



НАЗВА КУРСУ

Математичний аналіз. Частина 2. Інтегральне числення

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>					
Галузь знань	<i>12 Інформаційні технології</i>					
Спеціальність	<i>121 Інженерія програмного забезпечення</i>					
Освітня програма	<i>Інженерія програмного забезпечення інтелектуальних кібер-фізичних систем в енергетиці (Software Engineering of Intelligent Cyber-Physical Systems in Energy Industry)</i>					
Статус дисципліни	<i>Нормативна</i>					
Форма навчання	<i>очна</i>					
Рік підготовки, семестр	<i>1 курс, II семестр</i>					
Обсяг дисципліни	<i>150/5 кредитів</i>					
		Лекції	Практич. занят. (семінари)	Лабор. заняття (комп'ют. практ.)	Індив. заняття	СРС
	Години	36	54	0	0	60
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Екзамен	Залік	МКР (вказати кількість)	РГР, РР, ГР (вказати кількість)	ДКР (вказати кількість)	Реферат (вказати кількість)
	+	-	1	1	0	0
Розклад занять	<i>На сайті університету, також сайті кафедри ПЗЕ ІАТЕ</i>					
Мова викладання	<i>Українська</i>					
Інформація про керівника курсу / викладачів	<p>Лектор: <i>Владіміров Володимир Миколайович, старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, vladimirov.volodumur@lil.kpi.ua, https://intellect.kpi.ua/profile/vvm21, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9991-2979</i></p> <p>Практичні:</p> <p><i>Владіміров Володимир Миколайович, старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, vladimirov.volodumur@lil.kpi.ua, https://intellect.kpi.ua/profile/vvm21, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9991-2979</i></p> <p><i>Пилипенко Віта Анатолівна, старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, канд. фіз.-мат. наук, v.pylypenko.kpi@gmail.com, https://intellect.kpi.ua/profile/pva21, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0383-6271</i></p>					
Розміщення курсу	<i>Посилання на дистанційні ресурси</i>					
		Google classroom	Moodle LMS	Інше		
	Лекції	+	+	Viber, Telegram, https://ecampus.kpi.ua/		
Практика	+	+				

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Метою навчальної дисципліни є формування у студентів здатностей використовувати методи математичного аналізу для оволодіння необхідним математичним апаратом, що допомагає аналізувати, моделювати та розв'язувати прикладні інженерні задачі із застосуванням, де це можливо, обчислювальної техніки.

Програмні компетентності:

Загальні компетентності (ЗК)

ЗК 1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК 2 Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

ЗК 6 Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.

Програмні результати навчання (ПРН)

ПРН 5 Знати і застосовувати відповідні математичні поняття, методи доменного, системного і об'єктно-орієнтованого аналізу та математичного моделювання для розробки програмного забезпечення.

ПРН 11 Вибирати вихідні дані для проектування, керуючись формальними методами опису вимог та моделювання.

Фахові компетентності (ФК)

ФК 14 Здатність до алгоритмічного та логічного мислення.

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Вивчається в другому семестрі на базі курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії, математичного аналізу 1.

Вивчений матеріал є базою для вивчення курсу теорії ймовірності.

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 3. Інтегральне числення функції однієї змінної

1) **Визначений інтеграл:** задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла; означення визначеного інтеграла; достатні умови інтегрування функції; властивості визначеного інтеграла; теорема про оцінку визначеного інтеграла та її геометричне тлумачення; визначений інтеграл як функція змінної верхньої межі інтегрування; неперервність цієї функції, її диференційовність; формула Ньютона-Лейбніца; заміна змінної у визначеному інтегралі; інтегрування частинами у визначеному інтегралі; інтегрування цілих додатних степенів синуса і косинуса; обчислення площ фігур у декартовій системі координат; площа фігури в полярній системі координат; обчислення об'єму тіла за відомими площами його паралельних перерізів; об'єм тіла обертання; спрямленість плоскої кривої; довжина дуги плоскої кривої при різних способах її задання; довжина дуги просторової кривої; еліптичні інтеграли; обчислення площі поверхні обертання; статичні моменти та координати центру мас матеріальної дуги та матеріальної плоскої фігури; теореми Паппа-Гульдіна; моменти інерції; методи чисельного інтегрування: формули прямокутників, трапецій та парабол.

2) **Невласні інтеграли; інтеграли, залежні від параметрів:** невідомі інтеграли від обмежених функцій по необмеженому проміжку інтегрування; головне значення; достатні ознаки збіжності та розбіжності невідомі інтегралів від додатних функцій; абсолютна збіжність; невідомі інтеграли від необмежених функцій по обмеженому проміжку інтегрування; головне значення;

достатні ознаки збіжності та розбіжності невласних інтегралів від додатних функцій; абсолютна збіжність; Інтеграли, залежні від параметрів. Неперервність. Диференціювання та інтегрування за параметром; невласні інтеграли, які залежать від параметрів; гама- та бета-функції.

