

Диференціальні рівняння-1. Диференціальні рівняння першого та вищих порядків

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>11 Математика та статистика</i>
Спеціальність	<i>111 Математика</i>
Освітня програма	<i>Страхова та фінансова математика</i>
Статус дисципліни	<i>Нормативна</i>
Форма навчання	<i>очна(денна), дистанційна/змішана</i>
Рік підготовки, семестр	<i>2 курс, осінній семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>150/ 5 кредитів (54 годин – Лекції, 36 години – Практичні, 60 годин – СРС)</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Екзамен/2 модульні контрольні роботи, розрахункова робота</i>
Розклад занять	http://rozklad.kpi.ua/Schedules/ScheduleGroupSelection.aspx
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: Станжицький Олександр Миколайович, професор кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, доктор. фіз.-мат. наук ostanzh@gmail.com ORCID http://orcid.org/0000-0002-1456-729X Практичні: : Цуканова Аліса Олегівна, асистент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, доктор філософії (PhD) ponochka2511@ukr.net ORCID https://orcid.org/0000-0003-0049-3733
Розміщення курсу	Сайт кафедри, інформаційні ресурси в бібліотеці

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Цілі дисципліни

Метою навчальної дисципліни є оволодіння студентами основними поняттями та положеннями теорії диференціальних рівнянь першого та вищих порядків, оволодіння базовими теоретичними та практичними методами дослідження та розв'язування окремих класів диференціальних рівнянь, формування здатності розв'язувати складні спеціалізовані теоретичні та прикладні задачі та практичні проблеми професійної діяльності на страхових та фінансових ринках, використовувати методи диференціальних рівнянь.

Предмет навчальної дисципліни

Скалярні звичайні диференціальні рівняння першого та вищих порядків, задачі про відшукування, існування, єдиність розв'язків скалярних диференціальних рівнянь.

Програмні компетентності:

Загальні компетентності (ЗК)

ЗК1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу

ЗК3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності

ЗК7 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями

ЗК12 Здатність працювати автономно.

ЗК17 Здатність критично оцінювати результати своєї діяльності в професійній сфері, навчанні і нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень в навчальних контекстах та/або професійній діяльності з урахуванням наукових, соціальних, етичних, правових, економічних аспектів.

Фахові компетентності (ФК)

ФК1 Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

ФК3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок.

ФК4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих.

ФК5 Здатність до кількісного мислення.

ФК6 Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем.

ФК8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.

ФК14 Здатність демонструвати математичну грамотність, послідовно пояснити іншим математичні теорії або їх складові частини, взаємозв'язок та відмінність між ними, навести приклади застосувань у природничих науках.

Програмні результати навчання

РН4 Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми

РН6 Знати методи математичного моделювання природничих та/або соціальних процесів

РН10 Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями

РН11 Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей

РН12 Відшукувати потрібну науково-технічну інформацію у науковій літературі, базах даних та інших джерелах інформації

РН16 Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Пререквізити: Дисципліна «Диференціальні рівняння-1. Диференціальні рівняння першого та вищих порядків» (ПО8.1) викладається у третьому семестрі другого курсу підготовки бакалаврів і базується на знаннях, отриманих при вивченні дисципліни «Математичний аналіз: функції однієї змінної» (ПО 1.1, 1.2)

Постреквізити: Дисципліна «Диференціальні рівняння-1. Диференціальні рівняння першого та вищих порядків» (ПО8.1), передую дисципліні «Диференціальні рівняння. Частина 2. Системи диференціальних рівнянь. Застосування» ПО8.

