МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
УКРАЇНИ "КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

Г. В. Журавська, В. М. Шраменко

НЕРІВНОСТІ

Методичні вказівки до курсів лінійної алгебри та математичного аналізу

КИЇВ 2010

Нерівності: Методичні вказівки до курсів лінійної алгебри та математичного аналізу/ Журавська Г.В., Шраменко В.М.,- К. : "КПІ". - 2010. - 32 с.

У цих методичних вказівках зібрано основні нерівності, що застосовуються в алгебрі, математичному аналізі, теорії диференціальних рівнянь та математичній фізиці. Кожний розділ містить задачі для кращого засвоєння теоретичного матеріалу та формування навичок оцінювання різноманітних математичних виразів. Слід зауважити, що викладений матеріал буде корисним не тільки студентам фізико-математичних спеціальностей, але й аспірантам, викладачам та науковцям, які працюють в різних галузях математики.

Укладачі:
Г.В.Журавська, канд. фіз.-мат. наук, асистент кафедри математичної фізики НТУУ "КПІ",
В.М.Шраменко, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичної фізики НТУУ "КПІ".

Відповідальний редактор:
С.Д.Івасишен, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри математичної фізики НТУУ "КПІ".

Рецензент:
А.Б.Ільєнко,канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ "КПІ".

Затверджено на засіданні кафедри математичної фізики
протокол №3 від 18 листопада 2010 року.

Зміст

Вступ

У даному методичному посібнику наведено основні числові, інтегральні та ізопериметричні нерівності, а також задачі, які допоможуть закріпити матеріал.

Існують класичні, добре відомі монографії, цілком присвячені нерівностям, однак ми вважаємо корисним мати велику кількість важливих нерівностей, зібраних в одному місці та викладених у єдиному стилі без доведень. Це безумовно полегшує сприйняття матеріалу та допомогає створенню загальної картини, що є дуже важливим для студентів. Крім того, наведений матеріал буде корисним не лише студентам, але й аспірантам та науковим працівникам. Добре відомо, що час від часу виникає необхідність освіжити або уточнити формулювання того чи іншого математичного факту.

Хочемо сказати декілька слів про структуру даного посібника.

Перший розділ присвячено числовим нерівностям. Вони застосовуються в усіх розділах математики. Цікаво, що нерівності Ієнсена та Карамати лежать в основі багатьох олімпіадних задач, саме тому ми навели декілька прикладів таких задач .

У другому розділі ми торкнулись питання обернення числових нерівностей. Усім відома проблема, коли при оцінюванні деякого виразу потрібно, щоб нерівність "дивилась" в інший бік, причому змінні, які входять до виразу, міняються на скінченному інтервалі. Зміна знаку нерівності за певних обмежень на змінні якраз і становить задачу обернення нерівностей.

Третій розділ присвячено інтегральним нерівностям, які часто застосовуються у функціональному аналізі, диференціальних рівняннях та математичній фізиці. Для читання цього розділу потрібне володіння поняттями інтеграла Рімана та Лебега. Також наведено декілька прикладів, але для повноцінного застосування інтегральних нерівностей необхідно ще володіти теорією вкладення функціональних просторів.

В останньому розділі наведено декілька основних ізопериметричних нерівностей, які застосовуються в математичні фізиці. Ми розмістили там деякі окремі факти з елементарної геометрії, щоб сформувати у читача хоча б невелике уявлення про геометричні нерівності. Бажаючі поглибити свої знання в цьому напрямку можуть знайти багато корисного у наведеній в кінці посібника літературі.

Числові нерівності

1.Нерівності для модулів:
для будь-яких дійсних або комплексних чисел справджуються нерівності:

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|,$$

$$||a_1| - |a_2|| \leq |a_1 - a_2| \leq |a_1| + |a_2|.$$

2.Нерівності для степенів:
для довільних $a > -1$, і $n \in N,\ n > 1$, має місце нерівність Бернуллі

$$(1 + a)^n > 1 + na;$$

для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0,\ p > 1,\ 0 < \varepsilon < 1$ справджуються нерівності

$$a^p + b^p \leq (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p),$$

$$(a + b)^p \leq (1 + \varepsilon)a^p + c_1(\varepsilon, p)b^p,$$

$$|a - b|^p \geq (1 - \varepsilon)a^p - c_2(\varepsilon, p)b^p.$$

3.Нерівність Коші - Буняковського:
для довільних дійсних чисел $a_1, ..., a_n$ і $b_1, ..., b_n$:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2).$$

нерівність Коші з ε:
для довільних чисел $a \geq 0,\ b \geq 0,\ \varepsilon > 0$

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2.$$

4.Нерівність Юнга:
для довільних $a \geq 0,\ b \geq 0,\ p > 1,\ q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q};$$

нерівність Юнга з ε:
для довільних чисел $a \geq 0,\ b \geq 0,\ p > 1,\ q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ \varepsilon > 0,$

$$ab \leq \varepsilon a^p + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}} \frac{1}{p^{\frac{1}{p-1}} q} b^q.$$

5.Нерівність Ієнсена:
для довільних дійсних чисел x_i і $\lambda_i,\ i \in \{1, ...n\}$, таких, що $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$ та опуклої донизу функції f (наприклад, якщо вона двічі неперервно диференційовна та $f'' > 0$) виконується нерівність

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n).$$

Для опуклої вгору функції f (наприклад, коли $f'' < 0$) справджується нерівність

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n).$$

Рівність досягається тоді й лише тоді, коли або $x_1 = ... = x_n$, або функція f є лінійною на проміжку, де задано числа x_i.

