МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В.М. Шраменко
К. О. Буряченко
Д. В. Лиманський

# ЗАСТОСУВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДО ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

ДОНЕЦЬК 2011

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В.М. Шраменко
К.О. Буряченко
Д.В. Лиманський

# ЗАСТОСУВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДО ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Навчальний посібник

Затверджено
на засіданні Вченої ради ДонНУ
Протокол № 6 від 30 червня 2010 р.

ДОНЕЦЬК ДонНУ 2011

УДК 517.9
ББК В1я73
Ш 855

**Рецензенти:**

Іванчов М.І. – д-р ф.-м.н., проф., зав. кафедри диференціальних рівнянь Львівського національного університету ім. І.Франка,

Димарський Я.М. – д-р ф.-м.н., проф., зав.кафедри інформатики, спецтехніки та інформаційних технологій у діяльності ОВС Луганського державного університету внутрішніх справ ім. Е.О. Дідоренка,

Копачевський М.Д. – д-р ф.-м.н., проф., зав. кафедри математичного аналізу Таврійського національного університету ім. В.І. Вернадського

**Шраменко В.М., Буряченко К.О., Лиманський Д.В.**
Ш 855 Застосування нелінійного функціонального аналізу до теорії диференціальних рівнянь: навч. посібник – Донецьк: ДонНУ, 2011. – 182 с.

Посібник містить конспект лекцій та дидактичні матеріали із курсу, що входить до переліку загальних та спецкурсів для магістрів математичних спеціальностей на математичних факультетах ДонНУ та НТУУ "КПІ". Наведено необхідні теоретичні відомості, приклади розв'язування задач основного рівня та тести для самоконтролю.

Для студентів спеціальності 01.01 денної форми навчання, а також для всіх тих, хто цікавиться диференціальними рівняннями та теорією операторів.

УДК 517.9
ББК В1я73

# ЗМІСТ

**Вступ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **5**

**1 ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ З КУРСУ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ** **9**

1.1 Лінійні функціонали. . . . . . . . . . . . . . . . . 9

1.2 Збіжність послідовностей у банаховому просторі. 13

1.3 Оператори. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17

1.4 Простори Соболєва . . . . . . . . . . . . . . . 34

1.5 Контрольні запитання . . . . . . . . . . . . . 37

1.6 Основні задачі . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

1.7 Додаткові задачі . . . . . . . . . . . . . . . . 42

1.8 Тести для самоконтролю . . . . . . . . . . . . 45

1.9 Приклади розв'язування задач основного рівня 49

**2 ТЕОРЕМИ ПРО НЕРУХОМІ ТОЧКИ** **54**

2.1 Скінченновимірні відображення. . . . . . . . . 54

2.2 Нескінченновимірні відображення у банахових просторах. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62

2.3 Застосування теореми Шаудера. . . . . . . . . 65

2.4 Застосування теорем про нерухомі точки. . . . 68

2.5 Теореми про нерухомі точки ущільнюючих операторів. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74

2.6 Контрольні запитання . . . . . . . . . . . . . 86

2.7 Основні задачі . . . . . . . . . . . . . . . . . 87

2.8 Додаткові задачі . . . . . . . . . . . . . . . . 88

2.9 Тести для самоконтролю . . . . . . . . . . . . 90

2.10 Приклади розв'язування задач основного рівня 93

**3 ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ З МОНОТОННИМИ ТА $(\mathbf{S})_+$–ОПЕРАТОРАМИ 99**

3.1 Монотонні оператори. . . . . . . . . . . . . . . . 99

3.2 Сильна збіжність гальоркінських наближень. . 107

3.3 Існування розв'язку задачі Діріхле. . . . . . . . 109

3.4 Поняття про оператори типу $(\mathbf{S})_+$. . . . . . . . 119

3.5 Застосування теорії операторних рівнянь з $(\mathbf{S})_+$-операторами. . . . . . . . . . . . . . . . . 122

3.6 Контрольні запитання . . . . . . . . . . . . . . 127

3.7 Основні задачі . . . . . . . . . . . . . . . . . . 128

3.8 Додаткові задачі . . . . . . . . . . . . . . . . . 129

3.9 Тести для самоконтролю . . . . . . . . . . . . 131

3.10 Приклади розв'язування задач основного рівня 135

**4 ТОПОЛОГІЧНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ 139**

4.1 Ступінь скінченновимірного відображення. . . 139

4.2 Ступінь Лере-Шаудера. . . . . . . . . . . . . . . 155

4.3 Ступінь відображень типу $(S)_+$. . . . . . . . . . . 160

4.4 Контрольні запитання . . . . . . . . . . . . . . 167

4.5 Основні задачі . . . . . . . . . . . . . . . . . . 168

4.6 Додаткові задачі . . . . . . . . . . . . . . . . . 170

4.7 Тести для самоконтролю . . . . . . . . . . . . 171

4.8 Приклади розв'язування задач основного рівня 174

**Список основної літератури . . . . . . . . . . . . . . 177**

**Список додаткової літератури . . . . . . . . . . . . 178**

**Предметний покажчик . . . . . . . . . . . . . . . . . 180**

# ВСТУП

Методи нелінійного функціонального аналізу посідають особливе місце у дослідженні нелінійних диференціальних рівнянь. Найвідомішим є принцип стискаючих відображень, але бажання зняти обмеження, що виникають при його застосуванні, призвело до появи теорем про нерухомі точки, методу монотонних операторів та теорії топологічного ступеня відображення. Кожному з цих методів присвячується окремий розділ посібника.

Перша частина в основному складається з допоміжних тверджень, означень та прикладів. Вона має довідковий характер і наведена для того, щоб нагадати студентам вже відомі їм факти, які будуть надалі активно використовуватися. У той же час цей розділ містить інформацію, що виходить за рамки стандартного курсу функціонального аналізу. Наприклад, акцентується увага на соболєвському просторі та властивостях оператора Немицького. Це мотивується бажанням застосовувати абстрактну теорію до диференціальних рівнянь з частинними похідними.

У другій частині викладено теореми про нерухомі точки відображень у скінченновимірних та банахових просторах. Це класичні теореми Брауера та Шаудера, а також узагальнення теореми Шаудера на більш широкий ніж компактні клас ущільнюючих операторів. Наводяться приклади застосування розвиненої теорії до дослідження існування розв'язків задач Коші та Діріхле для звичайних диференціальних рівнянь.

Третя частина навчального посібника містить основні результати теорії монотонних операторів. Вводиться поняття гальоркінських наближень, за допомогою яких доводиться теорема існування розв'язків рівняння з монотонним оператором. Розглядається також умова сильної монотонності, що гарантує сильну збіжність послідовності гальоркінських розв'язків. На прикладі задачі Діріхле для нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними дивергентного вигляду показано як "працюють"абстрактні теореми для монотонних операторів.

У цьому ж розділі вводиться поняття відображення типу $(S)_+$, яке є одним з узагальнень монотонних операторів, що застосовується до дуже великого кола нелінійних диференціальних задач. Основні результати в цьому напрямку отримані І.В.Скрипником та Ф.Е. Браудером. За допомогою загальної теореми для оператора типу $(S)_+$ в банаховому просторі ми доводимо існування узагальненого розв'язку задачі Діріхле для квазілінійного рівняння другого порядку.

У четвертому розділі посібника розглядається топологічний метод дослідження нелінійних задач. Послідовно вводяться поняття топологічного ступеня відображення. Спочатку ступінь Брауера для скінченновимірних відображень, потім ступінь Лере-Шаудера для компактних операторів і ступінь відображення типу $(S)_+$, введений І.В. Скрипником.

Наприкінці кожної частини наведено контрольні запитання, завдання та тести для самоконтролю, що допомагатимуть з'ясувати, наскільки повно і глибоко засвоєно викладений матеріал. Крім того, подане видання містить обов'язкові та додаткові задачі, що є корисними для вивчення такого, на перший погляд, суто теоретичного матеріалу та мають сприяти формуванню практичних прийомів та навичок логічного мислення. Наведено також приклади розв'язання обов'язкових задач.

Основними завданнями, що стоять перед студентами під час вивчення цього курсу, є опанування деяких методів нелінійного функціонального аналізу, що стосуються теорем про нерухомі точки нелінійних операторів та існування розв'язків операторних рівнянь. Важливим, на нашу думку, є розуміння зв'язку між абстрактними результатами з функціонального аналізу та існуванням розв'язків крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь.

Подане видання в повному обсязі забезпечує викладання загального курсу "Теорія нелінійних операторів" для магістрів усіх математичних спеціалізацій і містить матеріал, що є цікавим і корисним фахівцям з диференціальних рівнянь, теорії операторів, математичного і функціонального аналізу, алгебри, топології, диференціальної геометрії тощо.

Тому є очевидною важливість цього курсу серед інших математичних дисциплін. Перелічені вище розділи математики є фундаментом, на якому базується теорія нелінійних операторів, тому слухачі повинні володіти основними знаннями з математичного та функціонального аналізу, а також теорії диференціальних рівнянь. Вивчення курсу має сприяти розширенню математичного світогляду студентів і формуванню різнобічно розвинених майбутніх фахівців, що є одним з завдань підготовки магістрів-математиків.

Даний посібник містить предметний покажчик, що покращує орієнтацію в матеріалах видання. Бібліографічний список поділяється на основний (підручники, довідники, задачники) та додатковий (монографії, наукові статті). Робота з додатковою літературою сприятиме засвоєнню викладеного матеріалу, а також сформує у студентів досвід самостійної роботи з різноплановою науковою літературою.

Зазначимо, що вивчення загального курсу "Теорія нелінійних операторів" магістрами математичних спеціальностей було запроваджено в Донецькому національному університеті завідувачем кафедри диференціальних рівнянь академіком НАН України І.В. Скрипником (1999 - 2005 р.). Частина цього курсу - "Вибрані розділи теорії операторів"викладалась також у Київському національному технічному університеті "КПІ". Тому під час написання цього навчального посібника автори використовували монографії, статті, а також конспекти лекцій І.В. Скрипника.

Подане видання пройшло апробацію в Донецькому національному університеті (як методичне забезпечення загального курсу для магістрів "Теорія нелінійних операторів"), у Львівському національному університеті, куди К.О. Буряченко було запрошено з циклом лекцій, присвяченим теоремам про нерухомі точки, а також в Київському національному технічному університеті "КПІ"(в якості забезпечення спецкурсу "Нелінійний функціональний аналіз"для магістрів).

Автори висловлюють щиру подяку своїм колегам та наставникам з Донецька (проф. В.П. Бурському, проф. В.О. Деркачу, доц. М.М. Маламуду), Львова (доц. М.М. Бокало, доц. Ю.Д. Головатому, проф. М.І. Іванчову, проф. В.С. Ільківу, проф. В.М. Кириличу), Симферополя (проф. М.Д. Копачевському) та Луганська (проф. Я.М. Димарському) за активну зацікавленість та обговорення, що сприяло удосконаленню тексту навчального посібника.

# 1 ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ З КУРСУ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Метою даного розділу є опрацювання понять функціонального аналізу, що будуть активно використовуватись в подальших главах. У виданні не наводиться велика кількість загальновідомої інформації, а фокусується увага на означеннях та властивостях соболєвського простору, оператора Немицького та різних типах збіжності у банахових просторах. Мається на увазі, що студенти володіють базовими знаннями з курсу функціонального аналізу такими як: поняття метричного, нормованого та банахового простору.

