



## Вища математика. Частина 2.

### Числові і функціональні ряди. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли

#### Робоча програма навчальної дисципліни (силабус)

##### Реквізити навчальної дисципліни

|                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Рівень вищої освіти                               | Перший (бакалаврський)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| Галузь знань                                      | G Інженерія, виробництво та будівництво                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Спеціальність                                     | G4 Енерговиробництво (за спеціалізацією)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Спеціалізація                                     | G4.02 Теплоенергетика                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| Освітня програма                                  | Інженерія енергогенеруючого обладнання та системи термостабілізації                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Статус дисципліни                                 | Нормативна                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Форма навчання                                    | очна(денна)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| Рік підготовки, семестр                           | 1 курс, весняний семестр                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Обсяг дисципліни                                  | 4 кредити ЕКТС, 120 год. Лекційних занять: 30 год. Практичних занять: 28 год. Самостійна робота студентів: 62 год.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| Семестровий контроль/<br>контрольні заходи        | екзамен/модульна контрольна робота, розрахункова робота                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| Розклад занять                                    | <a href="http://roz.kpi.ua/">http://roz.kpi.ua/</a>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Мова викладання                                   | Українська                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Інформація про<br>керівника курсу /<br>викладачів | Лектор: Козак Валентина Іванівна, старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ<br><a href="mailto:afina0706@gmail.com">afina0706@gmail.com</a><br>Практичні: Козак Валентина Іванівна, старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ<br><a href="mailto:afina0706@gmail.com">afina0706@gmail.com</a><br>Островська Ольга Володимирівна, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, канд. фіз.-мат.наук<br><a href="mailto:olyushkaostrovska@gmail.com">olyushkaostrovska@gmail.com</a><br>Поварова Олена Андріївна, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, канд. фіз.-мат.наук<br><a href="mailto:olena_sivak@ukr.net">olena_sivak@ukr.net</a> |
| Розміщення курсу                                  | Сайт кафедри, <a href="https://my.kpi.ua/">https://my.kpi.ua/</a>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |

### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Метою навчальної дисципліни є формування у студентів здатності до логічного мислення, формування особистості студентів; розвиток їх інтелекту і здібностей; здатності розв'язувати складні спеціалізовані задачі та практичні проблеми професійної діяльності у сучасних новітніх технологіях та комп'ютерному дизайні матеріалів, використовувати методи вищої математики в інженерних розрахунках.

#### Загальні компетентності:

ЗК 08. Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями.

ЗК 09. Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.

#### Фахові компетентності:

ФК 02. Здатність застосовувати свої знання і розуміння для визначення, формулювання і вирішення інженерних завдань з використанням методів електричної інженерії.

ФК 10. Здатність забезпечувати моделювання об'єктів і процесів з використанням стандартних і спеціальних пакетів програм та засобів автоматизації інженерних розрахунків, проводити експерименти за заданими методиками з обробкою й аналізом результатів

ФК 11. Здатність використовувати стандартні методики планування експериментальних досліджень, здійснювати обробку та узагальнення результатів експерименту

ФК 14. Здатність виконувати роботи з розрахунку й проектування об'єктів і систем у області енергомашинобудування відповідно до технічних завдань з використанням сучасних CAD/CAM/CAE систем

#### Програмні результати навчання:

ПРН 03. Розуміння широкого міждисциплінарного контексту спеціальності 142 Енергетичне машинобудування.

ПРН 04. Застосовувати інженерні технології, процеси, системи і обладнання відповідно до спеціальності 142 Енергетичне машинобудування; обирати і застосовувати придатні типові аналітичні, розрахункові та експериментальні методи; правильно інтерпретувати результати таких досліджень

ПРН 21. Аналізувати розвиток науки і техніки.

### 2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Пререквізити: Вища математика. Частина 2. Інтегральні числення. Диференціальні рівняння.

Постреквізити: Спеціальні розділи вищої математики.

