



## НАЗВА КУРСУ

### Математичний аналіз. Частина 2. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних

#### Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

#### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>					
Галузь знань	<i>F Інформаційні технології</i>					
Спеціальність	<i>F2 Інженерія програмного забезпечення</i>					
Освітня програма	<i>Інженерія програмного забезпечення інтелектуальних кібер-фізичних систем в енергетиці (Software engineering of intelligent cyber-physical systems in energy)</i>					
Статус дисципліни	<i>Нормативна</i>					
Форма навчання	<i>заочна</i>					
Рік підготовки, семестр	<i>I курс, II семестр</i>					
Обсяг дисципліни	<i>150 год./5 кредитів</i>					
		Лекції	Практич. занят. (семінари)	Лабор. заняття (комп'ют. практ.)	Індив. заняття	СРС
	<b>Години</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>138</b>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Екзаме н	Залік	МКР (вказати кількість)	РГР, РР, ГР (вказати кількість)	ДКР (вказати кількість)	Реферат (вказати кількість)
	+	-	1	1	0	0
Розклад занять	<i>На сайті університету, також сайті IATE</i>					
Мова викладання	<i>Українська</i>					
Інформація про керівника курсу / викладачів	<p>Лектор:  <i>Пилипенко Віта Анатолівна</i>, старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, канд. фіз.-мат. наук,  <a href="mailto:v.pylypenko.kpi@gmail.com">v.pylypenko.kpi@gmail.com</a>,  <a href="https://intellect.kpi.ua/profile/pva21">https://intellect.kpi.ua/profile/pva21</a>,            ORCID: <a href="https://orcid.org/0000-0002-0383-6271">https://orcid.org/0000-0002-0383-6271</a></p> <p>Практичні:  <i>Пилипенко Віта Анатолівна</i>, старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, канд. фіз.-мат. наук,  <a href="mailto:v.pylypenko.kpi@gmail.com">v.pylypenko.kpi@gmail.com</a>,  <a href="https://intellect.kpi.ua/profile/pva21">https://intellect.kpi.ua/profile/pva21</a>,            ORCID: <a href="https://orcid.org/0000-0002-0383-6271">https://orcid.org/0000-0002-0383-6271</a></p>					
Розміщення курсу	Сайт кафедри, Google Class, <a href="https://ecampus.kpi.ua/">https://ecampus.kpi.ua/</a>					

### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Метою навчальної дисципліни є формування у студентів здатностей використовувати методи математичного аналізу для оволодіння необхідним математичним апаратом, що допомагає аналізувати, моделювати та розв'язувати прикладні інженерні задачі із застосуванням, де це можливо, обчислювальної техніки.

#### Програмні компетентності:

##### Загальні компетентності (ЗК)

ЗК 1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК 2 Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК 6 Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.

##### Програмні результати навчання (ПРН)

ПРН 5 Знати і застосовувати відповідні математичні поняття, методи доменного, системного і об'єктно-орієнтованого аналізу та математичного моделювання для розробки програмного забезпечення.

ПРН 11 Вибирати вихідні дані для проектування, керуючись формальними методами опису вимог та моделювання.

##### Фахові компетентності (ФК)

ФК 14 Здатність до алгоритмічного та логічного мислення.

### 2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Вивчається в другому семестрі на базі курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії, математичного аналізу 1.

Вивчений матеріал є базою для вивчення курсу теорії ймовірності.

### 3. Зміст навчальної дисципліни

1. **Визначений інтеграл.** Визначений інтеграл та його застосування. Невласні інтеграли 1-го, 2-го роду.
2. **Функції кількох змінних.** Поняття функції кількох змінних. Границя та неперервність. Диференціювання та застосування похідних. Екстремум функції двох змінних.
3. **Звичайні диференціальні рівняння.** Звичайні диференціальні рівняння першого порядку. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь.
4. **Кратні інтеграли.** Означення подвійного, потрійного інтеграла та їх застосування.

### 4. Навчальні матеріали та ресурси

#### Основна література

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навчальний посібник. — К.: "А.С.К.", 2006. — С. 648. — ISBN 966-539-320-0.
2. Вища математика. Збірник задач: початковий посібник / В. П. Дубовик [та ін.]. — К.: "А.С.К.", 2005. — С. 480. — ISBN 966-319-036-1.
3. Збірник завдань з вищої математики. Частина 1 / за ред. В. М. Владіміров, О. А. Пучков, М. В. Шмигевський. — К.: Політехніка, 2003.
4. Збірник завдань з вищої математики. Частина 2 / за ред. В. М. Владіміров, О. А. Пучков, М. В. Шмигевський. — К.: Політехніка, 2003.
5. Дудкін М. Є., Дюженкова О. Ю., Степахно І. В. Вища математика: підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями. — К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. — С. 449.