**1.1 Лінійні функціонали.** Нагадаємо означення та основні властивості лінійних функціоналів. Для більш глибокого оволодіння матеріалом цього підрозділу рекомендується використання літератури [7],[1],[8].

**Означення 1.1. (лінійного функціонала).** Нехай $X$ — нормований простір над полем $\mathbb{C}$ (або $\mathbb{R}$). Відображення $F : X \to \mathbb{C}$ називається **лінійним функціоналом** в $X$, якщо 1) $F(x + y) = F(x) + F(y)$, $x$, $y \in X$; 2) $F(\lambda x) = \lambda x$, $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

**Означення 1.2. (обмеженого функціонала).** Лінійний функціонал $F$ в нормованому просторі $X$ називається **обмеженим**, якщо існує стала $C > 0$, така, що

$$|F(x)| \leqslant C\|x\|, \quad x \in X. \tag{1.1}$$

**Означення 1.3. (неперервного функціонала).** Функціонал $F$ називається **неперервним** в $X$, якщо з умови $x_n \xrightarrow{X} x$ при $n \to \infty$ випливає, що $F(x_n) \to F(x)$ в $\mathbb{C}$.

**Теорема 1.1.** *Лінійний функціонал $F$ в нормованому просторі $X$ (не обов'язково повному) є неперервним в $X$ тоді і лише тоді, коли він обмежений.*

**Означення 1.4. (норми функціонала).** Найменша зі сталих $C$, для яких виконується нерівність (1.1), називається **нормою** функціонала $F$:

$$\|F\| = \inf\{C : \text{виконано } (1.1)\}.$$

**Теорема 1.2.** ***(про обчислення норми функціонала).*** *Норма лінійного обмеженого функціонала $F$ в $X$ обчислюється за формулою*

$$\|F\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|F(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{\substack{\|y\|_X \leqslant 1\\ y\in X}} |F(y)|. \qquad (1.2)$$

Кажуть, що норма функціонала $F$ **досягається**, якщо знайдеться вектор $x_0 \in X$, $\|x_0\| \leqslant 1$, такий, що $|F(x_0)| = \|F\|$.

Для лінійних неперервних функціоналів норма не обов'язково має досягатися, як показує наступний приклад.

*Приклад* 1.1. Норма функціонала $F_1(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,dt$ в $C_{[-1;1]}$ дорівнює 2 і досягається на елементі $x_0(t) \equiv 1$. Натомість норма функціонала $F_2(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,\mathrm{sign}\,t\,dt$ в $C_{[-1;1]}$ теж дорівнює 2, але не досягається на жодній з функцій $x_0 \in C_{[-1;1]}$ (див. задачу 12).

**Означення 1.5. (продовження функціонала).** Нехай $X_0-$ лінійний підпростір банахового простору $X$, $F_0$, $F-$ лінійні функціонали, визначені на $X_0$ та $X$ відповідно. Лінійний функціонал $F$ називається **продовженням функціонала** $F_0$ , якщо $F(x) = F_0(x)$ для всіх $x \in X_0$.

**Теорема 1.3.** ***(про єдиність продовження функціонала).*** *Нехай $X_0-$ лінійний многовид, всюди щільний у банаховому просторі $X$, $F_0-$ лінійний неперервний функціонал* *на $X_0$. Тоді існує єдине неперервне продовження $F$ функціонала $F_0$ на $X$. Це продовження зберігає норму: $\|F\| = \|F_0\|$.*

З означенням функціонала тісно пов'язане поняття спряженого простору.

**Означення 1.6. (спряженого простору).** Нехай $X-$ нормований простір над полем $\mathbb{C}$. **Спряжений простір** $X^*$ визначається як сукупність лінійних неперервних функціоналів над $X$ з операціями

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \qquad f_1, f_2 \in X^*,\ x \in X, \quad (1.3)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, f \in X^*, x \in X, \quad (1.4)$$

і нормою $f \mapsto \|f\|$, визначеною як норма функціонала $f$.

**Теорема 1.4.** ***(про повноту спряженого простору).*** *Нормований простір $X^*$ є повним, тобто банаховим.*

**Означення 1.7. (другого спряженого простору).** Простір, спряжений з $X^*$, називається **другим спряженим** з $X$ простором і позначається через

$$X^{**} := (X^*)^*.$$

Для довільного $x \in X$ розглянемо функціонал $L_x : X^* \to \mathbb{C}$, визначений на просторі $X^*$ формулою

$$L_x(f) := f(x), \qquad f \in X^*. \quad (1.5)$$

**Теорема 1.5.** ***(про канонічне вкладення нормованого простору).*** *Відображення $i : x \mapsto L_x$, визначене рівністю* (1.5)*, є ізометричним (або канонічним) вкладенням нормованого простору $X$ у другий спряжений простір $X^{**}$.*

**Означення 1.8. (рефлексивного простору).** Банахів простір $X$ називається **рефлексивним**, якщо $i(X) = X^{**}$. В цьому випадку пишуть $X = X^{**}$.

У деяких просторах можна визначити загальний вигляд лінійного неперервного функціонала, наприклад, має місце наступне твердження.

**Теорема 1.6.** ***(Ріса про загальний вигляд лінійного обмеженого функціонала в гільбертовому просторі).*** *Кожен лінійний обмежений функціонал в гільбертовому просторі $H$ єдиним чином можна подати у вигляді*

$$F(x) = (x, f), \tag{1.6}$$

*де $f \in H$. При цьому $\|F\| = \|f\|$.*

Іншими словами, кожен функціонал $F \in H^*$ однозначно визначається елементом $f \in H$, $F = F_f$, тобто $H \cong H^*$, і гільбертів простір є самоспряженим (зокрема, рефлексивним).

**Теорема 1.7.** ***(Ріса про загальний вигляд лінійного обмеженого функціонала в $\mathbf{L_p[a, b]}$).*** *Нехай $d\mu-$ $\sigma$-скінченна міра на відрізку $[a, b]$. Простір $(L_p([a, b], d\mu))^*$, $1 \leqslant p < \infty$, ізометрично ізоморфний простору $L_q([a, b], d\mu)$, де $p$ і $q$ пов'язані співвідношенням $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Цей ізоморфізм задається рівністю*

$$f \in L_q([a, b], d\mu) \longleftrightarrow F(x) = \int_a^b x(t) f(t) d\mu(t). \tag{1.7}$$

*При цьому*

$$\|F\| = \|f\|_{L_q} = \left( \int_a^b |f(t)|^q d\mu(t) \right)^{1/q}, \tag{1.8}$$

$\forall F \in (L_p)^*$, $\forall x(t) \in L_p$.

Таким чином, $L_p^* \cong L_q$, якщо $p \in [1; \infty)$ та $1/p + 1/q = 1$. Отже, простір $L_p$ є рефлексивним при $p \in (1; \infty)$. Можна довести, що простір $L_1$ не є рефлексивним. Вочевидь, якщо $p = 2$, то і $q = 2$. Отже, $L_2 \cong L_2^*-$ самоспряжений простір (що також випливає з теореми 1.6).

**1.2 Збіжність послідовностей у банаховому просторі.** Розглянемо поняття сильної та слабкої збіжності послідовностей у банахових просторах, а також поняття збіжності майже всюди та збіжності за мірою послідовностей функцій. Вміння з'ясувати тип збіжності та правильно зробити граничний перехід є надзвичайно важливим під час дослідження як операторних, так і нелінійних диференціальних рівнянь. Доведення основних теорем цього розділу можна знайти в [7],[1],[8],[10].

**Означення 1.9. (рівномірно обмеженої послідовності).** Послідовність елементів $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ банахового простору $X$ називається **рівномірно обмеженою**, якщо

$$\|x_n\| \leqslant M,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

зі сталою $M$, що не залежить від $n$ та є єдиною для усіх членів послідовності $\{x_n\}$.

**Теорема 1.8.** ***(Банаха - Штейнгауза).*** *Нехай $X-$ банахів простір, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}-$ послідовність лінійних неперервних функціоналів в $X$, обмежена в кожній точці простору $X$, тобто*

$$\forall x \in X\ \exists\ C_x > 0 :\ |f_n(x)| \leqslant C_x \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

*Тоді послідовність $\{\|f_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ рівномірно обмежена.*

**Означення 1.10. (сильної та слабкої збіжності у нормованому просторі).** Нехай $X-$ нормований простір, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}-$ послідовність в $X$, $x \in X$. Кажуть, що

1. $x_n$ **сильно збігається** до $x$ і пишуть $x_n \to x$, якщо $\|x_n - x\| \to 0$ (при $n \to \infty$);

2. $x_n$ **слабко збігається** до $x$ і пишуть $x_n \rightharpoonup x$, якщо $f(x_n) \to f(x)$ (при $n \to \infty$) для всіх $f \in X^*$.

**Лема 1.1.** *Кожна послідовність, що сильно збігається в нормованому просторі, збігається слабко до тієї ж границі.*

З теореми 1.8 маємо наступний

**Наслідок 1.1.** *Якщо $x_n \rightharpoonup x$ (при $n \to \infty$), то послідовність $x_n$ рівномірно обмежена.*

**Означення 1.11. (тотальної множини).** Множина $G$ в нормованому просторі $X$ називається **тотальною**, якщо її лінійна оболонка $\operatorname{span} G$ є всюди щільною в $X$.

**Теорема 1.9.** ***(критерій слабкої збіжності в банаховому просторі).*** *Нехай $X-$ банахів простір та $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}-$ послідовність в $X$, $x \in X$. Тоді $x_n \rightharpoonup x_0$ тоді і лише тоді, коли*

*1)* $\sup\limits_{n \geqslant 1} \|x_n\| = K < \infty$;

*2)* $g(x_n) \to g(x_0)$, $n \to \infty$ *для всіх $g$ з деякої тотальної множини $G$ в $X^*$.*

Корисно буде мати твердження теореми 1.9 для деяких конкретних банахових просторів.

**Наслідок 1.2.** ***(критерій слабкої збіжності в*** $\mathbf{l_p}$, $\mathbf{p > 1}$). *Нехай $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$, $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_p$. Тоді $x^{(n)} \rightharpoonup x$ тоді і лише тоді, коли*

*1)* $\sup\limits_{n \geqslant 1} \|x^{(n)}\|_p = K < \infty$;

*2)* $x_k^{(n)} \to x_k$ *при $n \to \infty$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.*

Підкреслимо, що наведене твердження виконується лише для $p \in (1, +\infty)$. Наприклад, слабка збіжність в $l_1$ еквівалентна сильній збіжності в $l_1$ (теорема Шура, [6, с. 308]).