6.Нерівності для середніх:
для довільних додатних чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ правильні нерівності:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}.$$

Правильним є також більш загальне твердження. Позначимо через

$$M_\alpha(a_1, a_2, ..., a_n) = \Big(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}$$

середнє чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ порядку $\alpha \in R,\ \ \alpha \neq 0$. Середнє порядку 0 будемо розуміти як границю

$$M_0(a_1, a_2, ..., a_n) = \lim_{\alpha \to 0} M_\alpha(a_1, a_2, ..., a_n).$$

Неважко перевірити, що $M_0(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$. Також означимо

$$M_{+\infty}(a_1, a_2, ..., a_n) = \max\{a_i\};$$

$$M_{-\infty}(a_1, a_2, ..., a_n) = \min\{a_i\}.$$

Тоді для $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$ справджується нерівність :

$$M_\alpha(a_1, a_2, ..., a_n) \leq M_\beta(a_1, a_2, ..., a_n),$$

причому рівність досягається лише при $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Зауважимо, що

$$M_1(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

- середнє арифметичне,

$$M_0(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

- середнє геометричне,

$$M_{-1}(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

- середнє гармонічне,

$$M_2(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$$

- середнє квадратичне.

7.Нерівності для середніх з вагою:

для довільних додатних чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ та $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$, таких що $\sigma_1 + \sigma_2 + ... + \sigma_n = 1$, середнім з вагами порядку $\alpha \in R,\ \alpha \neq 0$ називаємо число

$$M_\alpha(a, \sigma) = (\sigma_1 a_1^\alpha + \sigma_2 a_2^\alpha + ... + \sigma_n a_n^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Як і вище означимо

$$M_0(a, \sigma) = a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} ... a_n^{\sigma_n},\ M_{+\infty}(a, \sigma) = \max\{a_i\},\ M_{-\infty}(a, \sigma) = \min\{a_i\}.$$

Тоді для $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$ правильна нерівність:

$$M_\alpha(a, \sigma) \leq M_\beta(a, \sigma),$$

причому рівність досягається лише при $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

8.Нерівність Гюйгенса:

для довільних чисел $a_i \geq 0$ виконується нерівність

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \geq (1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n})^n.$$

9.Нерівність Мінковського:
для невід'ємних дійсних чисел $x_i, y_i,\ i \in \{1, ...n\}$ і числа $p > 1$ справджується нерівність:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

При $p < 1,\ p \neq 0$ нерівність замінюється на протилежну (при $p < 0$ додатково припускається, що $x_i \neq 0, y_i \neq 0$).

Узагальнена нерівність Мінковського:
для невід'ємних чисел $x_{ij} \ge 0,\ i \in \{1, ...n\},\ j \in \{1, ...m\}$ і числа $p > 1$ виконується нерівність

$$\Big\{\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\Big)^p\Big\}^{\frac{1}{p}} \le \sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

При $p < 1,\ p \neq 0$ нерівність замінюється на протилежну (при $p < 0$ додатково припускається, що $x_{ij} \neq 0$).

Нерівність типу Мінковського для добутків:
для натурального числа n та невід'ємних чисел $x_i,\ y_i$ виконується нерівність

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^{\frac{1}{n}} \ge \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\frac{1}{n}} + \Big(\prod_{i=1}^{n} y_i\Big)^{\frac{1}{n}}.$$

10.Нерівність Гельдера для сум:
для довільних дійсних або комплексних чисел $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ та чисел
$p > 1,\ q > 1$, таких, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ та $n \in N$ справджується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

При $0 < p < 1$ знак нерівності замінюється на протилежний.

Узагальнена нерівність Гельдера для сум:
для довільних чисел a_{ij}, чисел $\rho_i \ge 0$ та степенів p_i, де

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1,\ i \in \{1, ...n\},\ j \in \{1, ...m\},$$

виконується нерівність

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}\rho_i a_{1i}a_{2i}...a_{mi}\Big| \le \Big(\sum_{i=1}^{n}\rho_i|a_{1i}|^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}}\Big(\sum_{i=1}^{n}\rho_i|a_{2i}|^{p_2}\Big)^{\frac{1}{p_2}}...\Big(\sum_{i=1}^{n}\rho_i|a_{mi}|^{p_m}\Big)^{\frac{1}{p_m}}.$$

11.Нерівність Чебишова для скінченних монотонних послідовностей:
для довільних дійсних чисел $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n,\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ правильною є нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}b_i \le n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