Розділ 4. Функції кількох змінних

3) Поняття функції кількох змінних. Границя та неперервність. Диференціювання та застосування похідних: основні поняття: визначення евклідової відстані між двома точками в багатовимірному просторі; окіл; внутрішня, межова, зовнішня точки множини; відкрита та замкнена множина; область; поняття функції кількох змінних; неперервність в точці, в області, в замкненій області; теореми Коші і Вейєрштрасса про неперервні функції; рівномірна неперервність, теорема Кантора; функція двох змінних, її область визначення; геометричне тлумачення функції двох змінних; частинні похідні першого порядку: означення, геометричне тлумачення для функції двох змінних; диференційовність функції кількох змінних в точці: означення, необхідна умова, достатня умова; повний диференціал та його використання у наближених обчисленнях; похідна складеної функції; повна похідна; дотична площина та нормаль до поверхні; геометричне тлумачення повного диференціала функції двох змінних; неявна функція; теорема про існування неявної функції; теорема про диференціювання неявної функції; похідні вищих порядків; теорема про мішані похідні; диференціали вищих порядків; формула Тейлора для функції двох змінних; поняття про особливі точки кривої; екстремум функції кількох змінних; необхідні умови екстремуму функції кількох змінних; достатні умови; найбільше та найменше значення функції, неперервної в обмеженій замкненій області; метод функції Лагранжа.

Розділ 5. Звичайні диференціальні рівняння

4) Звичайні диференціальні рівняння першого порядку: задачі, які приводять до диференціальних рівнянь; основні поняття; задача Коші; теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку; особливі розв'язки; поле напрямків; ізокліни; метод послідовних наближень; диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними; лінійні диференціальні рівняння; рівняння Бернуллі; рівняння однорідні відносно змінних та які зводяться до них; рівняння в повних диференціалах.

5) Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків: диференціальні рівняння вищих порядків; задача Коші; теорема про існування та єдиність розв'язку; деякі види диференціальних рівнянь вищого порядку, що допускають зниження порядку; лінійні диференціальні рівняння довільного порядку; лінійні диференціальні оператори, їх властивості; теорема про необхідну і достатню умову лінійної незалежності розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння довільного порядку з неперервними в деякому інтервалі коефіцієнтами; теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння довільного порядку з неперервними коефіцієнтами; формула Остроградського-Ліувілья; знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку з неперервними на деякому інтервалі коефіцієнтами за відомим нетривіальним розв'язком; теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння довільного порядку; лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими дійсними коефіцієнтами; характеристичне рівняння; знаходження загального розв'язку в усіх випадках; метод варіації довільних сталих розв'язування лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку; принцип накладання для лінійного неоднорідного диференціального рівняння; лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною; чисельні методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

б) Системи звичайних диференціальних рівнянь: системи диференціальних рівнянь; нормальна система; задача Коші; теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші; загальний і частинний розв'язки, загальний і частинний інтеграли; розв'язування нормальної системи методом виключення; нормальні системи лінійних диференціальних рівнянь; теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші; структура загального розв'язку; лінійні однорідні системи; загальний

розв'язок; лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами і їх розв'язок у випадку простих коренів характеристичного рівняння.

7) **Елементи теорії стійкості:** поняття про стійкість розв'язків диференціальних рівнянь; означення стійкості та асимптотичної стійкості за Ляпуновим; стійкість нульового розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами; критерій Рауса-Гурвіца; функції Ляпунова; теореми Ляпунова про стійкість та асимптотичну стійкість.

Розділ 8. Кратні інтеграли

8) **Подвійний інтеграл та його застосування:** знаходження об'єму циліндричного тіла; означення подвійного інтеграла; його властивості, геометричний і механічний зміст; обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах; заміна змінних у подвійному інтегралі; обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах; застосування подвійних інтегралів до задач геометрії та механіки: площа плоскої фігури, об'єм циліндричного тіла, площа поверхні, маса неоднорідної пластини, статичні моменти, координати центру мас, моменти інерції.

9) **Потрійний інтеграл та його застосування:** знаходження маси неоднорідного тіла; означення потрійного інтеграла; його механічний зміст та властивості; обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних та сферичних координатах; застосування потрійного інтеграла до задач геометрії та механіки: об'єм тіла, маса неоднорідного тіла, статичні моменти, координати центру мас, моменти інерції.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Основна література

- 1) Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навчальний посібник. — К.: "А.С.К", 2006. — С. 648. — ISBN 966-539-320-0.
- 2) Вища математика. Збірник задач: початковий посібник / В. П. Дубовик [та ін.]. — К.: "А.С.К.", 2005. — С. 480. — ISBN 966-319-036-1.
- 3) Збірник завдань з вищої математики. Частина 1 / за ред. В. М. Владіміров, О. А. Пучков, М. В. Шмигевський. — К.: Політехніка, 2003.
- 4) Збірник завдань з вищої математики. Частина 2 / за ред. В. М. Владіміров, О. А. Пучков, М. В. Шмигевський. — К.: Політехніка, 2003.
- 5) Дудкін М. Є., Дюженкова О. Ю., Степахно І. В. Вища математика: підручник для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями. — К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. — С. 449. — URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/51064/1/Dudkin_V_matymatyka_22.pdf .