**Наслідок 1.3.** ***(критерій слабкої збіжності в*** $\mathbf{L_p[a, b], p > 1}$) *Нехай* $x_n, \ x \in L_p[a, b]$. *Тоді* $x_n \rightharpoonup x$ *тоді і тільки тоді, коли*

*1)* $\sup\limits_{n \geqslant 1} \displaystyle\int_a^b |x_n(t)|^p \, dt = K < \infty;$

*2)* $\displaystyle\int_a^t x_n(s) \, ds \to \int_a^t x_n(s) \, ds$ *при* $n \to \infty, \ \forall t \in [a, b].$

**Наслідок 1.4.** ***(критерій слабкої збіжності в*** $\mathbf{C_{[a,b]}}$). *Нехай* $x_n, \ x \in C_{[a,b]}$. *Тоді* $x_n \rightharpoonup x$ *тоді і тільки тоді, коли*

*1)* $\sup\limits_{n \geqslant 1} \|x_n\|_{C_{[a,b]}} = K < \infty;$

*2)*$x_n(t) \to x(t)$ *при* $n \to \infty, \ \forall t \in [a, b].$

Має місце наступна теорема — властивість слабкої компактності рефлексивного банахового простору.

**Теорема 1.10.** ***(про слабку компактність рефлексивного банахового простору).*** *Нехай* $X-$ *рефлексивний банахів простір,* $\{x_n\}-$ *обмежена послідовність в* $X$, $\|x_n\| \leqslant C, \ \forall n \in N$. *Тоді існує підпослідовність* $\{x_{n_k}\}$ *послідовності* $\{x_n\}$, *яка слабко збігається до деякого елемента* $x_0 \in X, \ x_{n_k} \rightharpoonup x_0$.

Далі розглянемо різні типи збіжності послідовностей функцій та зв'язки між типами збіжності.

**Означення 1.12.** Кажуть, що послідовність функцій $\{f_j(x)\}$ рівномірно збігається до функції $f(x)$ на множині $\Omega \subset R^n$, якщо для $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N(\varepsilon) \in N$, що для $\forall j > N(\varepsilon)$ та для $\forall x \in \Omega : \ |f_j(x) - f(x)| < \varepsilon.$

*Зауваження* 1.1. Зрозуміло, що сильна збіжність в просторі $C(\overline{\Omega})$ еквівалентна рівномірній збіжності на $\Omega$.

**Означення 1.13.** Кажуть, що послідовність функцій $\{f_j(x)\}$ поточково збігається до функції $f(x)$ на множині $\Omega \subset R^n$, якщо для $\forall x \in \Omega,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon, x) \in N:\ |f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$.

*Зауваження* 1.2. З рівномірної збіжності послідовності функцій випливає її поточкова збіжність, але навпаки — це не завжди є правильним.

**Означення 1.14.** Кажуть, що послідовність функцій $\{f_j(x)\}$ збігається майже всюди до функції $f(x)$ на множині $\Omega \subset R^n$, якщо на $R^n$ задано деяку скінченну міру $\mu$ та послідовність $\{f_j(x)\}$ збігається поточково до функції $f(x)$ за винятком $x \in E \subset \Omega$, що $mes\ E = 0$.

**Означення 1.15.** Послідовність вимірних функцій $\{f_j(x)\}$ називають збіжною за мірою до вимірної функції $f(x)$, якщо для довільного $\sigma > 0$

$$\lim_{n\to\infty} mes\{|f_j(x) - f(x)| \geqslant \sigma\} = 0.$$

**Теорема 1.11.** ***(Лебега.)*** *Якщо послідовність функцій $\{f_j(x)\}$ збігається до функції $f(x)$ майже всюди, то $\{f_j(x)\}$ збігається до $f(x)$ за мірою.*

*Зауваження* 1.3. Обернене твердження взагалі не має місця, але справджується наступна теорема.

**Теорема 1.12.** ***(Ф.Ріса.)*** *Нехай послідовність $\{f_j(x)\}$ вимірних функцій збігається за мірою до функції $f(x)$. Тоді з цієї послідовності можна виділити підпослідовність $\{f_{j_k}(x)\}$, що збігається до $f(x)$ майже всюди.*

**Теорема 1.13.** ***(Д.Віталі.)*** *Нехай $\{u_j\}$ - послідовність функцій з $L_p(\Omega)$, тоді сильна збіжність $u_j \to u_0 \in L_p(\Omega)$ еквівалентна наступним умовам*

*1) $u_j$ збігається до $u_0$ за мірою;*

*2) для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, що для усіх $j \in N$ та $E \subset \Omega$: $\int_E |u_j|^p dx < \varepsilon$ при $mesE < \delta$.*

Оскільки в наступних розділах матимемо справу із узагальненими розв'язками диференціальних рівнянь, то потрібні теореми про граничний перехід під знаком інтеграла.

**Теорема 1.14.** ***(Лебега.)*** *Якщо послідовність $\{f_j(x)\}$ збігається за мірою до функції $f(x)$ на множині $\Omega$ та для усіх $j \in N : \ |f_j(x)| \leqslant \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ — деяка інтегровна на $\Omega$ функція, тоді*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j(x)d\mu = \int_\Omega f(x)d\mu.$$

**Теорема 1.15.** ***(Лема Фату.)*** *Нехай $\{f_j(x)\}$ - послідовність невід'ємних інтегровних функцій, що збігається за мірою до функції $f(x)$. Тоді*

$$\int_\Omega f(x)d\mu \leqslant \underline{\lim}_{j\to\infty} \int_\Omega f_j(x)d\mu.$$

**Теорема 1.16.** ***(Леві.)*** *Нехай $\{f_j(x)\}$ - неспадаюча послідовність інтегровних невід'ємних функцій, що для $\forall x \in \Omega :$ $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant ...,$
послідовність $\{f_j(x)\}$ збігається майже всюди до $f(x)$. Тоді*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j(x)d\mu = \int_\Omega f(x)d\mu.$$

**1.3 Оператори.** В даному пункті розглядаються основні класи операторів та їх властивості. Нагадаємо поняття лінійного та компактного (взагалі нелінійного) оператора, а також критерії компактності в різних просторах. Надалі вводиться означення міри некомпактності за Хаусдорфом та пов'язане із цим поняття ущільнюючого оператора, що є узагальненням компактного оператора. Також в цьому розділі наводяться властивості оператора Немицького, що будуть використовуватись далі під час дослідження нелінійних диференціальних рівнянь. Більш загальні формулювання теорем цього підрозділу та їх доведення читачі можуть дізнатись з джерел [7],[1],[8],[23],[16].

**Означення 1.16. (лінійного оператора).** Нехай $X, Y-$ банахові простори. Оператор $A : X \to Y$ з областю визначення $D(A) \subset X$ називається **лінійним**, якщо $D(A)-$ лінійний многовид, а також виконано наступні умови

$$\forall x_1, x_2 \in D(A) \Rightarrow A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$$

**(умова адитивності)**;

$$\forall c \in \mathbb{R}^1,\ x \in D(A) \Rightarrow A(cx) = cAx$$

**(умова однорідності)**.

**Означення 1.17. (неперервного оператора).** Оператор $A$ називається **неперервним**, якщо для будь-якої послідовності $x_n \in D(A)$, $\|x_n - x_0\|_X \to 0$, $n \to \infty$ матимемо $\|Ax_n - Ax_0\|_Y \to 0$, $n \to \infty$.

Нехай $x_0 \in X, :\ R \geqslant 0$. Позначимо через $B_R(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leqslant R\}$ замкнену кулю радіуса $R$.

**Означення 1.18. (обмеженого оператора).** Оператор $A$ називається **обмеженим**, якщо для будь-якої кулі $B_R(0) \subset X$ множина $A\left(D(A) \cap B_R(0)\right)$ є обмеженою в $Y$, тобто

$$\exists M = M(R) > 0 :\ \|Ax\|_Y \leqslant M \text{ для всіх } x \in D(A) \cap B_R(0).$$

Для лінійних операторів умова обмеженості виглядає наступним чином:

$$\exists K > 0 : \quad \|Ax\|_Y \leqslant K\|x\|_X, \quad \forall x \in D(A).$$

Дійсно, нехай $y \neq 0$, $y \in D(A)$. Розглянемо елемент $\eta = \dfrac{y}{\|y\|}R$, $\|\eta\| = R$, тобто $\eta \in S_R(0) \subset X$. Використовуючи означення 1.18, для елемента $\eta$ матимемо: $\|A\eta\| \leqslant M$, але оператор $A$ — лінійний,

$$A\eta = A\left(\frac{y}{\|y\|}R\right) = \frac{R}{\|y\|}Ay.$$

З нерівності $\|Ay\| \leqslant M$ матимемо

$$\|Ay\| \leqslant \frac{M}{R}\|y\|, \qquad K = \frac{M}{R}.$$

Нагадаємо деякі властивості.

**Теорема 1.17.** *Для того щоб лінійний оператор був неперервним, необхідно і достатньо, щоб він був обмеженим.*

**Теорема 1.18.** ***(про існування розширення обмеженого оператора).*** *Нехай $L-$ підпростір, щільний в $X$, $\bar{L} = X$, $A : L \to Y-$ обмежений оператор. Тоді існує єдине обмежене розширення оператора $A$ на весь банахів простір $X$, тобто існує обмежений оператор*

$$\tilde{A} : X \to Y, \qquad Ax = \tilde{A}x, \qquad \forall x \in L.$$

*Розширення $\tilde{A}$ оператора $A$ будемо позначати так: $A \subset \tilde{A}$.*

**Означення 1.19. (норми обмеженого оператора)**. З кожним обмеженим оператором $A$ можна пов'язати невід'ємне число, яке позначається $\|A\|$ і називається **нормою оператора** $A$. Норма визначається наступним чином:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} .$$

**Означення 1.20. (оберненого оператора).** Оператор $A^{-1} : A(L) \to L$ називається **оберненим** до оператора $A : L \to Y$, якщо $A^{-1}Ax = x$ та

$$AA^{-1}y = y \quad \text{для всіх} \quad x \in L,\ y \in A(L).$$

**Лема 1.2.** ***(необхідна умова існування оберненого оператора).*** *Для того, щоб обернений оператор існував та був однозначним, лінійний оператор $A$ повинен мати тривіальне ядро.*

*Доведення.* Дійсно, нехай це не так. Тобто $Ax_1 = Ax_2$ для $x_1 \neq x_2$. Покладемо $y = x_1 - x_2 \neq 0$, але $Ay = 0$, $y \in \operatorname{Ker} A$, $x_1 \neq x_2$, $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$, $y_1 = y_2$. Тоді обернений оператор

$$A^{-1}y_1 = x_1 \neq x_2 = A^{-1}y_2, \qquad y_1 = y_2,$$

одному й тому самому елементу $y_1 = y_2$ ставить у відповідність різні $x_1 \neq x_2$. $\square$

**Теорема 1.19.** ***(Банаха про неперервність оберненого оператора.)*** *. Нехай $X, Y$ – банахові простори і оператор $A : X \to Y$ – лінійний, неперервний, взаємно однозначний (*$\operatorname{Ker} A = \{0\}$*, $AX = Y$). Тоді існує обернений оператор $A^{-1} : Y \to X$, який є обмеженим*

$$\exists M > 0 : \ \|x\|_X \leqslant M\|Ax\|_Y,\ \forall x \in X. \tag{1.10}$$

Оцінка (1.10) виражає обмеженість оберненого оператора. Дійсно, якщо $Ax = y$, то $x = A^{-1}y$, і (1.10) можна переписати наступним чином:

$$\|A^{-1}y\|_X \leqslant M\|y\|_Y,$$

а це, згідно з означенням 1.18, є умовою обмеженості оператора $A^{-1}$. Зауважимо, що оцінку (1.10) можна отримати лише за умови $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ теореми 1.19. Виникає питання: "А що буде у разі $\mathrm{Ker}\, A \neq \{0\}$?"Відповідь на нього дає теорема Пітре (теорема 1.25).