### 3. Зміст навчальної дисципліни

1. Кратні інтеграли: Подвійний інтеграл та його застосування, Потрійний інтеграл та його застосування
2. Криволінійні і поверхневі інтеграли
3. Елементи теорії поля
4. Числові і функціональні ряди. Інтеграл і перетворення Фур'є

### 4. Навчальні матеріали та ресурси

#### Основна література

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: - Навчальний посібник - К.: А.С.К., 1993, 2001.
2. Вища математика: Збірник задач: Навчальний посібник; За редакцією В.П. Дубовика, І.І. Юрика. - К., А.С.К. 2001.
3. Кратні інтеграли [Електронний ресурс] : практикум з вищої математики для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання / НТУУ «КПІ» ; уклад.: І. В. Веригіна, Є. В. Массалітіна. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,49 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2016. – 72 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/31901>

4. Кратні інтеграли. Частина I [Електронний ресурс] : методичні вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання / НТУУ «КПІ» ; уклад. Є. В. Массалітіна, В. О. Гончаренко, О. А. Поварова. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,19 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 45 с.
5. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/32161>
6. Кратні інтеграли. Частина II [Електронний ресурс] : методичні вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання / НТУУ «КПІ» ; уклад. Є. В. Массалітіна, В. О. Гончаренко, О. А. Поварова. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,03 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2015. – 44 с.
7. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/32163>
8. Вища математика: Криволінійні інтеграли. Елементи теорії поля: Практикум [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Є.В. Массалітіна, О.О. Кільчинський. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,909 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 36 с.  
<https://ela.kpi.ua/handle/123456789/39959>
9. Вища математика. Ряди. Практикум [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. В. А. Пилипенко, Є. В. Массалітіна. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,22 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 36 с.
10. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46039>
11. Стрижак Т.Г. Математичний аналіз: приклади і задачі: навч. посіб. / Стрижак Т.Г., Коновалова Н.Р. – К.: Либідь, 1995. – 240 с. І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова Математика в технічному університеті : Підручник за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2018. — Т. 1. — 496 с.
12. І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова Математика в технічному університеті : Підручник за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с.
13. І. В. Алексєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова Математика в технічному університеті : Підручник за ред. О. І. Клесова ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 3. — 456 с.

#### **Додаткова література**

1. Стрижак Т.Г. Математичний аналіз: приклади і задачі: навч. посіб. / Стрижак Т.Г., Коновалова Н.Р. – К.: Либідь, 1995. – 240 с.
2. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. В 3 ч. – Ч. 1 – К.: Вища школа, 1990. – 383 с.
3. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. В 3 ч. – Ч. 2 – К.: Вища школа, 1991. – 366 с.
4. Денисюк В.П., Репета В.К. Вища математика. Модульна технологія навчання. Навч. посібник: У 4 ч. – Ч.2: – К: Книжк. вид-во Нац. авіац. ун-ту, 2005. – 276 с. 7.
5. Денисюк В.П., Репета В.К., Гаєва К.А., Клешня Н.О. Вища математика. Модульна технологія навчання. Навч. посібник: У 4 ч. – Ч.3: – К: Книжк. вид-во Нац. авіац. ун-ту, 2005. – 444 с.

#### **Навчальний контент**

### **5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)**

#### **5.1. Дидактичні матеріали:**

На лекційних заняттях – Лекція (електронний варіант), пояснення, мозковий штурм, проблемні завдання

#### **Перелік лекцій**

| № | Назва теми лекції та перелік основних питань |
|---|----------------------------------------------|
|---|----------------------------------------------|