12.Нерівність Карамати:
нехай дано два впорядковані набори з n дійсних чисел

$$a = (a_1, a_2, ..., a_n),\ b = (b_1, b_2, ..., b_n),$$

для яких $a_i \ge a_{i+1},\ b_i \ge b_{i+1}$ при $i \in \{1, ...n-1\}$. Кажуть, що набір a мажорує набір b, якщо

$$\begin{aligned} a_1 &\ge b_1, \\ a_1 + a_2 &\ge b_1 + b_2, \\ &... \\ a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} &\ge b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}, \\ a_1 + a_2 + ... + a_n &= b_1 + b_2 + ... + b_n. \end{aligned}$$

Для довільної опуклої донизу функції $y = f(x)$, визначеної на деякому проміжку та двох довільних наборів чисел $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ і $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ таких, що a мажорує b, справджується нерівність

$$f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \ge f(b_1) + f(b_2) + ... + f(b_n).$$

З нерівності Карамати випливають нерівності Ієнсена, Коші-Буняковського, Гельдера, Мінковського та багато інших.

13.Нерівність Гільберта:
для довільних невід'ємних чисел $a_1, ..., a_n, ...,$ та чисел $p > 1,\ q > 1,$

таких, що
$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, виконується нерівність

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n b_m}{n+m}<\frac{\pi}{sin(\pi p)}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

14.Нерівність Харді:

для $m\in\{1,2,...\infty\}$ та довільних невід'ємних чисел $a_1,a_2,...a_m$, $p>1$ та $A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ справджується нерівність

$$\sum_{n=1}^{m}\Big(\frac{A_n}{n}\Big)^p\leq\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\sum_{n=1}^{m}a_n^p.$$

15.Нерівність Карлемана:

для довільних невід'ємних чисел $a_1,a_2,...,a_n,...$ виконується нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}}\leq e\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

Стала e є точною.

16.Нерівність Карлсона:

для довільних невід'ємних чисел $a_1,a_2,...,a_n,...$ виконується нерівність

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)^4\leq\pi^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}i^2a_i^2.$$

Стала π^2 є точною.

Обернення числових нерівностей

Припустимо, що нерівність $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq g(x_1, x_2, ..., x_n)$ справджується для всіх додатних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$. Оберненою до цієї нерівності називатимемо нерівність типу $f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq L \cdot g(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка, зрозуміло, виконується за певних обмежень на числа $x_1, x_2, ..., x_n$.

Наступні три нерівності є різними варіантами обернення класичної нерівності Коші-Буняковського.

1. Нерівність Поліа - Сеге:
якщо $0 < m_1 \leq a_k \leq M_1,\ 0 < m_2 \leq b_k \leq M_2$ для всіх $k \in \{1, 2, ...n\}$, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq \frac{1}{4}\Big(\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}} + \sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}\Big)^2 \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2.$$

2. Нерівність Канторовича:
якщо $0 < m \leq p_k \leq M$ для всіх $k \in \{1, 2, ...n\}$, то

$$\sum_{k=1}^{n} p_k u_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} u_k^2 \leq \frac{1}{4}\Big(\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\Big)^2 \Big(\sum_{k=1}^{n} u_k^2\Big)^2.$$

3. Нерівність Уотсона:
якщо $0 < m_1 \leq a_k \leq M_1,\ 0 < m_2 \leq b_k \leq M_2$ для всіх $k \in \{1, 2, ...n\}$, тоді

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 x_k^2 \leq \frac{1}{4}\Big(\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}} + \sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}\Big)^2 \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k x_k^2\Big)^2.$$

4. Обернення нерівності Мінковського:
для чисел $x_{ij} \geq 0,\ \ i \in \{1, 2, ...n\},\ \ j \in \{1, 2, ...m\}$, справджується нерівність

$$\sqrt{\min(m,n)} \cdot \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \Big)^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \geq \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

5. Обернення нерівності для середніх:
нехай числа $a_1, a_2, ..., a_n$ задовольняють умови $0<m\leq a_k \leq M$, тоді при $s > r > 0$ є правильною нерівність

$$\frac{M_s(a_1, ..., a_n)}{M_r(a_1, ..., a_n)} \leq \Big(\frac{r}{M^r - m^r}\Big)^{\frac{1}{s}} \Big(\frac{M^s - m^s}{s}\Big)^{\frac{1}{r}} \Big(\frac{M^s m^r - M^r m^s}{s - r}\Big)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}}.$$

Приклади та задачі

1. Не використовуючи нерівність для середніх, довести нерівність $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, при невід'ємних a, b, c.

Розв'язання

Використаємо для цього нерівність Ієнсена з опуклою вгору функцією $f(x) = \ln x$. Маємо:

$$\ln\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c\right) \geq \frac{1}{3}\ln a + \frac{1}{3}\ln b + \frac{1}{3}\ln c,$$

після потенціювання ми отримаємо необхідну нерівність.

