МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Фізико – математичний факультет

О.В. Борисенко

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Методичні вказівки та навчальні завдання для студентів інженерних спеціальностей (електронне навчальне видання)

Київ

2016

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Методичні вказівки та навчальні завдання для студентів інженерних спеціальностей (електронне навчальне видання)

Укладач : Борисенко О.В., 2016 р., 60 с.

Затверджено Вченою Радою Фізико – математичного факультету

НТУУ «КПІ» (протокол №6 від «24» 06 2016 р.)

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Методичні вказівки та навчальні завдання для студентів інженерних спеціальностей

За напрямом підготовки 6.050403 « Інженерне матеріалознавство»

Укладач : Борисенко О.В.

Рецензенти: Зауличний Я.В., д.ф.-м.н., проф. кафедри металознавства та термічної обробки НТУУ “КПІ”,Буценко Ю.П., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей ФМФ НТУУ «КПІ»

Відповідальний редактор: Швець О.Ю., д.ф.-м.н., проф. кафедри математичної фізики

ВСТУП

Загальний курс математики є фундаментом математичної освіти інженера, має важливе значення для успішного вивчення загальнотеоретичних та спеціальних дисциплін, обумовлених навчальним планом відповідної спеціальності. Дані методичні вказівки «Елементи лінійної алгебри», які містять інформацію з елементів теорії матриць, теорії визначників, загальної теорії лінійних рівнянь, складені згідно діючих програм інженерних спеціальностей таких факультетів НТУУ «КПІ», як інженерно-фізичний, інженерно-хімічний, механіко-машинобудівний та ін. і призначені для студентів першого курсу як денної так і заочної форми навчання. Структура методичних вказівок наступна: на початку кожного параграфу наведено стисло теоретичні відомості з відповідної теми, розглянуто приклади з детальним розв’язуванням та поясненням, перелік завдань, звідки можна вибрати номери для розв’язування в аудиторії на практичному занятті і аналогічні задачі, частина яких з відповідями - для домашньої роботи (з метою закріплення матеріалу). В кінці кожного параграфу дається перелік контрольних питань, мета яких самоконтроль або підготовка до практичного заняття. Кількість завдань, які наведені, дає можливість викладачу вибрати задачі для модульної контрольної або самостійної роботи. Методичні вказівки, крім того, містять завдання для розрахункової роботи. Дана робота (як зручне джерело задач і теоретичних питань) може бути корисною як доповнення до літератури, яка вже використовується на заняттях, для самостійного виконання студентами розрахунково-графічних робіт та при вивченні інших навчальних дисциплін.

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Методичні вказівки та навчальні завдання

(для студентів інженерних спеціальностей)

§ 1. МАТРИЦІ

Упорядкована прямокутна таблиця $m \cdot n$ чисел (елементів) $a_{ij} (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$, яка має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m \times n} ,$$

називається **<u>матрицею</u>** A **розміру** $m \times n$ (матриця містить m рядків та n стовпців) . Елемент, який займає місце в i-му рядку та в j-му стовпцю матриці, позначається a_{ij}. Матриця, у якої кількість рядків і стовпців співпадає ($m = n$) , називається **<u>квадратною</u>** порядку n . Елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ утворюють **<u>головну діагональ матриці</u>**, а елементи $a_{1n}, ..., a_{n1}$ - **<u>побічну</u>**.

Квадратна матриця, головна діагональ якої складається із одиниць, а всі інші елементи нулі, називається **<u>одиничною</u>** $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$.

Матриця, всі елементи якої є нулі, називається **<u>нульовою</u>** $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}_{m \times k}$. Вектори можна розглядати як частинний випадок матриць: **<u>вектор-рядок</u>** – це матриця розміру $1 \times n$, **<u>вектор-стовпець</u>** – розміру $n \times 1$.

Квадратна матриця, головна діагональ якої складається із елементів $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, а іншими елементами є нулі, називається **<u>діагональною</u>**.

Матриця вигляду $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається **<u>верхньою трикутною</u>** (під головною діагоналлю – нульові елементи).

Дії над матрицями.

Дві матриці одного розміру $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ називаються **<u>рівними</u>**, якщо для всіх i, j $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, k}$.

<u>Множення матриці на число</u>. Якщо $A = (a_{ij})$, $k - const$, то $k \cdot A = (k \cdot a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, k}$.

<u>Додавання</u> <u>матриць</u> однакового розміру. Якщо $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$, то $A + B = C = (c_{ij})$, де $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, k}$.

<u>Різниця</u> <u>двох матриць</u> однакового розміру. Якщо $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$, то $A - B = A + (-1) \cdot B = (a_{ij} - b_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, k}$.

<u>Добуток</u> <u>двох матриць.</u> Якщо $A_{m\times \boldsymbol{n}} = (a_{ij})$ і $B_{\boldsymbol{n}\times h} = (b_{jk})$, то $C_{m\times h} =$

$$= (c_{ik}) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right), i = \overline{1, m}, k = \overline{1, h},$$

тобто, щоб отримати елемент c_{ik}, необхідно елементи i-го рядка матриці A помножити на відповідні елементи k-го стовпця матриці B і отримані добутки додати. Зауважимо, що $A \cdot B \neq B \cdot A$ в загальному випадку;

Матриці, для яких виконана рівність $A \cdot B = B \cdot A$, називаються **<u>комутативними</u>**. Існує добуток матриць тільки при умові їх **<u>узгодженого розміру</u>**: $A_{m\times \boldsymbol{n}} B_{\boldsymbol{n}\times k} = C_{m\times k}$ (кількість стовпців лівої матриці дорівнює кількості рядків правої матриці).

Приклад 1.1. Знайти $3D - 2E$, якщо $D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

■ $3D - 2E = 3\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 18 & 9 \\ 0 & 4 & -3 \\ 12 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. ■

Приклад 1.2. Знайти AC, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

■$AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot 5 & 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot 0 + 1\cdot 6 \\ -1\cdot 3 + 4\cdot 5 & -1\cdot 1 + 4\cdot 2 & -1\cdot 0 + 4\cdot 6 \end{pmatrix}_{2\times 3} =$$

$= \begin{pmatrix} 11 & 4 & 6 \\ 17 & 7 & 24 \end{pmatrix}$. ■

Приклад 1.3. Перемножити матриці A і B, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

■$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 9 & 3 & -6 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}_{3\times 3}$;

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 2}$. ■

Приклад 1.4. Знайти добуток матриць $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$.

■ $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_{2\times1}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}_{1\times2}=\begin{pmatrix}6 & 15\\2 & 5\end{pmatrix}_{2\times2}$; $\begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}_{1\times2}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_{2\times1}=(11)_{1\times1}$. ■

Приклад 1.5. Знайти $f(B)$, якщо $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 3\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-2x+3$.

■$f(B)= B^2-2B+3E=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1 & -8\\0 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 4\\0 & -6\end{pmatrix}++\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\0 & 6\end{pmatrix}$. ■

Для матриць A, B, C справедливі наступні рівності:

$A(BC)=(AB)C,\ (A+B)C=AC+BC,\ C(A+B)=CA+CB.$

Якщо задана матриця $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, то матриця $A^{\text{т}}=\left(a_{ji}\right)_{n\times m}$ називається **<u>транспонованою</u>** по відношенню до A, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,k}$.

Якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\5 & 3 & 7\end{pmatrix}$**,** то транспонованою є матриця $A^{\text{т}}=\begin{pmatrix}1 & 5\\0 & 3\\-2 & 7\end{pmatrix}$.

Якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\\-1 & 1\end{pmatrix}_{3\times2}$, то транспонованою є матриця $A^{\text{т}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}_{2\times3}$.

Якщо $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\9 & 3 & 0\\4 & 0 & -4\end{pmatrix}_{3\times3}$, то транспонованою є матриця $A^{\text{т}}=$

$=\begin{pmatrix}1 & 9 & 4\\-1 & 3 & 0\\-2 & 0 & -4\end{pmatrix}_{3\times3}$.

