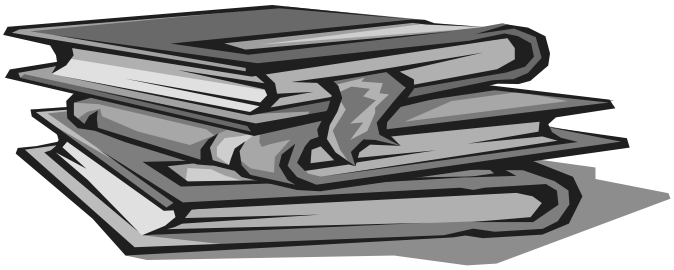
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКІЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

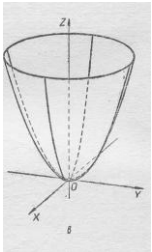


**Т.В. Авдєєва, О.Б. Качаєнко, О.О. Коваль,
О.Б. Поліщук, В.І. Стогній**

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ.
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Методичні вказівки та завдання
до виконання індивідуальної роботи
для студентів інженерних спеціальностей

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \mu(x, y, z)\,dxdydz$$



Київ
Політехніка
2016

Кратні інтеграли. Елементи теорії поля: Методичні вказівки та завдання до виконання індивідуальної роботи для студентів інженерних спеціальностей/ Т.В. Авдєєва, О.Б. Качаєнко, О.О. Коваль, О.Б. Поліщук, В.І. Стогній. – К.: ІВЦ "Видавництво «Політехніка»", 2016,– 92 с.

Гриф надано Методичною радою ФМФ НТУУ "КПІ"

Протокол № 5 від 24.06.2016 .

Електронне навчальне видання

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Методичні вказівки та завдання
до виконання індивідуальної роботи
для студентів інженерних спеціальностей

Автори: Авдєєва Тетяна Василівна,
Качаєнко Ольга Борисівна,
Коваль Ольга Олександрівна,
Поліщук Олена Борисівна,
Стогній Валерій Іванович,

Відповідальний редактор – Івасишен С.Д., д-р фіз.-мат. наук,
проф. кафедри математичної фізики
ФМФ НТУУ «КПІ»

Рецензенти: Вірченко Н.О., д-р фіз.-мат. наук,
проф. кафедри математичного аналізу
та теорії ймовірностей НТУУ «КПІ»

Спічак С.В., канд.фіз.-мат. наук,
старший науковий співробітник відділу прикладних досліджень
Інституту математики НАН України

Комп'ютерна верстка (авторська) Т.В. Авдєєва

1. ВСТУП

Самостійна робота студентів є визначальною для засвоєння апарату вищої математики. Одним з елементів самостійної роботи є виконання індивідуальних типових розрахунків, основна мета яких: навчити студентів застосовувати набуті знання для самостійного розв'язування запропонованих задач і вміння користуватися додатковою літературою.

Вивчення студентами інженерних спеціальностей розділів «Кратні інтеграли», «Векторний аналіз» завершується виконанням розрахункової роботи або домашньої контрольної роботи «Кратні інтеграли. Елементи теорії поля».

Дана методична розробка містить теоретичні питання до кожного з розділів, розрахункову частину – задачі та приклади розв'язування типових задач, у додатках наведено рівняння та графічні зображення основних поверхонь другого порядку, відомості про криволінійні системи координат на площині та в просторі, а також основні формули, необхідні для розв'язування задач розрахункової роботи. Теоретичні питання складені у відповідності з навчальною програмою кредитного модуля "Кратні інтеграли. Векторний аналіз. Ряди" і є загальними для всіх студентів. Задачі є індивідуальними для кожного студента групи, і вони подані у вигляді 25 варіантів (номер варіанта відповідає номеру прізвища студента в списку групи). Кожний варіант містить приклади на зміну порядку інтегрування, безпосереднє обчислення подвійних і потрійних інтегралів, задачі на геометричне і фізичне застосування інтегралів (обчислення площі плоскої області, маси пластини, маси кривої, маси просторового тіла, об'єму просторового тіла), дослідження питання потенціальності та соленоїдальності векторного поля, обчислення роботи сили, обчислення потоку векторного поля крізь поверхню та циркуляції векторного поля. Для виконання розрахункової роботи доцільно повторити відповідний теоретичний матеріал, використовуючи конспект лекцій та наведену наприкінці науково-методичну літературу.

2. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ

“КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ”

1. Поняття подвійного інтеграла та умови його існування.
2. Властивості подвійного інтеграла.
3. Обчислення подвійного інтеграла.
4. Теорема про заміну змінних у подвійному інтегралі.
5. Подвійний інтеграл в полярних координатах. Якобіан.
6. Подвійний інтеграл в узагальнених полярних координатах. Якобіан.
7. Застосування подвійних інтегралів до задач геометрії.
8. Застосування подвійних інтегралів до задач фізики.
9. Поняття потрійного інтеграла та умови його існування.
10. Властивості потрійного інтеграла.
11. Обчислення потрійного інтеграла.
12. Теорема про заміну змінних у потрійному інтегралі.
13. Потрійний інтеграл у циліндричних координатах. Якобіан.
14. Потрійний інтеграл в узагальнених циліндричних координатах. Якобіан.
15. Потрійний інтеграл у сферичних координатах. Якобіан.
16. Потрійний інтеграл в узагальнених сферичних координатах. Якобіан.
17. Застосування потрійних інтегралів до задач геометрії та фізики.
18. Поняття поверхневого інтеграла першого роду та умови його існування.
19. Властивості поверхневого інтеграла першого роду.
20. Обчислення поверхневого інтеграла першого роду.
21. Застосування поверхневого інтеграла першого роду.

3. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ

“*ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ*”

1. Поняття криволінійного інтеграла другого роду та умови його існування.
2. Властивості криволінійного інтеграла другого роду.
3. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду.
4. Криволінійний інтеграл по замкненому контуру.
5. Формула Гріна.
6. Застосування криволінійних інтегралів другого роду.
7. Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування (випадок плоскої кривої).
8. Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування (випадок просторової кривої).
9. Знаходження функції за її повним диференціалом.
10. Поняття двосторонньої поверхні. Орієнтація поверхні.
11. Поняття поверхневого інтеграла другого роду та умови його існування.
12. Властивості поверхневого інтеграла другого роду.
13. Обчислення поверхневого інтеграла другого роду.
14. Поняття векторного поля. Приклади векторних полів.
15. Потенціал векторного поля.
16. Робота і циркуляція векторного поля.
17. Дивергенція векторного поля. Соленоїдальне поле.
18. Ротор векторного поля. Потенціальне поле.
19. Потік векторного поля.
20. Формула Остроградського-Ґаусса (координатна і векторна форми).
21. Формула Стокса (координатна і векторна форми).

4. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Змінити порядок інтегрування у виразі

$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

і зробити рисунок.

Розв'язування. Для зміни порядку інтегрування необхідно зобразити в декартовій системі координат (ДСК) область інтегрування D згідно з межами в подвійних інтегралах, заданих в умові. Виразимо рівняння кривих у зручному для побудови вигляді:

1) $y = 2 - \sqrt{4 - x^2} \quad \Rightarrow \quad y - 2 = -\sqrt{4 - x^2}$, звідки $(y-2)^2 = 4 - x^2$, тобто $x^2 + (y-2)^2 = 4$. Враховуючи додатне значення арифметичного кореня, зауважимо, що $y \le 2$. Отже, геометричним образом даної функції є півколо $(y \le 2)$ з центром в точці $O_1(0;2)$ і радіусом $R = 2$.

2) Аналогічно, якщо $y = \sqrt{4 - x^2}$, то $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$, тобто отримали півколо $(y \ge 0)$ з центром в точці $O\ (0;0)$ і радіусом $R = 2$.

Зауважимо, що область обмежена знизу прямою $y = 0$. Зробимо рисунок:

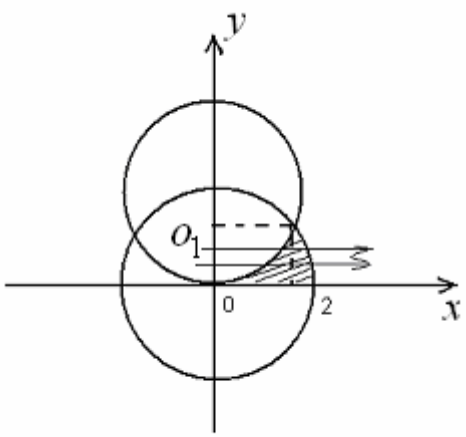


Рис. 1.

Неважко переконатись, що одна з точок перетину цих кіл має абсцису $x = \sqrt{3}$.

Дійсно, $\begin{cases} y = 2 - \sqrt{4 - x^2} \\ y = \sqrt{4 - x^2} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{4 - x^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad 4 - x^2 = 1$ тобто,

$x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$, звідки знаходимо $y\left(\sqrt{3}\right) = 1$.

Заштрихована область і є областю D. Для визначення меж у новому інтегралі доцільно запустити в отриману область стрілочки, паралельні осі OX. З рисунка стає очевидно, що при $y \in [0; 1]$ x змінюється від правої частини зміщеного півкола до правої частини кола з центром у початку координат. Для запису інтеграла в іншому порядку необхідно ще виразити рівняння цих функцій як $x = x(y)$, тобто

з рівняння $x^2 + y^2 = 4$ маємо $x = \sqrt{4 - y^2}$ (оскільки $x \geq 0$),

а з рівняння $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ одержуємо $x = \sqrt{4 - (y - 2)^2} \Rightarrow x = \sqrt{4y - y^2}$.

Отже, отримуємо остаточну відповідь: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{4y - y^2}}^{\sqrt{4 - y^2}} f(x, y)dx$.

Відповідь: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{4y - y^2}}^{\sqrt{4 - y^2}} f(x, y)dx$.

Завдання 2. Обчислити площу області, обмеженої лініями

$$x^2 + y^2 = 12, \; y^2 = x\sqrt{6} \qquad (x \geq 0).$$

<u>*Розв'язування.*</u> Площа області D на площині OXY обчислюється за формулою $S = \iint\limits_D dxdy$. Область D обмежена колом радіуса $R = 2\sqrt{3}$ і параболою $x = \dfrac{y^2}{\sqrt{6}}$.

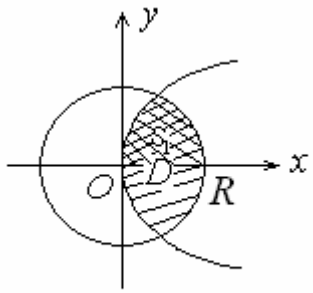


Рис. 2.

Область D симетрична відносно осі OX, тому достатньо обчислити площу половини області D $(y \geq 0)$, у результаті чого маємо $S = 2S_1 = 2\iint\limits_D dxdy$.

Знайдемо точки перетину кола і параболи: підставимо $x=\frac{y^2}{\sqrt{6}}$ у рівняння кола $x^2+y^2=12$, звідки $y^4+6y^2-72=0$. Розв'язавши квадратне рівняння, знайдемо $y=\pm\sqrt{6}$. Розставляючи межі інтегрування в подвійному інтегралі, отримуємо

$$S=2\int_0^{\sqrt{6}}dy\int_{\frac{y^2}{6}}^{\sqrt{12-y^2}}dx=2\int_0^{\sqrt{6}}dy(x)\Bigg|_{\frac{y^2}{6}}^{\sqrt{12-y^2}}=2\int_0^{\sqrt{6}}\left(\sqrt{12-y^2}-\frac{y^2}{6}\right)dy=$$

$$=2\int_0^{\sqrt{6}}\sqrt{12-y^2}dy-\frac{2}{\sqrt{6}}\int_0^{\sqrt{6}}y^2dy=\left|\begin{array}{l}y=\sqrt{12}\sin t\\ dy=\sqrt{12}\cos tdt\\ y=0\Rightarrow t=0\\ y=\sqrt{6}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}\end{array}\right|=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{12-12\sin^2 t}\cdot\sqrt{12}\cos tdt-\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{6}}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}12\cos^2 tdt-\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{6\sqrt{6}}{3}=$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)dt-4=12\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-4=12\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}\right)-4=3\pi+2.$$

Відповідь: $S=3\pi+2$.

Завдання 3. Обчислити площу області, обмеженої лініями $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$, $y=-x\sqrt{3}$, $y=x$.

<u>*Розв'язування.*</u> Зобразимо область D (рис. 3), наперед проаналізувавши криві, якими вона обмежена. Виділяючи повні квадрати, отримаємо рівняння зміщених кіл:

$x^2+y^2-2y=0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1$, де центр $O_1(0;1)$, радіус $R_1=1$,

$x^2+y^2-4y=0 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=4$, центр $O_2(0;2)$, радіус $R_2=2$.

Прямі $y=x$, $y=-x\sqrt{3}$ проходять через початок координат, з відповідними кутовими коефіцієнтами $k_1=1$, $k_2=-\sqrt{3}$.

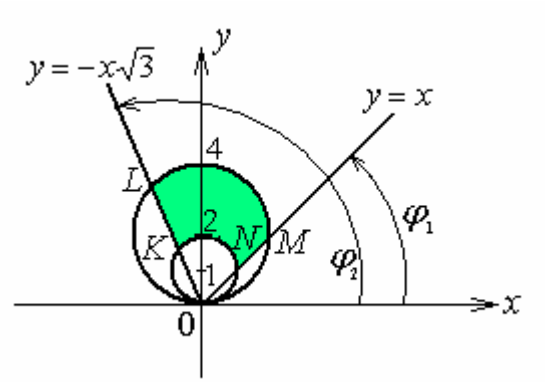


Рис. 3.

У результаті отримаємо фігуру $KLMN$, площу якої зручно обчислювати в полярних координатах: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Перейдемо у рівняннях кривих, що обмежують фігуру $KLMN$, до полярних координат:

$x^2 + y^2 = 2y \;\Rightarrow\; \rho^2 = 2\rho\sin\varphi \;\Rightarrow\; \rho = 2\sin\varphi,\ \rho = 0;$

$x^2 + y^2 = 4y \;\Rightarrow\; \rho^2 = 4\rho\sin\varphi \;\Rightarrow\; \rho = 4\sin\varphi,\ \rho = 0;$

$y = x \;\Rightarrow\; \rho\sin\varphi = \rho\cos\varphi \;\Rightarrow\; \sin\varphi = \cos\varphi \;\Rightarrow\; tg\varphi = 1 \;\Rightarrow\; \varphi_1 = \dfrac{\pi}{4};$

$y = -x\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \rho\sin\varphi = -\sqrt{3}\rho\cos\varphi \;\Rightarrow\; \sin\varphi = -\sqrt{3}\cos\varphi \;\Rightarrow\; tg\varphi = -\sqrt{3} \;\Rightarrow$

$\varphi_2 = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}.$

Площа області D в полярній системі координат обчислюється за формулою

$$S = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Виходячи з рисунку , маємо межі інтегрування:

$$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{2\pi}{3},\ 2\sin\varphi \le \rho \le 4\sin\varphi.$$

Отже,

$$S = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \rho\, d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(16\sin^2\varphi - 4\sin^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(12\sin^2\varphi\right)d\varphi=6\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin^2\varphi\, d\varphi=\frac{6}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(1-\cos 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=3\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}=3\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\frac{\sin\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{2}}{2}\right)=3\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}-1}{2}\right)=$$

$$=3\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right)=\frac{5\pi+3\sqrt{3}+6}{4}.$$

Відповідь: $S=\dfrac{5\pi+3\sqrt{3}+6}{4}$.

Завдання 4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D\sqrt{xy}dxdy$, де D – область обмежена кривою $\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}\right)^4=\dfrac{xy}{\sqrt{6}}$, що лежить в першій чверті.

<u>*Розв'язування.*</u> Проаналізуємо рівняння кривої, якою обмежено область D. Очевидно, для побудови кривої зручно перейти до узагальненої полярної системи координат за формулами: $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$, де $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$. Тоді рівняння кривої набуває вигляду:

$$\left(\frac{2\rho^2\cos^2\varphi}{2}+\frac{3\rho^2\sin^2\varphi}{3}\right)^4=\frac{\sqrt{2}\rho\cos\varphi\cdot\sqrt{3}\rho\sin\varphi}{\sqrt{6}},$$

$$\left(\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)\right)^4=\rho^2\cos\varphi\sin\varphi,$$

$$\rho^8=\frac{1}{2}\rho^2\sin 2\varphi \;\Leftrightarrow\; \rho^6=\frac{1}{2}\sin 2\varphi \;\Leftrightarrow\; \rho=\sqrt[6]{\frac{1}{2}\sin 2\varphi}.$$

Рівність $\rho=\sqrt[6]{\dfrac{1}{2}\sin 2\varphi}$ справедлива для $\sin 2\varphi\geq 0$, розв'язуючи її, маємо $\pi n\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. Оскільки, за умовою задачі розглядається перша чверть, то $0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2}$. Побудуємо криву і зобразимо область D. Для зручності складаємо таблицю значень ρ,φ :

φ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}}{4}}$	$\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}}{4}}$	0

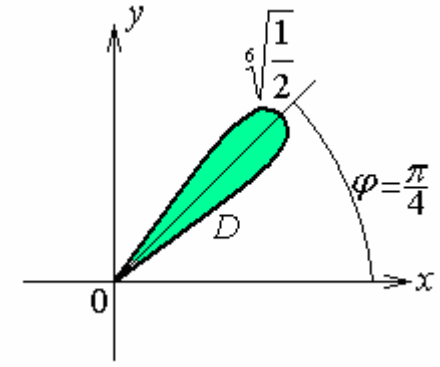


рис. 4

Обчислення інтеграла здійснюємо, використовуючи узагальнену полярну систему координат:

$$x = a\rho\cos\varphi, \qquad y = b\rho\sin\varphi, \qquad |J| = ab\rho,$$

$$dxdy = ab\rho\, d\rho\, d\varphi,$$

звідки $dxdy = \sqrt{2}\sqrt{3}\rho\, d\rho\, d\varphi = \sqrt{6}\rho\, d\rho\, d\varphi$.

