7x}-2}=\frac{3\ln 2-5\ln 3}{7-2}=\frac{1}{5}\ln\frac{2^3}{3^5}=\ln\frac{\sqrt[5]{8}}{3}.$$

2.9.Знайдемо границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{\sin\left(x^2-1\right)}$.

При $x\to 1$ чисельник та знаменник даного дробу є нескінченно малими функціями. Зробимо заміну $t=x-1,\quad t\to 0.$ Беручи до уваги, що при $t\to 0$ $e^t-1\sim t,\quad \sin\left[t(t+2)\right]\sim t(t+2),$ одержуємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\sin\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{e\left(e^{x-1}-1\right)}{\sin\left[(x-1)(x+1)\right]}=\left|t=x-1\right|=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{e\left(e^t-1\right)}{\sin\left[t(t+2)\right]}=\lim_{t\to 0}\frac{et}{t(t+2)}=\lim_{t\to 0}\frac{e}{t+2}=\frac{e}{2}.$$

2.10.Знайдемо границю $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$.

Маємо невизначеність $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Застосовуючи другу визначну границю, а також границі $\lim\limits_{x\to a}\left[\varphi(x)\right]^{\psi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\left[\varphi(x)-1\right]\psi(x)},\quad \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1-t)}{t}=-1$ одержуємо

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}-1\right)\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}=$$
$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{t+1}\frac{\ln(5+2t)}{\ln(1-t)}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1-t)}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(5+2t)}{t+1}}=e^{(-1)\ln 5}=\frac{1}{5}.$$

3. Визначимо порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)=\ln\cos 2x$ відносно $\beta(x)=\sqrt{\mathrm{tg}x}$ при $x\to 0$.

Для того щоб знайти порядок малості $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$, треба встановити, при якому числу k границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^k}$ буде дорівнювати числу, відмінному від нуля. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\left(\sqrt{\mathrm{tg}x}\right)^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos 2x-1+1\right)}{\left(x\right)^{k/2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2 x\right)}{\left(x\right)^{k/2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2x^2\right)}{\left(x\right)^{k/2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{\left(x\right)^{k/2}}=-2,$$

якщо $k=4$. Отже, $\alpha\left(x\right)=\ln\cos 2x$ є нескінченно малою функцією четвертого порядку відносно $\beta\left(x\right)=\sqrt{\mathrm{tg}x}$ при $x\to 0$.

4.1. Дослідимо на неперервність функцію $y=\dfrac{e^x-e^{3x}}{\sin 3x-\mathrm{tg}2x}$.

Задана функція розривна в точці x=0, тому що в цій точці вона не визначена. Оскільки

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{e^x-e^{3x}}{\sin 3x-\mathrm{tg}2x}=\left|\begin{matrix}\sin 3x\sim 3x\\ tg2x\sim 2x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\pm 0}\frac{e^x-e^{3x}}{x}=\lim_{x\to\pm 0}\frac{\left(e^x-1\right)-\left(e^{3x}-1\right)}{x}=$$

$$=\left|e^{kx}-1\sim kx\right|=\lim_{x\to\pm 0}\frac{x-3x}{x}=-2,$$

то x=0 – точка усувного розриву. Якщо довизначити функцію y у нулі, поклавши $y=-2$, коли x=0, то одержимо неперервну всюди функцію.

4.2. Дослідимо на неперервність функцію $y=2^{\frac{1}{x+1}}$.

Задана функція не визначена в точці $x=-1$, тому в цій точці вона розривна. Щоб визначити характер розриву, знайдемо границі зліва і справа:

$$\lim_{x\to -1-0}2^{\frac{1}{x+1}}=0,\quad \lim_{x\to -1+0}2^{\frac{1}{x+1}}=+\infty.$$

Отже, точка $x=-1$ є точкою розриву другого роду.

5.1. Знайдемо похідну функції $y=\ln\left(\sqrt{x}+1\right)^3$.

Оскільки $\left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}u',\quad \left(u^n\right)'=nu^{n-1}u',$ то маємо

$$y'=\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}\cdot\left(\left(\sqrt{x}+1\right)^3\right)'=\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}\cdot 3\left(\sqrt{x}+1\right)^2\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)'=\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}\cdot 3\left(\sqrt{x}+1\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

5.2. Знайдемо похідну функції $y=x^2\cdot\mathrm{tg}3x$.

Використовуючи правило диференціювання добутку функцій $\left(uv\right)'=u'v+uv'$, одержимо

$$y' = \left(x^2\right)' \cdot \mathrm{tg}3x + x^2 \cdot \left(\mathrm{tg}3x\right)' = 2x\mathrm{tg}3x + x^2 \cdot \frac{3}{\cos^2 3x}.$$

5.3. Знайдемо похідну функції $y = \frac{e^{3x}}{x^2 + \ln x}$.

Використовуючи правило диференціювання частки $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, одержимо

$$y' = \frac{\left(e^{3x}\right)'\left(x^2 + \ln x\right) - e^{3x}\left(x^2 + \ln x\right)'}{\left(x^2 + \ln x\right)^2} = \frac{3e^{3x}\left(x^2 + \ln x\right) - e^{3x}\left(2x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x^2 + \ln x\right)^2}.$$

5.4. Знайдемо похідну функції $y = \left(1 - \cos x\right)^x$.

Маємо степенево-показникову функцію. Прологарифмуємо функцію y, а потім продиференцюємо одержану рівність:

$$\ln y = \ln\left(1 - \cos x\right)^x = x \cdot \ln\left(1 - \cos x\right),$$

$$\frac{y'}{y} = x' \cdot \ln\left(1 - \cos x\right) + x \cdot \left(\ln\left(1 - \cos x\right)\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \ln\left(1 - \cos x\right) + x \cdot \frac{\sin x}{\left(1 - \cos x\right)}.$$

Отже, $y' = \left(1 - \cos x\right)^x \left[\ln\left(1 - \cos x\right) + x \cdot \frac{\sin x}{\left(1 - \cos x\right)}\right].$

5.6. Знайдемо похідну функції $y^3 - 2\sqrt{y}e^x + 2x\ln y = 0$.

Функція y задана неявно. Продиференцюємо дану рівність за правилами диференціювання складної функції:

$$3y^2 y' - \frac{1}{\sqrt{y}} y'e^x - 2\sqrt{y}e^x + 2\ln y + \frac{2x}{y} y' = 0.$$

Звідси виразимо y':

$$y'\left(3y^2-\frac{1}{\sqrt{y}}e^x+\frac{2x}{y}\right)=2\left(\sqrt{y}e^x-\ln y\right),$$

$$y'=\frac{2\left(\sqrt{y}e^x-\ln y\right)}{3y^2-\frac{1}{\sqrt{y}}e^x+\frac{2x}{y}}.$$

5.7. Знайдемо похідні $y'_x,\quad y''_{xx}$ функції, яка задана параметрично рівняннями:

$$\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

За правилами диференціювання функції, яка задана параметричними рівняннями, маємо

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{t}}=\frac{t}{1+t^2},$$

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\frac{\frac{1+t^2-2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}}{\frac{1}{t}}=\frac{t\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}.$$

6. Обчислимо наближено за допомогою диференціала $\operatorname{arctg} 1,05$.