[https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/51064/1/Dudkin\\_V\\_matymatyka\\_22.pdf](https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/51064/1/Dudkin_V_matymatyka_22.pdf).

6. Вища математика. Диференціальне числення функцій багатьох змінних [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В. А. Пилипенко, Є. В. Массалітіна. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,71 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 62 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46038>
7. Вища математика. Диференціальні рівняння. Практикум [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Є. В. Массалітіна, В. А. Пилипенко. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,43 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 36 с. <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46041>

### Додаткова література

1. Дудкін М. Є., Дюженкова О. Ю., Степахно І. В. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Збірник задач. — К.: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. — С. 65. [https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42207/1/Vstup\\_do\\_matemat\\_analizu.pdf](https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/42207/1/Vstup_do_matemat_analizu.pdf)
2. Шкіль М. І. Математичний аналіз : у двох частинах. Т. 1. — 3-є вид. — К.: Вища школа, 2005. — С. 447. — ISBN 966-642-284-0.
3. Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: Невизначений, визначений та невластні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі. — К.: Книги України ЛТД, 2010. — С. 470. — ISBN 978-966-2331-05-9.

Основну та додаткову література можна знайти в мережі інтернет, в науково-технічній бібліотеці ім. Г. І. Денисенка, а також *в електронних ресурсах у відповідному Google class.*

### Навчальний контент

#### 5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

*На лекційних заняттях* – конспект (електронний варіант) лекції, постановка проблеми, мотивація і аргументація матеріалу, пояснення, приклади для ілюстрації теоретичних понять.

#### Перелік лекцій

##### *Тема 1. Визначений інтеграл*

##### *Лекція 1.*

Визначений інтеграл, формула Ньютона – Лейбніца. Заміна змінної та інтегрування частинами визначеного інтегралу. Площа плоскої фігури в декартових координатах. Довжина плоскої дуги, заданої в декартових координатах, заданої параметричними рівняннями та в полярній системі координат. Об'єм тіла обертання. Невластні інтеграли першого і другого роду.

##### *Тема 2. Функції кількох змінних*

Функція двох змінних, область визначення, геометричний зміст. Частинні похідні першого порядку, диференційованість функції кількох змінних. Повний диференціал та його використання у наближених обчисленнях. Похідна складеної функції. Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричне тлумачення повного диференціала функції двох змінних. Неявна функція. Похідні вищих порядків, мішані похідні. Диференціали вищих порядків. Екстремум функції двох змінних.

##### *Тема 3. Звичайні диференціальні рівняння*

##### *Лекція 2.*

Порядок диференціального рівняння, означення його розв'язку. Задача Коші. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Диференціальні рівняння першого порядку однорідні відносно змінних. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі. Типи диференціальних рівнянь вищого порядку, які допускають пониження порядку.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, характеристичне рівняння, побудова загального розв'язку. Знаходження частинних розв'язків ЛНДУ зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною. Метод варіації довільної сталої. Системи звичайних диференціальних рівнянь.

#### **Тема 4. Кратні інтеграли**

##### **Лекція 3.**

Означення подвійного та потрійного інтегралів. Обчислення подвійних та потрійних інтегралів в декартових координатах. Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних та сферичних координатах. Застосування кратних інтегралів.

**На практичних заняттях** – типові завдання і задачі підвищеної складності, які дають змогу засвоїти основні математичні поняття та їх властивості, виробити вміння використовувати матеріал для самостійного розв'язування задач.

#### **Перелік (орієнтовний) практичних занять**

##### **Тема 1. Визначений інтеграл**

###### **Практичне заняття 1.**

Визначений інтеграл. Формула Ньютона - Лейбніца. Заміна змінної та інтегрування частинами визначеного інтегралу. Обчислення площ плоских фігур та об'ємів тіл. Обчислення довжини дуги кривої. Площа поверхні обертання. Невласні інтеграли першого і другого роду.

*Розрахункова робота частина 1.*

##### **Тема 2. Функції кількох змінних**

Функції багатьох змінних, область визначення, границя, неперервність. Частинні похідні та повний диференціал. Похідна складної та неявної функції багатьох змінних. Дотична площина та нормаль до поверхні. Похідні вищих порядків, мішані похідні. Диференціали вищих порядків. Екстремум функції кількох змінних.