**Означення 1.21. (відкритого покриття).** Сім'я $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ відкритих множин у топологічному просторі $X$ називається **відкритим покриттям** множини $K \subset X$, якщо

$$K \subset \cup_{\alpha\in J} G_\alpha.$$

**Означення 1.22. (компактної та передкомпактної множини).** Множина $K$ в топологічному просторі $X$ називається **компактною**, якщо з будь-якого її відкритого покриття можна виділити скінченне підпокриття. Множина $K$ у топологічному просторі $X$ називається **передкомпактною**, якщо її замикання є компактним.

**Теорема 1.20.** *В метричному просторі $X$ множина $K$ є компактною (передкомпактною) тоді і лише тоді, коли з будь-якої послідовності $x_n \in K$ можна виділити підпослідовність $x_{n_k}$, що збігається (є фундаментальною) в $X$.*

**Означення 1.23. ($\varepsilon$-сітки).** Нехай $(X, \rho)-$ метричний простір. Кажуть, що множина $A \subset X$ утворює **$\varepsilon$-сітку** для множини $K \subset X$, якщо

$$\forall x \in K \ \ \exists\, a \in A : \ \ \rho(x; a) \leqslant \varepsilon.$$

Наприклад, розбиття $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ відрізка $[a, b]$ таке, що $|t_i - t_j| < \varepsilon$, утворює $\varepsilon$-сітку для множини $K = [a, b]$ у просторі $(\mathbb{R}^1, \rho_1)$.

**Означення 1.24. (цілком обмеженої множини).** Множина $K$ називається **цілком обмеженою**, якщо для всіх $\varepsilon > 0$ вона має скінченну $\varepsilon$-сітку.

Будь-яка цілком обмежена множина є обмеженою. Але зворотне твердження не є правильним, що ілюструє наступний приклад.

*Приклад* 1.2. Одинична сфера $\mathbb{S} = \{x : \|x\| = 1\}$ у просторі $l_2$ є обмеженою, але не цілком обмеженою множиною. Справді, $\forall n \in N$ розглянемо елементи $e_n = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (одиниця на $n$-му місці), $e_n \in l_2$. Оскільки $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}\, \forall n, m \in \mathbb{N}$, то множина $\mathbb{S}$ не має скінченної $\varepsilon$-сітки для жодного $\varepsilon < \sqrt{2}/2$.

**Теорема 1.21.** ***(критерій компактності Хаусдорфа).*** *Для того щоб замкнена множина $K$ у повному метричному просторі $(X, \rho)$ була компактною, необхідно і достатньо, щоб для довільного $\varepsilon > 0$ існувала скінченна $\varepsilon$ - сітка для множини $K$.*

**Означення 1.25. (рівномірно обмеженої сім'ї).** Сім'я неперервних функцій $\Phi \subset C[a, b]$ називається **рівномірно обмеженою**, якщо існує стала $M > 0$, така, що

$$|x(t)| \leqslant M,\, \forall x \in \Phi, \quad \forall t \in [a, b].$$

**Означення 1.26. (одностайно неперервної сім'ї).** Сім'я неперервних функцій $\Phi \subset C[a, b]$ називається **одностайно неперервною**, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \qquad t_1, t_2 \in [a, b], \quad |t_1 - t_2| < \delta : \\ |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon, \quad \forall \varphi \in \Phi. \tag{1.11}$$

Прикладом одностайно неперервної сім'ї є сім'я $\Phi$ функцій, що задовольняє умову Ліпшица зі спільною сталою $L > 0$

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant L|t_1 - t_2|, \quad (t_1, t_2 \in [a, b]).$$

Зокрема, сім'я $\Phi$ диференційовних функцій з рівномірно обмеженими похідними є одностайно неперервною, оскільки це є достатньою умовою виконання умови Ліпшица.

Розглянемо критерії компактності множин в деяких функціональних просторах.

**Теорема 1.22.** ***(Асколі-Арцела).*** *Для того щоб сім'я* $\Phi$ *неперервних функцій була передкомпактною в* $C_{[a,b]}$, *необхідно і достатньо, щоб* $\Phi$ *була рівномірно обмеженою і одностайно неперервною.*

**Теорема 1.23.** ***(М.Ріса).*** *Для того щоб множина* $S \subset L_p(\Omega)$ *була передкомпактною, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

*1)* $S$ *- обмежена в* $L_p(\Omega)$*;*

*2) для довільного* $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$*:*

$$\|f(x+h) - f(x)\| < \varepsilon \qquad \text{\it при} \quad |h| < \delta,$$

*для довільного* $f(x) \in S$*:*

$$f(x+h) = 0 \qquad \text{\it при} \quad x + h \notin \Omega.$$

Далі розглянемо поняття компактного оператора. Цей клас операторів займає особливе місце серед операторів, що діють у нескінченновимірних банахових просторах, оскільки компактний оператор є майже скінченновимірним. Як побачимо далі, саме ця властивість надає можливість перенести деякі результати для неперервних операторів в скінченновимірних просторах на банахові простори.

**Означення 1.27. (компактного оператора).** Нехай $X, Y-$ банахові простори. Оператор $A : X \to Y$ з областю визначення $D(A) \subset X$ називається **компактним**, якщо для будь-якої обмеженої множини $K \subset D(A)$ множина $AK$ є передкомпактною в $Y$.

Наведемо приклад важливого в теорії диференціальних та інтегральних рівнянь компактного оператора.

**Означення 1.28. (інтегрального оператора).** Нехай функція $K(x,t)$ визначена і неперервна на квадраті $x,t \in [a,b]$. **Інтегральним оператором** $I$ називається закон, згідно з яким кожній функції $u(t)$ відповідає функція

$$(Iu)(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt, \tag{1.12}$$

тобто

$$I : u(t) \mapsto \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt.$$

Функція $K(x,t)$ називається **ядром** інтегрального оператора.

**Теорема 1.24.** *Нехай $K(x,t) \in C_{[a,b]\times[a,b]}$. Тоді інтегральний оператор* (1.12) *є неперервним і компактним оператором з $C_{[a,b]}$ в $C_{[a,b]}$.*

**Лема 1.3.** *Нехай $D-$ замкнена опукла обмежена множина у банаховому просторі $X$, $A-$ неперервний компактний оператор, $A : D \to D$. Тоді існує послідовність $A_n$ скінченновимірних операторів, $A_n : D \to D$, що наближає оператор $A$, тобто*

$$\|A_n x - Ax\| \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall x \in D.$$

Доведення цієї леми є конструктивним, тому корисно його навести.

*Доведення.* Оскільки оператор $A$ компактний, то множина $\overline{AD}$ є компактом, тобто, за критерієм Хаусдорфа (теорема 1.21), існує скінченна $\varepsilon$-сітка. Позначимо її $\{y_1^\varepsilon, y_2^\varepsilon, \ldots, y_{k(\varepsilon)}^\varepsilon\}$. Кількість $k(\varepsilon)$ базисних елементів залежатиме від $\varepsilon$. За означенням $\varepsilon$-сітки матимемо

$$\|z - y_i^\varepsilon\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \forall z \in \overline{AD}, \tag{1.13}$$

$y_i^\varepsilon-$ будь-який елемент $\varepsilon$-сітки.

Побудуємо допоміжну послідовність операторів $P_n : \overline{AD} \to D$ наступним чином:

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \varphi_i^\varepsilon(x) y_i^\varepsilon(x)}{\sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \varphi_i^\varepsilon(x)}, \forall x \in \overline{AD}, \tag{1.14}$$

де

$$\varphi_i^\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - y_i^\varepsilon\|, & \|x - y_i^\varepsilon\| < \varepsilon, \\ 0, & \|x - y_i^\varepsilon\| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Розглянемо $\|x - P_n x\|$, $\forall x \in \overline{AD}$. Для цього представимо

$$x = x \frac{\sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \varphi_i^\varepsilon(x)}{\sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \varphi_i^\varepsilon(x)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \varphi_i^\varepsilon(x)} \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} x \cdot \varphi_i^\varepsilon(x).$$

Тоді

$$\|x - P_n x\| = \left\| \frac{1}{\sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \varphi_i^\varepsilon(x)} \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \varphi_i^\varepsilon(x) y_i^\varepsilon(x) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{\sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \varphi_i^\varepsilon(x)} \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \varphi_i^\varepsilon(x) \cdot x \right\| =$$

$$\left\| \frac{1}{\sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \varphi_i^\varepsilon(x)} \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \varphi_i^\varepsilon(x) \{ y_i^\varepsilon(x) - x \} \right\| \leqslant$$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \varphi_i^\varepsilon(x)} \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \varphi_i^\varepsilon(x) \| y_i^\varepsilon(x) - x \| \leqslant \varepsilon.$$

Тобто

$$\|x - P_n x\| \to 0, \qquad n \to \infty, \qquad n = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{1.15}$$

Послідовність скінченновимірних операторів $A_n$, що апроксимують компактний оператор $A$, побудуємо за допомогою операторів $A$ та $P_n : \overline{AD} \to D$ наступним чином:

$$A_n := P_n A. \tag{1.16}$$

Перевіримо, що $A_n : D \to D$. Для будь-якого $y \in D$ маємо $A_n y = P_n A y$, або $A_n y = P_n x$, $x \in \overline{AD}$. Згідно з (1.14), $P_n x \in D$, тому що $y_i^\varepsilon$ належать $\varepsilon$-сітці множини $\overline{AD} \subset D$ за умови $A : D \to D$ леми та опуклості множини $D$.

Скінченновимірність послідовності операторів $A_n$ випливає із скінченновимірності побудованих згідно з (1.14) операторів $P_n$.

Покажемо, нарешті, що $A_n \to A$. Дійсно, для $\forall y \in D$ маємо $\|A_n y - Ay\| = \|P_n A y - Ay\| = \|P_n x - x\| \to 0$, $n \to \infty$, згідно з (1.15). Ми позначили $x = Ay$ та використали означення (1.16) послідовності $A_n = P_n A$. Лему доведено. $\square$

**Лема 1.4.** *Нехай $X_1, X_2, X_3-$ банахові простори, оператор $A : X_1 \to X_2$ неперервний, а оператор $B : X_2 \to X_3$ компактний. Тоді композиція операторів $BA : X_1 \to X_3$ є компактним оператором.*

**Означення 1.29. (норми, компактної відносно іншої норми).** Нехай у банаховому просторі $X$ існують дві норми $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Кажуть, що **норма** $\|\cdot\|_2$ **компактна відносно норми** $\|\cdot\|_1$, якщо будь-яка замкнена обмежена множина відносно норми $\|\cdot\|_1$ є компактною відносно норми $\|\cdot\|_2$.

Розглянемо наступний приклад.