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | <p><b>Лекція 1. Диференціальні рівняння першого порядку.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Основні поняття</li> <li>2. Розв'язки диференціального рівняння</li> <li>3. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними</li> <li>4. Однорідні диференціальні рівняння</li> <li>5. Лінійні диференціальні рівняння</li> <li>6. Диференціальне рівняння Бернуллі (Якоба)</li> <li>7. Диференціальне рівняння в повних диференціалах</li> </ol>                                                                                                                                                                                                      |
| 2 | <p><b>Лекція 2. Диференціальні рівняння вищих порядків.</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Задача Коші</li> <li>2. Рівняння вищих порядків, що допускають пониження порядку</li> <li>3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння <math>n</math>-го порядку</li> <li>4. Властивості лінійного однорідного ДР</li> <li>5. Лінійно залежні й лінійно незалежні системи функцій</li> <li>6. Загальний розв'язок лінійного однорідного ДР</li> </ol>                                                                                                                                                                                                      |
| 3 | <p><b>Лекція 3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку</li> <li>2. Рівняння вільних механічних коливань</li> <li>3. Лінійні однорідні ДР <math>n</math>-го порядку</li> </ol>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 4 | <p><b>Лекція 4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння. Системи ЛДР</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Властивості розв'язків лінійного неоднорідного ДР</li> <li>2. Інтегрування лінійного неоднорідного ДР методом варіювання довільних сталих</li> <li>3. Лінійні неоднорідні ДР зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду</li> <li>4. Вимушені коливання. Резонанс</li> <li>5. Задача Лотки — Вольтерри (система хижак-жертва)</li> <li>6. Основні поняття</li> <li>7. Лінійні системи диференціальних рівнянь</li> <li>8. Метод Ойлера розв'язання лінійної однорідної системи ДР зі сталими коефіцієнтами</li> </ol> |
| 5 | <p><b>Лекція 5. Подвійний інтеграл</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Задача про об'єм криволінійного циліндра</li> <li>2. Поняття подвійного інтеграла</li> <li>3. Основні властивості подвійного інтеграла</li> <li>4. Обчислення подвійного інтеграла у ПДСК</li> <li>5. Подвійний інтеграл у полярних координатах</li> <li>6. Загальний випадок заміни змінної</li> <li>7. Застосування подвійних інтегралів</li> </ol>                                                                                                                                                                                                                           |
| 6 | <p><b>Лекція 6. Потрійний інтеграл</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Означення потрійного інтеграла</li> <li>2. Основні властивості потрійного інтеграла</li> <li>3. Обчислення потрійного інтеграла</li> <li>4. Заміна змінних у потрійному інтегралі</li> <li>5. Перехід до сферичних координат у потрійному інтегралі</li> <li>6. Перехід до циліндричних координат у потрійному інтегралі</li> <li>7. Застосування потрійного інтеграла</li> </ol>                                                                                                                                                                                               |
| 7 | <p><b>Лекція 7. Криволінійні інтеграли I роду</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Задача про довжину дуги кривої</li> <li>2. Диференціал довжини дуги кривої</li> </ol>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | 3. Означення криволінійного інтеграла 1-го роду<br>4. Основні властивості криволінійного інтеграла 1-го роду<br>5. Обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду<br>6. Застосування криволінійного інтеграла 1-го роду                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 8  | <b>Лекція 8. Криволінійні інтеграли II роду</b><br>1. Задача про роботу<br>2. Означення криволінійного інтеграла 2-го роду<br>3. Основні властивості криволінійного інтеграла 2-го роду<br>4. Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду<br>5. Формула Остроградського — Гріна<br>6. Незалежність криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху<br>7. інтегрування<br>8. Відновлення функції за її повним диференціалом<br>9. Застосування криволінійного інтеграла 2-го роду   |
| 9  | <b>Лекція 9. Числові ряди. Ряди з невід’ємними членами</b><br>1. Основні поняття<br>2. Важливі приклади рядів<br>3. Основні властивості рядів<br>4. Необхідна ознака збіжності ряду<br>5. Властивості рядів з невід’ємними членами<br>6. Інтегральна ознака Маклорена — Коші<br>7. Ознаки порівняння<br>8. Ознака д’Аламбера та радикальна ознака Коші<br>9. Порівняння «потужності» різних ознак збіжності                                                                       |
| 10 | <b>Лекція 10. Знакозмінні ряди.</b><br>1. Знакопочережні ряди<br>2. Знакозмінні ряди<br>3. Властивості абсолютно й умовно збіжних рядів                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 11 | <b>Лекція 11. Функціональні ряди</b><br>1. Функціональні ряди<br>2. Степеневі ряди<br>3. Властивості степеневих рядів                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 12 | <b>Лекція 12. Тейлорові ряди</b><br>1. Означення ряду Тейлора<br>2. Умови розвивності функції в Тейлорів ряд<br>3. Ряди Тейлора — Маклорена елементарних функцій<br>4. Застосування степеневих рядів                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 13 | <b>Лекція 13. Ряди Фур’є.</b><br>1. Періодичні процеси<br>2. Тригонометричні ряди<br>3. Тригонометричні ряди Фур’є<br>4. Умови розвивності функції в ряд Фур’є<br>5. Розвинення в ряд Фур’є неперіодичної функції<br>6. Розвинення в ряд Фур’є функцій, графіки яких мають симетрію<br>7. Розвинення функції в ряд за косинусами чи за синусами<br>8. Особливості розвинень функцій у ряд Фур’є<br>9. Комплексна форма ряду Фур’є<br>10. Амплітудний і фазовий спектри ряду Фур’є |