Приклад 1.6. Знайти x, y , при яких матриця $B=\begin{pmatrix}x & -2\\y & 3\end{pmatrix}$ буде комутативною з матрицею $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 3\end{pmatrix}$.

■ Знайдемо $A\,B = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & -2\\ y & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-2y & -8\\ 3y & 9\end{pmatrix}$ і $BA =$

$= \begin{pmatrix}x & -2\\ y & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & -2x-6\\ y & -2y+9\end{pmatrix}$.

$AB = BA$, якщо відповідні елементи отриманих матриць-добутків рівні , тобто

$\begin{cases} x-2y = x\\ -8 = -2x-6\\ 3y = y\\ 9 = -2y+9\end{cases}$ звідки $\begin{cases} x = 1\\ y = 0\end{cases}$. ■

Завдання №1 (для аудиторної та домашньої роботи)

1) Визначити розмір матриць та виписати елементи a_{23}, a_{12}, a_{31}, a_{23}, якщо вони існують

$a)$ $\begin{pmatrix}3 & 2 & 5 & 1\\ 7 & 5 & 2 & 8\\ 2 & 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 7\\ 4 & 0\\ 1 & 9\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}0 & 9 & 8\\ 3 & -1 & 7\\ 6 & 4 & 5\\ 3 & 7 & 9\\ 1 & 5 & 4\end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix}0 & 8 & 7 & 9\\ -1 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix}$,

є) $\begin{pmatrix}6 & 2 & 5 & 2 & -3\\ 7 & 5 & 2 & 1 & 4\\ -2 & 3 & 6 & -1 & 2\end{pmatrix}$, ж) $\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 3\\ 1\\ 9\end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix}4 & 2\\ -3 & 6\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{pmatrix}$. Знайти $A+B,\ 2A,\ 3A-B$.

3) $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 5 & 3 & 7\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1 & 7 & 2\\ 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$. Знайти $A+B, -3A,\ 2A-B$.

4) $D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Знайти $A - D,\ 4A$.

5) Знайти матрицю, X для якої $A + 2X = 3B$, якщо

$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6) Знайти матрицю, X для якої $A - 3X = 2B$, якщо

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7) Показати, що $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$ і $(2A)^{\mathrm{T}} = 2A^{\mathrm{T}}$,

якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

8) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Знайти $A + B + A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$.

9) Показати, що $A + D - D^{\mathrm{T}} = O$, де $A = \begin{pmatrix} 0 & a-1 & a^2-1 \\ 1-a & 0 & b^2-c \\ 1-a^2 & c-b^2 & 0 \end{pmatrix}$,

$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

10) Дано $A_{m\times n}$, $D_{r\times h}$. Знайти розмір матриці B, якщо ABD існує.

11) Дано $A_{3\times 4}$, $D_{5\times 2}$. Знайти розмір матриці B, якщо ABD існує.

12) Дано $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти $(B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

13) Дано $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти A^{T}.

14) Знайти розмір матриці A, якщо: а) $B_{\mathbf{2}\times 3}A = C_{2\times 1}$, б) $B_{\mathbf{3}\times 4}A = C_{3\times 2}$, с) $AB_{\mathbf{2}\times 3} = C_{4\times 3}$, д) $AB_{\mathbf{1}\times 3} = C_{2\times 3}$, є) $B_{\mathbf{3}\times 5}A == C_{3\times 1}$, ж) $B_{\mathbf{2}\times 4}A = C_{2\times 1}$.

15) Дано $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$

Знайти $A(BC)$ та $(AB)C$.

16) Дано $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$

Знайти $A(B+C)$ та $AB+AC$.

17) Дано $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$

Знайти а)$(A+B)C$, б) $A+B-(A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}})$.

Перемножити матриці, попередньо записавши їх розмір (18 - 21)

18) а) $\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 3\\ -2 & 7\end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$;

20) а) $\begin{pmatrix}6 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}7 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$; г)$\begin{pmatrix}4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$;

21) а) $\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 2 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3\\ -5 & 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 1\\ 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2 & 6\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & 1\end{pmatrix}\cdot$

$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$; г)$\begin{pmatrix}5 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$.

22) Знайти $f(B)$, якщо $B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ f(x)=x^2-3x+$

$+2$ (Див. Приклад 1.5).

23) Показати, що матриця $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ є коренем многочлена $f(x) = x^2 - 5x + 3$.

24) Показати, що матриця $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ є коренем многочлена $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

25) Показати, що матриця $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ задовольняє рівняння $x^2 - (a + d)x + ad - bc = 0$.

26) Знайти $f(B)$, якщо $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 4x$.

27) Знайти матриці, які комутативні з даними матрицями

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дати означення матриці розміру $m \times n$.
2. Дати означення квадратної матриці.
3. З яких елементів матриці складається її головна діагональ?
4. Дати означення одиничної матриці.
5. Дати означення нульової матриці.
6. Дати означення верхньої трикутної матриці.
7. Дати означення матриці-вектора, матриці-стовпця.
8. Дати означення діагональної матриці.
9. Матриці якої розміру неможливо додати?
10. Сформулювати правило додавання матриць.
11. Які матриці називаються рівними?
12. Як помножити матрицю на число?
13. Як відняти від однієї матриці іншу?
14. Сформулювати правило множення матриць.

15. В чому полягає узгодженість вимірностей матриць, які перемножуються?
16. Чи можна помножити квадратну матрицю на неквадратну?
17. Чи може добуток матриць бути числом?
18. Які матриці називаються комутативними?
19. Чи можливо додати матриці, які можна перемножити?
20. Чи можливо отримати нульову матрицю при перемноженні ненульових матриць?
21. Дати означення транспонованої матриці.
22. Чи можлива ситуація, коли матриця дорівнює своїй транспонованій?

Індивідуальні завдання №1

Знайти $A \cdot B + 2B - 3E$ і виконати можливий варіант множення матриць C і D

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\1&2&1\\1&0&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&5\\3&-1&2\\0&1&-3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}9&3\\-8&2\\7&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}3&-3&2\\4&5&6\end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix}-4&3&1\\2&0&-3\\1&-1&6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&4\\4&0&1\\2&-3&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}7&4\\-8&-5\\2&6\end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}-1&5&-2\\0&-3&4\\3&1&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&7\\2&1&-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&-3\\2&-4\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}3&1&-5\\2&4&6\end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix}1&-2&6\\0&1&-2\\3&-4&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2&4&0\\1&-3&5\\7&0&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}7&-8&2\\1&-3&2\\-4&1&3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2\\-5\\-4\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-2&1\\5&7&8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&-4&2\\5&-3&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-6&3&8\\2&7&4\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}9&1\\-5&3\\-4&2\end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-2&1\\5&7&8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&-4&2\\5&-3&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-6&2\\-1&0\\6&-3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}4&-1&2\end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-2&1\\5&7&8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&-4&2\\5&-3&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&2&-1\\0&5&-8\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}4&-1\\3&2\end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\2&-1&-2\\5&3&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&1\\-1&1&0\\1&2&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}8\\2\\7\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}4&-2&3\\9&8&-3\\5&-1&1\end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&-3&7\\5&0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5&8&0\\-3&0&1\\-1&2&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&1\\-1&4\\-3&2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&5&2\\3&-1&6\end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 4 & 5 & 8\\ -3 & 0 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5\\ -3 & 0 & 2\\ 0 & 4 & -4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-9 & 3 & 8\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 9\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & -1\\ 2 & 7 & 1\\ 0 & -3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 0 & 7 & -5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -7 & 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}9 & 2 & -4\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 8\\ -3 & 4 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 0\\ 1 & -3 & 1\\ -2 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 3\\ 1 & -4 & -2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-5\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$

17. $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ -3 & 0 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 6 & -2 & 9\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -6 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

18. $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -3\\ 1 & 0 & 2\\ -7 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\\ 1 & -2 & 3\\ 9 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 8 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3 & -4 & 6\end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 5 & 0\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6 & 1 & 3\\ -4 & 2 & 7\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0 & -7\\ -5 & 9\end{pmatrix}$

20. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 0 & 5\\ 0 & 7 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & -3 & 1\\ -1 & 4 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}9 & -7 & 8\\ -5 & 4 & -6\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$

21. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -4\\ 0 & 1 & 5\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -4 & 0\\ 2 & 5 & 7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -4\\ 1 & 6\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$

22. $A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 5\\ -3 & 0 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 0 & -7 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 3 & 0\\ 1 & -5\end{pmatrix}$

23. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

24. $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$

25. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 9 & -2 & -5 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

26. $A=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

27. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 7 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

§ 2. ВИЗНАЧНИКИ

В шкільному курсі алгебри детально розбирається система двох лінійних рівнянь з двома невідомими $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ і доводиться, що ця система визначена тоді і тільки тоді, коли $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

$\left(x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}};\ \ y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right)$.