Враховуючи область D, розставляємо згідно з рис. 4 межі інтегрування для змінних φ та ρ:

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le \rho \le \sqrt[6]{\frac{1}{2}\sin 2\varphi} \ \text{ або } \ 0 \le \rho \le \sqrt[6]{\sin\varphi\cos\varphi},$$

тоді $\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{xy}\,dxdy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \sqrt{\sqrt{2}\rho\cos\varphi\sqrt{3}\rho\sin\varphi}\sqrt{6}\rho\, d\rho\, d\varphi =$

$$= \sqrt{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{6} \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \rho\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\ \rho d\rho\, d\varphi = 6^{\frac{3}{4}} \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \rho^2 \sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= 6^{\frac{3}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\, d\varphi \int_0^{\sqrt[6]{\cos\varphi\sin\varphi}} \rho^2\, d\rho = 6^{\frac{3}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\, d\varphi \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt[6]{\cos\varphi\sin\varphi}} =$$

$$= 6^{\frac{3}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\varphi\sin\varphi} \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt[6]{\cos\varphi\sin\varphi}} d\varphi = 6^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\varphi\sin\varphi} \left(\sqrt[6]{\cos\varphi\sin\varphi}\right)^3 d\varphi =$$

$$=6^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\cdot\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\,d\varphi=6^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=6^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d(\sin\varphi)=6^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=6^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{6}=6^{\frac{-1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{6}}.$$

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt[4]{6}}$.

Завдання 5. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривою $x^2+y^2\le Rx$ при заданій поверхневій густині $\mu=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

<u>*Розв'язування.*</u> Нагадаємо, що масу пластини знаходимо за формулою

$$m=\iint_D \mu(x,y)dxdy.$$

Область D є кругом із зміщеним центром $O\left(\frac{R}{2};0\right)$ і радіусом $r=\frac{R}{2}$. Дійсно, в результаті виділення повного квадрата маємо $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2\le\left(\frac{R}{2}\right)^2$.

У цій задачі доцільно перейти до полярної системи координат (ПСК), увівши заміну $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$, після чого неважко знайти якобіан $|J|=\rho$. Зауважимо, що подвійний інтеграл в полярній системі координат (ПСК) набуває вигляду $\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi$. Знайдемо вираз кривої, що обмежує область D в нових координатах. Після відповідної заміни отримаємо рівняння кола $\rho=R\cos\varphi$. Зробимо рисунок області інтегрування.

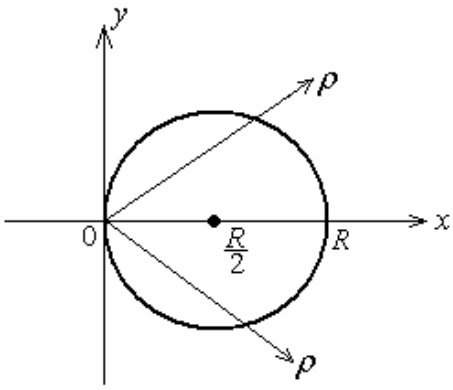


Рис. 5.

Неважко побачити, що $\varphi\in\left[-\pi/2;\pi/2\right]$, а відстань ρ змінюється від нуля до кола.

Для знаходження маси необхідно записати рівняння густини в полярних координатах, тобто $\mu = \sqrt{R^2 - \rho^2}$. Отже, $m = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho d\rho d\varphi =$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho d\rho = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2}\, d\left(R^2 - \rho^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\left(\sqrt{R^2 - \rho^2}\right)^3\Bigg|_0^{R\cos\varphi}\right]d\varphi = -\frac{R}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\sqrt{1-\cos^2\varphi}\right)^3 d\varphi = -\frac{R}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left|\sin\varphi\right|^3 d\varphi .$$

Оскільки функція $\left|\sin^3\varphi\right|$ парна, а проміжок $\left[-\pi/2; \pi/2\right]$ симетричний відносно точки $O(0;0)$, то за властивістю визначеного інтеграла від парної функції по симетричному проміжку маємо

$$-\frac{2R}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\varphi d\varphi = \frac{2R}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\cos\varphi = -\frac{2R}{3}\left(\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right) =$$

$$= -\frac{2R}{3}\left(-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4R}{3}.$$

Відповідь: $m = \dfrac{4R}{3}$.

Завдання 6. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V zy^2\,\mathrm{ch}(xy)dxdydz$, де область V обмежена площинами $x=0$, $y=\dfrac{x}{2}$, $y=1$, $z=0$, $z=2$.

<u>*Розв'язування.*</u> Область V обмежена координатними площинами $x=0$, $z=0$, площинами $x=2$, $z=2$ та $y=\dfrac{x}{2}$.

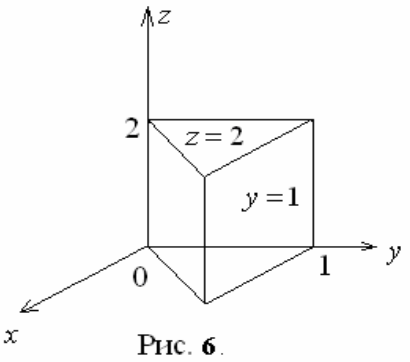


Рис. 6.

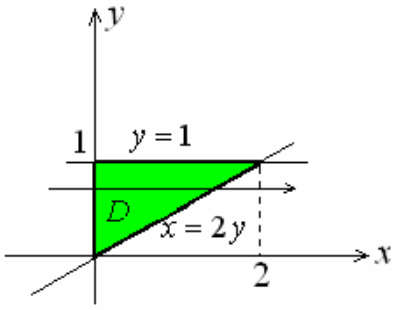


Рис. 7.

Область V однозначно проектується на площину OXY в область D, обмежену прямими $x=2$, $y=0$ і $x=2y$. Розставимо межі інтегрування. Згідно з рис. 7 області D маємо $0 \le y \le 1$, а x змінюється від осі ординат до прямої $x=2y$, тобто $0 \le x \le 2y$. З області V (Рис. 6) очевидно, що $0 \le z \le 2$. Отже, отримуємо

$$\iiint\limits_V zy^2 \operatorname{ch}(xy)dxdydz = \int_0^1 dy \int_0^{2y} y^2 \operatorname{ch} xydx \int_0^2 zdz = \int_0^1 dy \int_0^{2y} y^2 \operatorname{ch} xydx \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^2 =$$

$$= 2\int_0^1 dy \int_0^{2y} y^2 \operatorname{ch} xydx,$$

підставивши спочатку верхню межу замість z, потім нижню. Інтегруємо внутрішній інтеграл за змінною x

$$2\int_0^1 y^2 \left.\frac{\operatorname{sh} xy}{y}\right|_0^{2y} dy = 2\int_0^1 y\left(\operatorname{sh} 2y^2 - \operatorname{sh} 0\right)dy =$$

$$= 2\int_0^1 y \cdot \operatorname{sh}\left(2y^2\right)dy = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \int_0^1 \operatorname{sh}\left(2y^2\right)d\left(2y^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(2y^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch} 2 - \operatorname{ch} 0\right) = \frac{\operatorname{ch} 2 - 1}{2}. \quad \textit{Відповідь:} \ \frac{\operatorname{ch} 2 - 1}{2}.$$

Завдання 7. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}.$$

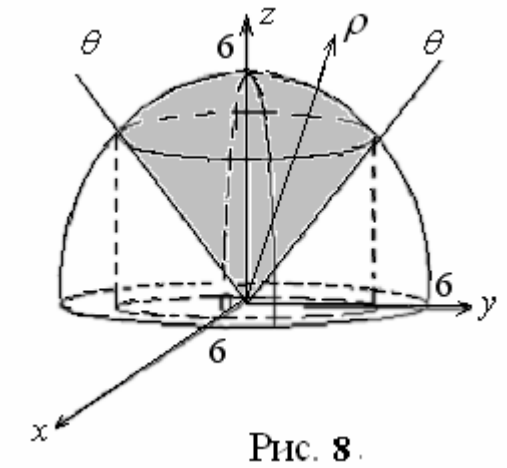


Рис. 8

Розв'язування. Зображуємо задані поверхні на рисунку 8, попередньо аналізуючи рівняння, якими вони описуються. Рівняння $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ описує півсферу з центром у точці $O(0;0;0)$ радіуса $R=6$ і $z \ge 0$, а рівняння $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$ визначає конус з вершиною в точці $(0;0;0)$, $z \ge 0$. Таким чином, необхідно знайти об'єм тіла, яке вирізане з верхньої півкулі конусом. Будемо використовувати формулу

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz .$$

Спроектувавши розглядуване тіло на площину OXY, визначимо межі інтегрування. Для цього розв'язуємо систему рівнянь $\begin{cases} z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}} \end{cases}$

або $\begin{cases} z^2 + x^2 + y^2 = 36, \\ 3z^2 = x^2 + y^2, \end{cases}$ звідки маємо $4z^2 = 36$, $z^2 = 9$, $z = \pm 3$. З умов задачі очевидно випливає, що поверхні перетинаються лише при $z = 3$ по колу $x^2 + y^2 = 27$.

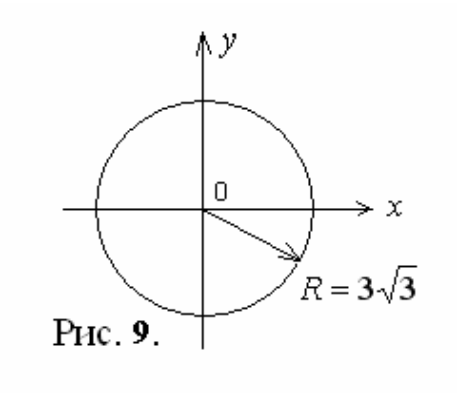


Рис. 9.

Проекцією D тіла на площину OXY є круг з центром в початку координат і радіусом $\sqrt{27}$.

Об'єм зручно знаходити в циліндричній системі координат за формулою

$$V = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{\rho\varphi z}'} \rho d\rho d\varphi dz .$$

Запишемо рівняння поверхонь у циліндричних координатах, використовуючи заміну $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Тоді рівняння півсфери $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ набуває вигляду $z = \sqrt{36 - \rho^2}$, а рівняння конуса $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}$ набуває вигляду $z = \dfrac{\rho}{\sqrt{3}}$. Для визначення меж інтегрування для ρ і φ достатньо врахувати, що областю D на площині OXY є круг радіуса $R = 3\sqrt{3}$ (рис. 9). тому $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$, $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 3\sqrt{3}$. Переходячи до трикратного інтеграла із знайденими межами інтегрування, отримуємо

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{3\sqrt{3}}\rho d\rho\int_{\rho/\sqrt{3}}^{\sqrt{36-\rho^2}}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{3\sqrt{3}}\rho d\rho(z)\Bigg|_{\rho/\sqrt{3}}^{\sqrt{36-\rho^2}}=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{3\sqrt{3}}\rho\left(\sqrt{36-\rho^2}-\rho/\sqrt{3}\right)d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\int_0^{3\sqrt{3}}\rho\sqrt{36-\rho^2}\,d\rho-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{3\sqrt{3}}\rho^2 d\rho\right)=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{-1}{2}\int_0^{3\sqrt{3}}\left(36-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(36-\rho^2\right)-\frac{\rho^3}{3\sqrt{3}}\Bigg|_0^{3\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(36-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{3\sqrt{3}}-\frac{\left(3\sqrt{3}\right)^3}{3\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\varphi\Bigg|_0^{2\pi}\left(\frac{-1}{3}\left((36-27)^{\frac{3}{2}}-(36)^{\frac{3}{2}}\right)-27\right)=2\pi\left(\frac{-1}{3}\left((9)^{\frac{3}{2}}-36^{\frac{3}{2}}\right)-27\right)=$$

$$=2\pi\left(\frac{-1}{3}(27-216)-27\right)=2\pi\left(\frac{189}{3}-27\right)=2\pi\cdot 36=72\pi\,.$$

Оскільки одна з поверхонь є півсфера, область D – круг, а твірна конуса дозволяє легко визначити кут з віссю OZ, то об'єм можна також знаходити в сферичній системі координат за формулою

$$V=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\iiint\limits_{\Omega_{\rho\varphi\theta}'}\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta\,.$$

Запишемо рівняння поверхонь у сферичних координатах, використовуючи заміну $x=\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\rho\cos\theta$. Тоді рівняння сфери $x^2+y^2+z^2=36$ набуває вигляду $\rho=6$. З рівняння конуса маємо

$$3\rho^2\cos^2\theta=\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\,,$$

$$3\rho^2\cos^2\theta=\rho^2\sin^2\theta\,,\qquad tg^2\theta=3,\ tg\theta=\pm\sqrt{3}\,,$$

звідки (згідно з умовою $z\geq 0$) одержуємо $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

Для визначення меж інтегрування для ρ, достатньо провести радіус-вектор з початку координат через розглядуване тіло (рис. 8). Очевидно, що $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 6$. Згідно з визначенням кута θ в сферичній системі координат маємо інші межі: $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$. Межі для φ знаходимо, враховуючи, що областю D на площині OXY є круг (рис. 9), тому $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$.

Переходячи до трикратного інтеграла із знайденими межами інтегрування, отримуємо

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^6 \rho^2 \sin\theta d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} \sin\theta d\theta \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \Bigg|_0^6 = \frac{6^3}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} \sin\theta d\theta =$$

$$= 72 \int_0^{2\pi} d\varphi (-\cos\theta) \Bigg|_0^{\pi/3} = 72\left(-\frac{1}{2}+1\right) \int_0^{2\pi} d\varphi = 72\left(1-\frac{1}{2}\right)(\varphi) \Bigg|_0^{2\pi} = 72\pi .$$

Відповідь: $V = 72\pi$.

Завдання 8. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 6z$, $x = 0$, $y = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, якщо густина $\mu(x, y, z) = 5z$.

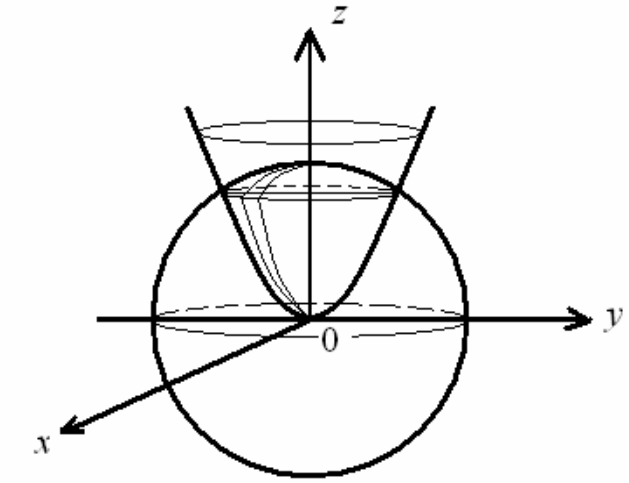


Рис. **10**.

<u>*Розв'язування*</u>. Зображуємо задані поверхні на рисунку 10, попередньо аналізуючи рівняння, якими вони описуються. Рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ описує сферу з центром у точці $O(0;0;0)$ радіуса $R = 4$, а рівняння $x^2 + y^2 = 6z$ визначає параболоїд з вершиною в точці $O(0;0;0)$.

Таким чином, необхідно знайти масу тіла, яке вирізане з верхньої півкулі ($z \geq 0$) параболоїдом і знаходиться в першому октанті ($x \geq 0$, $y \geq 0$) (рис 11).

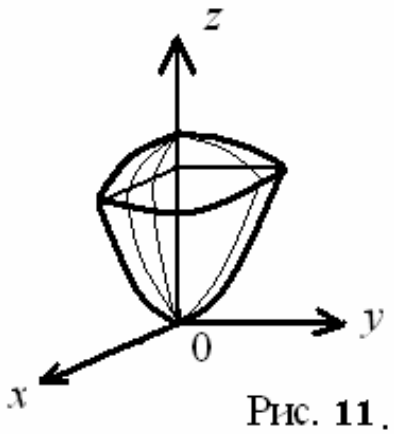


Рис. **11**.