|    |                              |
|----|------------------------------|
| 14 | <b>Лекція 14. Підсумкова</b> |
| 15 | <b>Лекція 15. Резерв</b>     |

На практичних заняттях - Завдання до виконання

Перелік (орієнтовно) практичних занять

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | <b>Практичне заняття 1.</b><br>1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.<br>2. Диференціальні рівняння першого порядку однорідні відносно змінних.                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 2 | <b>Практичне заняття 2.</b><br>1. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.<br>2. Метод Бернуллі.<br>3. Метод Лагранжа.<br>4. Рівняння Бернуллі.                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 3 | <b>Практичне заняття 3.</b><br>1. Диференціальні рівняння вищих порядків.<br>2. Диференціальні рівняння другого порядку, які допускають зниження порядку.<br>3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-ого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР).<br>4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР). Знаходження частинних розв'язків ЛНДР з сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною. |
| 4 | <b>Практичне заняття 4.</b><br>1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.<br>2. Метод варіації довільних сталих.<br>3. Системи диференціальних рівнянь. Лінійні однорідні та неоднорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод виключення.                                                                                                                                       |
| 5 | <b>Практичне заняття 5.</b><br>1. Подвійні інтеграли: означення, властивості.<br>2. Обчислення подвійного інтегралу в декартових координатах.<br>3. Заміна змінних у подвійному інтегралі.<br>4. Застосування подвійного інтеграла                                                                                                                                                                               |
| 6 | <b>Практичне заняття 6.</b><br>1. Потрійні інтеграли. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах.<br>2. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних та сферичних координатах.<br>3. Застосування потрійного інтеграла                                                                                                                                                                           |
| 7 | <b>Практичне заняття 7.</b><br>Обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду та їх застосування. <b>Захист ТР (ч1)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 8 | <b>Практичне заняття 8.</b><br>1. Обчислення криволінійних інтегралів 2-го роду                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | 2. Формула Гріна. Незалежність криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування.                                                                                                                                                                     |
| 9  | <b>Практичне заняття 9.</b><br>1. Інтегрування повних диференціалів.<br>2. Знаходження функції за заданим повним диференціалом. <b>МКР 2</b>                                                                                                                  |
| 10 | <b>Практичне заняття 10.</b><br>1. Числові ряди. Збіжність і сума числового ряду.<br>2. Ряди з додатними членами. Ознаки порівняння.<br>3. Ознаки Даламбера та радикальна Коші.<br>4. Інтегральна ознака Коші.                                                |
| 11 | <b>Практичне заняття 11.</b><br>1. Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца.<br>2. Оцінка залишку ряду.<br>3. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінного ряду.                                                                                                      |
| 12 | <b>Практичне заняття 12.</b><br>1. Функціональні ряди. Область збіжності.<br>2. Рівномірна збіжність.<br>3. Степеневі ряди. Інтервал та область збіжності степеневих рядів.                                                                                   |
| 13 | <b>Практичне заняття 13.</b><br>1. Розклад функцій в ряди Тейлора.<br>2. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.<br>3. Обчислення значень функцій, інтегрування функцій та інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів. |
| 14 | <b>Практичне заняття 14.</b><br>1. Ряди Фур'є. Розклад в ряд Фур'є періодичних функцій.<br>2. Розклад в ряд Фур'є парних та непарних періодичних функцій. <b>Захист ТР (ч2)</b>                                                                               |