3. Зміст навчальної дисципліни

Назва розділів і тем	Кількість годин			
	Всього	у тому числі		
		Лекції	Практичні	СРС
1	2	3	4	5
Розділ 1 <i>Скалярні диференціальні рівняння першого порядку.</i>				
<i>Тема 1.1. Поняття про диференціальні рівняння, розв'язок, загальний розв'язок, задача Коші, поле напрямків, ізокліни</i>	4	2	-	2
<i>Тема 1.2. Інтегровні типи рівнянь першого порядку</i>	26	8	6	12
<i>Тема 1.3. Теореми існування, єдиності та продовжуваності розв'язку задачі Коші для рівняння 1-го порядку</i>	18	8	4	6
<i>Тема 1.4. Симетричні рівняння та автономні системи на площині, класифікація їхніх</i>	17	8	5	4

портретів в околі особливої точки за лінійним наближенням				
Тема 1.5. Неявні рівняння та особливі розв'язки.	17	8	5	4
Модульна контрольна робота	2	-	2	
Розділ 2. Диференціальні рівняння вищих порядків.				
Тема 2.1. Означення рівняння, поняття розв'язку. Задача Коші. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші.	12	2	2	8
Тема 2.2. Інтегрування та зниження порядку диференціальних рівнянь вищих порядків	16	4	4	8
Тема 2.3. Теорія лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків	28	10	4	14
Тема 2.4. Коливність розв'язків рівнянь другого порядку	8	4	2	2
Модульна контрольна робота	2		2	
Екзамен	2		-	
Всього годин	150	54	36	60

4. Навчальні матеріали та ресурси

Основна література

1. Диференціальні рівняння та елементи математичної фізики : навч.-метод. посібник / М-во освіти і науки України, Чернівець. нац. ун-т ім. Юрія Федьковича ; уклад.: С.Г. Блажевський, О.М. Ленюк. – Чернівці : Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2021. – 248 с. – Бібліогр.: с. 246
2. Лиходєєва Г.В. Диференціальні рівняння: працюємо самостійно : навч. посібник / Ганна Лиходєєва, Катерина Пастирєва ; М-во освіти і науки України, Бердян. держ. пед. ун-т. – Київ : Центр учбової літератури. – ISBN 978-617-673-753-7 Ч. 1 : Звичайні диференціальні рівняння першого порядку. – 2018. – 144, [1] с. : портр., іл., табл. – Бібліогр.: с.143-144
3. Kenneth B. Howell. ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. An Introduction to the Fundamentals. Second edition published 2020 by CRC Press 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, Boca Raton, FL 33487-2742

4. Robert Magnus. Essential Ordinary Differential Equations. Springer Undergraduate Mathematics Series, 2023..

Загальна кількість – 4 джерела

Додаткова література

1. Диференціальні та інтегральні рівняння : навч. посібник / С.А. Щоголев, Н.Г. Дрік, Арк.О. Кореновський ; М-во освіти і науки України, Одес. нац. ун-т ім. І.І. Мечникова, Ін-т математики, економіки та механіки. – Одеса : ОНУ, 2017. – 399, [1] с. : іл., табл. – Бібліогр.: с. 394. – ISBN 978-617-689-241-0
2. Лиходєєва Г.В. Диференціальні рівняння: працюємо самостійно : навч. посібник / Ганна Лиходєєва, Катерина Пастирєва ; М-во освіти і науки України, Бердян. держ. пед. ун-т. – Київ : Центр учбової літератури. – ISBN 978-617-673-754-4 Ч. 2 : Диференціальні рівняння вищих порядків, системи звичайних диференціальних рівнянь. – 2018. – 140, [1] с. : портр., табл. – Бібліогр.: с. 139-140
3. 5. Suman Kumar Tumuluri. A First Course in Ordinary Differential Equations. - First edition published 2021 by CRC Press 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, Boca Raton, FL 33487-2742

Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

5.1. Дидактичні матеріали:

На лекційних заняттях – Лекція (електронний варіант), пояснення, мозковий штурм, проблемні завдання

Перелік лекцій

Змістовий модуль 1. Скалярні диференціальні рівняння першого порядку

Лекція 1. Виникнення та основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь. Історична довідка. Геометричні та фізичні задачі, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь.

Лекція 2. Означення диференціального рівняння 1-го порядку. Розв'язок. Задача Коші. Поле напрямів. Інтегральна крива.

Лекція 3. Інтегрування диференціальних рівнянь першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними. Заміни змінних в диференціальних рівняннях 1-го порядку. Однорідне та квазіоднорідне рівняння.