Нехай $f(x)=\operatorname{arctg} x$, тоді за формулою наближеного обчислення

$$f(x+\vartriangle x)\approx f(x)+f'(x)\vartriangle x$$

маємо

$$\operatorname{arctg}(x+\vartriangle x)\approx \operatorname{arctg} x+\left(\operatorname{arctg} x\right)'\vartriangle x=\operatorname{arctg} x+\frac{\vartriangle x}{1+x^2}.$$

Якщо $x=1,\quad \vartriangle x=0,5,$ то

$$\operatorname{arctg} 1,05\approx \operatorname{arctg} 1+\frac{0,5}{2}=\frac{\pi}{4}=0,025\approx 0,811.$$

7.1. Проведемо повне дослідження функції $y=\frac{x^3}{1-x^2}$ і побудуємо її графік.

1) Область існування – вся числова вісь, крім точок $x=\pm 1.$

2) Якщо $x=0,$ то $y=0,$ тому графік перетинає осі координат у точці $O(0;0).$

3) Функція не періодична. Оскільки $f(-x)=\frac{(-x)^3}{1-(-x)^2}=-\frac{x^3}{1-x^2}=-f(x)$, то функція непарна, тому будемо досліджувати її лише для $x\geq 0$.

4) Функція в точці x=1 має розрив другого роду і

$$\lim_{x\to 1\pm 0} f(x)=\mp\infty.$$

5) Похідна

$$y'=\frac{x^2\left(3-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$$

дорівнює нулю при $x=0,\quad x=\pm\sqrt{3}$ і не існує у точках $x=\pm 1,$ але останні не входять до області визначення функції, тому критичними точками є точки

$$x=-\sqrt{3},\quad x=0,\quad x=\sqrt{3}.$$

На інтервалі $(0;\infty)$ маємо

x	$(0;1)$	1	$(1;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};\infty)$
$f'(x)$	+	не існує	+	0	–
$f(x)$	↗	не існує	↗	$y_{\max}\approx -2,6$	↘

6) Знайдемо другу похідну:

$$y''=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

Похідна $y''=0$ при x=0 і не існує при $x=\pm 1$. Оскільки точки $x=\pm 1$ не входять до області визначення заданої функції, то x=0 – єдина критична точка другого роду. Маємо

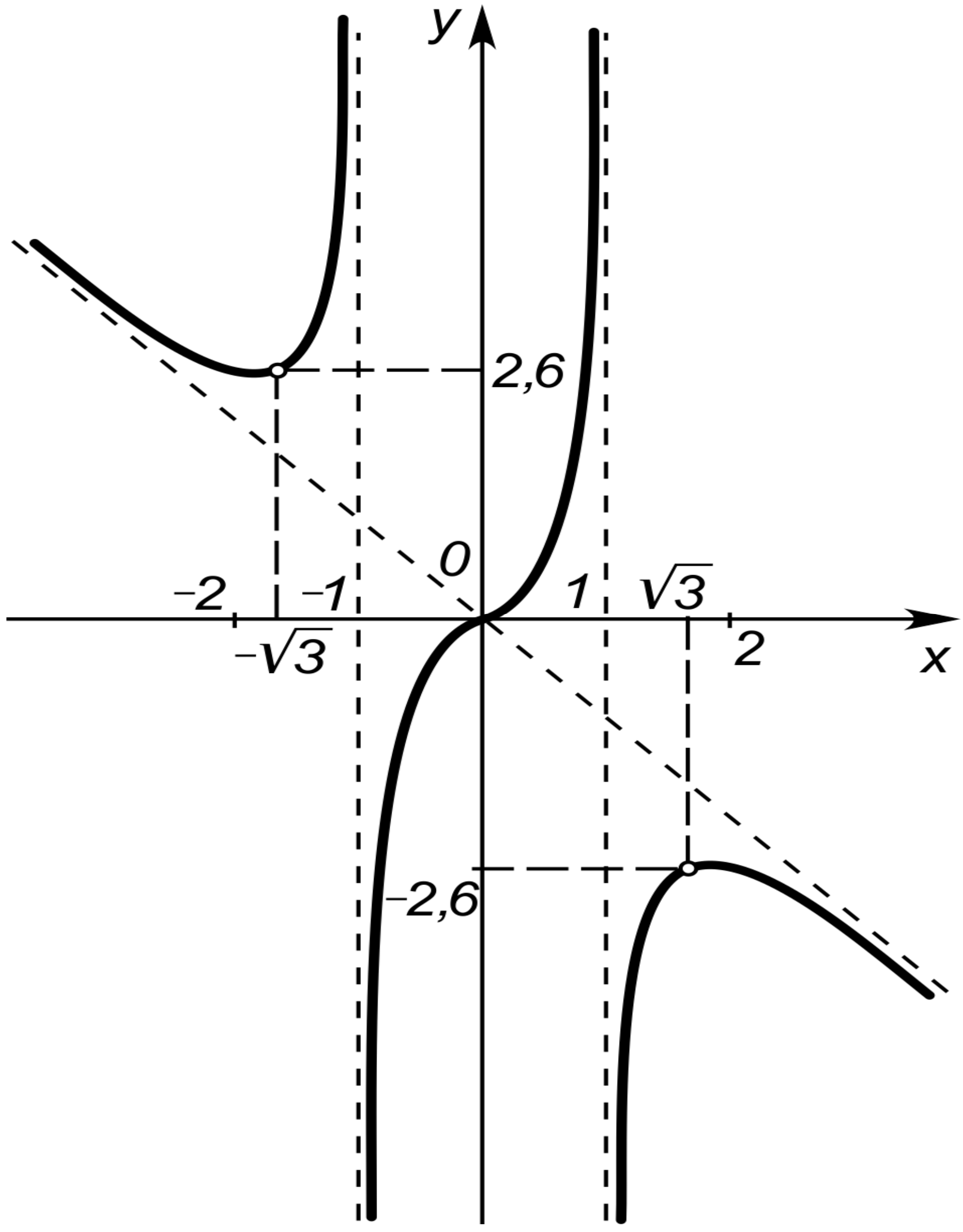
x	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
$f''(x)$	–	0	+	не існує	–
$f(x)$	∩	Точка перегину	∪	не існує	∩

7) З п. 4 випливає, що x=1 – вертикальна асимптота кривої. Оскільки

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{\left(1-x^2\right)x}=-1,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}-\left(-1\right)x\right)=0,$$

то при $x\to\pm\infty$ задана крива має похилу асимптоту $y=-x$.

8) Враховуючи проведене дослідження і непарність функції, будуємо графік.



ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Знайти $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ при всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо $a_n=\dfrac{3n^2-2}{2n^2-1}$.
2. Знайти границі:

   1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2-(3+n)^2}{(3-n)^2+(3+n)^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2}$;

   4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$; 5) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos3x+\cos4x}{\sin^2x}$;

   7) $\lim\limits_{x\to0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{3x}-2^{2x}}{x^2+\mathrm{tg}3x}$; 9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$;

   10) $\lim\limits_{x\to\infty}(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{x}}$.
3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0$, якщо $\alpha(x)=\mathrm{tg}2x,\ \beta(x)=\arcsin x$.
4. Дослідити функцію на неперервність:

   1) $f(x)=\begin{cases}x+4, & x<-1,\\ x^2+2, & -1\le x<1,\\ 2x, & x\ge1;\end{cases}$ 2) $y=3^{\frac{1}{4-x}}$.
5. Знайти похідні функції:

   1) $y=x-\ln(e^x+2\sqrt{e^{3x}+e^x})$; 2) $y=\mathrm{arctg}(\sin^2x)$; 3) $y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$;

   4) $y=x^{\sqrt{x^2-1}}$; 5) $y=2^{\ln^3x}$; 6) $\ln y=\mathrm{arcctg}\dfrac{y}{x}$;

   7) $\begin{cases}x=\dfrac{\ln t}{t},\\ y=t^3\ln t,\end{cases}$ $y'_x=?$ $y''_{xx}=?$
6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

   $$y=\ln\mathrm{tg}x,\quad x=44^o15'.$$
7. Провести повне дослідження функції і побудувати її графік:

   1) $y=\dfrac{17-x^2}{4x-5}$;

   2) $\rho=5\sin\dfrac{\varphi}{3}$.

Варіант 2

1. Знайти $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ при всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо $a_n=\dfrac{7n+5}{2n+3}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3+n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3+(1+n)^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt[3]{n^3-7})n\sqrt{n}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{2n^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{8}}{x^2+2x+8}$; 6) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\mathrm{tg}^2 x}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}(2-3^x)^{\frac{2}{\sin x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{2x}-5^x}{6x+\arcsin 4x}$; 9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x^2-1}-1}{\ln x}$;

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0$, якщо $\alpha(x)=1-\cos x, \beta(x)=3x^2$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0, \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2, \\ 4-x, & x>2; \end{cases}$ 2) $y=5^{\frac{1}{x-2}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y=e^{2x}-\dfrac{1}{8}(2-\sin 2x+e^{-3x})$; 2) $y=x\sin x-\cos x$; 3) $y=3^{\frac{x}{\ln x}}$;

4) $y=(\ln x)^{x^2}$; ; 5) $y=\ln\ln(2+x^2)$; 6) $y-x=x\mathrm{tg}y$;

7) $\begin{cases} x=2\cos^2 t, \\ y=3\sin^2 t, \end{cases}$ $y'_x=?$ $y''_{xx}=?$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$y=e^{x^2-1}, x=0,95.$$

7. Провести повне дослідження функції і побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$;

2) $\rho=a(1-\sin\varphi)$.

Варіант 3

1. Знайти $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо $a_n = \dfrac{4n^2 - 1}{2n^2 + 2}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3+n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^4 - (1+n)^4}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n - \sqrt{n(n-2)})$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n^3 - 3}{n^3 + 3}\right)^{n+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+10} - \sqrt{7}}{2x^2 - x - 21}$; 6) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}(7 - 6x)^{\frac{1}{\sin \pi x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{4x} - 5^{-x}}{\sin 2x - \operatorname{tg} 3x^3}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}(5 - \dfrac{4}{\cos x})^{\frac{1}{9x^2}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \to 0$, якщо $\alpha(x) = \operatorname{arctg}^2 3x, \beta(x) = 4x^2$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \le -1, \\ x^2 + 1, & -1 < x \le 1, \\ -x + 3, & x > 1; \end{cases}$ 2) $y = 10^{\frac{1}{x+2}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y = 2\sqrt{e^x} + 1 + \ln \dfrac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}$; 2) $y = 3\sqrt[3]{(1 + x^2)^2}$; 3) $y = \sqrt{x}\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$;

4) $y = (\sin x)^{x^2}$; 5) $y = 3^{\sin^2 \frac{x}{2}}$; 6) $y + x = 2e^y$;

7) $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $y'_x = ?$ $y''_{xx} = ?$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

arctg0,98.

7. Провести повне дослідження функції і побудувати її графік:

1) $y = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$;

2) $\rho = a\sin\varphi$.

Варіант 4

1. Знайти $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ при всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо $a_n=\dfrac{2n+5}{3n+7}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+5)^2+(n+4)^2}{(n+3)^3-(n-2)^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n-1}\right)^{n+4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$; 5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-2}{x^2-x-6}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\pi x+\cos 3\pi x}{x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\pi x)^{\frac{1}{x\sin x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-3^{2x}}{\operatorname{arctg}4x-\sin x}$; 9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to +0}(-\ln x)^{\sin x}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$, якщо $\alpha(x)=\sin 3x-\sin x, \beta(x)=5x.$

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ -(x-1)^2, & 0<x<2,\\ x-3, & x\ge 2;\end{cases}$ 2) $y=3^{\frac{2x}{3x+1}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y=\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+\operatorname{tg}e^x$; 2) $y=\sqrt{x^3+2x+\dfrac{1}{x}}$; 3) $y=\dfrac{\arccos\sqrt{x}}{x}$;

4) $y=(x^3-x^2)^x$; 5) $y=5^{\operatorname{tg}^2 x}$; 6) $x\operatorname{tg}y-y\operatorname{tg}x=2$;

7) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{t+2},\\ y=\dfrac{t^2}{(t+2)^2},\end{cases}$ $y'_x=?\ \ y''_{xx}=?$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$y=x^{11},\quad x=0,998.$$

7. Провести повне дослідження функції і побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$;

2) $\rho=a(1-\cos 2\varphi)$.

Варіант 5

1. Знайти $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ при всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо $a_n=\dfrac{7n^2-1}{3n^2+1}$.
2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-5n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}n(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2})$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5n+2}{5n-3}\right)^{2n-n^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{5}}{3x^2-4x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\arcsin x}{7x}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin^2 3x)^{\frac{1}{x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{x2}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\mathrm{tg}^2\pi x}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0$, якщо $\alpha(x)=\cos3x-\cos x, \beta(x)=7x^2$.
4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases}-2(x+1), & x\le-1,\\ (x+1)^3, & -1<x<0,\\ x, & x\ge0;\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y=2(x-2)\sqrt{1+e^x}+\ln x^4$; 2) $y=\cos^5 3x$; 3) $y=\mathrm{arcctg}^2(\ln x)$;

4) $y=(\mathrm{ctg}x)^{\sqrt{x}}$; 5) $y=5\sqrt[5]{(1-x^2)^3}$; 6) $\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{y}=\sqrt{a^2}$;

7) $\begin{cases}x=e^{-2t},\\ y=e^{4t},\end{cases}$ $y'_x=?$ $y''_{xx}=?$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$y=\sqrt[3]{x},\quad x=26,5.$$

7. Провести повне дослідження функції і побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}$;

2) $\rho=a(1+\cos2\varphi)$.

Варіант 6

1. Знайти $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо $a_n = \dfrac{4n^2+2}{3n^2+7}$.