2. Для довільних невід'ємних a, b та $p \in (0,1)$ довести нерівності

$$2^{p-1}(a^p + b^p) \leq (a+b)^p \leq a^p + b^p.$$

Розв'язання

Для доведення першої нерівності застосуємо нерівність Ієнсена для опуклої догори функції $f(x) = x^p,\ p \in (0,1)$. Маємо

$$\left(\frac{1}{2}(2a) + \frac{1}{2}(2b)\right)^p \geq \frac{1}{2}(2a)^p + \frac{1}{2}(2b)^p = 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Друга частина оцінки випливає з нерівності **№2, с.6**, оскільки $\frac{1}{p} > 1$ та

$$a + b = (a^p)^{\frac{1}{p}} + (a^p)^{\frac{1}{p}} \leq (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}.$$

3. Для довільних $a_i \geq 0$, таких що $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$, довести нерівність

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Розв'язання

Застосуємо нерівність Ієнсена для функції $f(x) = x^2$. Отримаємо

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2),$$

звідки і випливає наша нерівність.

4. Для довільних додатних чисел a та b довести нерівність

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b} \geq a^b b^a.$$

Розв'язання

З елементарної оцінки та нерівності для середніх з вагою випливає

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b} = \frac{b}{a+b}a + \frac{a}{a+b}b \geq a^{\frac{b}{a+b}} b^{\frac{a}{a+b}}.$$

Піднісши обидві частини нерівності до степеня $a+b$, отримаємо бажаний результат.

5. Підібрати такі додатні коефіцієнти a, b, c, щоб для всіх $x \geq 0, y \geq 0$ справджувалась нерівність

$$ax^5 + bx^3y^2 + cxy^4 \geq x^2y^3.$$

Розв'язання

Застосуємо нерівність для середніх з вагою

$$ax^5 + bx^3y^2 + cxy^4 \geq x^{5a}(x^3y^2)^b(xy^4)^c,$$

звідки отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a+b+c=1, \\ 5a+3b+c=2, \\ 2b+4c=3, \\ a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0. \end{cases}$$

Ця система має безліч розв'язків, які пов'язані параметром p. Цей параметр ми оберемо так, щоб розв'язки були невід'ємними:

$$a = p - \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2} - 2p,\ c = p.$$

Обираємо довільне число p, яке задовольняє систему нерівностей

$$\begin{cases} p \geq 0, \\ p - \dfrac{1}{2} \geq 0, \\ \dfrac{3}{2} - 2p \geq 0. \end{cases}$$

Наприклад, $p = \frac{2}{3}$. Тоді $a = b = \frac{1}{6}$, $c = \frac{2}{3}$ та нерівність матиме вигляд

$$x^5 + x^3y^2 + 4xy^4 \geq 6x^2y^3.$$

6. Для невід'ємних a, b, c та $p > 0$ оцінити зверху та знизу вираз $(a+b+c)^p$ через $a^p + b^p + c^p$.

7. Нехай a, b, c, d - додатні числа, добуток яких дорівнює 1. Довести, що

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

8. Для додатних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ довести нерівність

$$n^2 \leq (x_1 + x_2 + ... + x_n)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}).$$

9.Довести, що для довільних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, які належать до відрізка $[0, 1]$, справджується нерівність

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2).$$

10. Підібрати такі додатні коефіцієнти a, b, c, щоб для всіх невід'ємних x, y виконувалась нерівність

$$ax^4 + bx^3y^2 + cxy^4 \geq x^2y^3.$$

11. Довести нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S - a_i} \geq \frac{n}{n-1},$$

де $S = a_1 + a_2 + ... + a_n,\ a_i > 0$.

12. Довести нерівність

$$abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

для довільних невід'ємних a, b, c.

13. Довести нерівність

$$x^4 + y^4 \geq x^3 y + y^3 x$$

для довільних невід'ємних x, y.

14. Для додатних чисел довести нерівність

$$\min_{1 \leq k \leq n} \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \leq \max_{1 \leq k \leq n} \frac{a_k}{b_k}.$$

15. Для довільних x і y таких, що $|x| < 1, |y| < 1$ довести, що $|\frac{x+y}{1+xy}| < 1$.

16. Довести нерівність Гюйгенса, використовуючи нерівність Ієнсена для функції $f(x) = \ln(1 + e^x)$.

17. Довести, що послідовність чисел $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n \geq 1$ зростаюча.

Розв'язання

$$\sqrt[n+1]{(1 + \frac{1}{n})^n} = \sqrt[n+1]{(1 + \frac{1}{n})...(1 + \frac{1}{n}) \cdot 1} \leq$$
$$\leq \frac{(1 + \frac{1}{n}) + ... + (1 + \frac{1}{n}) + 1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Звідки випливає, що $(1 + \frac{1}{n})^n \leq (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$.

18. Довести, що для довільних невід'ємних чисел справджується нерівність (типу Мінковського для добутків)

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2...b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}.$$

19. Нехай $a_1, a_2, ..., a_n$ - додатні числа. Довести нерівність

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + \frac{a_3^3}{a_4} + ... + \frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2.$$

Розв'язання

Зробимо заміну $x_i = \ln a_i$ та перепишемо нерівність

$$e^{3x_1-x_2} + e^{3x_2-x_3} + ... + e^{3x_n-x_1} \geq e^{2x_1} + e^{2x_2} + ... + e^{2x_n}.$$

Далі застосуємо нерівність Карамати для опуклої донизу функції $f(x)=e^x$ та числових наборів $a=(3x_1-x_2, 3x_2-x_3, ..., 3x_n-x_1)$ і $b=(2x_1, 2x_2, ..., 2x_n)$.