*Модульна контрольна робота частина 1.*

##### **Тема 3. Звичайні диференціальні рівняння**

###### **Практичне заняття 2.**

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Диференціальні рівняння однорідні відносно змінних. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку. Лінійні однорідні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами, характеристичне рівняння, побудова загального розв'язку. Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною. Метод варіації довільної сталої.

*Розрахункова робота частина 2.*

##### **Тема 4. Кратні інтеграли**

###### **Практичне заняття 3.**

Обчислення подвійного інтеграла в декартових та полярних координатах. Обчислення потрійного інтеграла в декартових, циліндричних та сферичних координатах. Застосування кратних інтегралів.

*Модульна контрольна робота частина 2.*

#### **6. Самостійна робота студента**

**Види самостійної роботи** – опрацювання лекційного матеріалу, розв'язування практичних завдань, виконання розрахункової роботи.

## 7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Заняття проводяться онлайн згідно розкладу. Присутність на заняттях не є обов'язковою, проте студентам рекомендується під'єднуватися на заняття, оскільки робота в групі з викладачем є більш якісною, крім того, студент може отримати відповідь на питання під час заняття та розвинути потрібні уміння й навички, що передбачені в глобальному розумінні вивчення курсу «Математичний аналіз. Частина 2. Диференціальне та інтегральне числення функції багатьох змінних», та є основною метою навчання в цілому. Якщо студент не відвідує заняття, але завдання виконує, викладач може провести усну співбесіду, щоб уникнути порушення академічної доброчесності, згідно принципів університету щодо академічної доброчесності.

Дотримання положень «Кодексу честі КПІ ім. Ігоря Сікорського» (розділи 2 та 3).

Співпраця студентів у розв'язанні проблемних завдань дозволена, але відповіді кожний студент захищає самостійно. Взаємодія студентів під час екзамену категорично забороняється і будь-яка така діяльність буде вважатися порушенням академічної доброчесності, згідно принципів університету щодо академічної доброчесності.

Для покращення зв'язку студента та викладача всі лекційні матеріали та матеріали практичних занять (PDF файли та відео-запис лекцій і практичних занять) розміщуються в GoogleClass.

## 8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

**Поточний контроль:** експрес-опитування на заняттях, написання МКР і РР.

**Семестровий контроль:** екзамен.

### Рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

**Рейтинг студента з навчальної дисципліни розраховується зі 100 балів: семестровий рейтинг (50 балів) та екзаменаційний рейтинг (50 балів).**

**1. Семестровий рейтинг** складається з 50 балів, які студент отримує протягом семестру, розподілення балів відбувається за баченням викладача з практики.

Рекомендовані види робіт для оцінювання балами:

- виконання модульної контрольної роботи, яка може бути поділена на частини за основними темами курсу (на думку викладача). Бали між частинами модульної контрольної роботи розподіляються в залежності від кількості та складності завдань (на думку викладача).
- виконання розрахункової, яка може бути поділена на частини за основними темами курсу (на думку викладача). Бали між частинами розрахункової роботи розподіляються в залежності від кількості та складності завдань (на думку викладача).

*Наприклад:*

- Розрахункова робота ч.1 (10 балів) по темі «Визначений інтеграл».
- Модульна контрольна робота ч.1(15 балів) по темі «Функції кількох змінних».
- Розрахункова робота ч.2 (10 балів) по темі «Звичайні диференціальні рівняння».
- Модульна контрольна робота ч.2 (15 балів) по темі «Кратні інтеграли».

Розрахункову роботу студент повинен здати не пізніше, ніж за тиждень до екзамену, щоб викладач зміг її перевірити. Якщо студент не виконує цю вимогу, то він до екзамену не допускається.

*Загальна система оцінювання виконаних студентом завдань:*

- «відмінно» – повна відповідь (не менше 95% потрібної інформації);
- «добре» – достатньо повна відповідь (не менше 75% потрібної інформації), або повна відповідь з незначними неточностями;
- «задовільно» – неповна відповідь (не менше 60% потрібної інформації) та незначні помилки;
- «незадовільно» – немає правильної ідеї розв'язання задачі або задача не розв'язана зовсім.

**2. Екзамен.** Екзаменаційний рейтинг – 50 балів.

**Умови допуску до екзамену:** мінімальна позитивна оцінка (не менше 60%) за МКР, зарахована розрахункова робота, семестровий рейтинг не менше 30 балів.

Екзаменаційна робота складається з 2-х теоретичних запитань та 3-х практичних завдань. Всі завдання оцінюються по 10 балів. Екзамен відбувається усно в режимі відео зв'язку згідно з розкладом. Для більш об'єктивної оцінки рівня підготовки студента екзаменаторові надається право задавати додаткові питання в межах навчальної програми.