2. Обчислити границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{n+3}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+4})$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+6}\right)^{\frac{n}{6}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^3-x^2-x+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{3}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 5x}{\mathrm{tg} 3x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-x))^{\frac{1}{x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x-\mathrm{tg} 2x}{2^{4x}-5^x}$; 9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\mathrm{tg} 3x}{\mathrm{tg} x}$;

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg} x)^x$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \to 0$, якщо $\alpha(x) = x^2+1-\cos 2x, \quad \beta(x) = 6x^2$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 2, \\ x+1, & x > 2; \end{cases}$ 2) $y = 3^{\frac{2}{x+2}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y = \dfrac{1}{\ln x} + \ln\dfrac{1+2^x}{1-2^x}$; 2) $y = \dfrac{1}{5}\sqrt{(1+x^2)^5}$; 3) $y = (x-1)\arccos\sqrt{x}$;

4) $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$; 5) $y = \sqrt{x}\,\mathrm{arcctg}\dfrac{1}{x}$; 6) $ye^x = e^{y-x}$;

7) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}, \end{cases}$ $y'_x = ?$ $y''_{xx} = ?$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$y = \sqrt[5]{x^3}, \quad x = 1{,}02.$$

7. Провести повне дослідження функції і побудувати її графік:

1) $y = \dfrac{4x^2}{x^2+3}$;

2) $\rho = \dfrac{3}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$.

Варіант 8

1. Знайти $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ при всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо $a_n=\dfrac{4n^2-3}{2n^2+1}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2+(n+1)^2-(n+2)^2}{(4-n)^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{n^2-4n+2}-n)$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$; 5) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4-x^2}{\sin 3\pi x}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-5^{x^3}\right)^{\frac{1}{x^3}}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x+\arcsin x^3}{5^{2x}-2^{5x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\mathrm{tg}\,\pi x}$; 10) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0$, якщо $\alpha(x)=\sin x+\sin 5x$, $\beta(x)=2x$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ x+1, & 0\le x\le 4,\\ x+3, & x>4;\end{cases}$ 2) $y=3^{-\frac{3x}{x-4}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y=2(\sqrt{2^x-1}-\mathrm{arctg}\sqrt{2^x})$; 2) $y=\ln\sin 2x$; 3) $y=(a)^{\frac{1}{x^2}}$;

4) $y=\sqrt[x]{\sin x}$; 5) $y=\sqrt{\sin x}e^{\sqrt{\cos x}}$; 6) $\ln y+e^{-\frac{y}{x}}=c$;

7) $\begin{cases}x=t^3-3t,\\ y=5t^3-3t^2,\end{cases}$ $y'_x=?$ $y''_{xx}=?$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$y=\frac{1}{\sqrt{2x^2+2x+1}},\quad x=1{,}015.$$

7. Провести повне дослідження функції і побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2+1}$;

2) $\rho=2\sin\varphi$.

Варіант 9

1. Знайти $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо $a_n = \dfrac{1-3n}{2+n}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-n)^4 - (1+n)^4}{(n+1)^3 + (1-n)^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-3)})$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+3n-2}{2n^2+7n-1}\right)^{-n^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$; 5) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{11}}{2x^2 - 7x - 15}$; 6) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 7x}{\mathrm{tg} 2x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin 9x}{2^x - 3^{5x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg} x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \to 0$, якщо $\alpha(x) = \dfrac{3x}{1-x}$, $\beta(x) = \dfrac{x}{4+x}$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \le 0, \\ 0, & 0 < x \le 2, \\ x-2, & x > 2; \end{cases}$ 2) $y = e^{\frac{2}{x}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y = \dfrac{1}{2} e^{-2x}\left(\dfrac{\cos 2x + \sin 2x}{4+x} + e^{2x}\right)$; 2) $y = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $y = \sqrt[3]{x} \ln x \sin 2x$;

4) $y = (\sin x)^{4^x}$; 5) $y = 3^{\mathrm{arcctg}\frac{1}{x}}$; 6) $xy = e^{\frac{y}{x}} - 4$;

7) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}, \\ y = \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-1}}, \end{cases}$ $y'_x = ?$ $y''_{xx} = ?$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$y = e^{0,1x(1-x)}, \quad x = 1,05.$$

7. Провести повне дослідження функції і побудувати її графік:

1) $y = x^3 e^{\frac{1}{x}}$;

2) $\rho = \cos\varphi$.

Варіант 10

1. Знайти $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо $a_n = \dfrac{3n+1}{2n-1}$.

2. Знайти границі:

   1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4n-3)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(n-\sqrt[3]{4-n^2})$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n+3}\right)^{n+1}$;

   4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2}}{x^2+8x+15}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{\cos 7x-\cos x}$;

   7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^x\right)^{\frac{1}{x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^{2x}-6^{-2x}}{\sin 3x-2x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$;

   10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}(\mathrm{tg}2x)^{\mathrm{tg}4x}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$, якщо $\alpha(x) = \dfrac{3x^2}{2+x}$, $\beta(x) = 7x^2$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

   1) $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 2+x, & x > 1; \end{cases}$ 2) $y = 3^{\frac{x+3}{x-2}}$.

5. Знайти похідні функції:

   1) $y = \dfrac{x+1}{1-e^x} - \ln(1+e^x)$; 2) $y = e^{3x}\sin^2 x$; 3) $y = \dfrac{2x^2}{\sqrt{1-2x^2}}$;

   4) $y = (\mathrm{arctg}x)^{2x}$; 5) $y = 2^{\frac{1}{5}\sqrt{x^2}}$; 6) $\mathrm{tg}\dfrac{y}{x} = x\sqrt{y}$;

   7) $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t, \end{cases}$ $y'_x = ?$ $y''_{xx} = ?$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

   $$y = \arcsin x, \quad x = 0,49.$$

7. Провести повне дослідження функції і побудувати її графік:

   1) $y = \dfrac{x^2}{4x^2-1}$;

   2) $\rho = 2\cos 2\varphi$.

Варіант 11

1. Знайти $a = \lim\limits_{x\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо $a_n = \dfrac{9n-2}{3-5n}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n^2)-(1-n)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n-3})$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2}{n^2}\right)^{3n^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-1)\left[\ln x - \ln(x+2\sqrt{x})\right]$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+\mathrm{arctg}x}{5^{3x}-3^x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}(\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2x+3})^{\frac{1}{x}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \to 0$, якщо $\alpha(x) = 2x^3$, $\beta(x) = \dfrac{5x^3}{4-x}$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x > 2; \end{cases}$ 2) $y = 1/(2+2^{\frac{1}{x-3}})$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y = \ln^3(e^x + \sqrt{\sin e^{-x}})$; 2) $y = (e^{\sin x}+2)^3$; 3) $y = \mathrm{ctg}\sqrt{1+x^2}$; 4) $y = (2x)^{\ln x}$;

5) $y = 10^{x\mathrm{ctg}x}$; 6) $yx^2 = 2 - e^{y/x}$; 7) $\begin{cases} x = \ln t, & y'_x = ? \\ y = t\ln t, & y''_{xx} = ? \end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$y = \mathrm{arcctg}x, \quad x = 1{,}05.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \dfrac{4x^3}{x^3-1}$; 2) $\rho = \sin 2\varphi$.