Спроектувавши розглядуване тіло на площину XOY, визначаємо межі інтегрування. Для цього розв'язуємо систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + y^2 = 6z. \end{cases}$ Звідки маємо $9z + z^2 = 16$, $z^2 + 9z - 16 = 0$, $z_1 = 2$, $z_2 = -8$. З умов задачі очевидно випливає, що поверхні перетинаються лише при $z = 2$ по колу $x^2 + y^2 = 12$. Проекцією D тіла на площину XOY є четверта частина круга з центром в початку координат і радіусом $\sqrt{12}$ (рис. 12.). Для знаходження маси тіла використовуємо формулу $m = \iiint\limits_V \mu(x, y, z) dxdydz$, де $\mu(x, y, z)$– змінна густина маси тіла. Згідно з умовою задачі $\mu(x, y, z) = 5z$. Тоді $m = \iiint\limits_V 5zdxdydz$. Оскільки одна з поверхонь – круговий параболоїд, а область D – частина круга, то масу зручно знаходити в циліндричній системі координат за формулами

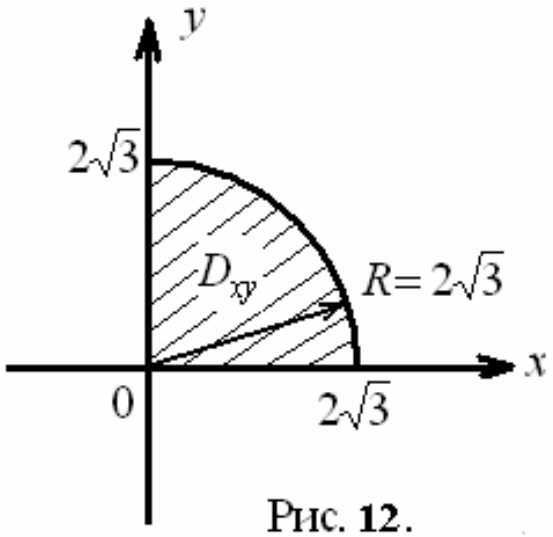


Рис. **12**.

$m=\iiint\limits_{V_{xyz}} 5zdxdydz=\iiint\limits_{V_{\rho\varphi z}} 5z\rho d\rho d\varphi dz$. Запишемо рівняння поверхонь в циліндричній системі координат, використовуючи заміну $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$. Тоді рівняння сфери $x^2+y^2+z^2=16$ набуває вигляду $\rho^2+z^2=16$ або $z=\sqrt{16-\rho^2}$ (рівняння верхньої півсфери), а рівняння параболоїда $x^2+y^2=6z$ – вигляду $6z=\rho^2$ або $z=\dfrac{\rho^2}{6}$. Для визначення меж інтегрування для ρ і φ достатньо розглянути область D_{xy} (рис. 12)– проекцію тіла на площину OXY. Очевидно, що $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\dfrac{\pi}{2}$, $\rho_1=0$, $\rho_2=2\sqrt{3}$. Змінна z в тілі змінюється від $z_1=\dfrac{\rho^2}{6}$ до $z_2=\sqrt{16-\rho^2}$.

Переходячи до трикратного інтеграла із знайденими межами інтегрування, отримаємо

$$m=5\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\rho d\rho\int\limits_{\frac{\rho^2}{6}}^{\sqrt{16-\rho^2}}zdz=5\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\rho d\rho\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\rho^2}{6}}^{\sqrt{16-\rho^2}}=$$

$$=\frac{5}{2}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\rho\left(16-\rho^2-\frac{\rho^4}{36}\right)d\rho=$$

$$=\frac{5}{2}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\sqrt{3}}\left(16\rho-\rho^3-\frac{\rho^5}{36}\right)d\rho=\frac{5}{2}\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\left(8\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6\cdot 36}\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{5}{2}\varphi\Bigg|_0^{\pi/2}\left(8\left(2\sqrt{3}\right)^2-\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^4}{4}-\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^6}{6\cdot 36}\right)=\frac{5}{2}\cdot\pi/2\left(8\cdot 12-36-8\right)=\frac{5\pi}{4}\cdot 52=65\pi.$$

Відповідь: $m=65\pi$.

Завдання 9. Знайти масу кривої $L: x = b\cos t,\ y = b\sin t,\ z = 3t,$ $0 \le t \le \pi$, якщо лінійна густина матеріалу $\mu(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

<u>*Розв'язування.*</u> Масу кривої лінії знаходимо за формулою $m = \int\limits_L \mu(x, y, z)dl$. Крива задана параметричним рівнянням, тому $dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt$.

Знайдемо відповідні похідні $x_t' = -b\sin t$, $y_t' = b\cos t$, $z_t' = 3$. Маємо

$$dl = \sqrt{(-b\sin t)^2 + (b\cos t)^2 + (3)^2}\, dt,\ dl = \sqrt{b^2 + 9}\, dt.$$

$$\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{b^2 + 9}dt}{\sqrt{(b\cos t)^2 + (b\sin t)^2 + (3t)^2}} = \sqrt{b^2 + 9}\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{b^2 + (3t)^2}} =$$

$$= \sqrt{b^2 + 9} \cdot \frac{1}{3}\ln\left|3t + \sqrt{b^2 + 9t^2}\right|\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\sqrt{b^2 + 9}}{3}\left(\ln\left|3\pi + \sqrt{b^2 + 9\pi^2}\right| - \ln|b|\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{b^2 + 9}}{3}\ln\left|\frac{3\pi + \sqrt{b^2 + 9\pi^2}}{b}\right|.$$

Відповідь. $m = \dfrac{\sqrt{b^2 + 9}}{3}\ln\left|\dfrac{3\pi + \sqrt{b^2 + 9\pi^2}}{b}\right|$.

Завдання 10. Знайти масу однієї арки однорідної циклоїди $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t.$

<u>*Розв'язування.*</u> Циклоїда – це крива, яка отримується при русі фіксованої точки кола при його катанні без ковзання вздовж прямої. Перша арка циклоїди отримується при зміні параметра t від 0 до 2π.

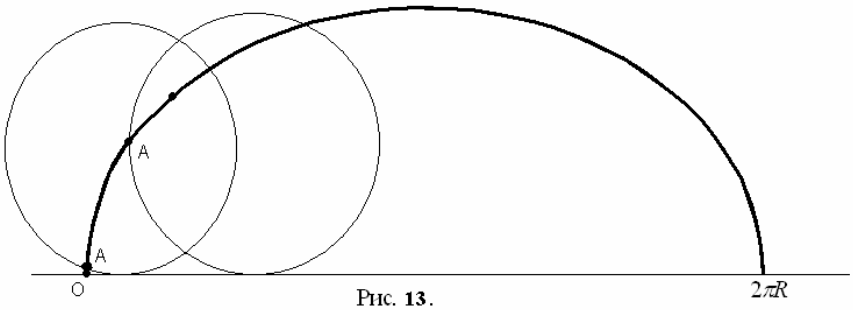


Рис. 13.

Оскільки циклоїда однорідна, то формула для маси кривої набуває вигляду $m=\int\limits_L dl$. Крива задана параметрично в OXY, тому $dl=\sqrt{\left(x_t^{'}\right)^2+\left(y_t^{'}\right)^2}\,dt$, $x_t^{'}=1-\cos t$, $y_t^{'}=\sin t$ і маємо

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(1-\cot\right)^2+\left(\sin t\right)^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\cdot dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt=2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=\left|\begin{matrix}t\in[0,2\pi]\\ \sin\frac{t}{2}\geq 0\end{matrix}\right|=$$

$$=2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4\cos\frac{t}{2}=-4\left(\cos\pi-\cos 0\right)=-4\left(-1-1\right)=8 \text{ (од).}$$

Відповідь. 8 од.

Завдання 11. Знайти масу частини L кривої $y=\frac{1}{5}x^5$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(5;625)$, якщо лінійна густина матеріалу $\mu(x,y)=4x^3$.

<u>*Розв'язування.*</u> Масу кривої лінії обчислюємо за формулою $m=\int\limits_L \mu(x,y)dl$. Крива задана явним рівнянням, тому $dl=\sqrt{1+\left(y_x^{'}\right)^2}\,dx$, а оскільки $y_x^{'}=\frac{1}{5}5x^4=x^4$, то $dl=\sqrt{1+x^8}\,dx$ і

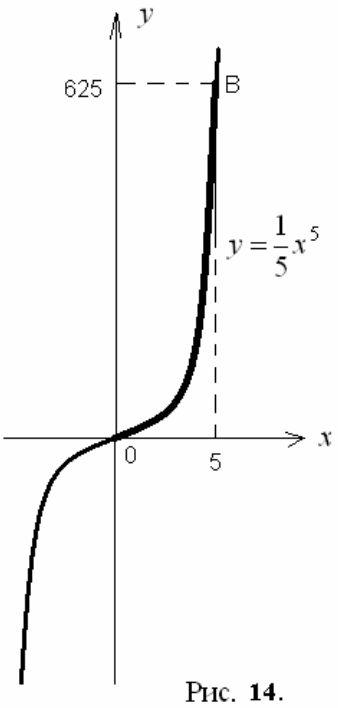


Рис. **14**.

$$m=\int\limits_L 4x^3\sqrt{1+x^8}dx=\int\limits_0^5\sqrt{1+(x^4)^2}d(x^4)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^4\sqrt{1+x^8}+1\ln\left|x^4+\sqrt{1+x^8}\right|\right)\Bigg|_0^5=$$

$$=\frac{1}{2}\left(5^4\sqrt{1+5^8}+\ln\left|5^4+\sqrt{1+5^8}\right|-\ln|1|\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(5^4\sqrt{1+5^8}+\ln\left|5^4+\sqrt{1+5^8}\right|\right).$$

Відповідь. $m=\frac{1}{2}\left(625\sqrt{1+625^2}+\ln\left|625+\sqrt{1+625^2}\right|\right)$.

Завдання 12. На площині задане силове поле $\vec{F} = y\vec{i} + \frac{x}{y}\vec{j}$. Знайти роботу в цьому полі при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої $y = e^{-x}$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(-1;e)$.

<u>*Розв'язування.*</u> Для обчислення роботи силового поля $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ потрібно згадати фізичний зміст криволінійного інтеграла другого роду, а саме

$$A = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz .$$

У нашому завданні $P = y$, $Q = \frac{x}{y}$, інтегрування відбувається вздовж кривої $y = e^{-x}$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(-1;e)$. Отже, маємо

$$A = \int_{AB} ydx + \frac{x}{y}dy = \int_{AB} ydx + \int_{AB} \frac{x}{y}dy .$$

Оскільки для $y = e^{-x}$ диференціал $dy = -e^{-x}dx$, то маємо

$$A = \int_0^{-1} e^{-x}dx + \int_0^{-1} \frac{x}{e^{-x}}\left(-e^{-x}\right)dx = -e^{-x}\Big|_0^{-1} - \int_0^{-1} xdx =$$

$$= -\left(e^1 - e^0\right) - \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{-1} = -(e-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e.$$

Відповідь: $\frac{1}{2} - e$.

Завдання 13. Знайти градієнт скалярного поля, що задається функцією $u = x^5y^3 + x - y^3x$, в точці $A(1;2)$.

<u>*Розв'язування.*</u> Оскільки задана функція залежить від двох змінних, то $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$. Знайшовши від функції u частинні похідні

$u_x' = \left(x^5y^3 + x - y^3x\right)_x' = 5x^4y^3 + 1 - y^3$, $u_y' = \left(x^5y^3 + x - y^3x\right)_y' = x^5 3y^2 - 3y^2x$,

одержуємо $\operatorname{grad} u = \left(5x^4y^3 + 1 - y^3\right)\vec{i} + \left(3x^5y^2 - 3y^2x\right)\vec{j}$.

Підставляємо координати точки у цей вираз:

$$\operatorname{grad} u\Big|_A = (5\cdot 1\cdot 8+1-8)\vec{i} + (3\cdot 1\cdot 4-3\cdot 4\cdot 1)\vec{j} = 33\vec{i} - 0\vec{j} = 33\vec{i}\ .$$

Відповідь. $\operatorname{grad} u\Big|_A = 33\vec{i}$

Завдання 14. Знайти градієнт скалярного поля $z=\cos\left(4x^2-3x+y^2-2\right)$ в точці $A(1;-2)$.

<u>*Розв'язування*</u>. Задана функція залежить від двох змінних, тому $\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$. Знайдемо значення частинних похідних від функції z в точці A:

$$z_x' = \left(\cos\left(4x^2-3x+y^2-2\right)\right)_x' = -\sin\left(4x^2-3x+y^2-2\right)\cdot\left(4x^2-3x+y^2-2\right)_x' =$$
$$= -\sin\left(4x^2-3x+y^2-2\right)\cdot(8x-3)\ ,$$
$$z_x'\Big|_A = -\sin(4\cdot 1-3+4-2)\cdot(8-3) = -5\sin 3;$$
$$z_y' = \left(\cos\left(4x^2-3x+y^2-2\right)\right)_y' = -\sin\left(4x^2-3x+y^2-2\right)\cdot\left(4x^2-3x+y^2-2\right)_y' =$$
$$= -\sin\left(4x^2-3x+y^2-2\right)\cdot(2y)\ ,$$
$$z_y'\Big|_A = -\sin(4\cdot 1-3+4-2)\cdot(-4) = 4\sin 3\ .$$

Отже, $\operatorname{grad} z = -5\sin 3\vec{i} + 4\sin 3\vec{j}$.

Відповідь. $\operatorname{grad} z = -5\sin 3\vec{i} + 4\sin 3\vec{j}$.

Завдання 15. Знайти градієнт скалярного поля

$$u = \ln\left(x^2+y^2+z^2+x-y+2z\right).$$

<u>*Розв'язування.*</u> Задана функція залежить від трьох змінних, тому $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$. Знайдемо частинні похідні від функції u:

$$u_x' = \left(\ln(x^2-y^2+z^2+x-y+2z)\right)_x' = \frac{\left(x^2-y^2+z^2+x-y+2z\right)_x'}{x^2-y^2+z^2+x-y+2z} =$$

$$=\frac{2x+1}{x^2-y^2+z^2+x-y+2z},$$

$$u_y^{'}=\left(\ln(x^2-y^2+z^2+x-y+2z)\right)_y^{'}=\frac{\left(x^2-y^2+z^2+x-y+2z\right)_y^{'}}{x^2-y^2+z^2+x-y+2z}=$$

$$=\frac{-2y-1}{x^2-y^2+z^2+x-y+2z},$$

$$u_z^{'}=\left(\ln(x^2-y^2+z^2+x-y+2z)\right)_z^{'}=\frac{\left(x^2-y^2+z^2+x-y+2z\right)_z^{'}}{x^2-y^2+z^2+x-y+2z}=$$

$$=\frac{2z+2}{x^2-y^2+z^2+x-y+2z},$$

тому

$$\mathrm{grad}u=\frac{(2x+1)\vec{i}}{x^2-y^2+z^2+x-y+2z}-\frac{(2y+1)\vec{j}}{x^2-y^2+z^2+x-y+2z}+\frac{(2z+2)\vec{k}}{x^2-y^2+z^2+x-y+2z}=$$

$$=\frac{(2x+1)\vec{i}-(2y+1)\vec{j}+(2z+2)\vec{k}}{x^2-y^2+z^2+x-y+2z}.$$

Відповідь: $\mathrm{grad}u=\dfrac{(2x+1)\vec{i}-(2y+1)\vec{j}+(2z+2)\vec{k}}{x^2-y^2+z^2+x-y+2z}$.

Завдання 16. Дослідити на потенціальність векторне поле

$$\vec{F}=\left(z+2x^3\right)\vec{i}+\left(z+y^3\right)\vec{j}+\left(x+y+4z\right)\vec{k}.$$

З'ясувати, чи є воно соленоїдальним.

<u>*Розв'язування*</u>. Векторне поле $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ є потенціальним у деякій області $G\subset R^3$ тоді і тільки тоді, коли в кожній точці області має нульовий ротор

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=0,$$

і соленоїдальним тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

в кожній точці цієї області.

Знайдемо ротор і дивергенцію даного векторного поля:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z+2x^3 & z+y^3 & x+y+4z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(x+y+4z)}{\partial y} - \frac{\partial(z+y^3)}{\partial z} \right)\vec{i} -$$

$$-\left(\frac{\partial(x+y+4z)}{\partial x} - \frac{\partial(z+2x^3)}{\partial z} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(z+y^3)}{\partial x} - \frac{\partial(z+2x^3)}{\partial y} \right)\vec{k} =$$

$$= (1-1)\vec{i} - (1-1)\vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = 0.$$

Оскільки $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$, то векторне поле потенціальне, але воно не є соленоїдальним, бо

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial(z+2x^3)}{\partial x} + \frac{\partial(z+y^3)}{\partial y} + \frac{\partial(x+y+4z)}{\partial z} = 6x^2 + 3y^2 + 4 \neq 0.$$

Відповідь: Векторне поле $\vec{F} = (z+2x^3)\vec{i} + (z+y^3)\vec{j} + (x+y+4z)\vec{k}$ потенціальне, але не соленоїдальне.