Додаткова література

- 1) Дудкін М. Є., Дюженкова О. Ю., Степахно І. В. Вища математика. Практикум: навчальний посібник. — К.: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. — С. 409. — URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/47504/1/Vyshcha%20matematyka_Praktykum.pdf .
- 2) Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Диференціальні рівняння. Практикум / І. В. Алексєєва [та ін.]. — К.: НТУУ «КПІ», 2014. — С. 190. — URL: <http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC%20%D0%92%D0%9C2.pdf> .
- 3) Шкіль М. І. Математичний аналіз : у двох частинах. Т. 1. — 3-є вид. — К.: Вища школа, 2005. — С. 447. — ISBN 966-642-284-0.
- 4) Шкіль М. І. Математичний аналіз : у двох частинах. Т. 2. — 3-є вид. — К.: Вища школа, 2005. — С. 510. — ISBN 966-642-290-5.
- 5) Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі. — К.: Книги України ЛТД, 2010. — С. 470. — ISBN 978-966-2331-05-9.
- 6) Bartle R. G. Introduction to real analysis. — Wiley, 2011. — P. 402. — ISBN 9780471433316.

7) Pugh C. C. Real Mathematical Analysis. — Springer, 2015. — P. 478. — ISBN 9783319177700. — DOI: 10.1007/978-3-319-17771-7.

Основну та додаткову література можна знайти в мережі інтернет, в науково-технічній бібліотеці ім. Г. І. Денисенка, а також в електронних ресурсах у відповідному Google class.

Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Перелік лекцій

РОЗДІЛ 3. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 3.2. Визначений інтеграл

Лекція 01. *Задачі, які приводять до поняття визначеного інтегралу. Визначений інтеграл як границя інтегральної суми. Достатні умови існування визначеного інтегралу (без доведення). Властивості визначеного інтегралу.*

Лекція 02. *Визначений інтеграл як функція верхньої змінної межі інтегрування. Неперервність та диференційованість цієї функції (теорема Барроу). Формула Ньютона - Лейбніца. Заміна*

змінної та інтегрування частинами визначеного інтегралу. Знаходження $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

Лекція 03. *Площа плоскої фігури в декартових координатах. Площа криволінійного сектора. Знаходження об'єма тіла за відомими площами паралельних перерізів. Обчислення об'єму тіл обертання. Довжина плоскої дуги, заданої в декартових координатах, параметричними рівняннями та в полярній системі координат. Довжина просторової кривої. Диференціал дуги. Площа поверхні обертання.*

Лекція 04. *Невласні інтеграли від обмежених функцій по необмеженому проміжку (невласні інтеграли 1-го роду). Невласні інтеграли від необмежених функцій по обмеженому проміжку (невласні інтеграли 2-го роду). Достатні умови збіжності і розбіжності невластних інтегралів. Поняття про абсолютну збіжність.*

РОЗДІЛ 4. ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Тема 4.1. Поняття функції кількох змінних. Границя та неперервність. Диференціювання та застосування похідних

Лекція 05-06. *Евклідов n -вимірний простір. Основні поняття. Означення функції кількох змінних. Графік функції двох змінних. Границя функції двох змінних. Неперервність функції двох змінних в точці, в області, в замкненій області. Теорема Вейерштраса та Коші про властивості неперервних функцій. Частинні похідні функції двох змінних, означення, геометричний зміст. Диференційованість функції двох змінних. Необхідна та достатня умови диференційованості функції.*

Лекція 07. *Повний диференціал функції двох змінних, застосування до наближених обчислень. Дотична площина та нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала функції двох змінних. Похідна складної функції. Повна похідна. Похідна неявно заданої функції. Похідні вищих порядків. Теорема про мішані похідні.*

РОЗДІЛ 5. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Тема 5.1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

Лекція 08. *Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Порядок диференціального рівняння, означення його розв'язку. Задача Коші. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Диференціальні рівняння першого порядку однорідні відносно змінних.*

Лекція 09. *Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі.*

Тема 5.2. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків

Лекція 10-11. *Лінійні диференціальні рівняння n -ого порядку. Властивості розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь. Лінійно залежні та незалежні системи функцій. Визначник Вронського. Фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n -ого порядку. Формула Остроградського - Ліувілля. Теорема про необхідну та достатню умови лінійної незалежності розв'язків ЛОДР n -го порядку.*

Лекція 12. *Теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння. Теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння. Теорема про суперпозицію розв'язків. Побудова частинного розв'язку ЛНДУ методом варіації довільних сталих.*

Лекція 13. *Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами, характеристичне рівняння, побудова загального розв'язку. Побудова фундаментальної системи розв'язків ЛОДУ n -ого порядку із сталими коефіцієнтами. Знаходження частинних розв'язків ЛНДУ з сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною.*

Тема 5.3. Системи звичайних диференціальних рівнянь

Лекція 14. *Системи диференціальних рівнянь. Нормальні та канонічні системи рівнянь Задача Коші. Формулювання теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Загальний і частинний розв'язки, загальний інтеграл. Розв'язок нормальної системи методом виключення.*

РОЗДІЛ 8. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Тема 8.1. Подвійний інтеграл та його застосування

Тема 8.2. Потрійний інтеграл та його застосування

Лекція 15. *Задачі, що приводять до понять подвійного та потрійного інтегралів. Визначення подвійного та потрійного інтегралів. Теорема існування.*

Лекція 16. *Властивості подвійних та потрійних інтегралів. Обчислення подвійних та потрійних інтегралів в декартових координатах. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах. Узагальнені полярні координати.*

Лекція 17. *Заміна змінних у потрійному інтегралі. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних та сферичних координатах.*