Лекція 4. Інтегрування диференціальних рівнянь першого порядку (продовження) Лінійне рівняння. Рівняння Бернуллі. Рівняння Ріккати.

Лекція 5. Скалярне автономне рівняння першого порядку. Теореми існування та єдиності розв'язку. Межі інтервалу існування. Особливі розв'язки, умови їх існування.

Лекція 6. Векторне поле на прямій. Побудова графіків інтегральних кривих за графіком функції, що описує векторне поле. Аналіз моделі одновидової популяції.

Лекція 7. Лінійне періодичне рівняння першого порядку. 8 Мультиплікатор. Поведінка розв'язків однорідного періодичного рівняння. Існування періодичного розв'язку неоднорідного рівняння. 7.

Лекція 8. Рівняння в повних диференціалах. Означення рівняння в повних диференціалах. Точні та замкнені диференціальні форми. Інтегрування в квадратурах.

Лекція 9. Інтегрувальний множник. Означення інтегрувального множника. Його існування та неєдиність. Деякі способи відшукування інтегрувального множника.

Змістовий модуль 2. Елементи загальної та якісної теорії диференціальних рівнянь на площині

Лекція 10. Теореми Пеано та Пікара. Ламані Ейлера. Формулювання теореми Пеано. Зведення задачі Коші до інтегрального рівняння. Метод послідовних наближень. Теорема Пікара.

Лекція 11. Доведення теореми Пікара. Обґрунтування збіжності методу послідовних наближень. Оцінка відхилення точного і наближеного розв'язку. Єдиність розв'язку.

Лекція 12 Продовження розв'язку початкової задачі. Лема про склеювання розв'язків. Теорема про продовження графіка розв'язку за межі компакту. Непродовжувані розв'язки.

Лекція 13. Елементи геометричного аналізу розв'язків рівнянь першого порядку. Теорема Кнезера. Теорема про порівняння та її застосування до задачі про продовження розв'язку.

Лекція 14. Ізокліни, області зростання, спадання, опуклості, вгнутості інтегральних кривих.

Лекція 15. Симетричні рівняння та автономні системи на площині. Поле напрямів та рівняння в симетричній формі. Векторні поля та автономні системи на площині. Фазові криві. Зв'язок з рівнянням у симетричній формі (рівнянням Пфаффа). Модель Лотки-Вольтерри. Її інтегрування та дослідження фазового портрету.

Лекція 16. Особливі точки. Лінеаризація рівняння Пфаффа та автономної системи в околі особливої точки. Лінеаризована система. Типи її фазових портретів: вузол, сідло.

Лекція 17. Особливі точки (продовження). Типи її фазових портретів: вироджений та дикритичний вузли, фокус, центр. Формулювання теореми Гробмана-Хартмана. Про проблему центра і фокуса.

Лекція 18. Рівняння, не розв'язані відносно похідної (неявні рівняння). Теорема існування та єдиності розв'язку неявного рівняння. Особливість поняття єдиності розв'язку.

Лекція 19. Метод параметризації. Рівняння Лагранжа та Клеро.

Лекція 20. Геометрична інтерпретація неявного рівняння. Особливі розв'язки. Геометрична інтерпретація. Контактна площина. Регулярна точка. Дискримінантні криві та особливі розв'язки.

Лекція 21. Методи відшукування особливих розв'язків. Необхідні, а також достатні умови існування особливих розв'язків. Особливі розв'язки рівняння Клеро.

Змістовий модуль 3. Диференціальні рівняння вищих порядків. Теорія лінійних диференціальних рівнянь та систем

Лекція 22. Способи зниження порядку диференціальних рівнянь. Типи рівнянь, що допускають зниження порядку. Рівняння, які не містять шуканої функції та кількох перших її похідних. Неповні рівняння. Автономні рівняння. Однорідні та квазіоднорідні рівняння. Рівняння, які мають вигляд повної похідної та звідні до них.

Лекція 23. Загальна теорія лінійних рівнянь. Формулювання теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Лінійна залежність та незалежність системи функцій. Вронскіан та необхідна умова лінійної залежності.