*Приклад* 1.3. У банаховому просторі $C_{[a,b]}$ розглянемо дві норми

$$\|x\|_1 = \|x\|_{C^1} = \max_{t\in[a,b]} (|x(t)| + |x'(t)|) \text{ та}$$

$$\|x\|_2 = \|x\|_C = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

Тоді норма $\|x\|_C$ компактна відносно норми $\|x\|_{C^1}$, оскільки будь-яка замкнена обмежена множина в $C[a,b]$ є компактною в $C_{[a,b]}$. Це виконується завдяки компактності оператора вкладення $C^1_{[a,b]} \subset C_{[a,b]}$ та є прямим наслідком теореми 1.22 Асколі-Арцела — критерію компактності в $C_{[a,b]}$.

**Теорема 1.25.** ***(Пітре).*** *Нехай $A : X \to Y-$ лінійний неперервний оператор, $X, Y-$ банахові простори, $\|\cdot\|_1-$ норма у просторі $X$. Тоді наступні твердження еквівалентні*

*1) образ $X$ при відображенні $A$ є замкненою множиною в $Y$, $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$;*

*2)існують константа $C > 0$ та норма $\|\cdot\|_2$ у просторі $X$, яка є компактною відносно $\|\cdot\|_1$ та задовольняє нерівності*

$$\|x\|_1 \leqslant C\left(\|Ax\|_Y + \|x\|_2\right), \qquad \forall x \in X. \tag{1.17}$$

Таким чином, при невиконанні умови $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ у правій частині оцінки (1.10) з'являється додаток $\|\cdot\|_2$ у компактній відносно $\|\cdot\|_1$ нормі.

*Приклад* 1.4. Для функцій $x(t)$ класу $C^1[0,1]$ визначимо оператор

$$Ax(t) := \frac{dx}{dt} + q(t)x(t), \qquad q(t) \in C[0,1],$$
$$D(A) = \{x \in C^1[0,1] : x(0) = x(1) = 0\},\ A : D(A) \to C[0,1].$$

Це дозволяє переписати крайову задачу

$$\frac{dx}{dt} + q(t)x(t) = f(x,t), \qquad x(0) = x(1) = 0$$

в операторному вигляді

$$Ax(t) = f(x,t), \qquad \forall x \in D(A),$$

і отримати апріорну оцінку типу (1.17) для розв'язків цієї задачі. Дійсно, з нерівності трикутника маємо

$$\left\|\frac{dx}{dt} + q(t)x(t)\right\|_C \geqslant \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_C - \|q(t)x(t)\|_C \geqslant \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_C - Q\|x\|_C,$$

де $Q = \max_{t\in[0,1]} |q(t)| = \|q\|_C$. Звідки

$$\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_C \leqslant Q\|x\|_C + \|Ax\|_C,$$

або

$$\left\|\frac{dx}{dt}\right\|_C + \|x\|_C = (Q+1)\|x\|_C + \|Ax\|_C \leqslant (Q+1)\left\{\|x\|_C + \|Ax\|_C\right\}.$$

Отже, ми отримали оцінку типу (1.17)

$$\|x\|_{C^1} \leqslant (Q+1)\left\{\|x\|_C + \|Ax\|_C\right\}.$$

Першим кроком на шляху до теорем про нерухомі точки абстрактних нелінійних операторів, що діють у банахових просторах, є принцип стискаючих відображень.

**Означення 1.30. (нерухомої точки).** Нехай $f-$ відображення метричного простору $X$ в себе. Точка $x_0$ називається **нерухомою точкою** відображення $f$, якщо $f(x_0) = x_0$.

**Означення 1.31. (стискаючого відображення).** Нехай $(X, \rho)-$ метричний простір. Відображення $f : X \to X$ називається **стискаючим**, якщо існує число $q \in (0; 1)$, таке, що

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant q\rho(x, y),\ \forall x, y \in X. \tag{1.18}$$

Число $q$ назывaють **коефіцієнтом стискання** відображення $f$.

**Теорема 1.26.** ***(принцип стискаючих відображень).*** *Стискаюче відображення повного метричного простору в себе має єдину нерухому точку $x^*$. Якщо $x_0 \in X$, то послідовні ітерації*

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

*збігаються до нерухомої точки $x^*$; при цьому справджується наступна оцінка похибки:*

$$\rho(x_n, x^*) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, x_1).$$

Розглянемо клас ущільнюючих операторів, які водночас є узагальненням компактних та стискаючих відображень.

**Означення 1.32. (міри некомпактності за Хаусдорфом).** Нехай $D-$ обмежена множина. **Мірою некомпактності** $\chi(D)$ множини $D$ **за Хаусдорфом** називається невід'ємне число $\chi(D) = \inf\{r > 0$, що $D$ покривається скінченною кількістю куль $B_r\}$.

Зауважимо, що за умови компактності множини $D$ для неї існує скінченна $\varepsilon$-сітка $\{x_1, \ldots, x_N\}$, тобто для $\forall x \in D,\ \exists\ i = 1, \ldots, N : \|x - x_i\| < \varepsilon$, тобто $x \in B_\varepsilon(x_i)$; отже, $D$ покривається кулями $B_\varepsilon(x_i) : D \subset \cup_{i=1}^N B_\varepsilon(x_i)$. Очевидно, що нижня грань радіусів куль такого покриття дорівнює нулю, оскільки $\varepsilon \to 0$. Отже, для компактної множини міра її некомпактності дорівнює нулю. З означення зрозуміло, що додатну міру некомпактності мають лише некомпактні множини.

Розглянемо компактний оператор $A : D \to D$. Тоді $\overline{AD}-$компакт і $\chi(\overline{AD}) = 0$. Оскільки множина $D$ не обов'язково компактна, то $\chi(D) \geqslant 0$. Отже, $0 = \chi(AD) < \chi(D)$, якщо $\chi(D) \neq 0$. Таким чином, для компактних операторів маємо характеристичну властивість, пов'язану з мірою некомпактності його образу і прообразу

$$\chi(AD) < \chi(D). \tag{1.19}$$

Взагалі, якщо деякий оператор задовольняє (1.19), то він не обов'язково має бути компактним. Отже, приходимо до наступного означення.

**Означення 1.33. (ущільнюючого оператора).** Оператор називається **ущільнюючим**, якщо для міри некомпактності за Хаусдорфом його образу і прообразу виконується нерівність (1.19).

Міра некомпактності за Хаусдорфом має наступні властивості.

**Теорема 1.27.** *Нехай $X$ - банахів простір,* $\dim X = \infty$*. $D$ - обмежена множина, $\chi(D)$ - її міра некомпактності за Хаусдорфом. Тоді*

*1) $\chi(D) = 0 \Leftrightarrow \bar{D}-$ компакт;*

*2) якщо $D_1 \subseteq D_2$, то $\chi(D_1) \leqslant \chi(D_2)$;*

*3) $\chi(D_1 \cup D_2) = \max\{\chi(D_1), \chi(D_2)\}$;*

*4) $\chi(D_1 + D_2) \leqslant \chi(D_1) + \chi(D_2)$, де $D_1 + D_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in D_1,\ x_2 \in D_2\}$;*

*5) $\chi(\operatorname{co} D) = \chi(D)$, де $\operatorname{co} D = \{\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k : x_i \in D, \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$;*

*6) $\chi(\lambda D) = |\lambda|\chi(D),\ \ \lambda \in \mathbb{R}^1$.*

**Лема 1.5.** *Нехай $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ - послідовність замкнених обмежених множин $D_{i+1} \subset D_i$, $\forall i \in N$ та $\chi(D_n) \to 0,\ \ n \to \infty$. Тоді $\cap_{n=0}^{\infty} D_n$ є компактною множиною.*

**Лема 1.6.** *Нехай $F : D \to X-$ ущільнюючий неперервний оператор. Тоді для будь-якої замкненої обмеженої множини $D$ множина $(I - F)D$ замкнена.*

Під час дослідження відображень, що відповідають нелінійним диференціальним задачам, часто використовують оператор Немицького.

**Означення 1.34.** Нехай $h(x, u_1, ..., u_m)$ - дійсна функція, визначена при $x \in \Omega \subset R^n$ та $u_i \in R,\ \ i = 1, ..., m$. **Оператором Немицького** називається відображення

$$N_h(u_1(x), ..., u_m(x)) = h(x, u_1(x), ..., u_m(x)),$$

де $x \in \Omega,\ u_i(x) \in X_i,\ i = 1, ..., m$, а $X_i$ - деякі функціональні простори.

Наступні теореми розкривають важливі властивості оператора Немицького.

**Означення 1.35.** (**умови Каратеодорі.**) Нехай $\Omega \subset R^n$ та $u = (u_1, ..., u_m) \in R^m$, до того ж функція $h(x, u)$ визначена для майже усіх $x \in \Omega$ та для усіх $u \in R^m$. Кажуть, що для функції $h$ мають місце умови Каратеодорі, якщо

1) для усіх $u \in R^m$ функція $h_u(x) = h(x, u)$ вимірна на $\Omega$, як функція змінної $x$;

2) для майже усіх $x \in \Omega$ функція $h_x(u) = h(x, u)$ є неперервною за змінною $u \in R^m$.

**Теорема 1.28.** *Якщо функція $h(x, u_1, ..., u_m)$ задовольняє умову Каратеодорі та $u_i(x),\ i = 1, ..., m$ - вимірні на $\Omega \in R^n$ функції, то функція $g(x) = h(x, u_1(x), ..., u_m(x))$ також є вимірною на $\Omega$. Тобто оператор Немицького відображає набір з $m$ вимірних функцій у вимірну функцію.*

**Теорема 1.29.** *Нехай $r, p_1, ..., p_m$ - дійсні числа, $r \geqslant 1$, $p_i \geqslant 1,\ i = 1, ..., m$. Функція $h(x, u_1, ..., u_m)$ задовольняє умову Каратеодорі та має місце нерівність*

$$|h(x, u_1, ..., u_m)| \leqslant c \sum_{i=1}^{m} |u_i|^{\frac{p_i}{r}} + g(x)$$

*з деякою константою $c \geqslant 0$ та функцією $g(x) \in L_r(\Omega)$.*

*Тоді оператор Немицького $N_h(u_1(x), ..., u_m(x)) = h(x, u_1(x), ..., u_m(x))$ є неперервним оператором, що діє з простору $L_{p_1}(\Omega) \times L_{p_2}(\Omega) \times ... \times L_{p_m}(\Omega)$ в простір $L_r(\Omega)$.*

Доведення цих теорем є досить складним тому сформулюємо та доведемо дещо спрощені результати стосовно неперервності оператора Немицького.

**Теорема 1.30.** *Нехай* $\Omega \subset R^n$, $u \in R$ *та функція* $h(x,u)$ *є неперервною за* $x \in \overline{\Omega}$ *та* $u \in R$, *до того ж має місце нерівність* $|h(x,u)| \leqslant c(1+|u|^{\frac{p}{q}})$, $p > 1$, $q > 1$. *Тоді оператор Немицького Fu(x)=h(x,u(x)) є неперервним оператором з* $L_p(\Omega)$ *в* $L_q(\Omega)$.