Лекція 18. *Оглядове заняття.*

Перелік тем лекцій, що виносяться на самостійне опрацювання

- 1) Властивості визначеного інтеграла (доведення).
- 2) Виведення формули Ньютона - Лейбніца. Інтегрування частинами.
- 3) Статичні моменти та координати центру мас матеріальної дуги та матеріальної плоскої Фігури. Теорема Паппа - Гульдіна. Моменти інерції.
- 4) Методи чисельного інтегрування. Формули прямокутників, трапецій та парабол.
- 5) Інтеграл, залежні від параметрів. Неперервність. Диференціювання та інтегрування за параметром. Невласні інтеграл, які залежать від параметрів. Гама- та бета-функції.
- 6) Функція двох змінних, її область визначення. Геометричне тлумачення функції двох змінних.
- 7) Диференціали вищих порядків. Формула Тейлора для функції двох змінних.
- 8) Екстремуми функції двох змінних, необхідні та достатні умови. Найбільше та найменше значення неперервної функції на обмеженій замкненій області. Умовний екстремум. Метод функції Лагранжа.
- 9) Поле напрямків. Ізокліни. Метод послідовних наближень (метод Ейлера).
- 10) Рівняння, які зводяться до однорідних.

- 11) Побудова загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку з неперервними коефіцієнтами якщо відомий його нетривіальний розв'язок.
- 12) Чисельні методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.
- 13) Лінійні однорідні системи. Загальний розв'язок. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами і їх розв'язок у випадку простих коренів характеристичного рівняння.
- 14) Поняття про стійкість розв'язків диференціальних рівнянь. Визначення стійкості та асимптотичної стійкості за Ляпуновим. Функції Ляпунова. Теорема Ляпунова про стійкість та асимптотичну стійкість. Стійкість нульового розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
- 15) Застосування подвійних та потрійних інтегралів.

Перелік практичних занять

Тема 3.2. Визначений інтеграл

- Практичне заняття 01-02. *Визначений інтеграл. Формула Ньютона - Лейбніца. Заміна змінної та інтегрування частинами визначеного інтегралу. (Отримання студентами завдань 1 частини розрахункової роботи)*
- Практичне заняття 03. *Обчислення площ плоских фігур та об'ємів тіл.*
- Практичне заняття 04. *Обчислення довжини дуги кривої. Площа поверхні обертання.*

Тема 3.3. Невласні інтеграли та інтеграли, залежні від параметрів

- Практичне заняття 05. *Невласні інтеграли першого та другого роду. (Задача та захист 1 частини розрахункової роботи).*

РОЗДІЛ 4. ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Тема 4.1. Поняття функції кількох змінних. Границя та неперервність. Диференціювання та застосування похідних

- Практичне заняття 06-07. *Функції багатьох змінних, область визначення, границя, неперервність. Частинні похідні та повний диференціал. (Отримання студентами завдань 2 частини розрахункової роботи)*
- Практичне заняття 08. *Похідна складної та неявної функції багатьох змінних. Дотична площини та нормаль до поверхні.*

РОЗДІЛ 5. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Тема 5.1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку

- Практичне заняття 09-10. *Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Диференціальні рівняння однорідні відносно змінних. (Задача та захист 2 частини розрахункової роботи)*
- Практичні заняття 11-12. *Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі. Задачі на складання диференціальних рівнянь.*

Тема 5.2. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків

- Практичне заняття 13. *Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку.*
- Практичні заняття 14-15. *Лінійні однорідні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами, характеристичне рівняння, побудова загального розв'язку. Інтегрування лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь методом варіації довільних сталих.*
- Практичне заняття 16-17. *Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною.*

Тема 5.3. Системи звичайних диференціальних рівнянь

- Практичне заняття 18. *Інтегрування систем диференціальних рівнянь.*

Практичне заняття 19. *МКР-2 "Звичайні диференціальні рівняння". Оглядове заняття.*

РОЗДІЛ 8. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Тема 8.1. Подвійний інтеграл та його застосування

Тема 8.2. Потрійний інтеграл та його застосування

Практичне заняття 20. *Обчислення подвійних інтегралів в декартових координатах. (Отримання студентами завдань з частини розрахункової роботи)*

Практичне заняття 21-22. *Заміна змінних у подвійному інтегралі.*

Практичні заняття 23-24. *Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах.*

Практичні заняття 25-26. *Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних та сферичних координатах. (Задача та захист з частини розрахункової роботи)*

Практичне заняття 27. *Оглядове заняття.*

Перелік тем практичних занять, що виносяться на самостійне опрацювання

1) Застосування кратних інтегралів.

Перелік індивідуальних завдань

Розрахункова робота (Частина 1): „Визначений інтеграл”: *Збірник завдань з вищої математики (типові розрахунки). Частина 1. Укладачі: Владіміров В.М., Пучков О.А., Шмигевський М.В. – К.: ІВЦ „Політехніка”, 2003., РР-4, стор. 107) №6, 7, 8, 9.*

Розрахункова робота (Частина 2): „Диференціальне числення функції багатьох змінних”: *Збірник завдань з вищої математики (типові розрахунки). Частина 1. Укладачі: Владіміров В.М., Пучков О.А., Шмигевський М.В. – К.: ІВЦ „Політехніка”, 2003, РР№5, стор. 133 - 1, 2, 4, 6, 7,8,9.*

Розрахункова робота (Частина 3): „Кратні інтеграли”: *Збірник завдань з вищої математики. (типові розрахунки). Частина 2. Укладачі: Владіміров В.М., Пучков О.А., Шмигевський М.В. – К.: ІВЦ „Політехніка”, 2003., РР-8, стор. 35) №1, 2, 3, 4, 5.*

Всі матеріали необхідні студентам при вивченні курсу будуть опубліковані в Google class. Процес виконання та захисту індивідуальних завдань може також здійснюватися з використанням Moodle LMS, а також засобами, які доступні в Google class.