Число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ називається **визначником** матриці 2- го порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Визначник позначається $|\boldsymbol{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ або $\boldsymbol{det\,A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Приклад 2.1. $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) = 20 + 6 = 26.$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)$ називається **<u>матрицею системи</u>**, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – **<u>матрицею невідомих</u>**, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ – **<u>матрицею вільних членів</u>**. Тоді систему можна записати у вигляді $AX = B$, який називається **<u>матричною формою системи</u>** лінійних алгебраїчних рівнянь.

<u>Визначником матриці 3-го порядку</u> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{det\, A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}).$

(до останньої формули приводять аналогічні міркування при розгляданні СЛАР 3-го порядку). Формулу запам'ятовувати не потрібно, достатньо зрозуміти алгоритм, згідно якому виписана сума співмножників, для розуміння алгоритму зручно користуватися схемами:

Приклад 2.2. Обчислити $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$.

■ $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & -1 & 3 \\ 0 & \mathbf{4} & 1 \\ -2 & 5 & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 \cdot 3 - (3 \cdot 4(-2) +$

$$+1 \cdot 5 \cdot 2 + 0 \cdot (-1)(-2)) = -16 + 2 - (-24 + 10) = 0. \blacksquare$$

Визначник є числовою характеристикою квадратної матриці.

Квадратна матриця, визначник якої не є нулем , називається **невиродженою.** Якщо $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{0}$,то $\boldsymbol{A}$ - **вироджена** матриця.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n-1)$-го порядку, отриманий із визначника n-го порядку після викреслювання i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається вираз $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Якщо розглянути матрицю $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то мінором і алгебраїчним доповненням елемента, наприклад, a_{32} відповідно будуть: $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}$, $\quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} =$

$= a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$.

Властивості визначників

(деякі властивості продемонструємо на визначниках 2-го порядку)

1. При транспонуванні квадратної матриці її визначник не змінюється

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановці двох будь-яких рядків (стовпців) визначника його знак змінюється на протилежний

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

3. Визначник, який має два будь-яких однакових рядки (стовпці), дорівнює нулю.

4. Визначник, будь-який рядок (стовпець) якого складається з нулів, дорівнює нулю.

5. Визначник, два будь-які рядки (стовпці) якого мають відповідні прямо пропорційні елементи, дорівнює нулю.

6. Спільний множник всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) можна винести за знак визначника

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} .$$

7. Визначник $n-$го порядку, який має і-й ряд, поданий у вигляді суми двох доданків $a_{ij} = b_j + c_j,\ j = \overline{1,n}$ можна подати як суму двох визначників, у яких всі ряди, крім і-го, такі самі, як в заданому визначнику, а і-й ряд в одному визначнику складається з елементів b_j, в другому – з елементів c_j

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & a_{12} \\ b_2 + c_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} .$$

8. Визначник не змінюється, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати відповідні елементи інший рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} + a_{21} & ka_{12} + a_{22} \end{vmatrix} .$$

9. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника помножених на відповідні їм алгебраїчні доповнення ($\det A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}M_{ik}$ – розклад за $i-$м рядком) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} +$
$+a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12}$.

10. Якщо всі елементи, розташовані по один бік від головної діагоналі визначника, дорівнюють нулю, то сам визначник дорівнює добутку елементів, з яких складається його головна діагональ.

Приклад 2.3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами 2-го рядка.

■ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)A_{21} + 2A_{22} + 1A_{23} =$

$$= -(-1)^{2+1}M_{21} + (-1)^{2+2}M_{22} + (-1)^{2+3}M_{23} =$$

$= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -14 - 7 - 7 = -28.$ ■

Приклад 2.4. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + (-2)A_{32} = 4 \cdot$ $(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot\cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-6 - 10) +$ $2(2 + 3) = 74.$

Приклад 2.5. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6.$

Визначники 4 –го та вищих порядків зручно обчислювати з використанням властивостей 8 і 9. Чим більше нульових елементів в деякому вибраному рядку (стовпці) (використавши властивість 8, можна в рядку (стовпці) зробити всі нулі, крім одного елементу, тоді розклад визначника за елементами вибраного рядка (стовпця) буде містити лише один доданок), тим простіші обчислення визначника .

Приклад 2.5. Обчислити $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & \mathbf{1} \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

■ $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & \mathbf{1} \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ =|зробимо, наприклад, в 4-му стовпчику всі нулі крім елемента a_{24} : додаємо 2-й рядок до 1-го і до 3-го, множимо 2-й рядок на (-2) і додаємо до 4-го рядка| = $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & \mathbf{1} \\ 3 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & -9 & 0 \end{vmatrix} =$

$$1 \cdot A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ 3 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} \mathbf{-1} & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & \mathbf{3} & \mathbf{8} \\ 0 & \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-1)A_{11} = -3(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -3(27-40) = 39. \blacksquare$$

Приклад 2.6. Обчислити $\begin{vmatrix} 102 & 2 & 6 \\ 101 & 1 & -1 \\ 99 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ (використати властивості визначників).

$$\blacksquare \begin{vmatrix} 102 & 2 & 6 \\ 101 & 1 & -1 \\ 99 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 & 2 & 6 \\ 100 & 1 & -1 \\ 100 & 3 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 100 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 100 \cdot 15 +$$

$$+2 \cdot 16 = 1532. \blacksquare$$

Завдання №2 (для аудиторної та домашньої роботи)

Обчислити визначники

1) а) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$, є) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -7 & 2 & 5 \end{vmatrix}$;

2) а) $\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}$,

д) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, є) $\begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 7 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$;

3) а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 10 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 8 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 8 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix}$,

д) $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -14 \\ -1 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 8 \end{vmatrix}$;

Знайти визначники:

4) а) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} tgx & -1 \\ 1 & tgx \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} a+c & a-c \\ a-c & a+c \end{vmatrix}$,

г) $\begin{vmatrix} a+d & -2(a+d) \\ d & a-d \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} cosx & cosy \\ sinx & siny \end{vmatrix}$, є) $\begin{vmatrix} \frac{cos^2t}{1+sin^2t} & \frac{2sint}{1+sin^2t} \\ \frac{-2sint}{1+sin^2t} & \frac{cos^2t}{1+sin^2t} \end{vmatrix}$,

ж) $\begin{vmatrix} cosx & sinx \\ sinx & cosx \end{vmatrix}$;

5) а) $\begin{vmatrix} \sin 2x & \sin 3x \\ \cos 2x & \cos 3x \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$;

6) а) $\begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ \sin 3x & \cos 3x \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} \frac{(1-t^2)^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & \frac{-(1+t^2)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$;

7) а) $\begin{vmatrix} sin^2x & cos^2x \\ cos^2x & sin^2x \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} a & b \\ 2a-b & a \end{vmatrix}$;

8) Знайти мінори та алгебраїчні доповнення елементів a_{11}, a_{12}, a_{23}, a_{32} матриць а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$;

9) Обчислити :

а) $\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix}$

(Відповідь: $b^2(3a+b)$, використати властивість 8);