Впорядкуємо набори $\mathbf{a} : 3x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq ... \geq 3x_{m_n} - x_{m_n+1}$ та $\mathbf{b} : 2x_{k_1} \geq ... \geq 2x_{k_n}$. При цьому вважаємо, що $x_{n+1} = x_1$. Зрозуміло, що

$$\begin{aligned} 3x_{m_1} - x_{m_1+1} \geq 3x_{k_1} - x_{k_1+1} \geq 2x_{k_1}, \\ (3x_{m_1} - x_{m_1+1}) + (3x_{m_2} - x_{m_2+1}) \geq \\ \geq (3x_{k_1} - x_{k_1+1}) + (3x_{k_2} - x_{k_2+1}) \geq 2x_{k_1} + 2x_{k_2}, \\ \cdots \end{aligned}$$

Таким чином, перевірка показує, що набір a мажорує набір b (див. умову у нерівності **№12, с.10**).

Отже, з нерівності Карамати випливає правильність нашої нерівності.

20. Для довільних додатних чисел a, b, c довести нерівність

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b.$$

Вказівка: зробити заміну $x = \ln a, y = \ln b, z = \ln c$ та застосувати нерівність Карамати для опуклої функції $f(x) = e^x$.

21. Довести для $n \geq 2$ нерівність $n! < (\frac{n+1}{2})^n$.
Вказівка: скористатись нерівністю між середнім арифметичним та середнім геометричним.

22. Нерівність $a^2 + b^2 \geq 2ab$ справджується для довільних $a \geq 0, b \geq 0$. Знайдіть такі обмеження на a та b, щоб виконувалась обернена нерівність, а саме

$$a^2 + b^2 \leq 2Lab.$$

Розв'язання

Поділимо праву та ліву частини нерівності на b^2 та позначимо $\frac{a}{b} = x$. Тоді нерівність матиме вигляд

$$x^2 - 2Lx + 1 \leq 0.$$

Ця нерівність виконується лише за умови, що x належить до відрізка, кінцями якого є корені рівняння $x^2 - 2Lx + 1 = 0$, а саме:

$$x \in \Big[\frac{1}{L + \sqrt{L^2 - 1}}; L + \sqrt{L^2 - 1}\Big].$$

Отже, обмеження на a та b будуть такими:

$$\frac{1}{L + \sqrt{L^2 - 1}} \leq \frac{a}{b} \leq L + \sqrt{L^2 - 1}.$$

23. Довести, що за умов $0 < m \leq a,\ \ b \leq M$ справджується нерівність

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq \frac{m^2 + M^2}{mM}.$$

24*. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ належать до відрізка $[a, b]$, де $0 < a < b$. Довести нерівність (Швейцера)

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2$$

.

Інтегральні нерівності

1. Нерівності для модулів:
для будь-якої дійсної або комплекснозначної функції u і для довільної області $G \subseteq R^n$

$$\left| \int\limits_G u(x)dx \right| \leq \int\limits_G |u(x)|dx,$$

у частинних випадках, для будь-яких a, b таких, що $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$,

$$\left| \int\limits_a^b u(x)dx \right| \leq \int\limits_a^b |u(x)|dx$$

і для будь-яких a, b таких, що $-\infty \leq a \leq \infty, -\infty \leq b \leq \infty$:

$$\left| \int\limits_a^b u(x)dx \right| \leq \left| \int\limits_a^b |u(x)|dx \right|.$$

2. Нерівність Мінковського для інтегралів:
для будь-яких дійсних або комплекснозначних функцій u і v, що інтегруються з p-им степенем, та довільної області $G \subseteq R^n$ і $p > 1$ справджується нерівність:

$$\left(\int\limits_G |u(x) + v(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int\limits_G |u(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int\limits_G |v(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Для $0 < p < 1$ нерівність замінюється на протилежну.

3. Нерівність Буняковського (іноді називають нерівністю Шварца):
для будь-яких дійсних або комплекснозначних функцій u і v, що інтегруються з квадратом, та для довільних чисел a, b, $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$,

$$\left| \int\limits_a^b u(x)v(x)dx \right|^2 \leq \int\limits_a^b |u(x)|^2 dx \int\limits_a^b |v(x)|^2 dx.$$

4. Узагальнена нерівність Буняковського:
для будь-яких дійсних або комплекснозначних функцій u і v, що інтегруються з квадратом, та довільної області $G \subseteq R^n$ виконується нерівність:

$$\left| \int\limits_G u(x)v(x)dx \right|^2 \leq \int\limits_G |u(x)|^2 dx \int\limits_G |v(x)|^2 dx.$$

5. Нерівність Гельдера для інтегралів:
для довільної області $G \subseteq R^n$ і для будь-яких дійсних або комплекснозначних функцій u , що інтегрується зі степенем $p > 1$, і v, що інтегрується зі степенем q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, справджується нерівність

$$\left| \int\limits_G u(x)v(x)dx \right| \leq \left(\int\limits_G |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_G |v(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

При $p = q = 2$ отримуємо нерівність Буняковського.