6. Самостійна робота студента

Види самостійної роботи: опрацювання лекційного матеріалу, підготовка до аудиторних занять, розв'язок задач, виконання тестових завдань та домашніх робіт, виконання частин розрахункової роботи (розбивається на частини відповідно до переліку індивідуальних завдань).

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Дотримання положень «Кодексу честі КПІ ім. Ігоря Сікорського» (розділи 2 та 3)

Співпраця студентів у розв'язанні проблемних завдань дозволена, але відповіді кожний студент захищає самостійно. Взаємодія студентів під час захисту частин розрахункової, під час написання модульної контрольної роботи, під час виконання тестових завдань, а також завдань експрес-контролю категорично забороняється і будь-яка така діяльність буде вважатися порушенням академічної доброчесності згідно принципів університету щодо академічної доброчесності.

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Поточний контроль: експрес-контроль, тестові завдання, опитування, домашні роботи, модульна контрольна робота, задача та захист розрахункової роботи.

Календарний контроль: провадиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу.

Семестровий контроль: екзамен.

Умови допуску до семестрового контролю: відсутність заборгованостей, зарахування розрахункової роботи, семестровий рейтинг не менше 27 балів.

Рейтингова система оцінювання результатів навчання

Рейтинг студента з кредитного модуля розраховується виходячи із 100-бальної шкали ($R = 100$), з них 50 балів складає стартова шкала ($R_C = 50$) та 50 балів - екзаменаційна шкала ($R_E = 50$). Сума вагових балів R_K з кожного контрольного заходу кредитного модуля дорівнює розміру стартової шкали R_C ($R_C = \sum_K R_K = 50$).

1. Стартовий рейтинг r_C студента складається з балів r_K , що студент отримує протягом семестру з кожного контрольного заходу ($r_C = \sum_K r_K$):

– модульний контроль (МК) – 25 балів ($\sum_K R_K = 25$);

– виконання розрахункових робіт (РР) – 20 балів ($\sum_K R_K = 20$);

– експрес-контроль (роботи на лекційних та практичних заняттях і самостійної роботи в позааудиторний час) – 5 балів ($\sum_K R_K = 5$).

Значення стартової рейтингової оцінки r_C доводиться до студентів на останньому занятті.

2. Критерії нарахування балів стартової шкали

2.1 Модульний контроль (МК, ваговий бал – 25) проводиться у вигляді контрольної роботи (КР) тривалістю 2 академічні години. КР складається з 4-8 завдань (можливе одне чи два теоретичних запитання (завдання)), які оцінюються по 2-6 балів. КР може бути поділена на декілька контрольних робіт (частин) (наприклад, дві одногодинні контрольні роботи, чи три контрольні роботи по 30 хвилин), кожна з яких оцінюється по R_K балів і складається з 2-5 завдань, які оцінюються по 1-4 бали. Максимальна кількість балів в сумі за всі КР складає 25 балів ($25 = \sum_K R_K$). Кількість КР, їх структура та критерії оцінювання завдань доводяться до студентів завчасно.

Практичне завдання на КР, за яке ставиться r_n балів, оцінюється за такими критеріями:

– «відмінно», повне розв'язання (не менше 90% потрібної інформації) – $(1...0,9)r_n$ балів;

– «добре», достатньо повне розв'язання з незначними недоліками (не менше 75% потрібної інформації) – $(0,89...0,75)r_n$ балів;

– «задовільно», неповне розв'язання з певними недоліками та деякими помилками (не менше 60% потрібної інформації) – $(0,74...0,6)r_n$ балів;

– «незадовільно», розв'язання не відповідає вимогам до рівня «задовільно» – 0 балів.

Теоретичне запитання (завдання) на КР, за яке ставиться r_n балів, оцінюється за такими критеріями:

- «відмінно» – повна відповідь, надані відповідні обґрунтування (не менше 90% потрібної інформації) – $(1...0,9)r_n$ балів;
- «добре» – достатньо повна відповідь з незначними недоліками (не менше 75% потрібної інформації) – $(0,89...0,75)r_n$ балів;
- «задовільно» – неповна відповідь з певними недоліками та деякими помилками (не менше 60% потрібної інформації) – $(0,74...0,6)r_n$ балів;
- «незадовільно» – відповідь не відповідає вимогам до рівня «задовільно» – 0 балів.

Якщо студент не з'явився на КР, його результат оцінюється нулем балів.

Рейтинг кожної частини КР вважається позитивним, якщо студент отримав не менше $0,6R_K$ балів. Якщо студент отримав оцінку меншу $0,6R_K$ балів за КР, то він зобов'язаний переписати цю роботу, але не більше двох разів (на розсуд викладача по можливості один раз до сесії та один раз після сесії). Робота оцінюється не більше, ніж у $0,6R_K$ балів.