10) а) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$

(використати властивості $7-9$) ;

11) Обчислити : а) $\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a \end{vmatrix}$ (Відповідь: ab^2), б) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

(Відповідь: $(a-b)(b-c)(c-a)$), в) $\begin{vmatrix} sin^2x & 1 & cos^2x \\ sin^2y & 1 & cos^2y \\ sin^2z & 1 & cos^2z \end{vmatrix}$

(Відповідь: 0, використати властивість 8);

12) Розв'язати рівняння , користуючись лише властивостями визначника:

$\begin{vmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & x+5 \end{vmatrix} = 0$ (Відповідь: $x =$ -2);

13) Розв'язати рівняння , користуючись лише властивостями визначника:

$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ (Відповідь: $x = 0$);

14) Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-x & 2 \\ 8-x & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (Відповідь: $x \in \{3; 5\}$);

15) Знайти корені рівняння а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5-x^2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5-x^2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$, (Відповідь: $\{\pm 1; \pm 2\}$);

16) Обчислити : а) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (Відповідь: 6);

б) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & 1 \\ 6 & 9 & -7 & 15 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ (Відповідь: 0), в) $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 7 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & -4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

(Відповідь: 52), г) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ (Відповідь: -12);

17) Обчислити : а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (Відповідь: -63),

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$ (Відповідь: 80);

18) Обчислити : а) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (Відповідь: -9),

б) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$ (Відповідь: 18);

19) Обчислити : а) $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$ (Відповідь: 71),

б) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ -4 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ (Відповідь: 346);

20) Обчислити : а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 4 & 4 & 4 & \dots & 4 \\ 4 & 4 & 6 & \cdots & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 4 & 4 & 4 & \cdots & 2n \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$;

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що називається визначником другого порядку? Який метод його обчислення?
2. Що називається визначником третього порядку? Який метод його обчислення?
3. Які операції не змінюють величину визначника? Як використати ці операції для обчислення визначника?
4. Що називається мінором елемента визначника?
5. Що називається алгебраїчним доповненням елемента визначника?
6. Що розуміється під розкладом визначника за елементами його рядка (стовпця)?
7. Як обчислити визначник порядку вище третього?
8. Чому дорівнює сума добутків всіх елементів рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів паралельного ряду? Відповідь обґрунтувати.

9. За яких умов визначник дорівнює нулю?
10. Чому дорівнює визначник трикутної матриці?
11. Чому дорівнює визначник одиничної матриці?
12. Як зміниться визначник 5-го порядку, якщо у всіх його елементів змінити знак на протилежний?
13. Як зміниться визначник 5-го порядку, якщо його останній рядок поставити першим, а всі інші зсунути вниз, зберігаючи їх порядок?
14. Чи дорівнює визначник суми двох матриць сумі їх визначників?
15. Як зміниться визначник 3-го порядку, якщо до кожного рядка, починаючи з другого, додати попередній рядок?
16. Скільки доданків містить повний розклад визначника 7-го порядку?
17. Якщо визначник 7-го порядку заданої матриці дорівнює 5, то чому дорівнює визначник відповідної транспонованої матриці? матриці, помноженої на 2?

Індивідуальні завдання №2

Обчислити визначник

1. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	2. $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} -3 & 6 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	4. $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & - \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}$	6. $\begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
7. $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$	8. $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}$
9. $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	10. $\begin{vmatrix} 8 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$
11. $\begin{vmatrix} -6 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ -7 & -1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$	12. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \\ -7 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$
13. $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$	14. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$
15. $\begin{vmatrix} -2 & -10 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	16. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	18. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$
19. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 8 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	20. $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \\ -6 & -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$
21. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ -4 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix}$	22. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
23. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -2 & -5 \end{vmatrix}$	24. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	26. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
27. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	

§3 Ранг матриці

Нехай задано матрицю A розміру $m \times n$. Виділимо в матриці A будь-які k рядків і стільки ж стовпців, де k не більше чисел m і n. Визначник порядку k, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, задає мінор k - го порядку матриці A.

<u>Рангом матриці</u> A називають найвищий порядок відмінного від нуля мінору цієї матриці й позначають $r(A)$ або $rang\, A$. $0 \le r \le \min(n, m)$ На практиці пошук рангу матриці ґрунтується на такому твердженні: **ранг матриці** не зміниться, якщо над нею виконати **<u>елементарні перетворення</u>**, а саме:

1) перестановка місцями двох рядків (стовпців) ;

2) помноження кожного елементу рядка (стовпця) на ненульовий множник;

3) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів, помножених на одне й те саме число, іншого рядка (стовпця).

Скориставшись елементарними перетвореннями, матрицю можна звести до діагональної (всі елементи матриці, крім $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$, $r \le \min(n, m)$, дорівнюють нулю). Тоді ранг матриці буде дорівнювати r.

Якщо матрицю звести до верхньої трикутної або ступінчатої (трапецієвидної) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, то її ранг буде дорівнювати кількості ненульових рядків .

Визначник квадратної матриці A $n -$ го порядку пов'язаний з рангом цієї матриці наступним чином: $\boldsymbol{det\, A = 0 \Leftrightarrow rang\, A < n}$ та

$\boldsymbol{det\, A \neq 0 \Leftrightarrow rang\, A = n}$.

Приклад 3.1. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -9 \end{pmatrix}$.

■Зведемо матрицю до верхньої трикутної або ступінчатої: множимо 1-й рядок матриці на (-1) і додаємо до $2 -$ го і $3 -$ го рядків відповідно $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -9 \end{pmatrix} \backsim$

$\backsim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ другий рядок помножили на 2 і додали до 3-го рядка. Оскільки кількість ненульових рядків – два, то і ранг матриці дорівнює два . ■

Приклад 3.2. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

$$■\begin{pmatrix}3&1&1&1\\1&5&1&1\\1&1&7&1\\1&1&9&1\\1&3&5&7\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}1&3&5&7\\1&5&1&1\\1&1&7&1\\1&1&9&1\\3&1&1&1\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}1&3&5&7\\0&2&-4&-6\\0&-2&2&-6\\0&-2&4&-6\\0&-2&-4&-6\end{pmatrix}\backsim$$

$$\begin{pmatrix}1&3&5&7\\0&2&-4&-6\\0&0&-2&-12\\0&0&0&-12\\0&0&-8&-12\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}1&3&5&7\\0&2&-4&-6\\0&0&-2&-12\\0&0&0&-12\\0&0&0&36\end{pmatrix}\backsim\begin{pmatrix}1&3&5&7\\0&2&-4&-6\\0&0&-2&-12\\0&0&0&-12\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$, ранг

матриці дорівнює чотири. ■

Завдання №3 (для аудиторної та домашньої роботи)

Знайти ранг матриці

1) $\begin{pmatrix}4&3&5&-2\\1&0&2&-1\\2&3&1&0\end{pmatrix}$; **2)** $\begin{pmatrix}1&4&10\\7&8&18\\8&7&17\end{pmatrix}$; **3)** $\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}1&4&6\\5&-1&2\\-1&6&2\end{pmatrix}$; **5)** $\begin{pmatrix}3&2&1&2\\2&0&-1&1\\0&4&5&1\end{pmatrix}$; **6)** $\begin{pmatrix}2&0&1&3&5\\3&-2&-1&2&3\\-1&2&2&1&2\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&2\\8&0&2\\4&0&0\end{pmatrix}$; **8)** $\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\4&0&4&9\\3&1&2&5\\1&3&-2&-3\end{pmatrix}$;

9) $\begin{pmatrix}1&1&-1&1&1\\1&1&1&2&-1\\1&2&1&-1&2\\1&2&-1&-2&4\end{pmatrix}$; **10)** $\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&-3\\2&0&1\end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix}2&1&1&1\\-1&2&0&1\\-1&3&0&1\\1&4&1&2\end{pmatrix}$; **12**) $\begin{pmatrix}2&0&2&0&2\\0&1&0&1&0\\2&1&0&2&1\\0&1&0&1&0\end{pmatrix}$; **13**) $\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\3&-1&2&0\\1&3&4&-2\\4&-3&1&1\end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}$; **15)** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповіді: **5)** 2**;** **6)** 2; **7**) 3; **8)** 2; **9**) 3; **10)** 2; **11**) 3; **12**) 3; **13)** 2;

14) 2;

Індивідуальні завдання №3

Знайти ранг матриці

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -11 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	6. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	8. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 15 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	10. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	12. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$	14. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 16 & 1 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	16. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}$	18. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	20. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
21. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	22. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
23. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 7 & 8 & 18 \\ 8 & 7 & 17 \end{pmatrix}$	24. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$
25. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$	26. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$
27. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix}$	

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дати означення рангу матриці.
2. Яким чином можна обчислити ранг матриці?
3. Чи зміниться ранг матриці, якщо її помножити на два?