Завдання 17. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (3x+xy)\vec{i} - 2y\vec{j} + z^2\vec{k}$ через замкнену поверхню S: $z = 3\sqrt{x^2+y^2}$, $z = 10 - x^2 - y^2$.

<u>*Розв'язування*</u>.

1. Зображуємо задані поверхні (рис. 15), попередньо аналізуючи рівняння, якими вони описуються. Отже, рівняння $z = 3\sqrt{x^2+y^2}$ визначає верхню частину конуса з вершиною в точці $O(0;0;0)$, $z \geq 0$, а рівняння $z = 10 - x^2 - y^2$ задає параболоїд обертання навколо осі OZ з вершиною в точці $(0;0;10)$, $z \leq 10$.

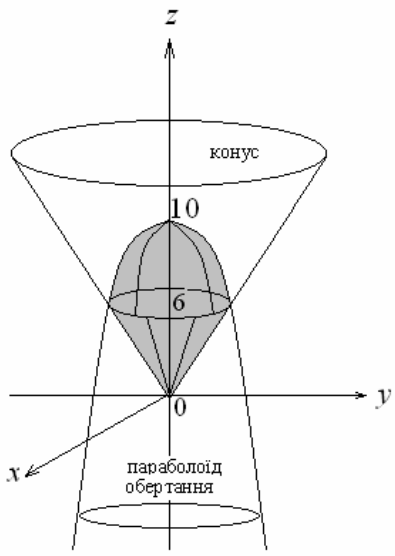


Рис. 15.

Перетинаючись, конус і параболоїд утворюють замкнену поверхню S.

2. У випадку замкненої поверхні потік векторного поля $\vec{F}$ зручно знаходити, використовуючи формулу Остроградського-Ґаусса:

$$\Pi = \oiint_S \left(\vec{F}, \vec{n}\right) ds = \iiint_\Omega div\vec{F} \cdot dv,$$

де Ω – об'ємна область, обмежена поверхнею S.

Знайдемо дивергенцію векторного поля $\vec{F}$

$$\text{div}\vec{F} = \frac{\partial(3x + xy)}{\partial x} + \frac{\partial(-2y)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} = 3 + y - 2 + 2z = 1 + y + 2z,$$

тоді $\Pi = \iiint_\Omega (1 + y + 2z) dxdydz$.

Отже, задача зводиться до обчислення потрійного інтеграла по об'ємній області Ω від функції $f(x, y, z) = 1 + y + 2z$.

Щоб визначити межі інтегрування, спроектуємо отриману область Ω на площину OXY. Для цього розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 10 - x^2 - y^2, \end{cases}$ звідки $z = 10 - \frac{z^2}{9}$, $z^2 + 9z - 90 = 0$, $z_1 = 6$, $z_2 = -15$.

За умов задачі, очевидно, поверхні перетинаються лише при $z = 6$ по колу $x^2 + y^2 = 4$. Проекцією D області Ω на площину OXY є круг з центром у початку координат і радіусом $R = 2$.

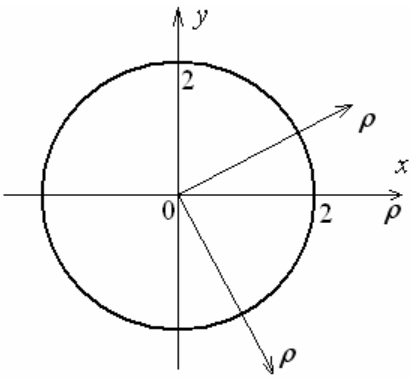


Рис. 16.

Оскільки рівняння заданих поверхонь містять вираз $x^2 + y^2$ і областю D є круг, то потрійний інтеграл раціонально обчислювати в циліндричній системі координат:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z,$$

при цьому $x^2 + y^2 = \rho^2$, $dxdydz = \rho d\rho\, d\varphi\, dz$.

При зображенні області D для зручності доцільно на рисунку сумістити осі декартової і полярної систем координат, а вісь абсцис зробити одночасно і полярною віссю.

У цій системі координат рівняння заданих поверхонь набувають вигляду: $z = 3\rho$, $z = 10 - \rho^2$, тоді $\Pi = \iiint\limits_{\Omega} (1 + \rho\sin\varphi + 2z)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

Враховуючи область D, розставляємо згідно з рис. 16 межі для змінних φ і ρ: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 2$. Для визначення меж інтегрування для z слід перетнути фігуру (рис. 15) прямою, паралельною осі OZ. Ця пряма входить в область через поверхню конуса і виходить через поверхню параболоїда, отже, $z_1 = 3\rho$, $z_2 = 10 - \rho^2$.

Переходячи до трикратного інтеграла і розставляючи межі інтегрування, отримуємо

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\, d\rho \int_{3\rho}^{10-\rho^2} (1 + \rho\sin\varphi + 2z)dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\, d\rho \left(z + \rho\sin\varphi\, z + \frac{2z^2}{2} \right)\Bigg|_{3\rho}^{10-\rho^2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\left(10 - \rho^2 - 3\rho + \rho\sin\varphi(10 - \rho^2 - 3\rho) + (10 - \rho^2)^2 - 9\rho^2\right)d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(\sin\varphi(10\rho^2 - \rho^4 - 3\rho^3) + \rho^5 - 30\rho^3 - 3\rho^2 + 110\rho\right)d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sin\varphi\left(\frac{10\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5} - \frac{3\rho^4}{4} \right) + \frac{\rho^6}{6} - \frac{30\rho^4}{4} - \frac{3\rho^3}{3} + \frac{110\rho^2}{2} \right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{124}{15}\sin\varphi + \frac{308}{3} \right)d\varphi = -\frac{124}{15}\cos\varphi\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{308}{3}\varphi\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{124}{15}(\cos 2\pi - \cos 0) + \frac{308}{3} \cdot 2\pi = 205\frac{1}{3}\pi.$$

Відповідь: $\Pi = 205\frac{1}{3}\pi$.

Завдання 18. Знайти циркуляція векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + xz\vec{j} + yz^2\vec{k}$ вздовж контура $\Gamma = \{(x;y;z): z = 9 - 3x^2 - 3y^2,\ z = x^2 + y^2\}$.

<u>*Розв'язування*</u>. Зображуємо задані поверхні на рисунку 17. Обидві поверхні $9 - z = 3(x^2 + y^2)$ і $x^2 + y^2 = z$ описують кругові параболоїди. Ці поверхні перетинаються по контуру Γ – коло радіуса R в просторі. З'ясуємо при якому значенні координати z параболоїди перетинаються і знайдемо радіус R. Для цього розв'язуємо систему рівнянь $\begin{cases}(x^2 + y^2) = 9 - z, \\ x^2 + y^2 = z.\end{cases}$ Отримаємо $3z = 9 - z$, $4z = 9$, $z = \frac{9}{4}$. Тоді $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ і радіус кола $R = \frac{3}{2}$. Робимо висновок, що контур Γ – це коло радіуса $R = \frac{3}{2}$ яке підняте по вісі OZ на $z = \frac{9}{4}$. Запишемо параметричні рівняння просторового кола $\Gamma: x = \frac{3}{2}\cos t,\ y = \frac{3}{2}\sin t,\ z = \frac{9}{4},\ 0 \le t \le 2\pi$.

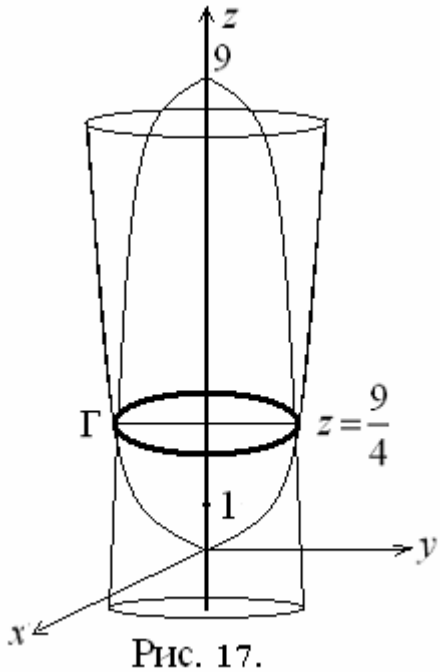


Рис. 17.

Циркуляція векторного поля $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ вздовж замкненого контура Γ обчислюється за формулою

$$Ц = \oint_{\Gamma} \vec{a}\,d\vec{r} = \oint_{\Gamma} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz.$$

Для нашого випадку маємо $Ц = \oint_{\Gamma} ydx + xzdy + yz^2dz =$

$$= \left| \begin{array}{ccc} x = \frac{3}{2}\cos t & & dx = -\frac{3}{2}\sin t \cdot dt \\ y = \frac{3}{2}\sin t & \Leftrightarrow & dy = \frac{3}{2}\cos t \cdot dt \\ z = \frac{9}{4} & 0 \le t \le 2\pi & dz = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{3}{2}\sin t \frac{3}{2}\sin t + \frac{3}{2}\cos t \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2}\cos t \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{9}{4}\sin^2 t + \frac{81}{16}\cos^2 t \right) dt = -\frac{9}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt + \frac{81}{16}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= -\frac{9}{8}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2t) dt + \frac{81}{32}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2t) dt = -\frac{9}{8}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{81}{32}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{9}{8} \cdot 2\pi + \frac{81}{32} \cdot 2\pi = -\frac{9}{4}\pi + \frac{81}{16}\pi = \frac{81-36}{16}\pi = \frac{45}{16}\pi .$$

Відповідь: $Ц = \dfrac{45\pi}{16}$.

Завдання 19. За теоремою Стокса знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (xz + y)\vec{i} + (yz - x)\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k}$ вздовж замкненого контура $\Gamma = \left\{ (x; y; z) : \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{49} = 1,\ x - 3y + 2z - 6 = 0 \right\}$. Знайти модуль циркуляції.

<u>*Розв'язування*</u>. Аналізуємо рівняння, якими описуються поверхні, при перетині яких утворюється просторовий контур Γ. Рівняння $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{49} = 1$ описує еліптичний циліндр з параметрами $a = 6$, $b = 7$, а рівняння $x - 3y + 2z - 6 = 0$ визначає площину. Рівняння цієї площини у відрізках перепишеться у вигляді $\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{3} = 1$, тобто по вісі OX відтинається відрізок 6, по вісі OY – відповідно -2, а від OZ – відрізок 3. Зображуємо поверхні на рисунку 18. При перетині цих поверхонь утворюється просторовий еліпс, який обмежує частину похилої площини $x - 3y + 2z - 6 = 0$ (накриємо контур інтегрування площиною).

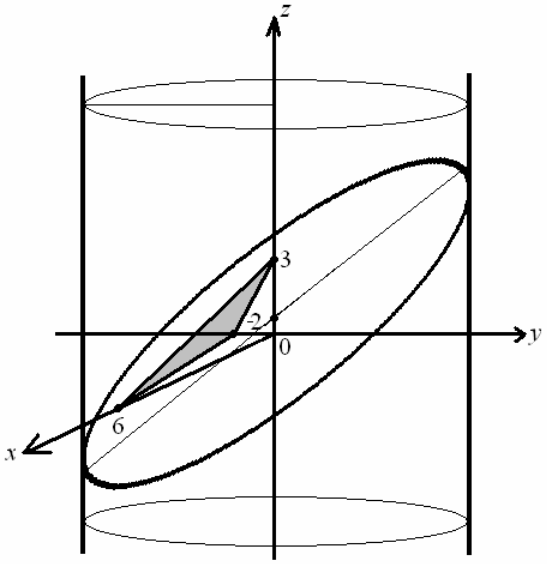


Рис. 18.

Потрібно обчислити циркуляцію вектора $\vec{a}$ вздовж цього контура за формулою Стокса $Ц = \iint\limits_{\sigma} \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}d\sigma$, де $\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}$ позначає операцію скалярного добутку. Знайдемо вектор нормалі $\vec{n}$ до поверхні $\sigma = \{(x;y;z): F(x;y;z)=0\}$ за формулою

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad}F(x,y,z)}{|\operatorname{grad}F(x,y,z)|} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial Z}\vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Враховуючи те, що $F(x;y;z) = x - 3y + 2z - 6$ і $\frac{\partial F}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -3$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 2$,

отримуємо $\vec{n} = \frac{1\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (2)^2}} = \frac{\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{14}}$ або $\vec{n} = \left\{\frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{-3}{\sqrt{14}}; \frac{2}{\sqrt{14}}\right\}$.

Знайдемо ротор вектора $\vec{a}$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz + y & yz - x & x^2 - y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-2y - y) - \vec{j}(2x - x) + \vec{k}(-1-1) = -3y\vec{i} - x\vec{j} - 2\vec{k}$$

тобто $\operatorname{rot}\vec{a} = \{-3y; -x; -2\}$.

Тоді $\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n} = -3y\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} + x\cdot\frac{3}{\sqrt{14}} - 2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{3x - 3y - 4}{\sqrt{14}}$ і циркуляція обчислюється за формулою $Ц = \iint\limits_{\sigma} \frac{3x - 3y - 4}{\sqrt{14}}\cdot d\sigma$, де поверхня

$\sigma = \left\{(x;y;z): z = \frac{-x + 3y + 6}{2}\right\}$ і $Ц = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{3x - 3y - 4}{\sqrt{14}}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$.

Область D_{xy}, в яку проектується частина площини σ, обмежена еліпсом

Γ – еліпс $\Gamma = \left\{(x;y): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1\right\}$ (рис 19), а

$$d\sigma = \sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}dxdy = \sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}dxdy = \frac{\sqrt{14}}{2}dxdy,$$ оскільки

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}$. Тоді $Ц = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{3x-3y-4}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}} (3x-3y-4)\cdot dxdy$.

Переходимо до узагальненої полярної системи координат для еліпса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$

$$x = 6\rho\cos\varphi, \quad y = 7\rho\sin\varphi,$$

$dxdy = ab\rho d\rho d\varphi = 6\cdot 7\rho d\rho d\varphi = 42\rho d\rho d\varphi\rho$.

Рівняння еліпса в цій системі координат $\rho = 1$. Враховуючи область D_{xy} ($D_{\rho\varphi}$), розставляємо згідно з рис. 19 межі інтегрування для змінних φ і ρ:

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le \rho \le 1.$$

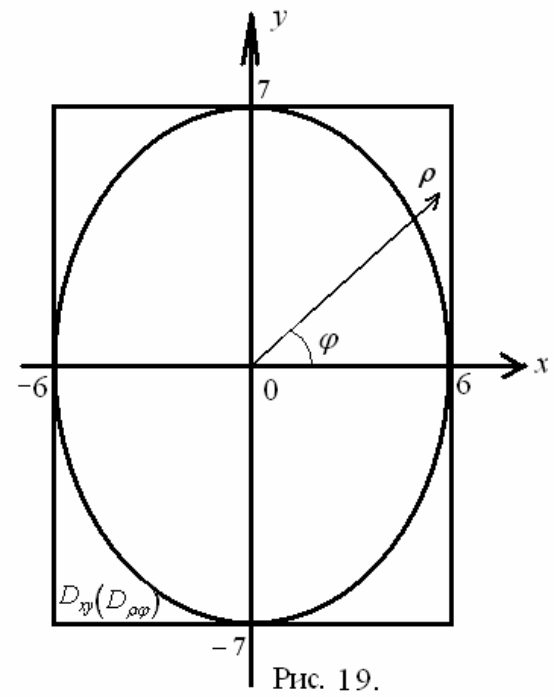


Рис. 19.

Тоді

$$Ц = \frac{1}{2}\iint\limits_{D_{\rho\varphi}} (3\cdot 6\rho\cos\varphi - 3\cdot 7\rho\sin\varphi - 4)42\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \frac{42}{2}\iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \left(18\rho^2\cos\varphi - 21\rho^2\sin\varphi - 4\rho\right)d\rho d\varphi =$$

$$= 21\int_0^{2\pi} d\varphi\left(18\frac{\rho^3}{3}\cos\varphi - 21\frac{\rho^3}{3}\sin\varphi - 4\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 21\int_0^{2\pi}(6\cos\varphi - 7\sin\varphi - 2)d\varphi = 21(-6\sin\varphi - 7\cos\varphi - 2\varphi)\Big|_0^{2\pi} =$$

$= 21(-2\cdot 2\pi) = -84\pi$. Тоді $|Ц| = |-84\pi| = 84\pi$.

Відповідь: $Ц = -84\pi$, $|Ц| = 84\pi$.

5. ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x}^{2-x^2} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y=\dfrac{3}{x},\quad y=4e^x,\quad y=3,\quad y=4$;

b) $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими $x=1,\ y=0,\ y^2=4x$, $(y\ge 0)$, із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=7x^2+y$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{V} 2y^2e^{xy}dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=0,\quad y=1,\quad y=x\ ,\ z=0,\quad z=1$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2=y,\quad x^2+y^2=4y,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=0$;

b) $z=\sqrt{9-x^2-y^2},\quad \dfrac{9z}{2}=x^2+y^2$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $64\left(x^2+y^2\right)=z^2$, $(x\ge 0, y\ge 0)$, $x^2+y^2=4$, $(x\ge 0, y\ge 0)$, $y=0$, $z=0$,

якщо об'ємна густина $\mu(x, y) = \frac{5}{4}\left(x^2 + y^2\right)$.