*Доведення.* Покажемо, що оператор $F$ діє з $L_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$.

$$\int_\Omega |Fu(x)|^q dx = \int_\Omega |h(x,u(x))|^q dx \leqslant \int_\Omega |C(1+|u|^{\frac{p}{q}})|^q \leqslant$$

$$C^q 2^{q-1} \int_\Omega (1+|u(x)|^p) dx.$$

Коли $u(x) \in L_p(\Omega)$, тоді інтеграл $\int_\Omega |Fu(x)|^q dx < \infty$. Для того, щоб довести неперервність оператора потрібно з'ясувати, що з сильної збіжності довільної послідовності $\{u_j(x)\}$ до $u_0(x)$ у просторі $L_p(\Omega)$ випливає сильна збіжність $Fu_j \to Fu_0$ у просторі $L_q(\Omega)$. Позначимо для довільного $M > 0$ множину $F_j = \{x \in \Omega : \ |u_j(x)| \geqslant M\}$, тоді

$$\int_\Omega |u_j|^p dx \geqslant \int_{F_j(M)} |u_j|^p dx \geqslant M^p mes(F_j(M)).$$

Таким чином, $mes(F_j(M)) \leqslant \frac{R}{M^p}$ для довільного $j \in N$, оскільки $\int_\Omega |u_j|^p dx \leqslant R$ для деякого скінченного $R > 0$.
Розглянемо компактну множину $\{x \in \overline{\Omega}, \ |u| \leqslant M\} \subset R^n \times R$. Неперервна функція $h(x,u)$ на цій множині буде рівномірно неперервною. Тому для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : |h(x,u') - h(x,u'')| \leqslant \varepsilon$ для довільних $x \in \overline{\Omega}$, $|u'| \leqslant M, |u''| \leqslant M$, $|u' - u''| \leqslant \delta$. Позначимо $E_j(\gamma) = \{x \in \Omega : |u_j - u_0| > \gamma\}$ та $z_j(\gamma) = mes(E_j(\gamma))$. З сильної збіжності $u_j \to u_0$ випливає, що $z_j \to 0$, $j \to \infty$. Розглянемо $E = E_j(M,\gamma) = F_j(M) \cup F_0(M) \cup E_j(\gamma)$. На $\Omega \backslash E$ мають місце нерівності $|u_j| \leqslant M$, $|u_0| \leqslant M$, $|u_j - u_0| \leqslant \gamma$. Перейдемо до оцінки

виразу

$$\int_{\Omega}|h(x,u_j)-h(x,u_0)|^q dx=\int_{E}|h(x,u_j)-h(x,u_0)|^q dx+$$
$$+\int_{\Omega\setminus E}|h(x,u_j)-h(x,u_0)|^q dx=I_1+I_2.$$

□

$I_1=\int_E|h(x,u_j)-h(x,u_0)|^q dx\leqslant 2^{q-1}C\int_E(1+|u_j|^p+|u_0|^p)dx$. З теореми (1.13) та попередньої нерівності маємо, що при достатньо малому $\delta>0$ з того, що $mesE<\delta$ випливає, що $I_1<\frac{\varepsilon}{2}$. Покажемо, що множину $E=E_j(M,\gamma)$ можна обрати такою, щоб $mesE<\delta$. Дійсно, ми можемо обрати досить велике $M$, щоб $mesF_j(M)<\frac{\delta}{3}$ та $mesF_0(M)<\frac{\delta}{3}$, а також досить велике $j\in N$, щоб $mesE_j(\gamma)<\frac{\delta}{3}$. Тоді $mesE<mesF_j(M)+mesF_0(M)+mesE_j(\gamma)<\delta$. З рівномірної неперервності функції $h(x,u)$ випливає, що $\gamma$ можна обрати настільки малим, щоб $I_2<\frac{\varepsilon}{2}$. Отже, $I_1+I_2<\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$, з чого маємо сильну збіжність $Fu_j\to Fu_0$ в $L_q(\Omega)$.

**Лема 1.7.** *Якщо функція $h(x,u)$ неперервна за $x\in\overline{\Omega}\subset R^n$ та за $u\in\mathbb{R}$, то оператор Немицького $N_h(u)=h(x,u(x))$ є неперервним з $C(\overline{\Omega})$ в $C(\overline{\Omega})$.*

*Доведення.* Розглянемо $h(x,u)$ на компактній множині

$$K=\{(x,u):x\in\overline{\Omega},|u|\leqslant M\}\subset R^n\times R,$$

для деякої сталої $M>0$, яку визначимо далі. Нехай $u_n(x)\to u_0(x)$, $n\to\infty$ у $C(\overline{\Omega})$, тоді $\exists M>0:|u_n|\leqslant M$, для $\forall n$. Оскільки $h(x,u)$ неперервна на $K$, то вона рівномірно неперервна на $K$. Тобто для $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0:\ |h(x,u')-h(x,u'')|<\varepsilon$ для довільних $x\in\overline{\Omega},|u'|\leqslant M,\ |u''|\leqslant M,|u'-u''|<\delta$.

Оскільки $u_n(x)\to u_0(x),\ \forall\delta>0,\ \exists N=N(\delta):$

$$|u_n(x)-u_0(x)|<\delta,\ \forall n\geqslant N(\delta),\ \forall x\in\overline{\Omega},$$

отже, завдяки рівномірній неперервності функції $h(x,u)$ на $K$ матимемо $|h(x,u_n)-h(x,u_0)| \to 0$, $n \to \infty$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. Таким чином, неперервність оператора $N_h$ доведено. $\square$

**1.4 Простори Соболєва** [9],[19]. Нехай $\Omega \subset R^n-$ обмежена відкрита множина. Розглянемо функцію $f(x)$, що належить простору $L_p(\Omega)$ при $p > 1$. З курсу функціонального аналізу відомо, що існує послідовність функцій $f_j(x) \in C^\infty(R^n)$, яка сильно збігається до $f(x)$ у просторі $L_p(\Omega)$. Якщо для $k = 1, ..., n$ існують деякі функції $u_k(x) \in L_p(\Omega)$ такі, що $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \to u_k(x)$ у просторі $L_p(\Omega)$, тоді функції $u_k(x)$ називають **узагальненими частинними похідними** функції $f(x)$ за змінними $x_k$.

Існує друге означення **узагальненої похідної**. Нехай $f(x) \in L_p(\Omega)$, тоді функції $u_k(x) \in L_p(\Omega)$ називають узагальненими похідними функції $f(x)$, якщо для довільних функцій $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k}dx = -\int_\Omega u_k(x)\varphi(x)dx.$$

**Теорема 1.31.** *Якщо функція $f(x) \in L_p(\Omega)$ має узагальнену похідну $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \in L_p(\Omega)$ за першим означенням, то $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ буде узагальненою похідною і в сенсі другого означення. Якщо додатково вимагати, щоб межа області $\partial\Omega$ була гладкою, то буде мати місце і обернене твердження.*

Позначимо $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)-$ мультиіндекс з цілими невід'ємними компонентами $\alpha_i$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$,

$$D^\alpha u(x) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n} u(x),\ D^k u = \{D^\alpha u:\ |\alpha| = k\}.$$

Розглянемо норму

$$||u||_{m,p} = \Big( \int_\Omega \sum_{|k| \leqslant m} |D^k u(x)|^p \, dx \Big)^{1/p}.$$

Відповідно до першого означення узагальненої похідної можна визачити простір функцій, що належать до $L_p(\Omega)$ разом зі своїми узагальненими похідними до порядку $m$ включно, як замикання множини функцій $C^\infty(R^n)$ за наведеною вище нормою $\|u\|_{m,p}$. Цей простір називають **простором С. Л. Соболєва** $W_p^m(\Omega)$.

Нехай $f(x) \in W_p^m(\Omega)$, тоді для довільних функцій $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega D^m f(x) \varphi(x) dx = (-1)^m \int_\Omega f(x) D^m \varphi(x) dx. \qquad (1.20)$$

Можна побачити, що ця властивість з іншого боку відповідає другому означенню узагальненої похідної.

**Теорема 1.32.** *Простір $W_p^m(\Omega)$– рефлексивний сепарабельний банахів відносно визначеної вище норми $\| \cdot \|_{m,p}$.*

Якщо розглядати $C_0^\infty(\Omega)$– підпростір простору $C^\infty(\overline{\Omega})$, що складається з нескінченно диференційовних фінітних функцій (тобто таких, що мають в області $\Omega$ компактний носій та в деякій смузі поблизу межі $\partial\Omega$ тотожно дорівнюють нулю), то його замикання за нормою $\| \cdot \|_{m,p}$ визначатиме підпростір $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega) \subset W_p^m(\Omega)$.

*Зауваження* 1.4. Якщо межа області $\partial\Omega$ є достатньо гладкою, то сама функція та її узагальнені похідні до $(m-1)$ - го порядку дорівнюють нулю на $\partial\Omega$. Саме тому рівність (1.20) має місце і при довільних фукціях $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$.

Відомо, що $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$ - рефлексивний сепарабельний банахів простір відносно норми $\|\cdot\|_{m,p}$. До того ж у просторі $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$ можна ввести норму, еквівалентну нормі $\|\cdot\|_{m,p}$

$$||u||_{\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)} = \sum_{|k|=m} \Big( \int_\Omega |D^k u|^p \, dx \Big)^{1/p}.$$

Надалі, в якості норми простору $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$, розглядатимемо останню норму.

Кажуть, що банахів простір $X$ вкладено в банахів простір $Y$ та записують $X \subset Y$, якщо кожен елемент простору $X$ є також елементом простору $Y$ і оператор вкладення $I : X \to Y, \ I(x) = x, \ x \in X$ є неперервним взаємно однозначним відображенням. Якщо $I-$ до того ж компактний оператор, то вкладення називають компактним.

**Теорема 1.33.** *Якщо межа області $\partial\Omega$ достатньо гладка (наприклад $\partial\Omega \in C^1$), то для $0 \leqslant k \leqslant m-1$ мають місце наступні вкладення:*

*1) $W^m_p(\Omega) \subset W^k_q(\Omega)$, якщо $\dfrac{1}{q} \geqslant \dfrac{1}{p} - \dfrac{m-k}{n} > 0$;*

*2) $W^m_p(\Omega) \subset W^k_q(\Omega)$, якщо $q < \infty$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{m-k}{n}$;*

*3) $W^m_p(\Omega) \subset C^{k,\delta}(\overline{\Omega})$, якщо $\dfrac{n}{p} < m - (k+\delta)$, $0 < \delta < 1$.*

**Теорема 1.34.** *В попередній теоремі вкладення 2) та 3) компактні, а вкладення 1) компактне за умови $\dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{p} - \dfrac{m-k}{n} > 0$.*

Оскільки $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega) \subset W^m_p(\Omega)$, то наведені теореми мають місце і для простору $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$.

Нагадаємо, що $C^{k,\delta}(\overline{\Omega})$— банахів простір, який складається з неперервно диференційовних до порядку $k$ функцій, при цьому похідні $k$ - го порядку задовольняють нерівність Гельдера з показником $\delta$.

$$\|u\|_{C^{k,0}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \max_{x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|,$$

$$\|u\|_{C^{k,\delta}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^{k,0}(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{x,y\in\overline{\Omega},x\neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\delta}.$$

Разом із теоремами вкладення велике значення мають інтегральні нерівності, що мають місце для функцій з простору С.Л. Соболєва.