Варіант 12

1. Знайти $a=\lim\limits_{x\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ при всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо $a_n=\dfrac{1-2n^2}{n^2+3}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n-3)^3}{(n+1)^2+(n+1)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(n\sqrt{n}-\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)})$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^3}$;

4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7}}{\sqrt{7}x}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-x}{\sin 13x}$;

7) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(5-2x)}{\sqrt{10-3x}-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^{4x}-7^{2x}}{\mathrm{arctg}4x-2x}$; 9) $\lim\limits_{x\to0}(3-2\cos x)^{1/x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0$, якщо $\alpha(x)=\dfrac{x^2}{5+x}$, $\beta(x)=\dfrac{4x^2}{x-1}$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi,\\ 2, & x\ge\pi;\end{cases}$ 2) $y=e^{-\frac{1}{x+2}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y=3e^{\sqrt{x}}(x-e^{\sin x-\sqrt{x}})$; 2) $y=\cos\dfrac{\arcsin x}{4}$; 3) $y=4^{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$; 4) $y=(\cos x)^{\sqrt{x}}$;

5) $y=3^{\frac{2}{\ln x}}$; 6) $x-y+e^{y}\mathrm{arcctg}x=1$; 7) $\begin{cases}x=t^4, & y'_x=?\\ y=\ln t, & y''_{xx}=?\end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$\sqrt[5]{243,5}.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{x^3-5x}{5-3x^2}$; 2) $\rho=\cos3\varphi$.

Варіант 13

1. Знайти $a = \lim\limits_{x\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо $a_n = \dfrac{3n-5}{2n+1}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+3n-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)} - \sqrt{(n^2-1)(n^2-2)})$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+3n+2}{2n^2+n+2}\right)^{3n^2-6}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 2x}{3x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-7)\ln\dfrac{x^2+x-1}{x^2+7x+1}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{11^x-5^{-3x}}{\arcsin 3x - x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\operatorname{tg}\ln(3x-5)}{e^{x+3}-e^{x^2+1}}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2}{x})^{\operatorname{tg}x}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$, якщо $\alpha(x) = \sin 8x, \quad \beta(x) = \arcsin 5x.$

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \ge 2; \end{cases}$ 2) $y = 5^{(2x+5)/(2x+1)}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y = \dfrac{\sin^2 x}{2+\cos^2 x}$; 2) $y = 3^{\operatorname{arcctg} x^2}$; 3) $y = x^2 e^{1-\sin x}$; 4) $y = (\ln x)^{\operatorname{arctg} x}$;

5) $y = (4+x)e^{-\frac{x^2}{8}}$; 6) $x - y = 3\sin y + 2$; 7) $\begin{cases} x = 5\cos t, & y'_x = ? \\ y = 4\sin t, & y''_{xx} = ? \end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$\cos 149^o.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \dfrac{2x+1}{x^2}$; 2) $\rho = \sin 3\varphi$.

Варіант 14

1. Знайти $a=\lim\limits_{x\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ при всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо $a_n=\dfrac{3n^2}{2-n^2}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(n+\sqrt[3]{3-n})$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5n-2}{5n+1}\right)^{n+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x(\cos 3x-1)}{\mathrm{tg}x-\sin x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty} x\lg\dfrac{x-2}{x+2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x-2^{7x}}{\mathrm{tg}4x-2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$, якщо $\alpha(x)=\sin 3x+\sin x,\quad \beta(x)=10x.$

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0,\\ x^2+1, & 0\le x<1,\\ -x, & x\ge 1; \end{cases}$ 2) $y=2^{2x/(x+3)}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y=\dfrac{e^{x^3}}{(1+x^3)^2}+\ln(1+x^3)$; 2) $y=3\sqrt[3]{x^2+2x+\dfrac{1}{x}}$; 3) $y=\dfrac{1}{5}\mathrm{tg}^5x-\mathrm{tg}x+2x$;

4) $y=(x^2+x)^{\sin x}$; 5) $y=e^{x^2+3}$; 6) $y^x=x^y-4$;

7) $\begin{cases} x=5\cos^2 t, & y'_x=?\\ y=3\sin^2 t, & y''_{xx}=? \end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$\sqrt[10]{1005}.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{x^2-6x+4}{3x-2}$; 2) $\rho=\sqrt{\sin\varphi}$.

Варіант 15

1. Знайти $a=\lim\limits_{x\to\infty}a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ при всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо $a_n=\dfrac{n}{7-n}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(n+1)!-n!}{2(n+1)!}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{n^3+8}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1})$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3n+2}{3n+1}\right)^{1+n}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x\sin 3x}{7\cos x-7}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\mathrm{tg}x-\mathrm{arctg}3x}{10^{2x}-9^{-x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{1/x}$;

10) $\lim\limits_{x\to\pi}(\mathrm{tg}\dfrac{x}{4})^{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0,$ якщо $\alpha(x)=\cos 7x-\cos x, \beta(x)=2x^2$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases}-x, x<0,\\ x^2+1, 0\le x<1,\\ x+1, x\ge1;\end{cases}$ 2) $y=11^{\frac{-1}{x+2}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y=x-3\ln\sqrt{1+e^x}$; 2) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+2\sqrt{x}}}$; 3) $y=\sqrt{1-3x^2}\arcsin x$; 4) $y=e^{x^{x^2}}$;

5) $y=10^{1-\sin^3 x}$; 6) $x+y=\mathrm{arctg}y$; 7) $\begin{cases}x=\mathrm{arctg}t, & y'_x=?\\ y=\ln(1+t^2), & y''_{xx}=?\end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$\cos(5\pi/36).$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$;

2) $\rho=\sqrt{\cos\varphi}$.

Варіант 16

1. Знайти $a = \lim\limits_{x \to \infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо $a_n = \dfrac{3n^3}{n^3 - 1}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 + n + 5n^4}{n^4 + 2n - 13}$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} n(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2n^2 - 3}{2n^2 + 3n - 1} \right)^{n^2/3}$;

4) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$; 5) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}$; 6) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2^x - 16}{\sin \pi x}$;

7) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{k}{x} \right)^{mk}$; 8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-4x}}{\sin x - 2\operatorname{tg} x}$; 9) $\lim\limits_{x \to 0} \left(3 - \dfrac{2}{\cos x} \right)^{1/x^2}$;

10) $\lim\limits_{x \to 2} (x-1)^{\frac{1}{2-x}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \to 0$, якщо $\alpha(x) = \dfrac{(x-1)^3}{\ln x}, \beta(x) = e^{x-1} - 1$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \begin{cases} x + 3, x \le 0, \\ 4 - x, 0 < x \le 2, \\ x^2 - 2, x > 2; \end{cases}$ 2) $y = \dfrac{5 - 5^{1/x}}{5 + 5^{1/x}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y = \operatorname{arctg}^2(e^x - e^{-x}) + \operatorname{th}^2 x$; 2) $y = e^x \sin^2 x \cos x$; 3) $y = (2 + x\operatorname{arctg} x) / \sqrt{1 + x^2}$;

4) $y = \left(\dfrac{x}{1+x} \right)^{\sin x}$; 5) $y = 3^{\operatorname{tg}^2 x}$; 6) $2^{2x} + 2^y = 2^{x+y}$;

7) $\begin{cases} x = \arcsin t, & y'_x = ? \\ y = \sqrt{1 - t^2}, & y''_{xx} = ? \end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$\operatorname{tg} 45^o 2' 10''.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$; 2) $\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$.