Лекція 24. Простір розв'язків лінійного однорідного рівняння (ЛОР). Фундаментальна система розв'язків, її існування. Властивість вронскіана системи розв'язків ЛОР. Теорема про загальний розв'язок ЛОР.

Лекція 25 Загальна теорія лінійних рівнянь (продовження). Побудова ЛОР за його фундаментальною системою розв'язків. Однозначність такої побудови. Формула Остроградського-Ліувілля. Формула Абеля. Зниження порядку лінійного рівняння за допомогою відомого нетривіального розв'язку.

Лекція 26. ЛОР зі сталими коефіцієнтами. Характеристичний поліном. Комплекснозначні розв'язки. Випадок простих коренів характеристичного полінома. Випадок кратних коренів характеристичного полінома.

Лекція 27. Рівняння Ейлера та Лагранжа. Лінійне неоднорідне рівняння (ЛНР). Структура множини розв'язків лінійного неоднорідного рівняння. Лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами та квазіполіномом у правій частині: Метод невизначених коефіцієнтів. Його обґрунтування в нерезонансному та резонансному випадках.

Перелік практичних занять

Змістовий модуль 1. Скалярні диференціальні рівняння першого порядку

Практичне заняття 1. Задачі на складання диференціальних рівнянь. Поняття розв'язку,

Практичне заняття 2. Рівняння з відокремлюваними змінними.

Практичне заняття 3. Однорідні та квазіоднорідні рівняння

Практичне заняття 4. Лінійні рівняння. Метод Бернуллі.

Практичне заняття 5. Метод Лагранжа. Рівняння Бернуллі. Рівняння Ріккати.

Практичне заняття 6. Побудова портретів автономних скалярних рівнянь першого порядку. Дослідження моделі економічного росту.

Практичне заняття 7. Особливі розв'язки. Дослідження розв'язків лінійних рівнянь.

Практичне заняття 8. Розв'язування рівнянь в повних диференціалах

Практичне заняття 9. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою інтегрувального множника.

Практичне заняття 10. Способи відшукування інтегрувального множника.

Практичне заняття 12. Розв'язування різних типів диференціальних рівнянь.

Практичне заняття 13. Застосування теореми Пікара та методу послідовних наближень.

Оцінювання відхилення наближень від точного розв'язку.

Практичне заняття 14. Застосування теореми порівняння. Побудова ізоклін, відшукування областей зростання, спадання, опуклості, вгнутості інтегральних кривих.

Практичне заняття 15. Модульна контрольна робота. [

Практичне заняття 16. Векторні поля та автономні системи на площині. Фазові криві. Зв'язок з рівнянням у симетричній формі (рівнянням Пфаффа

Практичне заняття 17. Особливі точки. Лінеаризована система. Типи її фазових портретів.

Практичне заняття 18. Визначення типів і побудова фазових портретів лінеаризованих систем.

На практичних заняттях - Завдання до виконання (згідно до вказаного списку основної літератури).

5.2. Технічне забезпечення: Microsoft Office Word, будь яке програмне забезпечення для виконання графічного матеріалу (за бажанням студента)

6. Самостійна робота студента

Види самостійної роботи – опрацювання лекційного матеріалу, підготовка до аудиторних занять, розв'язок задач, виконання розрахункової роботи (розбивається на дві частини відповідно до семестрових планових атестацій).

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Дотримання положень «Кодексу честі КПІ ім. Ігоря Сікорського» (розділи 2 та 3)

Співпраця студентів у розв'язанні проблемних завдань дозволена, але відповіді кожний студент захищає самостійно. Взаємодія студентів під час іспиту категорично забороняється і будь-яка така діяльність буде вважатися порушенням академічної доброчесності згідно принципів університету щодо академічної доброчесності.

Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Розподіл навчального часу за видами занять і завдань з дисципліни згідно з робочим навчальним планом.