**Лема 1.8.** *Для довільної функції* $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$ *виконуються нерівності*
*при* $p < n,\ r \in [1, \overline{p}]$, *при* $p = n,\ r \in [1, \infty)$,

$$\|u\|_{L_r(\Omega)} \leqslant C \cdot (mes\Omega)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{\overline{p}}} \|Du\|_{L_p(\Omega)},\ \overline{p} = \frac{np}{n-p},$$

*при* $p > n$,

$$\sup_\Omega |u| \leqslant C \cdot (mes\Omega)^{1/n-1/p}\, ||Du||_{L_p(\Omega)},$$

*де константа* $C > 0$ *залежить тільки від* $n$ *та* $p$.

*Зауваження* 1.5. Саме завдяки першій нерівності при $r = p$, в просторі $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ можна ввести еквівалентну норму. При різних значеннях $r$ та $p$ цю нерівність доводили Пуанкаре, Фрідріхс та Соболєв.

## 1.5 Контрольні запитання

1. Як виглядає умова обмеженості оператора у випадку його лінійності?

2. Як виглядає умова обмеженості оператора у випадку його нелінійності?

3. Наведіть необхідну умову існування оберненого оператора. Чи є ця умова достатньою?

4. Наведіть приклади норм $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ у банаховому просторі таким чином, щоб одна з них була компактною відносно іншої.

5. Чи є норма $\|\cdot\|_{L_2}$ компактною відносно норми $\|\cdot\|_{W_2^1}$ у банаховому просторі $W_2^1$?

6. Яка з норм $\|\cdot\|_{C^1}$, $\|\cdot\|_C$ є компактною відносно іншої у банаховому просторі $C^1$?

7. Чи існує оператор, що є компактним, але не є неперервним? А якщо він до того ж лінійний?

8. Будемо називати ядром нелінійного оператора множину $Ker\ A = \{u \in X : \ Au = 0\}$. Відомо, що ядро лінійного оператора складається хоча б з нульового елемента. Чи має місце ця властивість для нелінійного оператора?

9. За допомогою якої послідовності операторів можна наблизити компактний неперервний оператор у банаховому просторі?

10. Нехай оператор $A$ неперервний, $B$ компактний, $A, B : X \to X$. Яким оператором буде композиція $A \circ B$?

11. Чи будь-який компактний оператор є ущільнюючим? Наведіть приклад.

12. Чи будь-який ущільнюючий оператор є компактним? Наведіть приклад.

13. Нехай $X$ — рефлексивний банахів простір. Яким чином встановлюється ізоморфізм $X \cong X^{**}$? Наведіть приклади рефлексивних банахових просторів.

14. Навести приклад оператора Немицького, що діє з простору $L_2(\Omega)$ в простір $L_4(\Omega)$.

## 1.6 Основні задачі

1. Чи є функціонал $F$ лінійним та обмеженим в $C_{[0,1]}$?

   (a) $F(x) = \int_0^1 |x(t)|dt;$

   (b) $F(x) = \int_0^1 \frac{x(t)}{t}dt;$

   (c) $F(x) = \int_0^1 \frac{x(t^2)}{t}dt;$

   (d) $F(x) = \frac{x(0)}{1 + x(1)};$

   (e) $F(x) = x'(0).$

2. Чи є функціонал $F$ лінійним і неперервним в $L_2(a, b)$ на відповідній множині? Якщо так, то знайдіть його норму. Чи досягається вона?

   (a) $F(x) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-5t} x(t)dt, \quad x \in L_2(0, +\infty);$

   (b) $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t x(t)dt, \quad x \in L_2\left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

   (c) $F(x) = \int_0^1 t^{1/2}(1 - t)^{3/2} x(t)dt, \quad x \in L_2(0, 1);$

   (d) $F(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^3} x(t)dt, \quad x \in L_2(0, +\infty);$

(e) $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} t \cdot x(t)dt, \quad x \in L_2\left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

3. Дослідити на сильну та слабку збіжність у просторі $L_2[0,1]$ наступні послідовності:

(a) $x_n(t) = e^{i\sqrt{n}t}$;

(b) $x_n(t) = (\sqrt{n} - n\sqrt{n})\chi_{[0,1/n]}$, де

$$\chi_{[0,1/n]} = \begin{cases} 1, & t \in [0,\ 1/n], \\ 0, & t \notin [0,\ 1/n]; \end{cases}$$

(c) $x_n(t) = n(t^n - t^{n+1})$;

(d) $x_n(t) = \sqrt{t}e^{-nt}$;

(e) $x_n(t) = \sqrt{t}\cos nt$.

4. У просторі $L_p(a,b)$ $(1 < p < \infty, -\infty < a < b < \infty)$ задано функціонал $F = F_y$, $F_y(x) := \int_a^b x(t)y(t)\,dt$. Знайдіть $\|F\|$ та з'ясуйте, чи досягається вона.

(a) $L_{3/2}(0,1), \quad y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 3}$;

(b) $L_2(0,1), \quad y = (x^2 + 6x + 10)^{-1/2}$;

(c) $L_2(0,3), \quad y = \sqrt{x^2 + 2\sin x + e^x}$;

(d) $L_2(0,1), \quad y = \cos x + 2\sin x + 1$;

(e) $L_2(1,3), \quad y = \sqrt{\ln x + 5\cos x + 7}$.

5. Дослідіть на передкомпактність у $C_{[0,1]}$ множину $M$.

(a) $M = \{\sin \alpha t : \alpha \in \mathbb{R}\}$;

(b) $M = \{t^n : n \in \mathbb{N}\}$;

(c) $M = \left\{\dfrac{\alpha^3}{(\alpha + t + 1)^2} : \alpha \in [0,2]\right\}$;

(d) $M = \{e^{-nt} : n \in \mathbb{N}\}$;

(e) $M = \left\{ \dfrac{e^{-nt}}{1+t^2} : n \in \mathbb{Z}_+ \right\}$.

6. Знайдіть норми наступних операторів:

(a) $(Ax)(t) = x(t) + \displaystyle\int_0^1 s^2 x(s)\, ds$ в $L_2[0,1]$;

(b) $Ae_n = e_{n+2}$, $e_n$ — базис в $l_2$;

(c) $(Ax)(t) = \dfrac{x(t)}{1+t^2}$ в $C_{[0,1]}$;

(d) $(Ax)(t) = t^2 x(\sqrt{t})$ в $C_{[0;1]}$;

(e) $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^1 \sin \pi(t-s) x(s)\, ds$ в $C_{[0;1]}$.

7. Доведіть обмеженість наступних операторів:

(a) $(Ax)(t) = \sin \pi t \cdot x(t)$ в $C_{[0;1]}$;

(b) $(Ax)(t) = e^{x(t)} \cdot t$ в $C_{[0;1]}$;

(c) $(Ax)(t) = x(t^2)$ в $C_{[0;1]}$;

(d) $(Ax)(t) = (t^4 - t^8) x(t^3)$ в $C_{[0;1]}$;

(e) $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^1 tsx(\sqrt[4]{s})\, ds$ в $L_2[0;1]$.

8. Дослідити на компактність наступні оператори:

(a) $(Ax)(t) = t^2 x(t)$ з $C[0;1]$ в $L_2[0;1]$;

(b) $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^t x(s)\, ds + x(t)$ з $C_{[0;1]}$ в $C_{[0;1]}$;

(c) $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1-s}\, x(s)\, ds$ з $C_{[0;1]}$ в $L_2[0;1]$;

(d) $(Ax)(t) = x(\sqrt[3]{t})$ з $C_{[0;1]}$ в $L_2[0;1]$;

(e) $(Ax)(t) = x'(t)$ з $C^1_{[0;1]}$ в $L_2[0;1]$.

## 1.7 Додаткові задачі

1. Навести приклад функції $f \in C(\mathbb{R})$, для якої при всіх $x, y \in \mathbb{R}$ знайдеться число $\alpha \in (0,1)$ таке, що $|f(x) - f(y)| < \alpha|x - y|$, і за цих умов $f$ не має нерухомої точки.

2. Довести, що будь-яке монотонно зростаюче відображення відрізка у себе (навіть розривне) має нерухому точку.

3. Нехай $(X, \rho)-$ повний метричний простір, $A : X \mapsto X-$неперервне відображення, причому існує натуральне $k$ таке, що $A^k$ є стисканням. Доведіть, що тоді відображення $A$ має єдину нерухому точку.

4. Довести, що перетин довільної сім'ї компактних множин є компактною множиною.

5. Довести, що об'єднання скінченного числа компактних множин є компактною множиною.

6. Довести, що неперервне відображення переводить компактну множину в компактну множину.

7. Довести, що одинична куля $B_1(0)$ в $l_2$ є обмеженою замкненою множиною, але не є компактною множиною.

8. Довести, що паралелепіпед $\{x = \{x_1, x_2, \dots\} \in l_2 : |x_i| \leqslant 1/i\}$ (гільбертова цеглина) є компактною множиною в $l_2$.

9. Довести, що еліпсоїд $\{x = \{x_1, x_2, \dots\} \in l_2 : \sum\limits_{i=1}^{\infty} i^2|x_i|^2 \leqslant 1\}$ є компактною множиною в $l_2$.

10. Нехай $f \in l_\infty$. Показати, що лінійний функціонал $f \in l_\infty \longleftrightarrow F(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j f_j$, де $x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \in l_\infty$, обмежений в $l_\infty$, а його норма має вигляд $\|F\| = \sum\limits_{j=1}^{\infty} |f_j|$.

11. Навести приклад неперервного лінійного функціонала $F$ в $l_1$, норма якого не досягається.

12. Покажіть, що норма функціонала $F : C_{[-1,1]} \to \mathbb{R}$,
$$F(x) = \int_{-1}^{1} x(t) \operatorname{sign} t \, dt,$$
не досягається.

13. Нехай $f_0, f_1 \in L_2[a, b]$. Показати, що лінійний функціонал
$$F : x \mapsto \int_a^b x(t) f_0(t) \, dt + \int_a^b x'(t) f_1(t) \, dt$$
обмежений в $W_2^1[a, b]$, а його норма не перевищує $(\|f_0\|_{L_2}^2 + \|f_1\|_{L_2}^2)^{1/2}$.

14. Показати, що послідовність, яка сильно збігається в банаховому просторі, збігається і слабко, причому границі однакові.

15. Показати, що послідовність $x_n = t^n - t^{2n}$ є слабко збіжною в $C_{[0,1]}$, але не є сильно збіжною в $C_{[0,1]}$.

16. Показати, що якщо в гільбертовому просторі $x_n \rightharpoonup x$ і $\|x_n\| \to \|x\|$, то $x_n \to x$.

17. Довести, що у скінченновимірному просторі слабка збіжність еквівалентна сильній.

18. Наведіть достатні умови неперервності оператора Немицького з $L_p$ в $L_q$, $p \neq q$, $p, q \in (1, \infty)$.