8. Знайти масу частини кривої $L = \{(x; y):\ x = 2\cos t,\ y = 3\sin t,\ 0 \le t \le \pi\}$, якщо лінійна густина матеріалу $\mu(x, y) = x$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = \left(x^2 - 2y\right)\vec{i} + \left(y^2 - 2x\right)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L – відрізок MN, де $M(-4; 0)$, $N(0; 2)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3$ у точці $M_0(1;2;-2)$;

b) $u = 3x^2 + 4y^5 - 2xy + 5x - 3y$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (3y - 5x)\vec{i} + (6x + 5y)\vec{j} + (4z - xy + 4)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = \left(e^z + 2x + y\right)\vec{i} + e^x\vec{j} + e^y\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (нормаль зовнішня).

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (x + z)\vec{i} + (z + y)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 = 9$, $z = x$, $z = 0$ $(z \ge 0)$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = \left(x^2 - y\right)\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \{(x; y; z):\ x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \{(x; y; z):\ x^2 + y^2 = 9, x + y + z = 1\}$.

Варіант 2

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $6y=-x^2,\quad x^2+y^2=72\quad (y\le 0)$;

b) $x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ y=0,\ x=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V x^2 z\sin(xyz)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=2,\quad y=\pi,\quad z=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2=4\sqrt{2}y,\quad z=x^2+y^2-16,\quad z=0,\quad (z\ge 0)$;

b) $z=\dfrac{15\sqrt{x^2+y^2}}{2},\quad z=\dfrac{17}{2}-x^2-y^2$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=1,\quad \left(x^2+y^2\le 1\right),\quad x=0\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=4|z|$.

8. Знайти масу частини кривої $L=\{(x;y):\ y=2x-8\}$, від точки $A(0;-8)$ до точки $B(4;0)$ якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x,y)=x^2y^2$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F}=(x^2+2y)\vec{i}+(y^2+2x)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y=2-\dfrac{x^2}{8}$, а $M(-4;\,0)$, $N(0;\,2)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ у точці $M_0(-1;2;2)$;

b) $u=2x^2y-4yx^3+5y-2x-1$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a}=(\cos y+z^2)\vec{i}+(\sin x-4z)\vec{j}+(x^2-y)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=(3z^2+x)\vec{i}+(e^x-2y)\vec{j}+(2z-xy)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2+y^2=z^2$, $z=1$, $z=4$.

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=x^2\vec{i}+x\vec{j}+xz\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $z=x^2+y^2$, $z=1$, $x=0$, $y=0$ (*I октант*).

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=xz\vec{i}-\vec{j}+y\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma=\{(x;y;z):\ z=5(x^2+y^2)-1,\ z=4\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=x\vec{i}+yz\vec{j}+x\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma=\{(x;y;z):\ x^2+y^2=1,\ x+y+z=1\}$.

Варіант 3

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_{-2}^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $x=\sqrt{36-y^2}$, $x=6-\sqrt{36-y^2}$;

b) $y^2-6y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}\,x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими $x=1,\ y=0,\ y^2=4x,\ (y\ge 0)$ із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{7x^2}{2}+5y$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2 ch(2xy)dxdydz$, де V – область, обмежена поверхнями $x=0,\quad y=-2,\quad y=4x,\quad z=0,\quad z=2.$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2+4x=0,\quad z=8-y^2,\quad z=0$;

b) $z=\sqrt{4-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{255}}$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=2z,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,(x\ge 0,\ y\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=10x$.

8. Знайти масу частини кривої $L = \{(x; y; z):\ x = 4\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = 3\cos t\}$, якщо $0 \le t \le \pi$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = (x^2 + y^2 + z^2)$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, а $M(2; 0)$, $N(0; 2)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = x + y - z + \ln(z^2 + y^2)$ у точці $M_0(-1;-2;1)$;

b) $u = 2x^5y^2 + 3xy + x - y^2x + 1$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (x^2 + 2z + 4)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (\ln y + 7x)\vec{i} + (\sin z - 2y)\vec{j} + (e^y - 2z)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y + 2z - 2$ (нормаль зовнішня).

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $y = x^2$, $y = 4x^2$, $y = 1$, $z = y$, $z = 0$, $(x \ge 0)$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + xy\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \{(x; y; z):\ x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ x^2 + y^2 = 9\ (z > 0)\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -3z\vec{i} + y^2\vec{j} + 2y\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \{(x; y; z):\ x^2 + y^2 = 4,\ x - 3y - 2z = 1\}$.

Варіант 4

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{3-x}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $x = 8 - y^2, \quad x = -2y$;

b) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 4x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 16,\ y = 0,\ x = 0,\ (x \ge 0,\ y \ge 0)$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = \dfrac{2x+5y}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 8y^2 z e^{2xyz} dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=-1,\quad y=2,\quad z=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2 + y^2 = 7x,\quad x^2 + y^2 = 10x,\quad z = \sqrt{x^2+y^2},\quad z = 0,\ y = 0,\ (y \le 0)$;

b) $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2},\quad z = 1,\quad x^2 + y^2 = 60$ (внутрішня частина циліндра);

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями

$x^2 + y^2 = \dfrac{16}{49}z^2,\ x^2 + y^2 = \dfrac{4}{7}z,\ x = 0,\quad y = 0, (x \ge 0,\ y \ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z) = 80yz$.

8. Знайти масу частини кривої $L=\left\{(x;y):\ y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x}\right\}$ при $0\le x\le\frac{1}{4}$, якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x,y)=\sqrt{x}+3x+1$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F}=\left(xy-y^2\right)\vec{i}+x\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y=2x^2$, а $M(0;\,0)$, $N(1;\,2)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad}u$ скалярного поля

a) $u=2x+y^2z-\sqrt{xy+z^2}$ у точці $M_0(0;-3;2)$;

b) $u=3x^2y^3+2xy-y^4x+2y-3$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a}=(x+2)\vec{i}+(y-8)\vec{j}+(z+6)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=(\cos z+3x)\vec{i}+(x-2y)\vec{j}+\left(3z+y^2\right)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $36(x^2+y^2)=z^2$, $z=6$.

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=3x\vec{i}-z\vec{j}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $z=6-x^2-y^2$, $z^2=x^2+y^2$, $(z\ge 0)$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(x-y)\vec{i}+x\vec{j}-z\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma=\left\{(x;y;z):\ x^2+y^2=1,\ z=5\right\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля

$$\vec{a}=2y\vec{i}+5z\vec{j}+3x\vec{k}\ \text{вздовж контуру}$$

$$\Gamma\left\{(x;y;z):\ 2\left(x^2+y^2\right)=1,\ x+y+z=3\right\}.$$

Варіант 5

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f(x,y)dy$;

b) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y=\dfrac{3}{x},\quad y=8e^x,\quad y=3,\quad y=8$;

b) $y^2-8y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x=2,\ y=0,\ y^2=2x\ (y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{7}{8}x^2+2y$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{V} x^2 sh(3xy)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=1,\quad y=2x,\quad y=0,\quad z=0,\quad z=36.$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2=8\sqrt{2}x,\quad z=x^2+y^2-64,\quad z=0,\quad (z\ge 0)$;

b) $z=\sqrt{\dfrac{16}{9}-x^2-y^2},\quad 2z=x^2+y^2$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=1,\quad x^2+y^2=4z^2,\quad x=0,\quad y=0, (x\ge 0,\ y\ge 0, z\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=20z$.

8. Знайти масу фрагмента кривої $L = \{(x; y):\ y = x^2\}$, від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$ якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = x$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L – відрізок MN, де $M(-4; 0)$, $N(0; 2)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = \sqrt{x^2 + y^2} - 3zx^2 \cos y$ в точці $M_0(3;0;-4)$;

b) $u = x^3 y^5 + 2xy^3 - 3x + 5y - 2$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (3x + 2y)\vec{i} + (5x - 2y)\vec{j} + (3z - y^2 - 3)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (e^{-z} - x)\vec{i} + (xz + 3y)\vec{j} + (z + x^2)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $2x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (нормаль зовнішня).

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = x^2\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 0$, $(z \geq 0)$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \{(x; y; z):\ z = 3(x^2 + y^2) + 1,\ z = 4\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 4x\vec{i} - yz\vec{j} + x\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \{(x; y; z):\ x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$.

Варіант 6

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_0^{\arccos y} f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy$,

де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y=\dfrac{1}{2x},\quad y=\dfrac{\sqrt{x}}{2},\quad x=16$;

b) $x^2-4x+y^2=0,\ x^2-8x+y^2=0,\ y=0,\ y=x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2 z\cos(xyz)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=1,\quad y=\pi,\quad z=2,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2=2y,\quad z=\dfrac{5}{4}-x^2,\quad z=0$;

b) $z=3\sqrt{x^2+y^2},\quad z=10-x^2-y^2$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $36\left(x^2+y^2\right)=z^2$, $x^2+y^2=1$, $x=0$, $z=0, (x\ge 0, z\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=\frac{5}{6}\left(x^2+y^2\right)$.

8. Знайти масу кривої $L: y=3x+6$, від точки $A(-2;0)$ до точки $B(0;6)$ якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x,y)=x^2y$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(x-y)\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x=\cos t$, $y=3\sin t$, а $M(1;0)$, $N(0;3)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u=\sin xy+e^{zx}+x^2z$ у точці $M_0(1;-1;2)$;

b) $u=x^4+y^3+3xy-5y^2x+2$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a}=\left(y^2-z^2\right)\vec{i}+(z+\cos x)\vec{j}+(x-4y)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=(6x-\cos y)\vec{i}-\left(e^x+z\right)\vec{j}-(2y+3z)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2+y^2=z^2$, $z=1$, $z=2$.

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=x\vec{i}-(x+2y)\vec{j}+y\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2+y^2=1$, $x+2y+3z=6$, $z=0$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=yz\vec{i}+2xz\vec{j}+y^2\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma=\left\{(x;y;z):\ x^2+y^2+z^2=25,\ x^2+y^2=16\ (z>0)\right\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(2-xy)\vec{i}-yz\vec{j}-xz\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma=\left\{(x;y;z):\ x^2+y^2=4,\ x+y+z=1\right\}$.

Варіант 7

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{y^2-4}^{0} f(x,y)dx$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy$,

де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $x=5-y^2,\quad x=-4y$;

b) $y^2-4y+x^2=0,\ y^2-6y+x^2=0,\ y=x,\ x=0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x=2,\ y=0,\ y^2=\frac{x}{2},\ (y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{7x^2}{2}+6y$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{V} y^2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}xy\right)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами

$$x=0,\quad y=-1,\quad y=\frac{x}{2},\quad z=0,\quad z=-\pi^2.$$

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2=5y,\quad x^2+y^2=8y,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=0$;

b) $z=\sqrt{25-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=16,\quad x^2+y^2=4,\quad \left(x^2+y^2\le 4\right)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=2|z|$.

8. Знайти масу кривої $L: y=x^3$, від точки $A(-1;-1)$ до точки $B(1;1)$ якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x,y)=y$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F}=(xy-x)\vec{i}+\dfrac{x^2}{2}\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y=2\sqrt{x}$, а $M(0;0),\quad N(1;2)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u=\sqrt{xyz}+\cos(x-y)+z^2$ у точці $M_0(2;-2;-1)$;

b) $u=-3x^2y^4+xy+2y^3x-1$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a}=(3x-4y)\vec{i}+(3y-x)\vec{j}+(xy-2z+4)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=\left(4x-2y^2\right)\vec{i}+(\ln z-4y)\vec{j}+(x+\dfrac{3z}{4})\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2+y^2+z^2=2x+3$ (нормаль зовнішня).

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=3x\vec{i}+z\vec{j}-y\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $z=4-2(x^2+y^2),\quad z=2(x^2+y^2)$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}+(1-x)\vec{j}-z\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma=\left\{(x;y;z):\quad x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=1\quad (z>0)\right\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=3z\vec{i}-2y\vec{j}+2y\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma=\left\{(x;y;z):\quad x^2+y^2=4,\quad 2x-3y-2z=1\right\}$.

Варіант 8

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x^2} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy$,

де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $x^2+y^2=12,\quad x^2=-\sqrt{6}y\quad (y\le 0)$;

b) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-10x+y^2=0,\ y=0,\ y=\sqrt{3}x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=25,\ y=0,\ x=0,\ (x\ge 0,\ y\le 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{2x-3y}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V x^2 z\sin\dfrac{xyz}{4}dxdydz$, де V – область,

обмежена площинами $x=1,\quad y=2\pi,\quad z=4,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2+2\sqrt{2}x=0,\quad z=x^2+y^2-4,\quad z=0,\quad (z\ge 0)$;

b) $z=\sqrt{100-x^2-y^2},\quad z=6,\quad x^2+y^2=51$ (внутрішня частина циліндра).

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=4,\quad x^2+y^2=8z,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,(x\ge 0,\ y\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=5x$.

8. Знайти масу кривої $L: x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t,\ z = 2$, якщо $0 \le t \le 2\pi$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = x^2 y\vec{i} - y\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L – відрізок MN, де $M(-1;\,0)$, $N(0;\,1)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z} + xyz^2$ у точці $M_0(1;-2;4)$;

b) $u = -2xy^5 + 7y^2 y + x - y^3 - xy$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (x-4)\vec{i} + (y+7)\vec{j} + \cos z\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = \left(1 + \sqrt{z}\right)\vec{i} + \left(4y - \sqrt{x}\right)\vec{j} + xy\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $4(x^2 + y^2) = z^2$, $z = 3$.

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = zx\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 = 1 - z$, $z = 0$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 4\right\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ 2x - 3y + z = 6\right\}$.

Варіант 9

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy$;

b) $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} \left(4xy + 3x^2y^2\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y=\sqrt{12-x^2},\quad y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2},\quad x=0\quad (x\ge 0)$;

b) $y^2-6y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=x,\ x=0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x=1,\ y=0,\ y^2=4x,\ (y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=x+3y^2$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{V} y^2e^{-xy}dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=0,\quad y=-2,\quad y=4x,\quad z=0,\quad z=1$.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2=2y,\quad z=\dfrac{9}{4}-x^2,\quad z=0$;

b) $z=21\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{4}},\quad z=\dfrac{23}{2}-x^2-y^2$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=\dfrac{4}{25}z^2,\quad x^2+y^2=\dfrac{2}{5}z,\quad x=0,\quad y=0,(x\ge 0,\ y\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=28xz$.

8. Знайти масу кривої $L: x = 2(\cos t + t\sin t),\ y = 2(\sin t - t\cos t)$, якщо $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(t) = 3 + t$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = (2xy - y)\vec{i} + (x^2 + x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x = 3\cos t,\quad y = 3\sin t$, а $M(3;\,0),\quad N(0;\,3)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = \cos y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x^3$ у точці $M_0(3;0;-4)$;

b) $u = x^3y^3 + xy^4 - x + 2xy - 3$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (-x - 2y)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + (3z - 2xy + 9)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (\sqrt{z} - x)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (y^2 - z)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $3x - 2y + z = 6,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0$ (нормаль зовнішня).

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = 6x\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $z = 3 - 2(x^2 + y^2),\ z^2 = x^2 + y^2,\quad (z \ge 0)$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 4x\vec{i} + 2\vec{j} - xy\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \{(x;y;z):\quad z = 2(x^2 + y^2) + 1,\quad z = 9\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -3z\vec{i} + y^2\vec{j} + 2y\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x;y;z):\quad \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1,\quad -2x + 4y - z - 8 = 0\right\}$.

Варіант 10

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^1 f(x,y)dy + \int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^1 f(x,y)dy$;

b) $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(12xy + 9x^2y^2\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y=\dfrac{3}{2x},\quad y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x},\quad x=9$;

b) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=\sqrt{3}\,x,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими:

$$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ y=0,\ x=0,\ (x\ge 0,\ y\le 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 2y^2ze^{xyz}dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=1,\quad y=1,\quad z=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2=10x,\ x^2+y^2=13x,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,\ y=0,\ (y\ge 0)$;

b) $z=\sqrt{16-x^2-y^2},\quad 6z=x^2+y^2$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=z^2,\quad x=0,\quad y=0,(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$, якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z)=6z$.

8. Знайти масу кривої $L: y = \ln(x^2 - 1) + 1$, від точки $A(2;1+\ln 3)$ до точки $B(5;1+\ln 24)$ якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = x + 1$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y = x^2$, а $M(-1;1)$, $N(2;4)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = \ln(x + y + 3z) - x^3 + yz$ у точці $M_0(1;-2;3)$;

b) $u = x^5 y^4 + xy^3 - xy + 2y - 6$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (z + \sin y)\vec{i} + (x^2 - z^2)\vec{j} + \sin x\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (yz + x)\vec{i} + (x^2 + y)\vec{j} + (xy^2 + z)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена поверхнею $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $4z = x^2 + y^2$, $z = 4$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 2y\vec{i} - 3x\vec{j} + z^2\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \{(x;y;z):\ z = x^2 + y^2,\ z = 1\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 2y\vec{i} + 5z\vec{j} + 3x\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x;y;z):\ \dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{9} = 1,\ 2x - y + z = 4\right\}$.