Технічне забезпечення: Microsoft Office Word, будь яке програмне забезпечення для виконання графічного матеріалу (за бажанням студента)

## 6. Самостійна робота студента

Види самостійної роботи – опрацювання лекційного матеріалу, підготовка до аудиторних занять, розв'язування домашніх завдань та індивідуальних домашніх робіт (ІДР), виконання розрахункової роботи (РР) та підготовка до її захисту (ЗРР), підготовка до модульної контрольної роботи (МКР), самостійне опрацювання тем, що не ввійшли до лекційного курсу (СРС).

### 6.1. Самостійна робота:

#### Список питань на самостійне опрацювання

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Задачі, які розв'язуються з використанням диференціальних рівнянь<br>2. Подвійний інтеграл та його застосування<br>3. Потрійний інтеграл та його застосування<br>4. Криволінійні інтеграли та їх застосування<br>5. Теорема про середнє для криволінійних інтегралів 1-го роду<br>6. Застосування криволінійних інтегралів<br>7. Функціональні ряди та їх застосування<br>8. Комплексна форма ряду Фур'є. Інтеграл Фур'є. Інтеграл і перетворення Фур'є |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### 6.2. Індивідуальні завдання

Для якісного вивчення курсу вищої математики студенти повинні виконати розрахункову роботу (РР).

#### **РР-2 (частина 1) „Кратні інтеграли”.**

Завданням роботи є перевірити, як студенти засвоїли тему “Кратні інтеграли” і визначити рівень їх навчальних досягнень. Проконтролювати вміння обчислювати подвійні і потрійні інтеграли в різних системах координат, використовувати їх під час прикладних задач.

## РР-2 (частина 2) "Ряди"

Метою роботи є перевірити вміння студентами досліджувати числові та функціональні ряди на збіжність, застосовувати відповідні теореми, застосовувати ряди до наближених обчислень.

### Політика та контроль

#### 7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

Співпраця студентів у розв’язанні проблемних завдань дозволена, але відповіді кожний студент захищає самостійно. Взаємодія студентів під час іспиту категорично забороняється і будь-яка така діяльність буде вважатися порушенням академічної доброчесності згідно принципів університету щодо академічної доброчесності.

Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

Відвідування занять

Відвідування лекцій, практичних занять та консультацій не оцінюється. Однак, студентам рекомендується їх відвідувати, оскільки на них викладається теоретичний та практичний матеріал, розвиваються навички, необхідні для виконання практичних завдань та успішного написання МКР, виконання РР та самостійних робіт.

#### 8. Види контролю навчання студента

**Поточний контроль:** експрес-опитування, опитування за темою заняття, виконання індивідуальних домашніх завдань (ІДЗ), написання та захист розрахункової роботи (РР+ЗРР), написання контрольних робіт (МКР), СРС.

**Календарний контроль:** проводиться двічі на семестр (на 8 та 14 тижнях) з метою підвищення якості навчання студентів та моніторингу виконання графіку освітнього процесу студентами

Атестація студентів проводиться за значенням поточного рейтингу студента на час атестації. Якщо значення цього рейтингу не менше 50% від максимально можливого на час атестації, студент вважається атестованим. В іншому випадку в атестаційній відомості виставляється «не атестовано». Також не атестується студент у разі невиконання або не захисту хоча б однієї з частин РР, термін подання якої був до тижня проведення атестації, або не написав на позитивну оцінку всі, заплановані на цей час, частини МКР.

**Семестровий контроль:** екзамен.

#### Процедура оскарження результатів контрольних заходів

Студенти мають право і можливість підняти будь-яке питання, яке стосується процедури контрольних заходів та очікувати, що воно буде розглянуто згідно із наперед визначеними процедурами (детальніше: [https://osvita.kpi.ua/2020\\_7-170](https://osvita.kpi.ua/2020_7-170), [https://document.kpi.ua/files/2020\\_7-170.pdf](https://document.kpi.ua/files/2020_7-170.pdf)).