6. Узагальнена нерівність Гельдера для інтегралів:
для довільної області $G \subseteq R^n$ і будь-якого набору дійсних або комплекснозначних функцій $\{u_i\}, i \in \{1, 2, ..., m\}$, де функція u_i інтегрується зі степенем $p_i \geq 1$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1$,виконується нерівність

$$\left| \int\limits_G u_1(x)...u_m(x)dx \right| \leq \left(\int\limits_G |u_1(x)|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} ... \left(\int\limits_G |u_m(x)|^{q_m} dx \right)^{\frac{1}{q_m}}.$$

7. Нерівність Юнга:
для будь-якої дійснозначної неперервної строго зростаючої функції $u(x), x \geq 0,\ u(0) = 0, a \geq 0, b \geq 0$ та оберненої до функції u функції $v, v(u(x)) = x$, справджується нерівність

$$ab \leq \int\limits_0^a u(x)dx + \int\limits_0^b v(x)dx,$$

причому знак рівності має місце тоді і лише тоді, коли $b = u(a)$. у частинному випадку, коли $u(x) = x^{p-1}, p > 1, v(x) = x^{q-1}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, отримуємо нерівність

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

8. Нерівність Чебишова для скінчених монотонних функцій:
для будь-яких невід'ємних функцій f і g виконується нерівність

$$\int\limits_a^b f(x)dx \int\limits_a^b g(x)dx \leq (b-a) \int\limits_a^b f(x)g(x)dx,$$

де f і g або обидві зростають, або обидві спадають.

9. НерівністьІєнсена в інтегральній формі:
для довільної області $G \subseteq R^n$ та для будь-якої дійснозначної функції $x(t)$, опуклої вгору функції $f(t)$ та функції $\lambda(t) \geq 0, \int\limits_G \lambda(t)dt = 1$, справджується нерівність:

$$f\left(\int\limits_G \lambda(t)x(t)dt\right) \leq \int\limits_G \lambda(t)f(x(t))dt.$$

10. Нерівність Беллмана:
для довільного $p \in (1, \infty)$ і будь-яких опуклих донизу функцій u і v, які задовольняють умови

$$\int\limits_0^1 [u(x)]^p dx = 1, \int\limits_0^1 [v(x)]^p dx = 1, u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0,$$

виконується нерівність

$$\int\limits_0^1 u(x)v(x)dx \geq \frac{(p+1)^{\frac{1}{p}}(q+1)^{\frac{1}{q}}}{6}.$$

Максимум правої частини досягається при $p = q = 2$.

11. Інтегральна нерівність Гільберта:
для будь-яких функцій $f \geq 0$, що інтегрується зі степенем p, і $g \geq 0$, що

інтегрується зі степенем r, $p > 1$, $r > 1, \lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \leq 1$, справджується нерівність

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty K^\lambda(x,y) f(x) g(y) dx dy \leq C^\lambda \left(\int\limits_0^\infty f^p(x) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^\infty g^r(x) dt \right)^{\frac{1}{r}},$$

де K — невід'ємне ядро, однорідне зі степенем -1, та $C = \int\limits_0^\infty t^{\frac{-1}{\lambda q}} K(1,t) dt$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. У частинному випадку, коли $K(x,y) = \frac{1}{x+y}$ стала дорівнює $C^\lambda = \left(\frac{\pi}{sin \lambda q} \right)^\lambda$ (точність цієї константи доведено при $q = r$).

12. Нерівність Харді для інтегралів:
для $p > 1$ та будь-якої дійснозначної функції f, що інтегрується зі степенем p, та $F(x) = \int\limits_0^x f(t) dt, F(0) = 0$, виконується нерівність

$$\int\limits_0^\infty \left(\frac{|F|}{x} \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int\limits_0^\infty |f(x)|^p dx.$$

Якщо $F(x) = \int\limits_x^\infty f(t) dt$ і функція $x f(x)$ інтегрується зі степенем p, то виконується нерівність

$$\int\limits_0^\infty |F|^p dx \leq p^p \int\limits_0^\infty |x f(x)|^p dx.$$

Існують також узагальнення нерівності Харді для інтегралів на довільні проміжки та ваги.

13. Нерівність Карлемана для інтегралів:
для будь-якої інтегровної невід'ємної функції f

$$\int\limits_0^\infty \exp \left\{ \frac{1}{x} \int\limits_0^x \ln f(t) dt \right\} dx \leq e \int\limits_0^\infty f(x) dx.$$

Стала e є точною.

14. Інтегральна нерівність Карлсона:
для довільної функції $f(x) \geq 0, \quad x > 0$, яка належить до $L_2(0, \infty)$, разом з функцією $xf(x), > 0$, справджується нерівність

$$\left\{ \int\limits_0^\infty f(x)dx \right\}^4 \leq \pi^2 \left\{ \int\limits_0^\infty f^2(x)dx \right\} \left\{ \int\limits_0^\infty x^2 f^2(x)dx \right\},$$

де стала π^2 точна.