4. Чи може ранг матриці дорівнювати нулю?
5. Чи може ранг матриці бути від'ємним числом?
6. Чи зміниться ранг матриці, якщо до неї приписати останній рядок?
7. Чи змінює ранг матриці її транспонування?
8. Як пов'язані між собою визначник та ранг матриці?

§ 4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається **<u>оберненою до невиродженої</u>** матриці A, якщо $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E.$

Обернена матриця знаходиться за формулою $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{|A|}\tilde{A},$ де A_{ij} - алгебраїчні доповнення елемента a_{ij} , а

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ - приєднана (або союзна) матриця.

Приклад 4.1. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

■Якщо $A^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 6 = 10,$ то $A^{-1} =$

$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$. ■

Приклад 4.2. Знайти обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ матрицю A^{-1}.

■Якщо $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 8 & 10 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 0 & 3/10 \\ 2/5 & 0 & -1/10 \\ 4/5 & 1 & -7/10 \end{pmatrix}. \ ■$$

Ще один **<u>спосіб знаходження оберненої матриці</u>** продемонструємо на прикладі:

Приклад 4.3. Знайти матрицю обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

■Припишемо до матриці A справа одиничну матрицю того самого порядку і елементарними перетвореннями приводимо ліву матрицю до одиничної, при цьому матриця, яка утвориться справа і буде оберненою до заданої :

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ (помножимо 1-й рядок на (-3) і додаємо до 2-го, помножимо 1-й рядок на (-1) і додаємо до 3-го рядка)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -14 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -14 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$(\text{поміняли місцями другий і третій рядки, множимо другий рядок на } (-4) \text{і}$

$\text{додаємо до } 3-\text{го})$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -2 \end{array}\right)$$ (поділили 3-й рядок на 2)

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -3/2 & -5/2 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -2 \end{array}\right)$$ (помножили 3-й рядок на 4 і додали до 2-го, - на (-5) і додали до 1-го) $\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -3/2 & -5/2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -2 \end{array}\right)$(другий рядок помножили на (-2) і додали до 1-го) $\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 3/2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -2 \end{array}\right)$

звідки випливає: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ 1/2 & 1/2 & -2 \end{pmatrix}$. ■

Матричний спосіб розв'язування СЛАР

Розглянемо квадратну СЛАР n-го порядку

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

. Позначимо головну матрицю системи, матрицю невідомих та матрицю вільних членів відповідно

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

, тоді систему можна переписати у матричному вигляді $AX=B.$ Якщо $\det A \neq 0,$ то існує A^{-1}. Із $AX=B \Longrightarrow$ $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}B$, звідки

$X=A^{-1}B$, оскільки $A^{-1}\cdot A = E$.

Якщо всі елементи матриці B є нулями, то така система називається **однорідноюСЛАР** , а якщо хоч один елемент цієї матриці не нуль, то – **неоднорідною СЛАР.**

Отримана формула $X = A^{-1}B$ дає можливість розв'язати систему **<u>матричним способом</u>**.

Приклад 4.4. Розв'язати систему $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$ матричним способом**.**

$\blacksquare A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 23$, $A^{T} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$,

$A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 19 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/23 \\ -18/23 \end{pmatrix}$. $\blacksquare$

Приклад 4.5. Розв'язати систему $\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 6y + z = 2 \\ 4x + 8y - z = 2 \end{cases}$ матричним способом**.**

$\blacksquare A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -12$, $A^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -14 & 19 & -9 \\ 6 & -9 & 3 \\ -8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -14 & 19 & -9 \\ 6 & -9 & 3 \\ -8 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} -36 \\ 12 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\blacksquare$

Зауважимо, що матричним способом можна розв'язати тільки квадратну систему (однакова кількість невідомих і рівнянь) причому у випадку, коли головна матриця системи є невиродженою.

Розв'язування СЛАР з використанням формул Крамера

Розглянемо квадратну СЛАР n-го порядку

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_2 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix},$$ Δ називається **головним визначником системи,**

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ називаються **допоміжними визначниками** (Δ_i утворюються із Δ заміною i-го стовпця стовпцем вільних членів)

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$ які називаються **формулами Крамера**.

Приклад 4.6. Розв'язати систему $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$ за формулами Крамера.

■ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 15 = 23, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 3 = 19, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 20 = -18, \ x = \frac{19}{23}, y = \frac{-18}{23}$. ■

Приклад 4.7. Розв'язати систему $\begin{cases} x + 3y + 2z = 4 \\ 2x + 6y + z = 2 \\ 4x + 8y - z = 2 \end{cases}$ за формулами Крамера.

$$■\ \Delta=\begin{vmatrix}1&3&2\\2&6&1\\4&8&-1\end{vmatrix}=-12,\ \Delta_x=\begin{vmatrix}4&3&2\\2&6&1\\2&8&-1\end{vmatrix}=-36,\ \Delta_y=\begin{vmatrix}1&4&2\\2&2&1\\4&2&-1\end{vmatrix}=$$

$$12,\ \Delta_z=\begin{vmatrix}1&3&4\\2&6&2\\4&8&2\end{vmatrix}=-24,$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-36}{-12}=3,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{12}{-12}=-1,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-24}{-12}=2\,.■$$

Приклад 4.8. Розв’язати систему $\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0\\x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_1+2x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+x_2+2x_3+3x_4=0\end{cases}$ за

формулами Крамера.

$$■\ \Delta=\begin{vmatrix}1&-1&\mathbf{-1}&1\\1&1&1&1\\1&2&1&1\\4&1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&\mathbf{-1}&1\\2&0&0&2\\2&1&0&2\\6&-1&0&5\end{vmatrix}=-1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&0&2\\2&1&2\\6&-1&5\end{vmatrix}=$$

$$2,\ \ \Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}0&-1&-1&1\\0&1&1&1\\\mathbf{-1}&2&1&1\\0&1&2&3\end{vmatrix}=-1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&-1&1\\1&1&1\\1&2&3\end{vmatrix}=-2,\ \Delta_{x_2}=$$

$$\begin{vmatrix}1&0&-1&1\\1&0&1&1\\1&\mathbf{-1}&1&1\\4&0&2&3\end{vmatrix}=-1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\4&2&3\end{vmatrix}=-2,$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}1&-1&0&1\\1&1&0&1\\1&2&\mathbf{-1}&1\\4&1&0&3\end{vmatrix}=-1(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\4&1&3\end{vmatrix}=2,$$

$$\Delta_{x_4}=\begin{vmatrix}1&-1&-1&0\\1&1&1&0\\1&2&1&\mathbf{-1}\\4&1&2&0\end{vmatrix}=-1(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&1&1\\4&1&2\end{vmatrix}=2,\ x_1=-1,\ x_2=-1,$$

$x_3=1,\ x_4=1.$ ■

Розв'язування СЛАР методом Гауса

Розглянемо СЛАР (n невідомих та m рівнянь)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$. Складемо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$;

$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$; A є **основною**, а $\overline{A}$ - **розширеною** матрицею системи.