Студенти мають право оскаржити результати контрольних заходів, але обов’язково аргументовано, пояснивши з яким критерієм не погоджуються відповідно до оціночного листа та/або зауважень.

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (детальніше: <https://kpi.ua/code>).

#### 9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

##### 1. Дистанційне навчання:

В умовах дистанційного режиму організація освітнього процесу здійснюється з використанням технологій дистанційного навчання: система Електронний кампус, ресурси платформи дистанційного навчання «Сікорський», сервіс «Google Classroom». Для більш ефективної комунікації з метою розуміння структури

навчальної дисципліни і засвоєння матеріалу використовуються сервіси для організації онлайн-конференцій та відеозв'язку (наприклад, «Zoom», «Skype», «Google Meet»), електронна пошта, месенджери (Viber, WhatsApp, Telegram, google документи).

**2. Навчання в умовах правового режиму воєнного стану:**

- передбачає проведення усіх видів занять дистанційно (з використанням синхронної або асинхронної моделі освітньої взаємодії), у відповідності до Регламенту організації освітнього процесу в дистанційному режимі та Положення про дистанційне навчання в КПІ ім. Ігоря Сікорського;
- кінцеві терміни виконання індивідуальних завдань і завдань самостійної роботи переносяться на кінець семестру (з обов'язковим виконанням і захистом);
- у рейтингову систему оцінювання вносяться зміни стосовно нарахування штрафних балів за несвоєчасне виконання завдань: штрафні бали не нараховуються.

**3.** Для студентів існує можливість зарахування (у вигляді додаткових балів до рейтингу до 10 балів) сертифікатів проходження дистанційних чи онлайн курсів за тематикою дисципліни.

**Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

**Складено**

старшим викладачем кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ *Козак Валентиною Іванівною*

доцентом кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ *Степахно Іриною Василівною*

доцентом кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ *Поваровою Оленою Андріївною*

доцентом кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ *Островською Ольгою Володимирівною*

**Ухвалено** кафедрою математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ (протокол № 10 від 24.06.2026 р.)

**Погоджено** Методичною комісією ІАТЕ (протокол № 9 від 26.06.2026 р.)

**Питання, що виносяться на модульну контрольну роботу «Диференціальні рівняння. Криволінійні інтеграли»**

1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
2. Диференціальні рівняння першого порядку однорідні відносно змінних.
3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.
4. Рівняння Бернуллі.
5. Криволінійний інтеграл 1-го роду. Означення, властивості і фізичний зміст.
6. Криволінійний інтеграл 2-го роду його означення, властивості і фізичний зміст.
7. Обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду.
8. Обчислення криволінійного інтегралів 2-го роду.
9. Формула Гріна .
10. Умови незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування.