Семестр	Навч. час		Розподіл навчальних годин			Контрольні заходи		
	Кредити	Акад. год.	Лекції	Практичні	СРС	МКР	ДКР	Семестр. атест.
3	5	150	54	36	60	2	1	екзамен

На першому занятті здобувачі ознайомлюються із рейтинговою системою оцінювання (PCO) дисципліни, яка побудована на основі Положення про систему оцінювання результатів навчання https://document.kpi.ua/files/2020_1-273.pdf.

Поточний контроль: фронтальний (усний, письмовий), МКР, ДКР.

Календарний контроль: проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог си́лабусу, результати якого відображаються в системі Електронний кампус <https://campus.kpi.ua>.

Рейтингова система оцінювання включає всі види тестування: опитування на заняттях, модульні контрольні роботи, якість виконання ДКР. Кожний студент отримує свій підсумковий рейтинг з дисципліни.

Рейтинг студента з кредитного модуля розраховується виходячи із 100-бальної шкали складається з балів, які він отримує за:

- роботу на практичних заняттях;
- виконання додаткових задач;

- написання модульної контрольної роботи;
- виконання розрахункової роботи (ДКР);
- екзамен.

Відповіді під час практичних занять

- якщо задача повністю розв'язана, то здобувач отримує максимальну кількість запланованих балів;
- якщо відповідь правильна, але у розв'язку є неточності, то здобувач отримує 0,5 запланованих балів;
- якщо незадовільна відповідь, метод розв'язування задачі неправильний – 0 балів

Максимальний бал $6=2 \times 3$.

Виконання додаткових задач

Включає виконання задач підвищеної складності, поставлених на лекціях чи під час гурткової роботи.

Максимальний бал 8.

Модульні контрольні роботи

МКР складаються із п'яти задач, одна із яких носить теоретичний характер, інші практичний.

Відсутність на контрольній роботі – 0 балів.

Максимальний бал за кожний модуль 20.

Розрахункова робота

Розрахункова робота виконується і захищається частинами, що за змістом відповідають кожній темі, і складається з 6 завдань. Кожна частина РР здається в терміни, встановлені викладачем.

При виконанні менше 60% РР вона не зараховується і повинна бути доопрацьована.

Максимальний бал 6.

Іспит

Екзаменаційна складова 40 балів.

Штрафні та заохочувальні бали

- несвоєчасне (пізніше ніж на тиждень) подання розрахункової роботи -1 бал
- заохочувальні бали за виконання задач підвищеної складності
- успішна участь у олімпіаді з математики математики

Максимальна кількість штрафних (заохочувальних) балів не перевищує 10% (10 балів)

Форма семестрового контролю – іспит

Якщо виконано усі передбачені види робіт, то іспит виставляється «автоматом», де сумарна підсумкова оцінка вираховується за формулою: сумарні бали за семестр помножені на 5/3, з переведенням в оцінку за університетською шкалою. В разі недостатньої кількості балів або з метою підвищення рейтингу, дозволяється написання екзаменаційної роботи, за результатами якої здобувач отримує остаточний рейтинговий бал.

Умови позитивної оцінки календарного контролю

Для отримання “задовільно” з першої (8 тиждень) та другої проміжної атестації (14 тиждень) студент повинен мати не менше ніж 50% можливих балів на момент проведення календарного контролю.

Перескладання позитивної підсумкової семестрової атестації з метою її підвищення не допускається.

Розрахунок шкали рейтингу (R):

Сума вагових балів контрольних заходів протягом семестру складає:

$$R = 6 + 8 + 40 + 6 + 40 = 100 \text{ балів.}$$

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Кількість балів	Оцінка
100-95	Відмінно
85-94	Дуже добре
75-84	Добре
65-74	Задовільно
60-64	Достатньо
Менше 60	Незадовільно

9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

- можливість зарахування сертифікатів проходження дистанційних чи онлайн курсів за відповідною тематикою;

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено

професор кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, доктор. фіз.-мат. наук
Станжицький Олександр Миколайович

Ухвалено кафедрою математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ (протокол № 9 від 25.06.2025 р.)

Погоджено Методичною комісією ФМФ (протокол №10 від 27.06.2025 р.)