Варіант 11

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(8xy + 9x^2y^2\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y=\sqrt{24-x^2},\quad x^2=2\sqrt{3}y,\quad x=0\quad (x\ge 0)$;

b) $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=\sqrt{3}\,x,\quad x=0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими $x=1,\ y=0,\ y^2=x,\ (y\ge 0)$ із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=3x+6y^2$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2 ch(2xy)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $\begin{cases} x=0, & y=1, & y=x, \\ z=0, & z=8. \end{cases}$.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

a) $x^2+y^2=2\sqrt{2}x,\quad z=x^2+y^2-4,\quad z=0,\quad (z\ge 0)$;

b) $z=\sqrt{9-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{80}}$;

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $25\left(x^2+y^2\right)=z^2,\quad x^2+y^2=4,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0, (x\ge 0,\ y\ge 0, z\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=2\left(x^2+y^2\right)$.

8. Знайти масу кривої $L: x = \cos t + t\sin t,\ y = \sin t - t\cos t,\ z = 2$, якщо $0 \le t \le 2\pi$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x+y)^2\vec{i} - \left(x^2 + y^2\right)\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L – відрізок MN, де $M(1;0),\quad N(0;1)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = \cos\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - y^3 + 2xz$ у точці $M_0(1;0;-1)$;

b) $u = x^2y^5 + 2xy^4 - 3xy + 2y - 5$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (7x + 5y)\vec{i} + (8x - y)\vec{j} + (3xy - 2z - 2)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = \left(e^{2y} + x\right)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j} + (y^2 + 3z)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x - y + z = 1,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0$ (нормаль зовнішня).

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = 3xz\vec{i} - 2x\vec{j} + y\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x + y + z = 2,\quad x = 1,\quad x = 0,\ y = 0,\quad z = 0$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 2y\vec{i} + \vec{j} - 2yz\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad x^2 + y^2 - z^2 = 0,\quad z = 2\right\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 4x\vec{i} - yz\vec{j} + x\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1,\quad 6x - y + 3z = 6\right\}$.

Варіант 12

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^{\pi/4} dy \int\limits_0^{\sin y} f(x,y)dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_0^{\cos y} f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(24xy + 18x^2y^2\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad x=0\quad (x\ge 0)$;

b) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=25,\ y=0,\ x=0,\ (x\le 0,\ y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{2y-x}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V x^2 zsh(xyz)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=2,\quad y=1,\quad z=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2=4x,\quad z=10-y^2,\quad z=0$;

b) $z=\sqrt{81-x^2-y^2},\quad z=5,\quad x^2+y^2=45$ (внутрішня частина циліндра).

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=9,\quad x^2+y^2=4,\quad \left(x^2+y^2\le 4\right),\quad y=0\ (\ y\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=|z|$.

8. Знайти масу кривої $L: x = 2t + 2,\ y = t^2 - 1,\ z = 4t - 2$, якщо $0 \le t \le 1$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = x + z$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y = x^3$, а $M(0;\,0),\quad N(2;\,8)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = xy^{3z} + 2\cos xy - z$ у точці $M_0(0;1;-2)$;

b) $u = x^2y^6 + 5x - 2y^3 + yx$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + (\sin z)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = \left(\sqrt{z} - 2x\right)\vec{i} + \left(e^x + 3y\right)\vec{j} + \sqrt{y + x}\,\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 = z^2,\quad z = 2,\quad z = 5$.

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (y + 2z)\vec{i} - y\vec{j} + 3z\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $3z = 27 - 2(x^2 + y^2),\quad z^2 = x^2 + y^2\ \ (z \ge 0)$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad x^2 + y^2 - 4z^2 = 0,\quad z = \dfrac{1}{2}\right\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (2 - xy)\vec{i} - yz\vec{j} - xz\vec{k}$ контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad \dfrac{x^2}{121} + \dfrac{y^2}{144} = 1,\quad x + 3y - z = 6\right\}$.

Варіант 13

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)dy$;

b) $\int\limits_{-1}^{\frac{3}{2}} dy \int\limits_{2y^2}^{y+3} f(x,y)dx$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(12xy + 27x^2y^2\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y = 20 - x^2, \quad y = -8x$;

b) $y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y^2 - 6y + x^2 = 0,\ x = 0,\ y = \sqrt{3}x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x = 2,\ y = 0,\ y^2 = \frac{x}{2},\ (y \ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = 2x + 3y^2$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2 e^{\frac{xy}{2}} dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=0,\quad y=2,\quad y=2x,\quad z=0,\quad z=-1$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2 + y^2 = 2y,\quad x^2 + y^2 = 5y,\quad z = \sqrt{x^2 + y^2},\quad z = 0$;

b) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\quad \frac{3z}{2} = x^2 + y^2$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 1,\quad x^2 + y^2 = 6z,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0, (x \ge 0,\ y \ge 0)$, якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z) = 90y$.

8. Знайти масу кривої $L: y = 3 - x^2$, від точки $A(0;3)$ до точки $B(2;-1)$ якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = x$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x^2 + y^2 = 1, \quad (y \geq 0), \; M(1; 0), \quad N(-1; 0)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = (x + 2y - z)^3 + 2x - 4y$ в точці $M_0(1;2;2)$;

b) $u = x^5 y^4 + \sin x - 2y^3 + x - 7$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (2x - 3y)\vec{i} + (5z - 4y)\vec{j} + (6z - 2y^2 - 6)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = \left(e^z + \frac{x}{4}\right)\vec{i} + \left(\ln x + \frac{y}{4}\right)\vec{j} + \frac{z}{4}\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y - 2z - 2$ (нормаль зовнішня).

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = y\vec{i} + 5y\vec{j} + z\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 = 1, \quad z = x, \quad z = 0 \quad (z \geq 0)$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = xz\vec{i} - \vec{j} + y\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \{(x; y; z): \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = 1\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (3y + z)\vec{i} + (2 - y)\vec{j} - 2x\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z): \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1, \quad -2x + 3y - 6z - 12 = 0\right\}$.

Варіант 14

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{8-3x}^{8-x^2} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(8xy + 18x^2y^2\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y = \sqrt{18 - x^2}, \quad y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18 - x^2}$;

b) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 8x + y^2 = 0,\ y = \sqrt{3}x,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 16,\ y = 0,\ x = 0,\ (x \le 0,\ y \ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = \dfrac{2y - 3x}{x^2 + y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2 z \cos\dfrac{xyz}{3} dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x = 3, \quad y = 1, \quad z = 2\pi, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}y, \quad z = x^2 + y^2 - 64, \quad z = 0, \quad (z \ge 0)$;

b) $z = 6\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 16 - x^2 - y^2$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{25}z^2, \quad x^2 + y^2 = \dfrac{z}{5}, \quad x = 0, \quad y = 0, (x \ge 0,\ y \ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z) = 14yz$.

8. Знайти масу кривої $L: x = 6\cos^3 t,\ y = 6\sin^3 t$, якщо $0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = y$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + \left(x^2 - y^2\right)\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $\begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2, \end{cases}$, а $M(2;\,0)$, $N(0;\,0)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) - z^2 + y$ в точці $M_0(-1;3;1)$;

b) $u = x^7 y^3 + xy^4 - xy + 3y - 2$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = \left(\cos z + y^2\right)\vec{i} + (\cos x)\vec{j} + \left(x - 5y^2\right)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (3x - 2z)\vec{i} + (z - 2y)\vec{j} + (1 + 2z)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $4(x^2 + y^2) = z^2$, $z = 2$.

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 2yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} - x^2\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\ x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ x^2 + y^2 = 9\ (z > 0)\right\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти **циркуляцію векторного поля** $\vec{a} = 3(x - 2z)\,\vec{i} + (x - 2y)\,\vec{j} + 2x\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\ \dfrac{x^2}{625} + \dfrac{y^2}{4} = 1,\ x - y + z = 3\right\}$.

Варіант 15

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^0 f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{4\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y=32-x^2, \quad y=-4x$;

b) $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-6y+x^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ x=0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими $x=\frac{1}{2},\ y=0,\ y^2=8x,\ (y\ge 0)$, із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=7x+3y^2$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2\cos\frac{\pi xy}{2}dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=0, \quad y=-1, \quad y=x, \quad z=0, \quad z=2\pi^2$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2=2x, \quad z=\frac{21}{4}-y^2, \quad z=0$;

b) $z=\sqrt{36-x^2-y^2}, \quad z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{63}}$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=9z^2,\quad x=0,\quad y=0,(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=10z$.

8. Знайти масу кривої $L: y=2+x^3$, від точки $A(0;2)$ до точки $B(-2;-6)$ якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x,y)=x^3$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F}=xy\vec{i}+2y\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x=\cos t,\quad y=\sin t$, а $M(1;0),\quad N(0;1)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u=2arctgx+\sin y-y^2+z^3$ у точці $M_0(1;0;-3)$;

b) $u=x^3y^5+xy^4-2x+5y+7$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a}=(6x+5z)\vec{i}+(3x-y)\vec{j}+(2y^2-z+4)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=(e^y+2x)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(2z-1)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x+2y+z=2,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$ (нормаль зовнішня).

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=z\vec{i}+(3y-x)\vec{j}-z\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2+y^2=1,\quad z=x^2+y^2+2,\quad z=0$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=-y\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma=\{(x;y;z):\quad x^2+y^2-z^2=1,\quad z=1\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=3x\vec{i}-2z\vec{j}+2(y+x+3z)\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma=\left\{(x;y;z):\quad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}=1,\quad 4x+y+z=4\right\}$.

Варіант 16

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^0 f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-3}^{3x-3} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y=\frac{2}{x},\quad y=5e^x,\quad y=2,\quad y=5$;

b) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,\ x=0,\ y=0,\ (x\le 0,\ y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\frac{2y-5x}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 2x^2 zsh(xyz)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=1,\quad y=-1,\quad z=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2=2\sqrt{2}y,\quad z=x^2+y^2-4,\quad z=0,\quad (z\ge 0)$;

b) $z=\sqrt{64-x^2-y^2},\quad z=4,\quad x^2+y^2=39$ (внутрішня частина циліндра).

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $9(x^2+y^2)=z^2,\quad x^2+y^2=4,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0, (x\ge 0,\ y\ge 0, z\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=\frac{5}{3}(x^2+y^2)$.

8. Знайти масу кривої $L: x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t$, якщо $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = x$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L – відрізок MN, де $M(1; 0)$, $N(0; 3)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = \cos 2z - \sin 3xz + y^3 - x$ у точці $M_0(-4;2;0)$;

b) $u = x^5 - 4y^3 + xy^3 + 2x - 3y + 1$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = 5x\vec{i} + 6y\vec{j} - 11z\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (x + y^2)\vec{i} + (xz + y)\vec{j} + \left(\sqrt{x^2 + 1} + z\right)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 2$, $z = 3$.

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = y\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + x\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} + 3x\vec{j} + z^2\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \{(x; y; z):\ z = x^2 + y^2 - 1,\ z = 3\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (3x - z)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} - y\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1,\ 3x + 2y - 6z = 6\right\}$.

Варіант 17

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_0^6 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{3x}{2}} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(24xy - 48x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $x^2+y^2=36,\quad 3\sqrt{2}y=x^2\quad (y\ge 0)$;

b) $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-10y+x^2=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x=1,\ y=0,\ y^2=4x,\ (y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=7x^2+2y$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2\cos(\pi xy)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=0,\quad y=1,\quad y=2x,\quad z=0,\quad z=\pi^2$

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2+2\sqrt{2}y=0,\quad z=x^2+y^2-4,\quad z=0,\quad (z\ge 0)$;

b) $z=\sqrt{144-x^2-y^2},\quad 18z=x^2+y^2$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=1,\quad \left(x^2+y^2\le 1\right)$, якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z)=6|z|$.

8. Знайти масу фрагмента кривої $L: x^2 + y^2 = 4$, від точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$, $x \geq 0$, якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = xy^2$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = -x\vec{i} + y\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1, \quad (x \geq 0,\ y \geq 0)$, а $M(1;\ 0), \quad N(0;\ 3)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = x^2 - y^2 z + z^2 + (\ln xyz)^3$ у точці $M_0(1;2;1)$;

b) $u = -2x^5 y^2 + xy^3 + 5x - 2y + 7$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (y - 2x)\vec{i} + (4x + 3y)\vec{j} + (3z - 2y^2 + 9)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (e^y + 2x)\vec{i} + (zx - y)\vec{j} + \frac{1}{4}(e^{xy} - z)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 3$ (нормаль зовнішня).

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = x^2\vec{i} + xy\vec{j} + 3z\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 4$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 2yz\,\vec{i} + xz\vec{j} + y^2\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \{(x; y; z):\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad x^2 + y^2 = 16 \quad (z > 0)\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -xz\,\vec{i} + (5 + y)\vec{j} - 7y\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\ \ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{121} = 1, \quad x + 3y - 3z = 6\right\}$.

Варіант 18

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{2x^2}^{3+x} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(6xy + 24x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y=\dfrac{3}{x},\quad y=3\sqrt{x},\quad x=4$;

b) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-6x+y^2=0,\ y=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16,\ y=0,\ x=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V 2x^2 zsh(2xyz)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=2,\quad y=\dfrac{1}{2},\quad z=\dfrac{1}{2},\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2=4x,\quad z=10-y^2,\quad z=0$;

b) $z=\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2},\quad z=\dfrac{5}{2}-x^2-y^2$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=z,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,(x\ge 0,\ y\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=10y$.

8. Знайти масу кривої $L: x = \cos 2t,\ y = \sin 2t,\ z = \frac{1}{3}t^3$, якщо $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = z\left(x^2 + y^2\right)$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = xy\vec{i}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y = \sin x$, а $M(\pi; 0)$, $N\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = x^2 + 2\sqrt{y^2 + z^2} - z^3$ у точці $M_0(1;4;-3)$;

b) $u = x^2 y^6 + 4x - 3y^3 x + 7y - 11$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (2y + 4z)\vec{i} + (\sin x)\vec{j} + \left(y^2 - x^2\right)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = \left(\sqrt{z} + y\right)\vec{i} + 3x\vec{j} + (3z + 5x)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $8(x^2 + y^2) = z^2$, $z = 2$.

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (x + y + z)\vec{i} + (2y - x)\vec{j} + (3z + y)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 3z^2\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 1\ (z > 0)\right\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (3x - z)\vec{i} + 5y\vec{j} + zy\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\ \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1,\ -3x + 5y + 5z = 15\right\}$.

Варіант 19

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y^2}^{3-y} f(x,y)dx$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(4xy + 16x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y = 6 - \sqrt{36 - x^2}, \quad y = \sqrt{36 - x^2}, \quad x = 0 \quad (x \ge 0)$;

b) $y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y^2 - 10y + x^2 = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x = 2,\ y = 0,\ y^2 = 2x,\ (y \ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = \dfrac{7x^2}{4} + \dfrac{y}{2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V x^2 sh(2xy)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x = -1, \quad y = x, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = 8.$

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2 + y^2 = 9x,\ x^2 + y^2 = 12x,\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ y = 0,\ z = 0,\ (y \ge 0)$;

b) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{35}}$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{49}z^2, \quad x^2 + y^2 = \dfrac{z}{7}, \quad x = 0, \quad y = 0, (x \ge 0,\ y \ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z) = 10xz$.

8. Знайти масу кривої $L: y = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3$, від точки $A(0;0)$ до точки $B(9;18)$ якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = x + 1$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x = 3\cos t, \quad y = 3\sin t$, а $M(3;\,0), \quad N(0;\,3)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = \sin^3 x + xy^2 - yz^2$ у точці $M_0(0;4;-1)$;

b) $u = x^2y + y^3x - 2y^2 + 5x - 12$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (5x + 4y)\vec{i} + (7x - 2y)\vec{j} + (2xy + z - 4)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (8yz - x)\vec{i} + (x^2 - 1)\vec{j} + (xy - 2z)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $2x + 3y - z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$ (нормаль зовнішня).

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} - 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 = z, \quad z = 2x.$

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + 2z\vec{k}$ вздовж контуру

$$\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4}, \quad z = 2\right\}.$$

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (-x - 3z)\vec{i} - (2z + y)\vec{j} + 2y\vec{k}$ вздовж контуру

$$\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad \frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{36} = 1, \quad -5x + 2y + 10z = 10\right\}.$$

Варіант 20

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$;

b) $\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{0} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(4xy + 16x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y = \dfrac{25}{4} - x^2, \quad y = x - \dfrac{5}{2}$;

b) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 6x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = x$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, x = 0, y = 0, (x \ge 0, y \ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = \dfrac{x + 2y}{x^2 + y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V x^2 z \sin\dfrac{xyz}{2} dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x = 1, \quad y = 4, \quad z = \pi, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}y, \quad z = x^2 + y^2 - 36, \quad z = 0, \quad (z \ge 0)$;

b) $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}, \quad z = 3, \quad x^2 + y^2 = 33$ (внутрішня частина циліндра).