## Питання, що виносяться на екзамен

1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними, означення, знаходження загального розв'язку.
2. Диференціальні рівняння 1-го порядку однорідні відносно змінних, означення, знаходження загального розв'язку.
3. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку, означення, знаходження загального розв'язку методом Бернуллі.
4. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку, означення, знаходження загального розв'язку методом Лагранжа.
5. Рівняння Бернуллі, означення, знаходження загального розв'язку
6. Теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку. Теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку.
7. Знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами (корені характеристичного рівняння дійсні різні, дійсні рівні, комплексно спряжені).
8. Загальні властивості розв'язків лінійного диференціального рівняння. Метод варіації довільних сталих для лінійного диференціального рівняння 2-го порядку.
9. Метод варіації довільних сталих для лінійного диференціального рівняння 2-го порядку
10. Задачі, які приводять до поняття подвійного інтегралу.
11. Подвійний інтеграл: означення, існування та основні властивості.
12. Обчислення подвійного інтеграла в декартовій системі координат.
13. Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат.
14. Заміна змінних в подвійному інтегралі.
15. Обчислення координат центра мас та моментів інерції плоскої фігури.
16. Геометричне використання подвійного інтегралу.
17. Задача, що приводить до поняття потрійного інтегралу.
18. Потрійний інтеграл: означення, існування та основні властивості.
19. Потрійний інтеграл в декартовій системі координат і його обчислення.
20. Заміна змінної в потрійному інтегралі. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричній системі координат.
21. Заміна змінної в потрійному інтегралі. Обчислення потрійного інтеграла в сферичній системі координат.
22. Координати центра мас та моменти інерції просторової області.
23. Криволінійний інтеграл 1-го роду. Означення, властивості і фізичний зміст.
24. Криволінійний інтеграл 2-го роду його означення, властивості і фізичний зміст.
25. Обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду.
26. Обчислення криволінійного інтегралів 2-го роду.
27. Формула Гріна .
28. Умови незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування.
29. Скалярне поле. Похідна за напрямком. Означення, властивості, обчислення.
30. Градієнт, його властивості. Інваріантне означення градієнту.
31. Векторне поле. Векторні лінії векторного поля. Означення та виведення їх рівнянь.
32. Потенціальне поле. Умови потенційності. Потенціал та його знаходження.
33. Поняття числового ряду. Часткова сума, залишок ряду. Сума ряду. Збіжність і розбіжність ряду.
34. Основні властивості збіжних числових рядів.
35. Необхідна умова збіжності числового ряду. Необхідна та достатня умова збіжності числового ряду (критерій Коші).
36. Ознака Д'Аламбера.
37. Радикальна ознака Коші.
38. Інтегральна ознака Коші.
39. Перша теорема порівняння.
40. Друга теорема порівняння

41. Ряди, в яких знаки членів строго чергуються.. Теорема Лейбніца. Наслідок
42. Поняття абсолютної та умовної збіжності. Теорема про абсолютну збіжність.
43. Властивості абсолютно та умовно збіжних рядів.
44. Функціональний ряд. Рівномірна збіжність. Теорема Вейєрштрасса.
45. Теорема про неперервність суми функціонального ряду.
46. Теорема про почленне інтегрування функціонального ряду.
47. Теорема про почленне диференціювання функціонального ряду.
48. Степеневий ряд. Теорема Абеля. Радіус та інтервал збіжності степеневого ряду.
49. Теорема про рівномірну збіжність степеневого ряду. Теорема про неперервність суми степеневого ряду.
50. Теорема про почленне диференціювання та інтегрування степеневого ряду.
51. Теорема про необхідну та достатню умову розкладання функції у ряд Тейлора.
52. Теорема про достатню умову розкладання функції у ряд Тейлора.
53. Тригонометричний ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є.
54. Теорема про достатню умову подання функції через її ряд Фур'є.
55. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій.
56. Ряд Фур'є для  $2l$ -періодичної функції,  $l \neq \pi$ .
57. Ряд Фур'є для неперіодичної функції, заданої на півперіоді.

## Приклад завдання РР/РГР

## Варіант 30

- Звести подвійний інтеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  до повторного двома способами, якщо область  $D$  обмежена лініями:  $y = x$ ,  $xy = 1$ ,  $x = 2$ .
- Обчислити подвійний інтеграл  $\iint_D 24x dx dy$  двома способами, якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = 0$ ,  $y = 4 - 2x$ ,  $y = 2\sqrt{x}$ .
- Обчислити подвійний інтеграл  $\iint_D 12x \sin xy dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $x = 2$ ,  $y = 2$ ,  $y = 3$ .
- Знайти площу області  $D$ , яка задана нерівностями:
  - $x^2 + y^2 \geq 2x$ ,  $x^2 + y^2 \leq 8x$ ,  $y \leq \sqrt{3}x$ ,  $y \geq -\sqrt{3}x$ ;
  - $\rho \sin \varphi \leq -3$ ,  $\rho \leq 4(1 - \sin \varphi)$ .
- Знайти масу плоскої пластини  $D$ , поверхнева густина якої  $\mu(x, y)$ :
  - $D: \{y = 4\sqrt{x}, y = \frac{4}{x^2}, x = 4\}$ ,  $\mu(x, y) = 2xy$ ;
  - $D: \{1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} \leq 4, y \geq 0\}$ ,  $\mu(x, y) = \frac{20y}{25x^2 + 4y^2}$ .
- Обчислити потрійний інтеграл  $\iiint_V 4x dx dy dz$ , якщо область  $V$  обмежена поверхнями:  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $2x + y + z - 4 = 0$ .
- Знайти масу тіла, яке займає область  $V: z = 5 - (x^2 + y^2)$ ,  $z = (x^2 + y^2) / 4$  та густина якого  $\mu(x, y, z) = 4z$ .
- Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $3x + 2y = 6$ ,  $z = \frac{x^2}{2}$ . Зробити схематичний рисунок.
- Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:  $\sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ,  $\sigma_2: z^2 = \frac{x^2 + y^2}{3}$ ,  $z \geq 0$ , використовуючи:
  - перехід до циліндричних координат;
  - перехід до сферичних координат.