2.2 Розрахункова робота (РР) (ваговий бал - 20) виконується студентом в позааудиторний час і складається з 4 – 40 завдань, кожне з яких оцінюється в 0,2-2 бали. Всього 8 балів (40%). Захист РР оцінюється в 12 балів (60%) (рекомендовано 3 бали (25%) за захист практичної частини та 9 балів (75%) – теоретичної). РР може бути поділена на декілька РР (частин), кожна з яких оцінюється по R_K балів. Максимальна кількість балів в сумі за всі частини РР складає 20 балів ($\sum_K R_K = 20$). Якщо РР поділено на декілька частин, то бали за перевірку та захист виставляються пропорційно до вагового балу кожної частини. Кількість частин РР, їх структура та критерії оцінювання завдань доводяться до студентів завчасно.

Критерії оцінювання завдань при перевірці:

- правильно і вчасно виконане завдання оцінюється в 0,2-2 бали;
- невчасно виконане завдання оцінюється не більше ніж в 60% від максимально можливої кількості балів;
- неправильно виконане завдання оцінюється в 0 балів.

Критерії оцінювання кожної частини РР при перевірці в цілому:

- якісно виконана робота – 8 балів;
- роботу виконано з незначними недоліками – 7 балів;
- роботу виконано з певними незначними помилками – 6-5 балів;
- роботу не зараховано (завдання не виконане або є грубі помилки) – 0 балів.

До захисту кожної частини РР студент допускається за умови правильного виконання всіх завдань з можливими незначними недоліками та помилками, та набраними не менше 5 балів за всю роботу при перевірці.

Захист розрахункової роботи або її частини складається з одного теоретичного запитання з переліку, що наданий у додатку до робочої програми КМ, та одного чи двох практичних завдань, подібних до завдань РР (з теми).

Теоретичне запитання на захисті РР або її частини оцінюється з r_n балів за такими критеріями:

- «відмінно» – повна відповідь, надані відповідні обґрунтування (не менше 90% потрібної інформації) – $(1...0,9)r_n$ балів;
- «добре» – достатньо повна відповідь з незначними недоліками (не менше 75% потрібної інформації) – $(0,89...0,75)r_n$ балів;
- «задовільно» – неповна відповідь з певними недоліками та деякими помилками (не менше 60% потрібної інформації) – $(0,74...0,6)r_n$ балів;
- «незадовільно» – відповідь не відповідає вимогам до рівня «задовільно» – 0 балів.

Практичне завдання на захисті РР оцінюється у r_n балів за такими критеріями:

- «відмінно», повне розв'язання (не менше 90% потрібної інформації) – $(1...0,9)r_n$ балів;
- «добре», достатньо повне розв'язання з незначними недоліками (не менше 75% потрібної інформації) – $(0,89...0,75)r_n$ балів;
- «задовільно», неповне розв'язання з певними недоліками та деякими помилками (не менше 60% потрібної інформації) – $(0,74...0,6)r_n$ балів;
- «незадовільно», розв'язання не відповідає вимогам до рівня «задовільно» – 0 балів.

Якщо студент не з'явився на захист РР, його результат оцінюється нулем балів.

Рейтинг r_{PP} кожної частини РР вважається позитивним, якщо студент отримав не менше $0,75R_K$ балів. Якщо студент отримав оцінку меншу $0,75R_K$ балів, то він зобов'язаний переписати захист цієї роботи, але не більше двох разів (на розсуд викладача по можливості один раз до сесії та один раз після сесії). Робота оцінюється не більше ніж у $0,75R_K$ балів.

2.3 Експрес-контроль (ваговий бал – 5) проводиться з метою перевірки якості роботи студента на лекційних та практичних заняттях в аудиторії і самостійної роботи в позааудиторний час протягом семестру.

Для більш об'єктивної оцінки роботи студента викладач може проводити короткі контрольні або самостійні аудиторні роботи тривалістю 10 – 30 хвилин, чи задавати індивідуальні домашні роботи.

В кінці семестра викладачі, які проводили в навчальній групі заняття з кредитного модуля, узгоджують між собою і оцінюють результати роботи студента протягом семестру на лекційних та практичних заняттях і самостійної роботи в позааудиторний час. При виставленні рейтингової оцінки за експрес-контроль викладачі враховують відвідування студентом занять протягом семестру, вчасну та якісну здачу коротких контрольних, самостійних та індивідуальних домашніх робіт, роботу студента на заняттях. Значення рейтингової оцінки за експрес-контроль доводиться до студентів на останньому занятті.

Критерії нарахування балів за експрес-контроль:

- активна творча робота студента протягом семестру – 5-4 бали;
- плідна робота студента протягом семестру з незначними недоліками – 3-2 бали;
- студент працював протягом семестру, але з певними недоліками та помилками – 1 бал;
- пасивна робота – 0 балів.

3. Календарна проміжна атестація студентів (на 8 та 14 тижнях семестрів) з КМ проводиться викладачами за значенням поточного рейтингу студента на час атестації. Якщо значення цього рейтингу не менше 50% від максимально можливого на час атестації, студент вважається атестованим. В іншому випадку в атестаційній відомості виставляється «не атестовано». Також не атестується студент у разі невиконання або не захисту хоча б однієї з частин РР, термін подання якої був до тижня проведення атестації, або не написав на позитивну оцінку всі, заплановані на цей час, частини КР.