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 4z^2, \quad x = 0, \quad y = 0, (x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z) = 10z$.

8. Знайти масу кривої $L: x = 3t,\ y = \dfrac{3t^2}{\sqrt{2}},\ z = t^3$, якщо $0 \le t \le 1$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = x + z$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + y^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L – відрізок MN, де $M(2;\,0),\quad N(0;\,2)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = \sin^2 x + y^2 z + xz^2 - \ln z$ у точці $M_0\left(\dfrac{\pi}{4};2;1\right)$;

b) $u = x^5 y^3 + \cos x - y^3 - x + 3$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = 6\vec{i} + 8y\vec{j} - 8z\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = \left(y + z^2\right)\vec{i} + \left(x^2 + 3y\right)\vec{j} + xy\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$.

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = y^2 x\vec{i} + z^2 y\vec{j} + x^2 z\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i} + yz\vec{j} + 2z\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad x^2 + y^2 + z^2 = 25,\quad z = 4\right\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (xy + 3x - z)\vec{i} - (xy + z - 2y)\vec{j} + (x - y - 2z)\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad \dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{49} = 1,\quad 2x + 4y - 3z = 12\right\}$.

16.

Варіант 21

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int\limits_0^{\cos x} f(x,y)dy$;

b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^{x^2+1} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(44xy + 16x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y=\dfrac{1}{x},\quad y=\sqrt{x},\quad x=16$;

b) $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=x,\ x=0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x=2,\ y=0,\ y^2=2x,\ (y\ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{7x^2}{4}+y$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2 ch(xy)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=0,\quad y=-1,\quad y=x,\quad z=0,\quad z=2$.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2=2y,\quad z=\dfrac{13}{4}-x^2,\quad z=0$;

b) $z=\sqrt{36-x^2-y^2},\quad 9z=x^2+y^2$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $16\left(x^2+y^2\right)=z^2,\quad x^2+y^2=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0,(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=5\left(x^2+y^2\right)$.

8. Знайти масу кривої $L: x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t$, якщо $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = y$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x^2 + y^2 = 4,\ \ (y \ge 0)$, а $M(0;\ 2),\ \ N(-2;\ 0)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = \ln(x^2 + z^2) - y^3 x + 5z$ у точці $M_0(-1;3;-2)$;

b) $z = -x^4 y^6 + x^3 - yx + 2y - 1$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (2x - z)\vec{i} + (2y - xz)\vec{j} + (4 - 2x)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (2yz - x)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + (x^2 + z)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $y - x + z = 1,\ \ x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0$ (нормаль зовнішня).

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + (y + 2z)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $z = 2 - 4(x^2 + y^2),\ \ z = 4(x^2 + y^2)$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - 2x\vec{j} + z^2\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \{(x; y; z):\ \ z = 4(x^2 + y^2) + 2,\ \ z = 6\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -2y\vec{i} + z\vec{j} - 7y\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\ \ \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1,\ \ 5x + 2y + z = 10\right\}$.

Варіант 22

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{0} f(x,y)dx$;

b) $\int\limits_{-1}^{4} dx \int\limits_{-\sqrt{1+x}}^{\sqrt{1+x}} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} \left(4xy + 176x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y=\dfrac{2}{x},\quad y=7e^x,\quad y=2,\quad y=7$;

b) $x^2-2x+y^2=0,\ x^2-4x+y^2=0,\ y=\sqrt{3}\,x,\ y=0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=0,\ (x\ge 0,\ y\le 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{V} y^2 zch(xyz)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=1,\quad y=1,\quad z=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2=3y,\quad x^2+y^2=6y,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=0$;

b) $z=9\sqrt{x^2+y^2},\quad z=22-x^2-y^2$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=16,\quad x^2+y^2=4,\quad \left(x^2+y^2\le 4\right)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=|z|$.

8. Знайти масу однорідної кривої

$$L=\left\{(x;y): x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t,\ y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

9. Знайти роботу сили $\vec{F}=x^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x=4\cos t,\quad y=4\sin t$, а $M(4;\,0),\quad N(0;\,4)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u=2tgx-zy^3+\ln(y-2)$ у точці $M_0(0;4;-2)$;

b) $u=3x^5-y^3x+2y^2+5x-3$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a}=(z-6y)\vec{i}+\left(x^2-y\right)\vec{j}+(\sin x-y)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=(\sin z+2x)\vec{i}+(\sin x-3y)\vec{j}+(\sin y+2z)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2+y^2=z^2$, $z=3$, $z=6$ (нормаль зовнішня).

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F}=(2y-3z)\vec{i}+(3x+2z)\vec{j}+(x+y+z)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2+y^2=1,\quad z=4-x-y,\quad z=0$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=(x+y)\vec{i}-x\vec{j}+6\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma=\left\{(x;y;z):\ \ x^2+y^2=1,\quad z=2\right\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}=5z\vec{i}+4y\vec{j}-2y\vec{k}$ вздовж контуру

$$\Gamma=\left\{(x;y;z):\ \ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1,\quad 2x+5y-4z=20\right\}.$$

Варіант 23

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^3} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$;

b) $\int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{x^2-1}^{x+1} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(xy - 4x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $x = 27 - y^2, \quad x = -6y$;

b) $y^2 - 6y + x^2 = 0,\ y^2 - 8y + x^2 = 0,\ y = x,\ x = 0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x = 2,\ y = 0,\ y^2 = \frac{x}{2},\ (y \ge 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = \frac{7x^2}{2} + 8y$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V x^2 \sin\frac{\pi xy}{2} dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=2, \quad y=x, \quad y=0,\ z=0, \quad z=\pi$.

6. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2 + y^2 = 4\sqrt{2}x, \quad z = x^2 + y^2 - 16, \quad z = 0, \quad (z \ge 0)$;

b) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \quad z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{15}}$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 4z, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, (x \ge 0,\ y \ge 0)$, якщо об’ємна густина $\mu(x,y,z) = 5y$.

8. Знайти масу частини кривої $L: y = 2x + 1$, від точки $A(-1;-1)$ до точки $B(0;1)$ якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = xy$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = (xy - x^2)\vec{i} + x\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y = 2x^2$, а $M(-1; 2)$, $N(0; 0)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + 3x - 2y$ у точці $M_0(-1;-2;2)$;

b) $u = -x^2 y^6 + 5x - 3y^2 x^3 + 2y - 1$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (x + 2z)\vec{i} + (y - xz)\vec{j} + (3 - 2z)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = \left(\cos z + \frac{x}{4}\right)\vec{i} + (e^x + \frac{y}{4})\vec{j} + (\frac{z}{4} - 1)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 3$ (нормаль зовнішня).

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = 3x^2\vec{i} - 2x^2 y\vec{j} + (2x - 1)z\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 1$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 4\vec{i} + 3x\vec{j} + 3xz\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \{(x; y; z): \ x^2 + y^2 - z^2, \ z = 3\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 3z\vec{i} + 3y\vec{j} + y\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z): \ \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1, \ -x + 2y + 6z - 6 = 0\right\}$.

Варіант 24

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^0 f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^0 f(x,y)dy$;

b) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(4xy + 176x^3y^3\right)dxdy$, де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $6x = y^2, \quad x = \sqrt{72 - y^2}, \quad y = 0 \quad (y \ge 0)$;

b) $x^2 - 4x + y^2 = 0,\ x^2 - 8x + y^2 = 0,\ y = \sqrt{3}\,x,\ y = 0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 25,\ x = 0,\ y = 0,\ (x \ge 0,\ y \le 0),$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y) = \dfrac{x - 4y}{x^2 + y^2}$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V y^2 z \cos\dfrac{xyz}{9}\,dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x = 9, \quad y = 1, \quad z = 2\pi, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2 + y^2 = 4x, \quad z = 12 - y^2, \quad z = 0$;

b) $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \quad z = 2, \quad x^2 + y^2 = 27$ (внутрішня частина циліндра).

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = z^2, \quad x^2 + y^2 = z, \quad x = 0, \quad y = 0, (x \ge 0,\ y \ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z) = 35yz$.

8. Знайти масу кривої $L: y = 2x^2$, від точки $A(-1;2)$ до точки $B(2;8)$ якщо лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = x$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = \frac{y}{x}\vec{i} + x\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $y = \ln x$, а $M(1;\,0)$, $N(e;\,1)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + e^{3z}$ у точці $M_0(-3;0;2)$;

b) $u = 2x^3y^2 + \cos y - y^2x - 3y + 2$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (z + y)\vec{i} + 2z\vec{j} + 3y\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = \left(\sqrt{z} + 1 + x\right)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (\sin x + z)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = -2x\vec{i} + z\vec{j} + (x + y)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x^2 + y^2 = 2y$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$.

14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 3z^2\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 1\ (z > 0)\right\}$.

15. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 3z\vec{i} - 2y\vec{j} + 2y\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\ \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1,\ -x + 2y + 6z - 6 = 0\right\}$.

Варіант 25

1. Побудувати на площині OXY область інтегрування та змінити порядок інтегрування в інтегралах:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$;

b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy$,

де D – область, обмежена лініями $x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

3. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

a) $y=\sqrt{6-x^2},\quad y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}$;

b) $y^2-4y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=x,\ x=0$.

4. Знайти масу пластинки D, обмеженої кривими

$$x=1,\ y=0,\ y^2=4x,\ (y\ge 0)$$

із заданою поверхневою густиною $\mu(x,y)=6x+3y^2$.

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V x^2\sin(\pi xy)dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=1,\quad y=2x,\quad y=0,\quad z=0,\quad z=4\pi$.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

a) $x^2+y^2=4y,\quad x^2+y^2=7y,\quad z=\sqrt{x^2+y^2},\quad z=0$;

b) $z=\sqrt{\frac{4}{9}-x^2-y^2},\quad z=x^2+y^2$.

7. Обчислити масу тіла V, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=1,\quad x^2+y^2=z^2,\quad x=0,\quad y=0,(x\ge 0,\ y\ge 0, z\ge 0)$, якщо об'ємна густина $\mu(x,y,z)=32z$.

8. Знайти масу кривої $L: x = 6\cos^3 t,\ y = 6\sin^3 t$, якщо $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$ та лінійна густина розподілу маси $\mu(x, y) = x$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} - (x - y^2)\vec{j}$ при переміщенні вздовж лінії L від точки M до точки N, якщо L визначається рівнянням $x = 5\cos t,\quad y = 5\sin t$, а $M(5;\,0),\quad N(0;\,5)$.

10. Знайти градієнт $\operatorname{grad} u$ скалярного поля

a) $u = x\sqrt{y^2 + z^2} - y\sqrt{x^2 + z^2} - y^3$ у точці $M_0(3;-1;0)$;

b) $z = x^5 y^4 + x^3 - xy + 2y - 12x + 3$.

11. З'ясувати, чи є векторне поле $\vec{a}$ соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = (2x - z)\vec{i} + (2y - xz)\vec{j} + (3 + x)\vec{k}$.

12. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (5x - 6y)\vec{i} + (11x^2 + 2y)\vec{j} + (x^2 - 4z)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $x + y + 2z = 2,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0$ (нормаль зовнішня).

13. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (z + x)\vec{k}$ через кусково-гладку замкнену поверхню S, що утворена перетином поверхонь $y = 2x,\quad y = 4x,\quad x = 1,\quad z = y^2,\quad z = 0$.

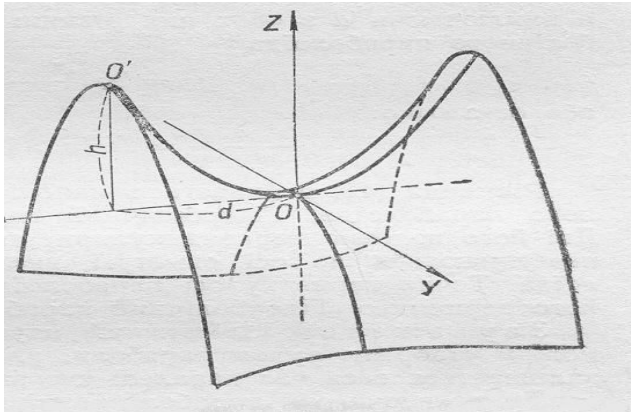
14. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = yz\,\vec{i} - xz\,\vec{j} + xy\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \{(x; y; z):\quad x^2 + y^2 + z^2 = 9,\quad x^2 + y^2 = 9\}$.

1. Використовуючи формулу Стокса, знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = 3z\,\vec{i} - 2y\,\vec{j} + 2y\vec{k}$ вздовж контуру $\Gamma = \left\{(x; y; z):\quad \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{144} = 1,\quad 2x - y + 6z = 6\right\}$.

6. ДОДАТКИ

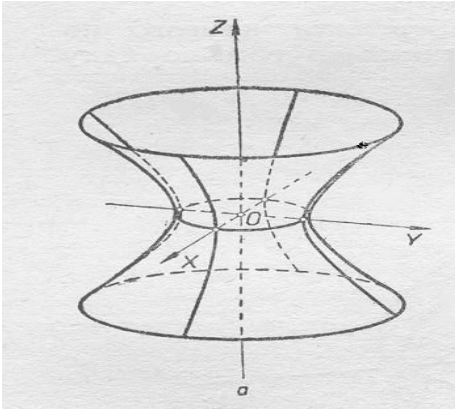
Додаток 1. Деякі поверхні другого порядку та їх рівняння

Гіперболічний параболоїд (“сідло”)



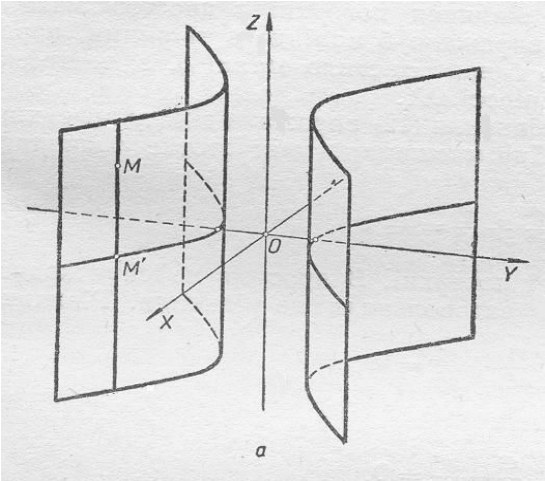
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Однопорожнинний гіперболоїд



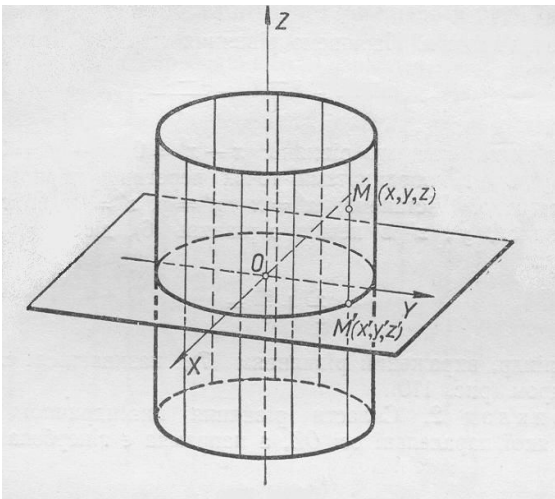
$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

Гіперболічний циліндр



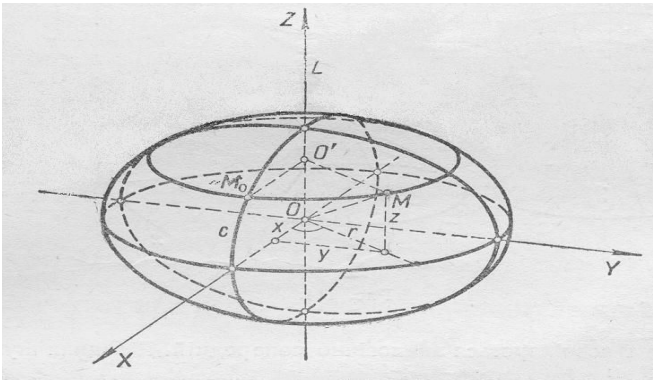
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Еліптичний циліндр



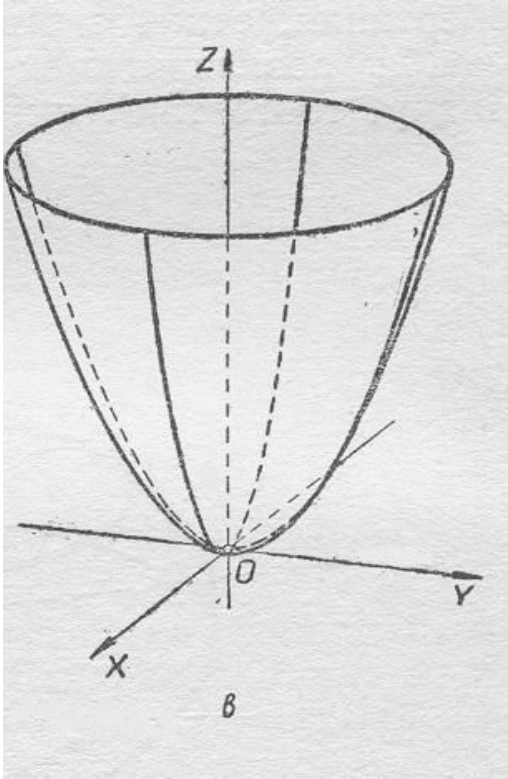
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Еліпсоїд обертання