Варіант 17

1. Знайти $a=\lim\limits_{x\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо $a_n = \dfrac{1+n}{1-n}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-8})$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7n-6}{7n+3}\right)^{2n+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$; 5) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 3\pi x}{x^2-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x}{x^3+2x+1}\right)^{2x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{2\sin x-\mathrm{tg}x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{1/x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x)^{\frac{2}{\mathrm{ctg}\,2x}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$, якщо $\alpha(x)=2^{x^2}, \beta(x)=\mathrm{tg}(x)$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases} x, x\le 1, \\ (x-2)^2, 1<x\le 4, \\ 3-x, x>4; \end{cases}$ 2) $y=2^{\frac{1}{4x+1}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y=\ln(e^x(x^2-1)\cos 6x)$; 2) $y=\log_2(x^3-4)$; 3) $y=\arcsin(\mathrm{ctg}x)$;

4) $y=(\cos 2x)^{x^3}$; 5) $y=e^{\mathrm{ctg}1/x}$; 6) $y-x=\mathrm{arcctg}\dfrac{x}{y}$;

7) $\begin{cases} x=3(t-\sin t), & y'_x=? \\ y=3(1-\cos t), & y''_{xx}=? \end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала: $\sqrt{\dfrac{(2.032)^2+3}{(2.032)^2-3}}$.

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$; 2) $\rho=\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Варіант 18

1. Знайти $a = \lim\limits_{x\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо $a_n = \dfrac{4n^2 - 1}{3n^2 + 1}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3n-5)(3-5n)^2}{4n^3+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} 3n(\sqrt{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3+2})$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1-2n^2}{3-2n^2}\right)^{n^2+3n}$;

4) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln \mathrm{tg} x}{\cos 2x}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4+3x}{5+3x}\right)^{x-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - e^{2x}}{\sin 3x - 2\mathrm{tg} 2x}$; 9) $\lim\limits_{x\to0} \left(1 + \arcsin^2 \sqrt{x}\right)^{1/x}$;

10) $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\mathrm{ctg} x}{\mathrm{ctg} a}\right)^{\mathrm{ctg}(x-a)}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \to 0$, якщо $\alpha(x) = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2x} - 1, \beta(x) = \mathrm{arctg} x.$

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \begin{cases} x-2, x \le 1, \\ x^2 - 1, -1 < x \le 2, \\ -x+5, x > 2; \end{cases}$ 2) $y = 3^{\frac{1}{x+1}}.$

5. Знайти похідні функції:

1) $y = e^{-x} \arcsin \ln(1 + e^{-x})$; 2) $y = \mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{2-x}{x-3}}$; 3) $y = e^{\cos^2 x}$;

4) $y = (\sin 2x)^{\cos x}$; 5) $y = \sqrt{4 + \ln^2 x}$; 6) $\cos(xy) = x - y$;

7) $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, & y'_x = ? \\ y = \cos t + t \sin t, & y''_{xx} = ? \end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$\sin 61^o.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \dfrac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$; 2) $\rho = 1 + \sin\varphi.$

Варіант 19

1. Знайти $a = \lim\limits_{x\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо $a_n = \dfrac{5n+16}{6-n}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(5n^3-1)(4-n^2)}{n^2(2n-1)^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{n+1}(\sqrt[3]{n-3} - \sqrt[3]{n+5})$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5n^2-3n+7}{5n^2+6n+1}\right)^{1+n}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^3+2x^2+x)}{x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}5x - \sin 2x}{e^x - e^{-3x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\mathrm{tg}^2 x\right)^{1/x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \to 0$, якщо $\alpha(x) = e^{3x^5} - \cos^2 x^3, \beta(x) = \arcsin$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \begin{cases} x+2, x \le -2, \\ x^2, -2 < x \le 1, \\ 2, x > 1; \end{cases}$ 2) $y = 3^{2/(5-x)}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y = e^{\sin x}\left(x - \dfrac{1}{\cos x}\right)^2$; 2) $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)$; 3) $y = 2\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

4) $y = (\sin x)^{\sqrt{x+1}}$; 5) $y = 4^{1+\sin x^2}$; 6) $\cos(x+y) = xy$;

7) $\begin{cases} x = \sin 2t, & y'_x = ? \\ y = \cos^2 t, & y''_{xx} = ? \end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$\sqrt[3]{210}.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = -\dfrac{8x}{x^2+4}$; 2) $\rho = 2 + \cos\varphi$.

Варіант 20

1. Знайти $a = \lim\limits_{x\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо $a_n = \dfrac{3-n^2}{2n^2+1}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7n^4-3n^2-2}{(3n-1)^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(n-\sqrt{n(n-5)})$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{n-1}\right)^n$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 3x)}{\sin 7x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{x+\sin x^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x^2+2x-2}}{2\ln x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\cos x\right)^{1/x^2}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$, якщо $\alpha(x)=\sqrt{1+x^6}-1, \beta(x)=e^{6x}-1$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases} x, x\le 1, \\ (x-2)^2, 1<x\le 3, \\ -x+6, x>3; \end{cases}$ 2) $y=\dfrac{5^{1/x}-1}{5^{1/x}+1}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y = x-\dfrac{1}{3}\left(\ln\sqrt{1+e^{3x}}\right)^3$; 2) $y=\operatorname{arctg}(\sin^2 x)$; 3) $y=2^{x^2}e^{-2x}$; 4) $y=(\ln x)^{\cos x}$;

5) $y=3^{\arccos\frac{x}{2}}$; 6) $x^3-y^3=3xy$; 7) $\begin{cases} x=e^{3t}, & y'_x=? \\ y=3t+e^{3t}, & y''_{xx}=? \end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$e^{0,1}.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{x^3}{9-x^2}$; 2) $\rho=e^{\varphi}$.

Варіант 21

1. Знайти $a=\lim\limits_{x\to\infty}a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ при всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо $a_n=\dfrac{2n^3}{n^3-2}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)(7n^3-6)}{\left(2n^2-6n+2\right)^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[3]{7+9n^3}-2n\right)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-4}{3n+2}\right)^{\frac{n+1}{3}}$; 4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$; 6) $\lim\limits_{x\to3\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos 3x}$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{\sin 2x-\sin x}$;

9) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1-2^{4-x^2}}{2\left(\sqrt{2x}-2\right)}$; 10) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{4}{x}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0$, якщо $\alpha(x)=e^{x^9}-\cos 2x^5, \beta(x)=\operatorname{arctg}x.$

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases}\cos x, x<\dfrac{\pi}{4},\\ 1, \dfrac{\pi}{4}<x<3,\\ 2x-5, x\ge 3;\end{cases}$ 2) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-4}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y=\ln\left(e^x+\sqrt{\sin e^{-x}}\right)$; 2) $y=x^2\left(e^{\frac{1}{x}}+1\right)$; 3) $y=\dfrac{\left(e^{2x}+1\right)}{e^x}$; 4) $y=\left(\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}$;