15. Нерівність Гронуолла:
для довільних невід'ємних неперервних на $[a, b]$ функцій f і g з нерівності

$$\exists C > 0 \forall t \in [a, b] : g(t) \leq C + \int\limits_0^t g(s)f(s)ds$$

випливає нерівність

$$\forall t \in [a, b] : g(t) \leq C \exp \int\limits_0^t f(s)ds$$

з тією самою сталою C.
У частинному випадку, коли $C = 0$, то $g(t) = 0, t \in [a, b]$.

Приклади та задачі

1. Нехай $f \in C^1[a,b]$ і $f(a) = 0$. Довести нерівність

$$\Big(\sup_{a\le x\le b}\{|f(x)|\}\Big)^2 \le (b-a)\int\limits_a^b \{f'(x)\}^2 dx.$$

Доведення

Запишемо нерівність Буняковського для функцій $g(t) = f'(t)$, і $\hat{f}(t) = 1$, при $a \le t \le x \le b$

$$\left|\int\limits_a^x \hat{f}(t)g(t)dt\right| \le \left(\int\limits_a^x \hat{f}^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_a^x g^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Вона набуває вигляду

$$\left(\int\limits_a^x \{f'(t)\}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_a^x dt\right)^{\frac{1}{2}} \ge \left|\int\limits_a^x f'(t)dt\right|.$$

Звідси, при $f(a) = 0$ можна отримати нерівність

$$\left(\int\limits_a^x \{f'(t)\}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{x-a} \ge |f(x)|,\ a \le x \le b.$$

Ліва частина останньої нерівності буде більшою, якщо покласти $x = b$, а в правій частині можна взяти те значення $x \in [a,b]$, при якому неперервна функція $|f(x)|$, $a \le x \le b$, досягає своєї точної верхньої межі. Отже, правильною є нерівність

$$\Big(\sup_{a\le x\le b}\{|f(x)|\}\Big)^2 \le (b-a)\int\limits_a^b \{f'(x)\}^2 dx.$$

2. Нехай $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$ і функція f така, що є інтегровною на відрізку $(0,a)$ зі степенем $p > 1$. Тоді $F(x) = o\Big(x^{p-1}\Big)$ для малих x.

Розв'язання

Застосуємо нерівність Гельдера

$$F^p \leq \int\limits_0^x f^p(t)dt \left(\int\limits_0^x dt\right)^{p-1} = x^{p-1}\int\limits_0^x f^p(t)dt,$$

останній множник прямує до нуля при $x \to 0$.

3. Якщо y – абсолютно неперервна функція за виключенням, можливо, точки $x = 0$ і xy'^2 інтегрується в $(0, a)$, то $y = o\left(\left[\log \frac{1}{x}\right]^{\frac{1}{2}}\right)$ для малих x.

Вказівка: в інтегралі $\int\limits_\varepsilon^a y'dx$ підінтегральну функцію домножити та поділити на x і застосувати нерівність Буняковського.

4. Якщо y - абсолютно неперервна за виключенням, можливо, точок $x = 0$ і $x = 1$ та $x(1-x)y'^2$ інтегрується в $(0, 1)$, то

$$0 \leq \int\limits_0^1 y^2dx - \left(\int\limits_0^1 ydx\right)^2 \leq \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x(1-x)y'^2dx$$

Розв'язання

Перша нерівність випливає з нерівності Буняковського. Далі, маємо

$$\int\limits_0^1 y^2dx - \left(\int\limits_0^1 ydx\right)^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \{y(u) - y(v)\}^2dudv =$$

$$= \int\limits_0^1 du \int\limits_u^1 dv \left(\int\limits_u^v y'(t)dt\right)^2 \leq \int\limits_0^1 du \int\limits_u^1 (v-u)dv \int\limits_u^v y'^2(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 y'^2(t)dt \int\limits_0^t du \int\limits_t^1 (v-u)dv = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t(1-t)y'^2dt.$$

З двох нерівностей задачі, перша може звестися до рівності тільки коли y є сталою, а друга – коли y є лінійною функцією.

5. Якщо $m > 1$, $n > -1$ та $f(x)$ – додатна та неперервно диференційовна на $[0, \infty)$ функція, то

$$a) \int\limits_0^\infty x^n f^m(x)dx \leq \frac{m}{n+1} \left(\int\limits_0^\infty x^{\frac{m(n+1)}{m-1}} f^m(x)dx \right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int\limits_0^\infty |f'|^m(x)dx \right)^{\frac{1}{m}},$$

рівність має місце тоді і лише тоді, коли $f(x) = B\exp\{-Cx^{\frac{m+n}{m-1}}\}$, де $B \geq 0$, $C > 0$.

У частинному випадку,

$$b) \int\limits_0^\infty f^2(x)dx \leq 2 \left(\int\limits_0^\infty x^2 f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^\infty f'^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

ця нерівність справджується незалежно від того, додатна $f(x)$ чи ні, а також для інтервалу $(-\infty, \infty)$.

Розв'язання

Найцікавішим є випадок b), доведений Вейлем, який має застосування в квантовій механіці.