## Рейтингова система оцінки успішності студентів

Рейтинг студента розраховується виходячи із 100-бальної шкали ( $R=100$ ), з них 50 балів складає стартова шкала ( $R_C = 50$ ) та 50 балів - екзаменаційна шкала ( $R_E = 50$ ).

Стартовий рейтинг  $R_C$  студента складається з балів  $R_K$ , що студент отримує протягом семестру з кожного контрольного заходу:

- модульний контроль (МК, ваговий бал 16). МК проводиться у вигляді КР.
- розрахункова робота та її захист (РР+ЗРР, ваговий бал – 32). РР поділена на дві частини і виконується студентом в позааудиторний час (8+8=16 балів). Захист РР оцінюється в 8+8=16 балів.
- експрес-контроль (ЕК, ваговий бал – 12). Робота на лекційних та практичних заняттях і самостійної роботи в позааудиторний час.

За несвоєчасне виконання РР та відсутність без поважної причини при проведенні МКР та захисті РР викладач має право виставити не більше, ніж 80% від максимальної кількості балів за даний вид роботи.

Сума вагових балів  $R_K$  з кожного контрольного заходу дорівнює розміру стартової шкали  $R_C = \sum_K R_K = 50$ . Значення стартової рейтингової оцінки  $R_C$  доводиться до студентів на останньому занятті.

**Умови допуску до семестрового контролю:** мінімально позитивна оцінка за МКР (7 балів), зарахування РР 20 (балів), семестровий рейтинг не менше 30 балів.

Студенти, які набрали протягом семестру менше 30 балів, зобов'язані до початку екзаменаційної сесії підвищити його, усунувши поточні заборгованості, що призвели до цього, інакше вони не допускаються до екзамену з цієї дисципліни і мають академічну заборгованість.

**Екзаменаційна робота** (ваговий бал - 50) проводиться відповідно до навчального плану у вигляді семестрового екзамену в терміни, встановлені графіком навчального процесу та в обсязі навчального матеріалу, визначеному робочою програмою дисципліни. Форма проведення семестрового контролю – комбінована, зміст і структура екзаменаційних білетів (контрольних завдань) та критерії оцінювання визначаються рішенням кафедри. На консультації доводяться до відома студентів правила проведення екзамену, критерії оцінювання, стартові рейтинги, а також зазначається, хто не допущений до екзамену і з якої причини. На екзамені студенти виконують письмову контрольну роботу.

Для більш об'єктивної оцінки рівня підготовки студента екзаменаторові надається право задавати додаткові питання в межах навчальної програми.

Після оцінювання відповідей студента на екзамені (виконання екзаменаційної контрольної роботи та відповідей на додаткові питання) викладач підраховує суму  $R_E$  балів з екзаменаційної роботи студента. Рейтинг  $R_E$  вважається позитивним, якщо студент отримав не менше  $0,6R_E = 0,6 \cdot 50 = 30$  балів. Якщо студент отримав оцінку меншу 30 балів, то екзаменаційна робота оцінюється в 0 балів.

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

| Кількість балів           | Оцінка       |
|---------------------------|--------------|
| 100-95                    | Відмінно     |
| 94-85                     | Дуже добре   |
| 84-75                     | Добре        |
| 74-65                     | Задовільно   |
| 64-60                     | Достатньо    |
| Менше 60                  | Незадовільно |
| Не виконані умови допуску | Не допущено  |