5) $y=e^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$; 6) $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=x^2-y^2$; 7) $\begin{cases}x=t^3\ln t, & y'_x=?\\ y=t^2\ln t, & y''_{xx}=?\end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$\sqrt[3]{9}$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{x^2+6}{x^2+1}$; 2) $\rho=5+3\sin 2\varphi.$

Варіант 22

1. Знайти $a = \lim\limits_{x\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо $a_n = -\dfrac{n^3}{2n^3 - 1}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^3 - (2n+3)^3}{(2n+1)^2 + (2n+3)^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2} - \sqrt{n^2-3}\right)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2n+1}{n^2-4n+2}\right)^n$;

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 3x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x} - e^{2x}}{\operatorname{tg} x + x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 4\pi} (\cos x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \to 0$, якщо $\alpha(x) = \sqrt{1 + x\sin^4 x} - 1, \beta(x) = \ln(1+x)$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \begin{cases} -x, x \le 0, \\ x^3, 0 < x \le 2, \\ x+4, x > 2; \end{cases}$ 2) $y = 7^{\frac{x+3}{x-2}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y = (\sin 2x + x + 3)\dfrac{1}{\cos x}$; 2) $y = x\cos\dfrac{x}{2}\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}$; 3) $y = \dfrac{1-x^2}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $y = \sqrt[x]{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$;

5) $y = \sqrt[3]{x}\operatorname{arctg} x$; 6) $e^{xy} = x + y + 2$; 7) $\begin{cases} x = \arccos t, & y'_x = ? \\ y = \sqrt{1-t^2}, & y''_{xx} = ? \end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$\sqrt{122}.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \dfrac{4x^3}{x^3 - 1}$; 2) $\rho = a\operatorname{tg}\varphi; a > 0$.

Варіант 23

1. Знайти $a=\lim\limits_{x\to\infty}a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ при всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо $a_n=\dfrac{5n^2+1}{10n^2-3}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^4-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\pi-4x}{\sqrt{2}-2\cos x}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-e^{3x}\right)^{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\mathrm{tg}2x-\sin x}$; 9) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\mathrm{tg}\pi x}{x+2}$;

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{\sin x}{\mathrm{ctg}x}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0$, якщо $\alpha(x)=e^{x^{10}}-\cos^2 3x^9, \beta(x)=\mathrm{arctg}x.$

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases}x+2, x\le-1,\\ 1-x, -1<x\le1,\\ \ln x, x>1;\end{cases}$ 2) $y=2^{\frac{x-1}{x+1}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y=\dfrac{x+1}{1-e^x}-\ln\left(1+e^x\right)$; 2) $y=5^{\sin 2x}\,\mathrm{c}tg2x$; 3) $y=\left(x\sqrt{x}-5\right)\sqrt[3]{x}$; 4) $y=(\sin 3x)^{5x}$;

5) $y=\log_3\left(3x-\sqrt[5]{x}\right)$; 6) $e^{\frac{x}{y}}=x\sqrt{y}$; 7) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{t+1}, & y'_x=?\\ y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2, & y''_{xx}=?\end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$\sqrt[7]{130}.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y=xe^{\frac{1}{x}}$; 2) $\rho=\mathrm{ctg}\varphi.$

Варіант 24

1. Знайти $a=\lim\limits_{x\to\infty}a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ при всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо $a_n=\dfrac{5n+1}{1-2n}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^4}{(n+1)^3-(n-1)^4}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+1}-n\right)n$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^{2n-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$; 5) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}x$;

7) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-e^x}{\arcsin x+x^3}$; 9) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$;

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\cos2x}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0$, якщо $\alpha(x)=\sqrt[3]{1+x^6}-1, \beta(x)=e^{x^2}-1$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases}-1, x<0,\\ \cos x, 0\le x\le\pi,\\ 1-x, x>\pi;\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y=(x-1)e^{\frac{1}{2}x^2}$; 2) $y=\ln\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x}$; 3) $y=x\arcsin\dfrac{1}{x}$; 4) $y=\sqrt[x]{1-e^x}$;

5) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$; 6) $\sqrt{xy}=\ln(y+x)$; 7) $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin^4\dfrac{t}{2},\end{cases}$ $y'_x=?$ $y''_{xx}=?$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$y=\sqrt[4]{x}, x=16,2.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{x^2-11}{4x-3}$; 2) $\rho=2-\sin2\varphi$.

Варіант 25

1. Знайти $a = \lim\limits_{x\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо $a_n = \dfrac{n}{3n+1}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)^3 + (n-2)^3}{n^3+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n} - \sqrt[3]{n^3-1}\right)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-7n+1}{2-5n+6n^2}\right)^{n^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos^3 3x}{x}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\mathrm{ctg}x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - \sin 5x}{e^x - e^{2x}}$; 9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\pi - 3x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\sin x}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \to 0$, якщо $\alpha(x) = e^{x^3} - \cos 4x, \beta(x) = \arcsin x.$

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \begin{cases} 0, x \le -1, \\ x^2 - 1, -1 < x \le 2, \\ 2x, x > 2; \end{cases}$ 2) $y = 8^{\frac{2}{7-x}}.$

5. Знайти похідні функції:

1) $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}x;$ 2) $y = \mathrm{arctg}\ln\dfrac{x}{2};$ 3) $y = \left(\dfrac{4}{\cos x}\right)(1+\cos x);$

4) $y = \sqrt[x]{4-x^2};$ 5) $y = 10^{\log_3 x};$ 6) $\ln(1-y^2) = y\sqrt{x};$

7) $\begin{cases} x = e^{-3t}, & y'_x = ? \\ y = \ln(1+e^t), & y''_{xx} = ? \end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$y = \sin x, x = 136^0.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x+1};$ 2) $\rho = 5 + 3\sin 4\varphi.$

Варіант 26

1. Знайти $a=\lim\limits_{x\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ при всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо $a_n=\dfrac{3-4n}{3+4n}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-2)^3}{n^3+3n^2+8n-7}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n-2)}\right)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{6n+1}\right)^{n^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-e^{x^2}\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{7x}-e^{-5x}}{x-\sin 2x}$; 9) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(x^2-2x\right)}{\sin 3\pi x}$;

10) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0$, якщо $\alpha(x)=\sqrt[3]{1+x^2}-1, \beta(x)=\sin x$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases} x, x\le -2,\\ 1-x, -2<x\le 1,\\ x^2-1, x\ge 1;\end{cases}$ 2) $y=10^{\frac{1}{x-5}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y=\ln\left(2x-3+\sqrt{4x^2-12x+10}\right)$; 2) $y=\sqrt[3]{x}\arcsin\dfrac{x}{3}$; 3) $y=\dfrac{x\sqrt{x}}{1-x^2}$; 4) $y=\left(\sin^2 x\right)^{\ln x}$;

5) $y=3^{\sin^2 2x}$; 6) $\sqrt{\dfrac{y}{x}}=x^2+y^2$; 7) $\begin{cases} x=\sqrt[3]{t}-1, & y'_x=?\\ y=\sqrt[3]{t-1}, & y''_{xx}=?\end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$y=\sqrt[3]{x}, x=125{,}15.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{4}{3+2x-x^2}$; 2) $\rho=3+\cos 4\varphi$.