4. Заохочувальні (r_3) і штрафні (r_{III}) бали:

1. Призове місце у факультетській олімпіаді - (+) 1 - 4 бали;
2. Призове місце в кафедральній олімпіаді - (+) 1 - 5 балів;
3. За умови якісної підготовки і активної роботи на занятті одному або двом кращим студентам може додаватися як заохочування - (+) 1 бал;
4. За кожен тиждень затримки виконання чи подання на перевірку однієї з частин РР без поважних причин - (-) 1 бал;
5. Відсутність на захисті однієї з частин РР без поважних причин - (-) 1 бал.

Сума як штрафних $r_{III} = \sum r_{III}$, так і заохочувальних $r_3 = \sum r_3$ балів не має перевищувати $0,1R_C = 5$ балів.

5. Необхідною умовою допуску студента до екзамену з дисципліни є позитивний рейтинг з усіх форм семестрової атестації (позитивний рейтинг з усіх частин КР та РР, не менше 27 балів). Студенти, які набрали протягом семестру менше 27 балів, зобов'язані до початку екзаменаційної сесії підвищити його, усунувши поточні заборгованості, що призвели до цього, інакше вони не допускаються до екзамену з цієї дисципліни і мають академічну заборгованість.

6. **Екзаменаційна робота** (ваговий бал - 50) проводиться відповідно до навчального плану у вигляді семестрового екзамену в терміни, встановлені графіком навчального процесу та в обсязі навчального матеріалу, визначеному робочою програмою дисципліни. Форма проведення семестрового контролю – комбінована, зміст і структура екзаменаційних білетів (контрольних завдань) та критерії оцінювання визначаються рішенням кафедри. На консультації доводяться до відома студентів правила проведення екзамену, критерії оцінювання, стартові рейтинги, а також зазначається, хто не допущений до екзамену і з якої причини. На екзамені студенти виконують письмову контрольну роботу. Кожен білет, як правило, містить два теоретичних питання і два практичних завдання (або два теоретичних питання і три практичних завдання). Перелік теоретичних питань та тем практичних завдань наведений у методичних рекомендаціях до засвоєння кредитного модуля. Кожне теоретичне

питання оцінюється у 13 балів, а практичне – 12 балів (і теоретичне питання і практичне завдання оцінюються у 10 балів).

Для більш об'єктивної оцінки рівня підготовки студента екзаменаторові надається право задавати додаткові питання в межах навчальної програми.

Система оцінювання теоретичного питання:

- «відмінно» – повна відповідь, надані відповідні обґрунтування (не менше 90% потрібної інформації) – 13-12 балів (10-9 балів);
- «добре» – достатньо повна відповідь з незначними недоліками (не менше 75% потрібної інформації) – 11-10 балів (8-7 балів);
- «задовільно» – неповна відповідь з певними недоліками та деякими помилками (не менше 60% потрібної інформації) – 9-8 балів (6 балів);
- «незадовільно», відповідь не відповідає вимогам до рівня «задовільно» – 0 балів.

Система оцінювання практичного завдання:

- «відмінно», повне розв'язання (не менше 90% потрібної інформації) – 12-11 балів (10-9 балів);
- «добре», достатньо повне розв'язання з незначними недоліками (не менше 75% потрібної інформації) – 10-9 балів (8-7 балів);
- «задовільно», неповне розв'язання з певними недоліками та деякими помилками (не менше 60% потрібної інформації) – 8-7 балів (6 балів);
- «незадовільно», відповідь не відповідає вимогам до рівня «задовільно» – 0 балів.

Після оцінювання відповідей студента на екзамені (виконання екзаменаційної контрольної роботи та відповідей на додаткові питання) викладач підраховує суму r_E балів з екзаменаційної роботи. Рейтинг r_E вважається позитивним, якщо студент отримав не менше $0,6R_E = 0,6 \cdot 50 = 30$ балів. Якщо студент отримав оцінку меншу $0,6R_E = 30$ балів, то екзаменаційна робота оцінюється в 0 балів.

Під час виконання екзаменаційної роботи (підготовки до відповіді) студенти зобов'язані дотримуватися відповідних вимог кафедри. При виявленні факту використання студентом недозволених матеріалів, викладач має право припинити складання екзамену студентом і виставити незадовільну оцінку. При порушенні студентом встановлених правил внутрішнього розпорядку або морально-етичних норм поведінки на екзамені викладач має право усунути його від складання екзамену з позначкою "усунений" в екзаменаційній відомості.

7. Розрахункова шкала рейтингу роботи студента протягом семестру

Рейтингова оцінка (RD) з кредитного модуля, формується як сума балів поточної успішності навчання – стартового рейтингу $r_C = \sum_K r_K$, екзаменаційних балів r_E , з урахуванням

штрафних $r_{III} = \sum r_{III}$ та заохочувальних $r_3 = \sum r_3$ балів:

$$RD = r_C + r_E + r_3 + r_{III} = \sum_K r_K + r_E + \sum r_3 + \sum r_{III} .$$

Межею незадовільного навчання в університеті визначено 59 балів за 100-бальною рейтинговою шкалою.