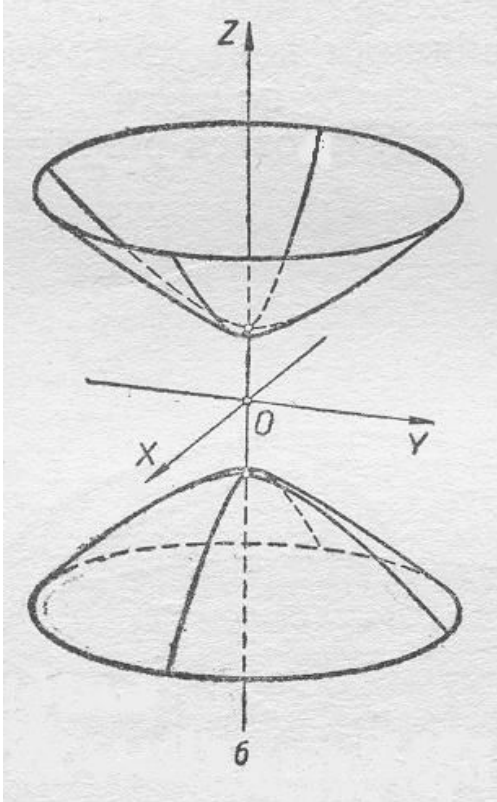
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Параболоїд обертання



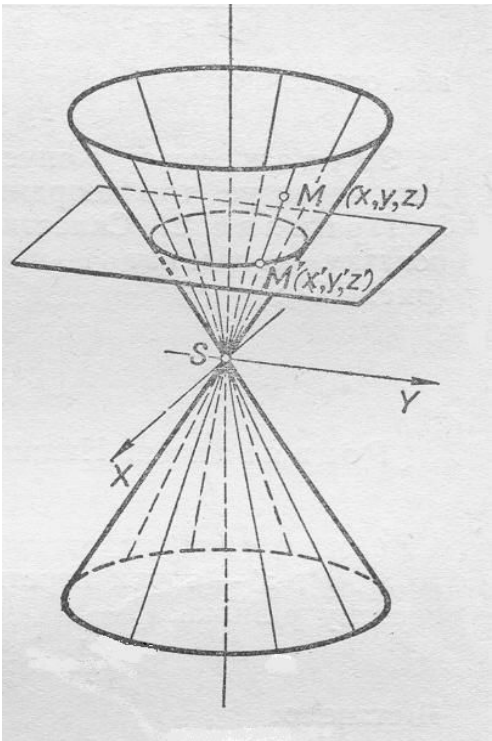
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Двопорожнинний гіперболоїд



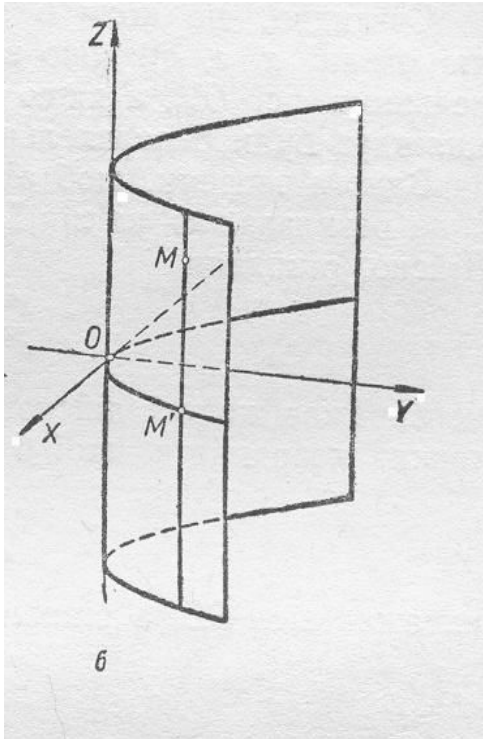
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Еліптичний конус



$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Параболічний циліндр



$$y = ax^2$$

Додаток 2. Криволінійні системи координат

Деякі задачі математики зручно розв'язувати в інших, криволінійних, системах координат, до яких відносяться полярна, циліндрична, сферична тощо.

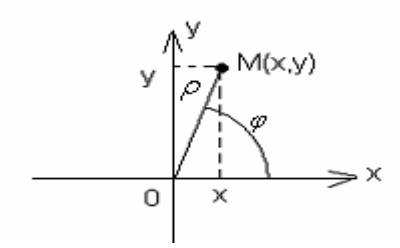
Полярна система координат (ПСК)

ПСК задається полюсом точкою O і полярною віссю OP. Координати довільної точки M в цій системі визначаються парою чисел (ρ,φ), де ρ (полярний радіус)– від стань від полюса до заданої точки, φ (полярний кут) – кут між полярною віссю і полярним радіусом, причому $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Якщо полюс полярної системи сумістити з початком прямокутної декартової системи координат, а полярну вісь – з додатним напрямком осі абсцис, то отримаємо зв'язок між полярною та декартовою системами координат

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$,

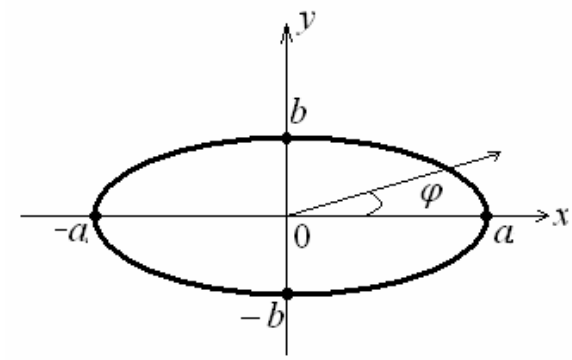
де модуль якобіана $|J| = \rho$,

тобто $dxdy = \rho d\rho d\varphi$.



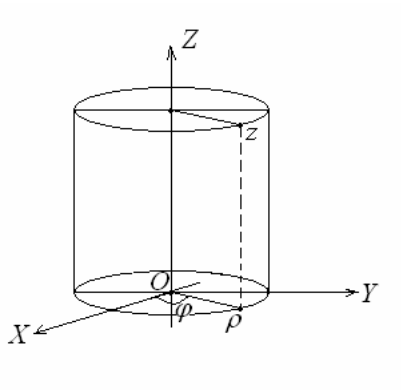
Узагальнена полярна система координат (УПСК)

УПСК вводиться аналогічно до ПСК для еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ на площині OXY. Зв'язок між узагальненою полярною системою координат та декартовою системою координат задається формулами: $\begin{array}{l} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{array}$ модуль якобіана $|J| = ab\rho$, тобто $dxdy = ab\rho d\rho d\varphi$. Зауважимо, що $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в УПСК $\rho = 1$.

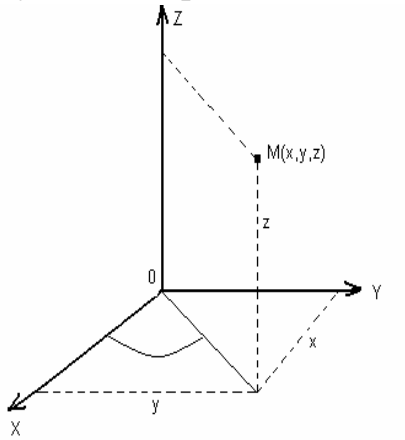


Циліндрична система координат (ЦСК)

ЦСК задається полюсом, точкою O, полярною віссю OP і віссю аплікат $0z$. Координати довільної точки простору M визначаються трійкою чисел (ρ, φ, z). Аналогічно ПСК встановлюється зв'язок між декартовими і циліндричними координатами.



Якщо полюс циліндричної системи координат сумістити з початком O прямокутної декартової системи координат, полярну вісь – з додатним напрямом осі абсцис, то отримаємо координати точки $M(\varphi, \rho, z)$ в циліндричної системі координат. Формули переходу від однієї системи до іншої мають вигляд:



$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z.$$

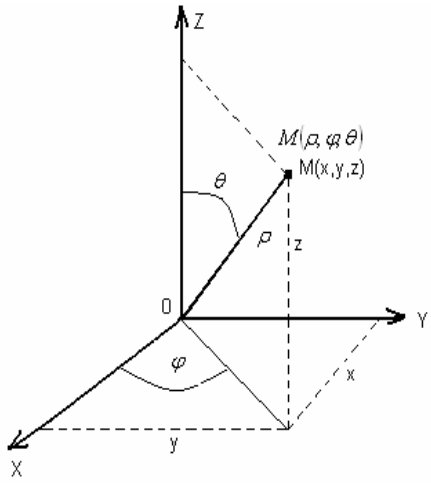
Модуль якобіана $|J| = \rho$, тобто $dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz$.

Узагальнена циліндрична система координат (УЦСК)

УЦСК вводиться аналогічно до ЦСК для еліптичних циліндричних поверхонь в просторі $OXYZ$ (наприклад, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$). Зв'язок між узагальненою ціліндричною системою координат та декартовою системою координат задається формулами: $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, $z = z$, модуль якобіана $|J| = ab\rho$, тобто $dxdydz = ab\rho d\rho d\varphi dz$. Зауважимо, що в УЦСК $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$. (Рівняння еліптичного циліндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в УЦСК приймає вигляд $\rho = 1$.)

Сферична система координат (ССК)

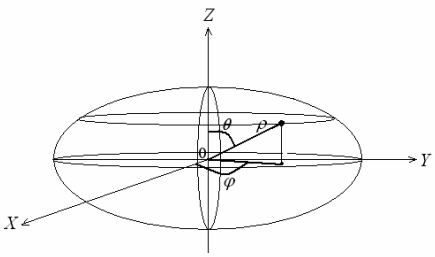
ССК задається полюсом – точкою O, полярною віссю OP і полярною півплощиною, прилеглою до полярної осі. Якщо полюс ССК сумістити з початком O системи $OXYZ$, полярну вісь – з віссю OZ і полярну півплощину – з півплощиною OZX, то координати довільної точки M простору визначаються трійкою чисел (ρ,φ,θ), де ρ – відстань від полюса O до точки M; φ – кут між віссю OX і проекцією радіус-вектора $0M$ на площину $X0Y$; θ – кут між променем $0M$ і полярною віссю $0Z$, причому



$0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. Формули переходу від сферичних координат до декартових мають вигляд: $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$, $|J| = \rho^2\sin\theta$, $dxdydz = \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$. Зауважимо, що в ССК $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

Узагальнена сферична система координат (УССК)

УССК вводиться аналогічно до ССК для еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в просторі $OXYZ$. Зв'язок між узагальненою сферічною системою координат та декартовою системою координат задається формулами: $x = a\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = b\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = c\rho\cos\theta$, модуль якобіана $|J| = abc\rho^2\sin\theta$, тобто $dxdydz = abc\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi dz$. Зауважимо, що в УССК $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$ та $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \rho^2$. Рівняння еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в УССК приймає вигляд $\rho = 1$.



Додаток 3. Основні формули

1. Площа плоскої області D в ДСК і ПСК $S = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = \iint\limits_{D_{\rho\varphi}} \rho d\rho d\varphi$.

2. Об'єм тіла в ДСК, ЦСК, ССК:
$V = \iiint\limits_{V_{xyz}} dxdydz = \iiint\limits_{V_{\rho\varphi z}} \rho d\rho d\varphi dz = \iiint\limits_{V_{\rho\varphi\theta}} \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$.

3. Маса пластинки, якщо $\mu = \mu(x, y)$ – густина $m = \iint\limits_{D} \mu(x, y) dxdy$.

4. Маса тіла з поверхневою густиною $\mu = \mu(x, y, z)$:

$m = \iiint\limits_{V} \mu(x, y, z) dxdydz$.

5. Маса дуги кривої L із лінійною густиною $\mu = \mu(x, y, z)$ $m = \int\limits_{L} \mu(x, y, z) dl$, де dl – елемент дуги кривої, який обчислюється за формулами в залежності від виду завдання кривої:

   a) крива L задається в ПДСК $L = \{(x; y): y = y(x), x_1 \le x \le x_2\}$, тоді $dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx$;

   b) у випадку $L = \{(x; y): x = x(t)\ y = y(t), t_1 \le t \le t_2\}$ параметричного завдання кривої маємо $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$;

   c) крива L задається в ПСК $L = \{(\rho; \varphi): \rho = \rho(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\}$, тоді $dl = \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2} d\varphi$.

6. Елементи теорії поля

   I. задано скалярне поле $u = F(x, y, z)$:

   a) градієнт скалярного поля $\operatorname{grad} F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial Z}\vec{k}$;

   b) вектор нормалі до поверхні $\sigma: F(x, y, z) = 0$ обчислюється за формулою $\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} F(x, y, z)}{|\operatorname{grad} F(x, y, z)|} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial Z}\vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$;

II. задане векторне поле $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$:

a) ротор векторного поля: $\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$;

b) дивергенція векторного поля: $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial Z}$;

c) умова потенціальності векторного поля: $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{O}$;

d) умова соленоїдальності векторного поля: $\operatorname{div}\vec{a} = 0$;

e) умови гармонічності векторного поля: $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{O}$ та $\operatorname{div}\vec{a} = 0$;

f) потік векторного поля через поверхню σ обчислюється за формулою $\Pi = \iint\limits_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma$, де $\vec{a} \cdot \vec{n}$ скалярний добуток векторів;

g) циркуляція векторного поля $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ вздовж замкненого контура Γ: $Ц = \oint\limits_{\Gamma} \vec{a} d\vec{r} = \oint\limits_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$;

h) формула Остроградського-Гаусса (потік векторного поля через замкнену поверхню σ):
$\Pi = \oiint\limits_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint\limits_{V} \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$, де $\vec{a} \cdot \vec{n}$ скалярний добуток векторів;

i) формула Стокса для обчислення циркуляції векторного поля $Ц = \iint\limits_{\sigma} \operatorname{rot}\vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma$, де $\operatorname{rot}\vec{a} \cdot \vec{n}$ скалярний добуток векторів;

j) робота А силового поля

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L:

$$A = \int\limits_{L} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz .$$

Додаток 4. Правила оформлення титульної сторінки

НТУУ “КПІ”

ХІМІКО-ТЕХНОЛОГІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Розрахункова робота

з вищої математики

студента ІІ курсу групи ХП–91

Антонова Сергія Івановича

Тема: КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ ТА ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ

Варіант № 2

Протокол виконання роботи

1		2	3		4	5	6		7	8	9	10		11	12	13	14	15
a	b		a	b			a	b				a	b					

Роботу перевірив викладач

кафедри математичної фізики

доцент

Вован Іван Сергійович

Київ 2016

7. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
2. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.II: Учеб. пособ. для втузов. – М.: Высш. шк. – 1999. – 416 с.
3. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика: Навч. посіб. – К.: Видавництво А.С.К., 2003. – 648 с.
4. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: В 2 т. Т.2 – М.: Наука, 1987. – 576 с.
5. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. В 2-х ч. Ч. II – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.
6. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике. Полный курс.– М.: Айрис, 2007.– 604 с.
7. *Шкіль М. І., Колесник Т. В.* Вища математика. – К.: Вища шк., 1986. – 512 с.

ЗМІСТ

1.	Вступ	3
2.	Теоретичні питання до розділу “Кратні інтеграли”	4
3.	Теоретичні питання до розділу “Векторний аналіз”	5
4.	Приклади розв’язування типових завдань	6
	Завдання 1 (зміна порядку інтегрування)	6
	Завдання 2, 3 (обчислення площі області, обмеженої заданими лініями)	7
	Завдання 4 (обчислення подвійного інтеграла)	10
	Завдання 5 (знаходження маси пластинки, обмеженої кривою)	12
	Завдання 6 (обчислення потрійного інтеграла)	13
	Завдання 7 (знаходження об’єму тіла, обмеженого поверхнями за допомогою потрійного інтеграла)	14
	Завдання 8 (знаходження маси тіла, обмеженого поверхнями за допомогою потрійного інтеграла)	17
	Завдання 9, 10, 11 (знаходження маси кривої за допомогою криволінійного інтеграла)	20
	Завдання 12 (знаходження роботи силового поля)	22
	Завдання 13, 14, 15 (знаходження градієнта скалярного поля)	22
	Завдання 16 (дослідження векторного поля на потенціальність)	24
	Завдання 17 (знаходження потоку векторного поля)	25
	Завдання 18 (знаходження циркуляції векторного поля)	28
	Завдання 19 (знаходження циркуляції векторного поля за формулою Стокса)	29

5. **Варіанти завдань розрахункової роботи** 32

6. Додатки 82

Додаток 1. Деякі поверхні другого порядку та їх рівняння 82

Додаток 2. Криволінійні системи координат 84

Додаток 3. Основні формули 87

Додаток 4. Правила оформлення титульної сторінки 89

7. Список рекомендованої літератури 90

Зміст 91