<u>Теорема Кронекера – Капеллі (критерій сумісності СЛАР).</u>

Система сумісна (має розв'язок) тоді і тільки тоді, коли $rangA = rang\bar{A}$.

Якщо $rangA = rang\bar{A} = n,$ (n- кількість невідомих) , то існує єдиний розв'язок і у випадку, коли $rangA = rang\bar{A} < n$ - нескінчену множину розв'язків .

Якщо $rangA < rang\bar{A}$ - система несумісна.

Метод Гауса розв'язування СЛАР (n невідомих та m рівнянь) полягає в зведенні елементарними перетвореннями розширеної матриці, виписаної з заданої системи, до верхньої трикутної або ступінчатої (під елементами $a_{11}, a_{22}, ..., a_{kk}, ...$ робимо нулі - прямий хід). Досліджуємо на сумісність систему, використовуючи теорему Кронекера-Капеллі , виписуємо нову систему (зворотній хід) за отриманою матрицею, починаючи з нижнього рядка матриці . Таким чином, послідовно знаходимо всі невідомі системи.

Приклад 4.8. Розв’язати систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$ методом Гауса.

■ Записуємо розширену матрицю системи і, виконуючи елементарні перетворення над рядками, зводимо її до ступінчатого вигляду:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-1)\times(-3/2)\times(-1) \\ \hookleftarrow \\ \qquad\hookleftarrow \\ \qquad\qquad\hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \times(-2) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \times(1) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \times(-2) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{array}\right).$$

$rangA = rang\bar{A} = 4 = n$ (n– кількість невідомих) $\Longrightarrow$ система сумісна. Останній рядок відповідає рівнянню $-3x_4 = 4;$ звідки $x_4 = -\frac{4}{3}$. Далі виписуємо рівняння за 3-м, 2-м та першим рядками отриманої матриці і знаходимо невідомі:

$x_3 = -1 - 2x_4; \quad x_3 = \frac{5}{3};$

$3x_2 = -7 - 6x_4 + 3x_3; \quad x_2 = 2;$ Звідки розв’язок системи: $x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = \frac{5}{3};\ x_4 = -\frac{4}{3}.$

$2x_1 = 1 + x_4 - x_3 + x_2; \quad x_1 = 0.$

■

Приклад 4.9. Розв’язати систему $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$ методом Гауса.

■ $$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)\times(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)\times(-5)\times(7) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right)\times(2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \end{array}\right).$$

$rang\ A = rang\ \bar{A} = 3 < n = 4 \implies$ система має безліч розв'язків. Наприклад , x_4 будемо вважати **вільною** (число вільних змінних завжди дорівнює $n - rang\ A = 4 - 3 = 1$ в даному випадку), а інші змінні : $x_1,\ x_2,\ x_3$ виразимо із останньої системи через вільну. Рухаючись від останнього рівняння до першого, послідовно знаходимо:

$2x_3 - 4x_4 = 12; \quad x_3 = 6 + 2x_4;$

$x_2 = -3 - x_4 + x_3; \quad x_2 = 3 + x_4;$

$x_1 = 4 + 4x_4 - 3x_3 + 2x_2; \quad x_1 = -8.$

Маємо відповідь $(-8; 3 + x_4; 6 + 2x_4;\ x_4),\ \ x_4 \epsilon R.$ ■

Розглянемо **однорідну** СЛАР (n невідомих та m рівнянь)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ або в матричному вигляді $AX = O$. Відмітимо, що однорідна система сумісна завжди, оскільки $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ є її ро зв'язком.

Питання полягає в тому, чи єдиний цей розв'язок і ,якщо ні, що представляє собою сукупність всіх розв'язків системи.

Продемонструємо метод знаходження сукупності всіх розв'язків на прикладі системи:

Приклад 4.10 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2+x_3+2x_4-x_5=0 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+2x_5=0 \\ x_1+2x_2-x_3-2x_4+4x_5=0 \end{cases}$. ■Всі перетворення системи зводяться до перетворень матриці цієї системи. Зводимо матрицю системи до ступінчатого вигляду:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отримали ступінчату матрицю, ранг якої дорівнює три, а кількість невідомих – п’ять ($rangA = 3 < n = 5$), тому за теоремою Кронекера – Капеллі існує безліч розв’язків. За отриманою матрицею маємо систему $\begin{cases} 2x_3+x_4-2x_5=0 \\ x_2+2x_3-2x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$. Дві змінні, наприклад x_4 і x_5, будемо вважати **вільними** (число вільних змінних завжди дорівнює різниці $\boldsymbol{n - rang\ A} = 5-3=2$ в даному випадку), а інші змінні : $x_1,\ x_2,\ x_3$ виразимо із останньої системи через вільні : $\begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + x_5 \\ x_2 = 3x_4 - 3x_5 \\ x_1 = -\frac{9}{2}x_4 + 3x_5 \end{cases}$, отримані вирази описують всю множину розв’язків однорідної системи при умові, що x_4 , $x_5 \in R$. ■ У випадку, коли $n - rangA = 0$, однорідна система має єдиний нульовий (тривіальний) розв’язок.

Завдання №4 (для аудиторної та домашньої роботи)

Знайти обернену матрицю до заданої матриці та перевірити рівність $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$

1) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; **2)** $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$; **3)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; **4)** $\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; **5)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; **6)** $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; **8)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; **9)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; **10)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; **12)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; **13)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

14) Знайти обернену матрицю до заданої матриці двома способами

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

Розв’язити систему методом Крамера та матричним способом

15. $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 3x - 4y + z = -8 \\ 2x + y - 8z = 23 \\ 5x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 4x - y + 2z = -9 \\ -3x + 2y - 3z = 5 \\ 5x + 7y + z = -6 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 2x + 4y - 5z = 24 \\ x - 2y + 3z = -11 \\ 4x - y - 2z = 5 \end{cases}$

19) $\begin{cases} 3x-4y+5z=0 \\ -2x+y-3z=-3 \\ 4x-3y+3z=1 \end{cases}$ **20)** $\begin{cases} 2x-y+3z=6 \\ 5x+2y-4z=-24 \\ -2x+y+2z=9 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x-6y+3z=-6 \\ 3x+y-2z=14 \\ -1x+5y+2z=-2 \end{cases}$ **22)** $\begin{cases} 3x-y-2z=11 \\ 5x-2y+4z=3 \\ 2x+y-3z=14 \end{cases}$

Відповіді:**15)**$(0;1;-1)$, $\mathbf{16})(x;y;z)\in(2;3;-2)$, $\mathbf{17})(x;y;z)\in(-3;1;2)$, $\mathbf{18})(x;y;z)\in(1;3;-2)$, $\mathbf{19})(x;y;z)\in(1;2;1)$, $\mathbf{20})\ (x;y;z)\in(-2;-1;3)$, $\mathbf{21})(x;y;z)\in(3;1;-2)$, $\mathbf{22})(x;y;z)\in(3;2;-2)$.