Припустимо, що інтеграли в правій частині a) скінченні. За рахунок неперервності $f(x)$ та $n + 1 < \frac{m(n+1)}{m-1}$ інтеграли в лівій частині теж скінченні. Отже,

$$\lim_{x\to\infty} x^{n+1} f^m = 0.$$

Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_0^\infty x^n f^m(x)dx.$$

Інтегруючи його частинами, та враховуючи, що $f(x) \geq 0$ прийдемо до оцінки

$$\int\limits_0^\infty x^n f^m(x)dx \leq \frac{m}{n+1} \int\limits_0^\infty x^{n+1} f^{m-1}(x)|f'(x)|dx.$$

Застосуємо нерівність Гельдера, тоді

$$\int\limits_0^\infty x^{n+1} f^{m-1}(x)|f'(x)|dx \leq \left(\int\limits_0^\infty x^{\frac{m(n+1)}{m-1}} f^m(x)dx\right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int\limits_0^\infty |f'(x)|^m dx\right)^{\frac{1}{m}},$$

що і завершує доведення.

Геометричні нерівності

1. Ізопериметрична нерівність Боннезена:
нехай K - опукла область на площині, r - радіус найбільшого круга, який можна розмістити в K, R - радіус найменшого круга, в якому можна розмістити K, L - периметр, а S - площа області K. Тоді правильною є нерівність:

$$L^2 - 4\pi S \geq \pi^2 (R-r)^2,$$

причому рівність досягається лише, коли K є кругом.

2. Класична ізопериметрична нерівність:
для $n = 1, 2, ...$, обмеженої області $\Omega \subset R^n$, об'єму V та площі межі S справджується нерівність

$$n^n \omega_n V^{n-1} \leq S^n,$$

де ω_n – об'єм одиничної n-вимірної кулі.

3.Геометричні нерівності:
для обмеженої області $\Omega \subseteq R^n$ її об'єма V, діаметра D, радіуса R найменшої описаної кулі виконуються такі нерівності:

нерівність Юнга $R \leq (\frac{n}{2n+2})^{\frac{1}{2}} D,$

нерівність Гейла $l \leq (\frac{n(n+1)}{2})^{\frac{1}{2}} D,$
де l – довжина ребра найменшого описаного симплекса,

нерівність Бібербаха $V \leq 2^{-n} \omega_n D^n,$
де ω_n – об'єм одиничної n-вимірної кулі.

4.Деякі нерівності елементарної геометрії:
1) якщо A, B, C, D - довільні чотири точки на площині, то $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD$(нерівність Птолемея);
2) для довільного трикутника з кутами α, β, γ(в радіанах), сторонами

a, b, c, радіусами вписаного та описаного кола r, R, площею S, периметром P, напівпериметром p та медіанами m_a, m_b, m_c справджуються нерівності

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}P < m_a + m_b + m_c < P, \\ \frac{\pi}{3} \le \frac{a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma}{P} < \frac{\pi}{2}, \\ R \ge 2r, \\ r \le \frac{\sqrt{\sqrt{3}S}}{3} \le \frac{\sqrt{3}}{9}p \le \frac{1}{2}R, \\ a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}S; \end{aligned}$$

3) для довільного многогранника з числом вершин n_1 та числом граней n_2 справджується нерівність

$$R \ge \sqrt{3}\,\mathrm{tg}(\frac{\pi \cdot n}{6n - 12})r,$$

де $n = \min(n_1, n_2)$, R – радіус найменшої описаної сфери, r – радіус найбільшої вписаної сфери.

Список літератури

1. Харди Г., Литтлвуд Дж., Пойа Г., Неравенства, М., 1948.

2. Беккенбах Е., Беллман Е., Неравенства, М., 1965.

3. Полиа Г., Сеге Г, Задачи и теоремы из анализа, М., 1978.

4. Н.Б. Васильев, А.А. Егоров, Задачи всесоюзных математических олимпиад. -
   М. - 1988.

5. Храбров А. И., Неравенство Швейцера // В сб. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике, 2005 год. Невский диалект.
   - 2005. -
   с. 89-96.

6. Храбров А. И., И снова неравенство Коши-Буняковского // В сб. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике, 2003 год. Невский диалект. - 2003. - с.118-152.

7. Храбров А. И., Вокруг монгольского неравенства // В сб. Задачи Санкт-
   Петербургской олимпиады школьников по математике, 2002 год. Невский диалект. - 2002. - с.146–167.

8. Храбров А. И., Обращение классических неравенств // В сб. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике, 2000 год. Изд-во СПбГУ. - 2000. - с.96–106.

9. В.П.Бурский , Неравенства и вложения. - ДонНУ. - 2003.

10. Журнал Квант, №4, 2000.

11. Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии, М. - 1974.

12. Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом Геометричекие неравенства и задачи на максимум и минимум, М. - 1970.

13. И.И.Ляшко, А.К.Боярчук, Я.Г.Гай, Г.П.Головач Справочное пособие по высшей математике, М. - 1998.

Методичні вказівки

Нерівності

Укладачі:
Журавська Ганна Вікторівна,
Шраменко Володимир Миколайович