***Перелік теоретичних запитань, які виносяться на екзамен:***

**Визначений інтеграл**

1. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла.
2. Означення визначеного інтеграла, його геометричний і фізичний зміст, теорема існування.
3. Основні властивості визначеного інтеграла.
4. Інтеграл із змінною верхньою межею. Теорема Барроу.
5. Основна формула інтегрального числення (формула Ньютона-Лейбніца).
6. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Рекурентна формула.
7. Заміна змінної у визначеному інтегралі.
8. Обчислення площ плоских фігур в декартових координатах.
9. Обчислення площі криволінійного сектора.
10. Обчислення довжин дуг кривих.
11. Обчислення об'ємів тіл.
12. Обчислення площ поверхонь обертання.

**Диференціальне числення функції багатьох змінних**

1. Поняття функції декількох змінних. Область визначення функції.
2. Частинні похідні першого порядку.
3. Диференціювання функції декількох змінних. Необхідна умова диференціювання. Достатні умови диференціювання функції декількох змінних.
4. Повний приріст і повний диференціал. Застосування диференціала до наближених обчислень.
5. Частинні похідні вищих порядків. Мішані похідні. Теорема про мішані похідні.
6. Диференціювання складних функцій. Повна похідна. неявні функції і їх диференціювання.
7. Екстремум функцій декількох змінних. Необхідна умова екстремуму. Достатні умови екстремуму функції.
8. Рівняння дотичної площини та нормалі.

**Звичайні диференціальні рівняння**

1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними, означення, знаходження загального розв'язку.
2. Диференціальні рівняння 1-го порядку однорідні відносно змінних, означення, знаходження загального розв'язку.
3. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку, означення, знаходження загального розв'язку методом Бернуллі.
4. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку, означення, знаходження загального розв'язку методом Лагранжа.
5. Рівняння Бернуллі, означення, знаходження загального розв'язку
6. Теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку.
7. Теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку.
8. Знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами (корені характеристичного рівняння дійсні різні).
9. Знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами (корені характеристичного рівняння дійсні рівні).
10. Знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами (корені характеристичного рівняння комплексно спряжені).
11. Загальні властивості розв'язків лінійного диференціального рівняння.
12. Метод варіації довільних сталих для лінійного диференціального рівняння 2-го порядку.

**Кратні інтеграли.**

1. Задачі, які приводять до поняття подвійного інтегралу.
2. Подвійний інтеграл: означення, існування та основні властивості.
3. Обчислення подвійного інтеграла в декартовій системі координат.
4. Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат.
5. Заміна змінних в подвійному інтегралі.
6. Обчислення координат центра мас та моментів інерції плоскої фігури.
7. Геометричне використання подвійного інтегралу.
8. Задача, що приводить до поняття потрійного інтегралу.
9. Потрійний інтеграл: означення, існування та основні властивості.
10. Потрійний інтеграл в декартовій системі координат і його обчислення.
11. Заміна змінної в потрійному інтегралі. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричній системі координат.
12. Заміна змінної в потрійному інтегралі. Обчислення потрійного інтеграла в сферичній системі координат.
13. Координати центра мас та моменти інерції просторової області.

*Загальна система оцінювання виконаних студентом завдань:*

- 10 балів – повна відповідь, теоретичне запитання з повним доведенням теорем та властивостей, практичне – з наведенням потрібних формул, повним поясненням, якщо потрібно малюнками (не менше 95% потрібної інформації);
- 8-9 балів – достатньо повна відповідь (не менше 80% потрібної інформації), або повна відповідь з незначними неточностями;
- 6-7 балів – неповна відповідь (не менше 60% потрібної інформації) та незначні помилки;
- 4-5 балів – більш неповна відповідь та значні помилки;
- 0-3 балів – немає правильної ідеї розв’язання задачі або задача не розв’язана зовсім.

Бали, набрані на екзамені, додаються до балів семестрового рейтингу і, згідно приведеної таблиці, виставляється підсумкова оцінка.

***Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:***

<i>Кількість балів</i>	<i>Оцінка</i>
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

## **8. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)**

Передбачається можливість зарахування сертифікатів проходження дистанційних курсів за відповідною тематикою.

### **Робочу програму навчальної дисципліни (силабус) складено:**

старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ

*Владіміров Володимир Миколайович*

старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, канд. фіз.-мат.

*науки Пилипенко Віта Анатоліївна*

**Ухвалено** кафедрою математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ (протокол № 9 від 25.06.2025)

**Погоджено** Методичною комісією факультету ІАТЕ (протокол № 8 від 27.06.2025)