Розв’язати систему методом Гауса, дослідити її за теоремою Кронекера – Капеллі (для систем 27– 46 наведено відповіді)

23) $\begin{cases} 2x-3y+1z=11 \\ x+4y-2z=-13 \\ 3x+3y+z=0 \end{cases}$ **24)** $\begin{cases} 2x-y+3z=-1 \\ x+3y-2z=10 \\ -3x+y-z=-6 \end{cases}$

25) $\begin{cases} -5y+z=1 \\ x+y-z=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ **26)** $\begin{cases} 3x-y+z=1 \\ x-z=1 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

27) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+4z=5 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$ **28)** $\begin{cases} 3x+2y-4z=8 \\ 2x+4y-5z=11 \\ 4x-3y+2z=1 \end{cases}$

29) $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 4x+y+4z=9 \\ 3x+5y+2z=10 \end{cases}$ **30)** $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+4y+6z=3 \\ 3x+y-z=1 \end{cases}$

31) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 3x+y-z=1 \\ -x+3y+7z=8 \end{cases}$ **32)** $\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ 2x+6y+z=2 \\ 4x+8y-z=2 \end{cases}$

33) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3x+6y+9z=3 \end{cases}$ **34)** $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{cases}$

35) $\begin{cases} x-3y+2z=0 \\ x-y+z=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases}$ **36)** $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \\ 4x-11y+10z=0 \end{cases}$

37) $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

38) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

39) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = -5 \end{cases}$

40) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$

41) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

42) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 5x + y - z = 7 \\ 7x + y - z = 10 \end{cases}$

43) $\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + y + 5z = 8 \\ x - 5y - 4z = 2 \end{cases}$

44) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$

45) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + y - 5z = 0 \\ 4x - y + z = 3 \\ x + 3y - 13z = -6 \end{cases}$

46) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = -5 \\ 4x + y + 4z = -2 \\ x + 3y + 3z = 4 \end{cases}$

47) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -8x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

48) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$

49) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}$

50) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 5 \\ 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \end{cases}$

51)

$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$

52) $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + y + 5z = 0 \\ x - 5y - 4z = 0 \end{cases}$

53) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 5y + 3z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$

54) $\begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ 3x + 5y - 7z = 0 \\ 4x - 5y - 6z = 0 \end{cases}$

Відповіді: **27)** $\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{3}{2}\right)$. **28)** $(2; 3; 1)$. **29)** $(1; 1; 1)$. **30)** $(\emptyset)$. **31)** $(\emptyset)$.

32) $(3; -1; 2)$. **33)** Безліч розв'язків, виписати їх.

34) Безліч розв'язків, виписати їх. **35)** $(0; 0; 0)$.

36) Безліч розв'язків, виписати їх. **37)** $(0; 0; 0)$.

38) $(0; 0; 0)$. **39)** (0; 2; 5/3; -4/3). **40)** (3; -4; -1; 1). **41)** (1; 1; 1).

42) $(\emptyset)$. **43)** Безліч розв'язків, виписати їх. **44)** $(\emptyset)$.

45) $(1; 2; 1)$. **46)** $(1; 2; -2)$.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дати означення союзної матриці.
2. Дати означення оберненої матриці.
3. Для якої матриці існує обернена?
4. Що називається головним визначником системи?
5. Яким чином утворюються допоміжні визначники системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)?
6. Записати формули Крамера для розв'язування СЛАР n-го порядку.
7. Що можна сказати про розв'язки СЛАР, якщо головний визначник системи дорівнює нулю? не дорівнює нулю?
8. При якій кількості невідомих та рівнянь неможливо розв'язати СЛАР за допомогою формул Крамера?
9. Що означає несумісність СЛАР?
10. Записати формули для розв'язування СЛАР матричним способом.
11. В якому випадку неможливо застосувати до розв'язування СЛАР матричний спосіб?
12. Сформулювати теорему Кронекера-Капеллі.

13. Що таке розширена матриця системи?
14. В чому полягає метод Гауса для розв'язування СЛАР?
15. На скільки одиниць ранг основної матриці системи може відрізнятись від рангу розширеної матриці?
16. Яка СЛАР називається однорідною?
17. Чи може однорідна СЛАР бути несумісною?
18. Чи може система стати сумісною, якщо з несумісної СЛАР видалити якесь рівняння?
19. Чи до будь-якої СЛАР можна застосувати метод Гауса?

Індивідуальні завдання №4

Розв'язати систему за допомогою формул Крамера та матричним способом.

1. $\begin{cases} 2x - y + 5z = 12 \\ -3x + 2y + 4z = -8 \\ x - 3y + 2z = 13 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - 6y + 3z = -6 \\ 3x + y - 2z = 14 \\ -x + 5y + 2z = -2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x - y - 2z = 11 \\ 5x - 2y + 4z = 3 \\ 2x + y - 3z = 14 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -3x + 2y + z = -7 \\ 2x + 5y - z = 12 \\ 4x - y + 3z = -2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x - 2y + z = -2 \\ 2x + y - 3z = 13 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + 3y - z = -8 \\ x - 2y + 4z = 20 \\ 3x + y - 2z = -3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - 5y - z = 9 \\ 3x + 2y + 3z = 13 \\ -x + y - z = -6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - 3y + 2z = -1 \\ 3x + 5y + z = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ x + 3y - 2z = 10 \\ -3x + y - z = -6 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x-3y+z=11 \\ x+4y-2z=-13 \\ 3x-3y+z=0 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 3x-2y+z=8 \\ 2x+5y-4z=-12 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 2x-3y+3z=16 \\ x+4y-z=-5 \\ -x+y-5z=-18 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x+4y-z=8 \\ 2x-3y+5z=-13 \\ 3x-2y+4z=-11 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 2x+4y-5z=24 \\ x-2y+3z=-11 \\ 4x-y-2z=5 \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x-4y+2z=-8 \\ x+2y-3z=19 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x-y+2z=-9 \\ -3x+2y-3z=5 \\ 5x+7y+z=-6 \end{cases}$ 17. $\begin{cases} 3x-4y+z=-8 \\ 2x+y-8z=23 \\ 5x-3y-2z=5 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x-3y+z=-18 \\ 3x+4y-3z=11 \\ -x+3y+2z=19 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x-3y+4z=4 \\ x+2y-5z=-12 \\ 3x-y+2z=-5 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 3x-4y+5z=0 \\ -2x+y-3z=-3 \\ 4x-3y+3z=1 \end{cases}$ 21. $\begin{cases} 2x-5y-3z=0 \\ -x+4y-z=-9 \\ 3x-y+5z=22 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x-3y+4z=-8 \\ x+5y-2z=17 \\ 3x-2y+3z=-1 \end{cases}$ 23. $\begin{cases} 3x-4y+2z=-4 \\ x+2y-3z=13 \\ -2x+3y+4z=-13 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 2x-y+3z=6 \\ 5x+2y-4z=-24 \\ -2x+y+2z=9 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x-y+2z=13 \\ 3x+5y-z=-15 \\ x-2y-3z=-2 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 3x-2y+z=10 \\ 4x+y-2z=-4 \\ x-3y+4z=19 \end{cases}$ 27. $\begin{cases} x-2y+z=-3 \\ 3x-5y+z=-4 \\ -2x+3y-2z=3 \end{cases}$

Індивідуальні завдання №5

Розв’язати систему методом Гауса, дослідити її за теоремою

Кронекера – Капеллі

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = -5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -8x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 = 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 8 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 3 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_4 = -1 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 = -1 \\ 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ 4x_1 - 4x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ 4x_1 - 4x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$

§ 5. Матричні рівняння

Приклад 5.1. Знайти матрицю X 2-го порядку, яка задовольняє рівнянню $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

■ Рівняння в матричному вигляді має вигляд: $AX = B$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; Матриця A

є невиродженою , оскільки її визначник $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1 \neq 0$, тому існує обернена A^{-1} до матриці A. Помножимо обидві частини рівняння **<u>зліва</u>** на A^{-1}, будемо мати $X = A^{-1}B$.

Знайдемо A^{-1} : $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$,

тоді $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$. ■

Приклад 5.2. Знайти матрицю X 2-го порядку, яка задовольняє рівнянню $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$.

■ Метод, який використали в попередньому прикладі, застосувати тут неможливо, оскільки матриця $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ є виродженою. Тому скористаємось іншим способом. Позначимо елементи матриці X наступним чином $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$. Тоді $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$ або після перемноження $\begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 & 2y_1 + 3y_2 \\ 4x_1 + 6x_2 & 4y_1 + 6y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$, звідки $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 4x_1 + 6x_2 = 10 \\ 2y_1 + 3y_2 = 2 \\ 4y_1 + 6y_2 = 4 \end{cases}$. Легко переконатись, що система рівнянь сумісна і має нескінченну множину розв’язків (друге і четверте рівняння можна відкинути). $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\ x_2$, $y_1 = 1 - \frac{3}{2}\ y_2$ і тоді матрицею X , яка задовольняє матричне рівняння (і отриману систему) буде $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\ x_2 & 1 - \frac{3}{2}\ y_2 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$, де x_2, y_2 – довільні числа. ■ Ясно, що можливий і інший вибір вільних невідомих (виразити x_2, y_2 через x_1, y_1 відповідно).