Варіант 27

1. Знайти $a=\lim\limits_{x\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ при всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо $a_n=\dfrac{1-5n}{2n+1}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-2n^2+4}{3+6n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4}\right)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-5n-5}{n^2-5n+5}\right)^{2n+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\mathrm{ctg}x\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\left(\ln(2x+1)-\ln(2x-1)\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2\mathrm{arctg}x-x}$; 9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$;

10) $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 4}\right)^{\frac{1}{x-4}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0$, якщо $\alpha(x)=e^{x^8}, \beta(x)=\sin x.$

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, x<0,\\ x, 0\le x\le 2,\\ 0, x>2;\end{cases}$ 2) $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-2}{2^{\frac{1}{x}}+2}.$

5. Знайти похідні функції:

1) $y=(2x-1)^4\arcsin\dfrac{1}{2x-1}$; 2) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $y=x^2\mathrm{arcctg}2x^2$; 4) $y=(\cos 2x)^{\sqrt{x}}$;

5) $y=3^{\lg 5x}$; 6) $\sqrt{x^2+y^2}=y^3x^2$; 7) $\begin{cases}x=2(t-\sin t), & y'_x=?\\ y=4(2+\cos t), & y''_{xx}=?\end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$y=\sqrt[3]{2x+\cos x}, x=0,02.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; 2) $\rho=2-\cos 4\varphi.$

Варіант 28

1. Знайти $a=\lim\limits_{x\to\infty}a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n-a|<\varepsilon$ при всіх $n>N(\varepsilon)$, якщо $a_n=\dfrac{n^3-1}{2+3n^3}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^5-5n^4+3}{(2n^2+3)(n^3-6)}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2}\right)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-4}{3n+2}\right)^{2n}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3}{\sqrt{8+x}-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos7x}{5\sin^2x}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x\cdot2^x\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{3x}}{x^2-\operatorname{arctg}x}$; 9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$;

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to0$, якщо $\alpha(x)=\sqrt[4]{1+x^4}-1,\ \beta(x)=\arcsin2x.$

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases}1, & x\le0,\\ 2^x, & 0<x\le2,\\ x+3, & x\ge2;\end{cases}$ 2) $y=3^{\frac{2-3x}{1+5x}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y=\left(5x+\sqrt{25x^2+1}\right)^3$; 2) $y=x\operatorname{ctg}3x\left(1-\sin3x\right)$; 3) $y=\sqrt[3]{x^2}\ln\left(1+x^2\right)$; 4) $y=(\operatorname{ctg}x)^{\frac{2}{x}}$;

5) $y=10^{\frac{1}{1-x^2}}$; 6) $xy=\operatorname{arcctg}\dfrac{y}{x}$; 7) $\begin{cases}x=e^t\\ y=te^{-t}\end{cases}$, $y''_x=?$, $y''_{xx}=?$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$y=\sqrt{1+x+\sin x},\ x=0,01.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y=\dfrac{x^3}{x^4-1}$; 2) $\rho=a\cos5\varphi.$

Варіант 29

1. Знайти $a = \lim\limits_{x\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо $a_n = \dfrac{2n}{4n-3}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)^3}{(3-5n)^4}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n\right)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2+2n-3}{3n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - 1}{x\sin 5x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x^2]{1-2\sin^2\dfrac{x}{2}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{8x}-e^{4x}}{\sin x + \mathrm{tg} 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{\sin x}{\sin 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x \to 0$, якщо $\alpha(x) = e^{x^4} - \cos 4x$, $\beta(x) = \mathrm{tg}\sqrt[3]{x^2}$.

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x) = \begin{cases} 3x+4, x \le 0, \\ x^2-2, -1 < x \le 2, \\ x, x \ge 2; \end{cases}$ 2) $y = 2^{\frac{2x}{x-3}}$.

5. Знайти похідні функції:

1) $y = \sqrt{49x^2+1}\mathrm{arctg} 7x$; 2) $y = 3^{\ln(1-x^2)}\sqrt{1-x^2}$; 3) $y = (\mathrm{arcctg} x)^{\sqrt{x}}$;

4) $\ln(x+y) = \sqrt{1+xy}$; 5) $y = \dfrac{\sin^2 x + \cos x}{\sin x}$; 6) $y = x^2\sqrt[3]{1+x^2}$;

7) $\begin{cases} x = 6t^2 - 4, & y'_x = ? \\ y = 3t^5, & y''_{xx} = ? \end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$y = \sqrt[4]{2x - \sin\frac{\pi x}{2}}, x = 1,01.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x+3}$; 2) $\rho = 2 + \sin\varphi$.

Варіант 30

1. Знайти $a = \lim\limits_{x\to\infty} a_n$ і визначити номер $N(\varepsilon)$ такий, що $|a_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, якщо $a_n = \dfrac{n^2}{7-2n^2}$.

2. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+7}\right)^{n+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+2\sqrt{x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-1)\left(\ln(x+2)-\ln(x-1)\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x}-e^{2x}}{\operatorname{tg}x+\operatorname{arctg}x}$; 9) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg}3x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 2\pi} (\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg}x}{\sin 4x}}$.

3. Визначити порядок малості нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to 0$, якщо $\alpha(x)=\sqrt[4]{1+x^3}-1, \beta(x)=\operatorname{arctg}x.$

4. Дослідити функцію на неперервність:

1) $f(x)=\begin{cases} x+2, x<-1, \\ x^2+1, -1<x\le 1, \\ -x+3, x>1; \end{cases}$ 2) $y=5^{\frac{1-x}{1+2x}}.$

5. Знайти похідні функції:

1) $y=\dfrac{2}{3x-2}\sqrt{-3+12x-9x^2}$; 2) $y=2^{\operatorname{ctg}x}\sin^2 x$; 3) $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt[3]{x^2}}$;

4) $y=x^{\cos 2^x}$; 5) $y=\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$; 6) $\sqrt{xy^3}=\ln\left(x^2+y\right)$;

7) $\begin{cases} x=\cos t+\sin t, & y'_x=? \\ y=\sin 2t, & y''_{xx}=? \end{cases}$

6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

$$y=\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}, x=0,95.$$

7. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y=\left(1-x^3\right)^{\frac{1}{3}}$; 2) $\rho=2+\cos 2\varphi.$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2005. – 648 с.
2. Вища математика. Збірник задач : навч. посіб. / [В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін.] ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2004. – 480 с.
3. Грималюк В. П. Вища математика : навч. посіб. Ч. 1 / Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. – К. : Віпол, 2004. – 376 с.
4. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. – [Изд. 22-е, перераб.]. – СПб. : Профессия, 2005. – 432 с.
5. Сборник задач по математике для втузов Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа / [Болгов В. А., Ефимов А. В., Каракулин А. Ф. и др.] ; под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – [2-е изд.]. – М. : Наука, 1986. – 432 с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа: учеб. пособие для втузов / [Болгов В. А., Ефимов А. В., Каракулин А. Ф. и др.] ; под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – [2-е изд.]. – М. : Наука, 1986. – 368 с.
7. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студентов втузов. Ч. 1 / Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. – М. : Высш. школа, 1986. – 304 с.
8. Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Высшая математика / Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. – К. : Вища шк., 1987. – 552 с.

ЗМІСТ