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

<i>Кількість балів</i>	<i>Оцінка</i>
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

Перелік питань, які виносяться на семестровий контроль:

1. Первісна функція. Властивості. Невизначений інтеграл. Теореми існування первісної та невизначеного інтеграла.
2. Основні властивості невизначеного інтеграла.
3. Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.
4. Заміна змінної в невизначеному інтегралі.
5. Інтегрування найпростіших (елементарних) дробів перших трьох типів.
6. Інтегрування функцій, раціональних відносно синуса і косинуса, за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.
7. Інтегрування функцій, раціональних відносно синуса і косинуса і непарних відносно синуса чи косинуса та парних відносно синуса і косинуса одночасно. Частинні випадки.
8. Інтегрування ірраціональних функцій. Інтегрування функцій, що містять квадратний тричлен.
9. Інтегрування біноміальних диференціалів. Теорема П.Л. Чебишева.
10. Тригонометричні підстановки.
11. Задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла.
12. Означення визначеного інтеграла, його геометричний і фізичний зміст, теорема існування.
13. Основні властивості визначеного інтеграла.
14. Інтеграл із змінною верхньою межею. Теорема Барроу. Наслідки.
15. Основна формула інтегрального числення (формула Ньютона - Лейбніца).
16. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Рекурентна формула.
17. Заміна змінної у визначеному інтегралі.
18. Обчислення площ плоских фігур в декартових координатах.
19. Обчислення площі криволінійного сектора.
20. Обчислення довжин дуг кривих.
21. Обчислення об'ємів тіл.
22. Обчислення площ поверхонь обертання.
23. Невласні інтеграли 1-го роду: означення та ознаки збіжності. Абсолютна збіжність.
24. Невласні інтеграли 2-го роду: означення та ознаки збіжності. Абсолютна збіжність.
25. Поняття області. Означення функції декількох змінних. Основні поняття.
26. Границя і неперервність функції декількох змінних. Властивості функцій декількох змінних, неперервних в обмеженій замкнутій області.
27. Частинні похідні функції декількох змінних. Геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних.
28. Диференціювання функції декількох змінних. Необхідні умови диференціювання. Достатні умови диференціювання функції декількох змінних.
29. Повний диференціал функції декількох змінних, властивості і застосування до наближених обчислень.
30. Диференціювання складної функції декількох змінних. Повна похідна.
31. Теорема про інваріантність форми першого диференціала функції декількох змінних.
32. Неявна функція. Теорема існування неявної функції. Похідна неявно заданої функції.
33. Частинні похідні вищих порядків функції декількох змінних. Теорема про мішані похідні. Диференціали вищих порядків функції декількох змінних.
34. Дотична площина і нормаль до поверхні.
35. Екстремум функцій декількох змінних. Необхідна умова екстремуму. Достатні умови екстремуму функції двох змінних.
36. Найменше і найбільше значення функції в обмеженій замкнутій області.
37. Диференціальні рівняння 1-го порядку: основні поняття. Задача Коші. Теорема існування та єдиності розв'язків задачі Коші.
38. Диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними: означення й інтегрування.
39. Однорідне відносно змінних диференціальне рівняння першого порядку: означення й інтегрування.
40. Лінійне диференціальне рівняння першого порядку: означення й інтегрування.
41. Диференціальне рівняння Бернуллі: означення й інтегрування.

42. Диференціальні рівняння вищих порядків: основні поняття. Задача Коші. Теорема існування та єдиності розв'язків задачі Коші.
43. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку.
44. Структура загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння.
45. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння. Принцип суперпозиції.
46. Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Знаходження загального розв'язку методом Ейлера у випадку простих дійсних коренів характеристичного рівняння та у випадку кратних коренів характеристичного рівняння.
47. Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Знаходження загального розв'язку методом Ейлера у випадку комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння.
48. Метод Лагранжа варіації довільних сталих для лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку.
49. Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами. Знаходження частинного розв'язку методом підбору для лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі спеціальною правою частиною.
50. Нормальна система звичайних диференціальних рівнянь. Основні поняття. Теорема існування та єдиності розв'язків задачі Коші. Метод виключення.
51. Задачі, які приводять до поняття подвійного інтегралу.
52. Подвійний інтеграл: означення, існування та основні властивості.
53. Обчислення подвійного інтеграла в декартовій системі координат.
54. Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат.
55. Заміна змінних в подвійному інтегралі.
56. Обчислення координат центра мас та моментів інерції плоскої фігури.
57. Задача, що приводить до поняття потрійного інтегралу. Потрійний інтеграл: означення, існування.
58. Потрійний інтеграл: означення, існування та основні властивості.
59. Потрійний інтеграл в декартовій системі координат і його обчислення.
60. Заміна змінної в потрійному інтегралі. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричній системі координат.
61. Заміна змінної в потрійному інтегралі. Обчислення потрійного інтеграла в сферичній системі координат.
62. Координати центра мас та моменти інерції просторової області.

- можливість зарахування сертифікатів проходження дистанційних чи онлайн курсів за відповідною тематикою (після погодження з лектором не пізніше ніж за два місяці до екзамену).

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено

старшим викладачем кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ

Владіміровим Володимиром Миколайовичем;

старшим викладачем кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, канд. фіз.-мат. наук
Пилипенко Вітою Анатолівною.

Ухвалено кафедрою математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ (протокол № 8 від 23.05.2024)

Погоджено Методичною комісією ІАТЕ (протокол № 10 від 25.06.2024)