Приклад 5.3. Знайти матрицю X , яка задовольняє рівнянню $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

■Перепишемо рівняння у вигляді $AX\mathrm{C} = B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Тоді із $AXC = B$ будемо мати $A^{-1}AXCC^{-1} = A^{-1}BC^{-1}$, а $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A^{-1}BC^{-1}}$. $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$,

$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$$X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{88}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 7 & -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{88}\begin{pmatrix} 14 & -24 \\ -5 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/44 & -3/11 \\ -5/88 & 5/11 \end{pmatrix}.$$ ■

Завдання №5 (для аудиторної та домашньої роботи)

Розв’язати матричні рівняння

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$; **2)** $X\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $X\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; **5)** $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix}7 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$; **8)** $X\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$**;**

9) $X\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 8 & 1 & 2\end{pmatrix}$; **11)** $X\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$;

12) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 7 & 2\end{pmatrix}$;

13) $X\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$; **14)** $\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}0 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$;

15) $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ (Відповідь: $X=\begin{pmatrix}-8 & -14\\ 5 & 9\end{pmatrix}$);

16) $\begin{pmatrix}4 & 3\\ 5 & 4\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$

(Відповідь: $X=\begin{pmatrix}-4 & 10\\ 5 & -12\end{pmatrix}$); **17)** $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & -1 & 5\\ 2 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

(Відповідь: $X=1/5\begin{pmatrix}13 & -5 & 13\\ 21 & 5 & 16\\ 1 & 0 & 6\end{pmatrix}$); **18)** $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}$ (Відповідь: $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$);

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Як утворюється матричне рівняння СЛАР?

2. Записати формули для розв’язування відповідних матричних рівнянь ($X -$ матриця невідомих) $AX = B$; $XC = D$; $AXB = D$.
3. Чи може матричне рівняння мати два різних розв’язки? Жодного розв’язку?
4. Як розв’язати матричне рівняння у випадку, коли співмножником невідомої матриці є матриця вироджена?

Індивідуальні завдання №6

Розв’язати матричні рівняння

1. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $X \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $X \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $X \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9. $X \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

11. $X \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $X \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

16. $X \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

20. $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

23. $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

24. $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

25. $X \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

26. $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

27. $X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$

§6. Власні числа та власні вектори матриці

Дійсне число λ називається **власним значенням матриці A**, якщо існує ненульовий вектор-стовпець (матриця-стовпець) X такий, що $AX = \lambda X$. При цьому вектор X називається **власним вектором матриці A**. Власні числа матриці A є коренями рівняння $|A - \lambda E| = 0$, яке називається **характеристичним**. Наприклад, якщо матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, то характеристичним рівнянням буде

$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22-\lambda} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-\lambda} \end{vmatrix} = 0$, звідки визначаються власні числа матриці. Власний вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, який відповідає власному числу λ, визначається із системи рівнянь $\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$

Приклад 6.1. Обчислити власні значення та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$

■ Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$

$\lambda_1 = -2,\ \ \lambda_2 = 1$. Координати власних векторів, які відповідають знайденим власним числам, знайдемо з наступної системи рівнянь: $\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 4x_2 = 0 \\ -x_1 - (3+\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$. Підставляємо в цю систему $\lambda_1 = -2$, маємо $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$, звідки $x_1 = -x_2$.Покладемо $x_2 = t_1$, де t_1 – будь-яке відмінне від нуля дійсне число, тоді першим власним вектором матриці A буде $\vec{x}^1 = \begin{pmatrix} -t_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$. Далі підставляємо в систему $\lambda_2 = 1$, маємо $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$, звідки $x_1 = -4x_2$. Покладемо $x_2 = t_2$, де t_2 – будь-яке відмінне від нуля дійсне число. Отже, другим власним вектором матриці A буде $\vec{x}^2 = \begin{pmatrix} -4t_2 \\ t_2 \end{pmatrix}$. Остаточно: $\lambda = -2, \vec{x}^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t_1; \quad \lambda = 1, \vec{x}^2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t_2$, де t_1, t_2 – будь-які відмінні від нуля дійсні числа. ■

Приклад 6.2. Обчислити власні значення та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

■ Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -3 \\ 1 & 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - -16 = 0,\ \ (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0, \lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = 2,\ \ \lambda_3 = 4.$ Координати власних векторів, які відповідають знайденим власним числам, знайдемо з наступної системи рівнянь: $\begin{cases} (3-\lambda)x + y + z = 0 \\ 0x - (1+\lambda)y - 3z = 0 \\ x + 4y + (6-\lambda)z = 0 \end{cases}$; $\lambda_1 = 2$: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - 3z = 0 \\ x + 4y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow\ x = 0,$

таким чином, всі власні вектори, які відповідають $\lambda_1 = 2$, мають вигляд

$\vec{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t_1; \quad \lambda_3 = 4: \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -5y - 3z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$, розв'язуючи цю систему,

знаходимо, що при довільному $z = t$ маємо $y = -\frac{3}{5}t, \ \ x = \frac{2}{5}t$, нехай

$t = 5t_2$, тоді $\vec{x}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot t_2$. Остаточно: $\lambda = 2, \vec{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t_1; \ \lambda = 4,$

$\vec{x}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot t_2$, де t_1 і $t_2 -$ будь-які відмінні від нуля дійсні числа. ■

Завдання №6 (для аудиторної та домашньої роботи)

Обчислити власні значення та власні вектори матриці A.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; **2)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ (Відповідь: $\lambda = 3, \vec{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t_1;$

$\lambda = -3, \vec{x}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t_2$, де $t_1, t_2 -$ будь-які відмінні від нуля дійсні числа);

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (Відповідь: $\lambda = 1, \vec{x}^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t_1; \quad \lambda = 5, \vec{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t_2$,

де $t_1, t_2 -$ будь-які відмінні від нуля дійсні числа); **4)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(Відповідь: $\lambda = 1, \vec{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t_1; \quad \lambda = -1, \vec{x}^2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t_2$, $\lambda = 6,$

$\vec{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t_3$ де $t_1, t_2, t_3 -$ будь-які відмінні від нуля дійсні числа);

5) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (Відповідь: $\lambda = 2, \vec{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t_1; \quad \lambda = 3,$

$\vec{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t_2$, $\lambda = 6, \vec{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t_3$ де $t_1, t_2, t_3 -$ будь-які відмінні від

нуля дійсні числа); 6) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (Відповідь: $\lambda = -1,$

$\vec{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t_1$; де $t_1 -$ будь-яке відмінне від нуля дійсне число);

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Дати означення власних чисел і власних векторів матриці.
2. Що таке характеристичне рівняння?
3. Як знайти координати власних векторів, які відповідають власним числам?
4. Де використовуються власні числа та власні вектори матриці?

Індивідуальні завдання №7

Обчислити власні значення та власні вектори матриці A.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 7 \\ 1 & -8 & 9 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ -5 & 2 & -5 \\ -5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ **21.**

$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$ **23.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **24.** $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **27.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебри / А.Г. Курош// М.: Наука. - 1971. – 429 с.
2. Бакельман И.Я. Аналитическая геометрия и линейная алгебра/ И.Я. Бакельман //М.:»Просвещение». – 1976. – 288с.
3. Гудименко Ф.С. Збірник задач з вищої математики/ Ф.С. Гудименко, Д.М. Борисенко, В.О.Волкова, Г.М. Зражевская, О.А.Ющенко//К.: вид-о Київського ун-ту.-1967.-352с.
4. Борисенко О.В. Аналітична геометрія/ О.В.Борисенко, Н.Г.Красношапка, О.П.Бойчук, В.В.Ясінський//К.:НТУУ «КПІ», 1999.-52с.

ЗМІСТ