19. Доведіть наступні властивості міри некомпактності за Хаусдорфом:

    (a) якщо $D_1 \subseteq D_2$, то $\chi(D_1) \leqslant \chi(D_2)$;

    (b) $\chi(D_1 \cup D_2) = \max\{\chi(D_1), \chi(D_2)\}$;

    (c) $\chi(D_1 + D_2) \leqslant \chi(D_1) + \chi(D_2)$;

    (d) $\chi(\lambda D) = |\lambda|\chi(D)$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

20. Чи може оператор $A : C_{[0;1]} \to C_{[0;1]}$,

$$Ax(s) = \int_0^1 K(s,t)x(t)\,dt,$$

    де $K(s,t)$ неперервна при $0 \leqslant s,t \leqslant 1$, мати обмежений обернений?

21. Нехай $X$ — банахів простір, $A : X \to X$ — лінійний оператор та існує таке $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$, що для будь-якого $x \in X$ виконується нерівність $\|Ax\| \geqslant c\|x\|$. Чи може оператор $A$ бути компактним?

22. Нехай функція $h(x,u,v)$ неперервна по $x \in \overline{\Omega}$, $u \in R$ , $v \in R^n$ та задовольняє умову $|h(x,u,v)| \leqslant C(1 + |u|^{\frac{n(p-1)}{n-p}} + |v|^{p-1})$. Чи буде оператор $A : \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \to L_{p'}(\Omega)$, $p' = \frac{p}{p-1}$, що визначається рівністю $Au = h(x,u,Du)$, неперервним?

23. Нехай функція $h(x,u)$ неперервна по $x \in \overline{\Omega}$, $u \in R$ та задовольняє умову $|h(x,u)| \leqslant C(1 + |u|^{p-1})$. Довести, що оператор Немицького $N_h(u) = h(x,u)$, що діє з $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ в $L_{p'}(\Omega)$, $p' = \frac{p}{p-1}$ є компактним.

24. Нехай функція $h(x,u,v)$ неперервна по $x \in \overline{\Omega}$, $u \in R$, $v \in R^n$ та задовольняє умову $|h(x,u,v)| \leqslant C(1 +$

$|u|^{p-1}+|v|^{p-1})$. Довести, що з умови $\|u_j(x)\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} \leqslant C$, $\forall j \in N$ випливає, що можна вибрати підпослідовність $\{u_{j_k}(x)\}$ для якої $h(x, u_{j_k}(x), Du_{j_k}(x)) \rightharpoonup \widetilde{h}(x)$ до деякого $\widetilde{h}(x) \in L_{p'}(\Omega)$.

## 1.8 Тести для самоконтролю

1. Якщо $x_n$ слабко збігається до $x$ у нормованому просторі $C_{[0;1]}$, то

| | |
|---|---|
| A | $x_n(1) \to x(1)$ |
| B | $\max\limits_{t\in[0;1]} \lvert x_n(t)-x(t)\rvert \to 0$ |
| C | $\max\limits_{t\in[0;1]} \lvert x_n(t)\rvert \to \max\limits_{t\in[0;1]} \lvert x(t)\rvert$ |
| D | жодне з тверджень A-C не є вірним |

2. Якщо $x_n$ слабко збігається до $x$ у гільбертовому просторі $L_2[0;1]$, то

| | |
|---|---|
| A | $\int_0^1 x_n(t)\,dt \to \int_0^1 x(t)\,dt$ |
| B | $\int_0^1 \lvert x_n(t)-x(t)\rvert^2\,dt \to 0$ |
| C | $\int_0^1 \lvert x_n(t)\rvert^2\,dt \to \int_0^1 \lvert x(t)\rvert^2\,dt$ |
| D | жодне з тверджень A-C не є вірним |

3. Яка з функцій належить $L_2[0;1]$?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\frac{1}{t^2}$ | B | $\frac{1}{\sqrt{t}}$ | C | $\frac{1}{t}$ | D | жодна з них |

4. Нехай $A-$ лінійний обмежений оператор у банаховому просторі. Умова $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

| | |
|---|---|
| A | є необхідною, але не достатньою умовою існування оператора $A^{-1}$ |
| B | є необхідною і достатньою умовою існування оператора $A^{-1}$ |
| C | є достатньою, але не необхідною умовою існування оператора $A^{-1}$ |
| D | інша відповідь |

5. Який з функціоналів в $C_{[0;1]}$ є лінійним?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $x \mapsto \int_0^1 \left\|x\left(\frac{t}{2}\right)\right\| dt$ | B | $x \mapsto \int_0^1 \|x(t)\| \, dt$ |
| C | $x \mapsto \int_0^1 \|x(t)\|^2 \, dt$ | D | жоден з них |

6. Які з функціоналів, визначених на $C^1_{[0;1]}$, мають неперервне продовження на $C_{[0;1]}$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $x \mapsto \int_0^1 x'(t) \, dt$ | B | $x \mapsto x'(1) + \int_0^1 x'(t) \, dt$ |
| C | $x \mapsto x'(0)$ | D | жоден з них |

7. Який з просторів є рефлексивним?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $L_1[0;1]$ | B | $C[0;1]$ | C | $W_2^1[0;1]$ | D | $l_2$ |

8. Який з операторів, визначених на $C^2_{[0;1]}$, має неперервне продовження на $C_{[0;1]}$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $(Ax)(t) = \int_0^t x'(s) \, ds$ | B | $(Ax)(t) = x'(t)$ |
| C | $(Ax)(t) = x''(t) + x'(t)$ | D | жоден з них |

9. Який з операторів має неперервний обернений оператор в $C_{[0;1]}$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $(Ax)(t) = (1+t)x(t)$ | B | $(Ax)(t) = (1-t)x(t)$ |
| C | $(Ax)(t) = tx(t)$ | D | $(Ax)(t) = (1-t^2)x(t)$ |

10. Який з операторів є скінченновимірним в $C_{[0;1]}$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $(Ax)(t) = \int_0^1 e^{t-s}x(s)\,ds$ | B | $(Ax)(t) = e^t \cdot x(t)$ |
| C | $(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds$ | D | $(Ax)(t) = tx(t)$ |

11. Який з операторів є компактним в $C_{[0;1]}$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds$ | B | $(Ax)(t) = e^t \cdot x(t)$ |
| C | $(Ax)(t) = tx(t)$ | D | жоден з них |

12. Який з операторів є самоспряженим в $L_2[0;1]$?

| | |
|---|---|
| A | $(Ax)(t) = tx(t)$ |
| B | $(Ax)(t) = e^{it} \cdot x(t)$ |
| C | $(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds$ |
| D | $(Ax)(t) = \int_0^t \sin(t-s)x(s)\,ds$ |

13. Який з операторів є спряженим до оператора $(Ax)(t) = \int_0^t \sin(t-s)x(s)\,ds$ в $L_2[0;1]$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $\int_t^1 \sin(s-t)x(s)\,ds$ | B | $\int_0^t \sin(t-s)x(s)\,ds$ |
| C | $\int_0^t \sin(s-t)x(s)\,ds$ | D | $\int_t^1 \sin(t-s)x(s)\,ds$ |

14. Чому дорівнює норма функціонала $x \mapsto \int_0^1 t \cdot x(t)\, dt$ в $L_2[0;1]$?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ | B | $\dfrac{1}{2}$ | C | 1 | D | $\sqrt{2}$ |

15. З якого у який простір діє спряжений до оператора $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$, де $\lambda_n = \dfrac{1}{n}$, $A : l_2 \to l_2$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $A^* : l_2 \to l_2$ | B | $A^* : l_2 \to l_1$ |
| C | $A^* : l_2 \to c_0$ | D | інша відповідь |

16. Який з операторів є спряженим до оператора $(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$, $A : L_2[0;1] \to L_2[0;1]$, $x(t) \in L_2[0;1]$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $A^* y(t) = \int_t^1 y(\tau)\, d\tau$ | B | $A^* y(t) = \int_1^t y(\tau)\, d\tau$ |
| C | $A^* y(t) = t y(t)$ | D | інша відповідь |

17. Який з операторів $A$ не є компактним з $C_{[0;1]}$ в $C_{[0;1]}$?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $(Ax)(t) = t x(t)$ | B | $(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$ |
| C | $(Ax)(t) = x(0) + t x(1)$ | D | $(Ax)(t) = \int_0^1 t x(\tau)\, d\tau$ |

18. Яка з умов для оператора $(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$, $t \in [0;1]$, $x(t) \in C_{[0;1]}$ не виконується?

| | |
|---|---|
| A | $A$ має обмежений обернений |
| B | оператор $A$ обмежений |
| C | $A$ має необмежений обернений |
| D | $A$ компактний |

## 1.9 Приклади розв'язування задач основного рівня

1. Чи є функціонал $F$ лінійним та обмеженим в $C_{[0,1]}$?

$$F(x) = \int_0^1 \frac{x(t)}{t^2} dt.$$

*Розв'язання.* В даному випадку функціонал $F$ буде лінійним, але не буде обмеженим. Для цього покажемо, що в означенні 1.2 порушується умова (1.1). Нехай $x_n(t) = t^{1+\frac{1}{n}}$, тоді

$$\|x_n\| = \max_{t\in[0,1]} |t^{1+\frac{1}{n}}| = 1,$$

$$|F(x_n)| = \left| \int_0^1 \frac{t^{1+\frac{1}{n}}}{t^2} dt \right| = \left| \int_0^1 t^{-1+\frac{1}{n}} dt \right| = n = n \cdot \|x_n\|.$$

Таким чином, $\dfrac{|F(x_n)|}{\|x_n\|} = n \to \infty$, що суперечить (1.1). □

2. Чи є функціонал

$$F(x) = \int_0^1 t^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{2}{3}} x(t) dt, \; x \in L_2(0,1),$$

лінійним і неперервним в $L_2(0,1)$? Якщо так, то знайдіть його норму. Чи досягається вона?

*Розв'язання.* Згідно з теоремою 1.6: $F(x) = (x, f)$, де

$f(t) = t^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{2}{3}}$. Тому

$$\|F\|^2 = \|f\|^2 = \int\limits_0^1 \left| t^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{2}{3}} \right|^2 dt =$$

$$\int\limits_0^1 t^5(1-t)^{\frac{4}{3}}\, dt =$$

$$\int\limits_0^1 (1-t)^5 t^{\frac{4}{3}}\, dt = \int\limits_0^1 (1 - 5t + 10t^2 - 10t^3 + 5t^4 - t^5) t^{\frac{4}{3}}\, dt =$$

$$\frac{3}{7} - \frac{15}{10} + \frac{30}{13} - \frac{30}{16} + \frac{15}{19} - \frac{3}{22} \approx 0,014.$$

Отже, $\|F\| \approx \sqrt{0,014} \approx 0,12$. $\square$

3. Дослідити на сильну та слабку збіжність у просторі $L_2[0,1]$ наступні послідовності:

(a) $x_n(t) = ne^{2\pi int}$; (b) $x_n(t) = e^{2\pi int}$; (c) $x_n(t) = \dfrac{e^{2\pi int}}{n}$.

*Розв'язання.* Знайдемо $\|x_n\|$

$$\|x_n\|^2 = \int\limits_0^1 \left| ne^{2\pi int} \right|^2 dt = \int\limits_0^1 n^2 dt = n^2 \longrightarrow \infty.$$

Оскільки послідовність $x_n$ не є рівномірно обмеженою, то $x_n$ не збігається ані сильно, ані слабо.

Покажемо, що $x_n \rightharpoonup 0$. Для цього використаємо наслідок теореми 1.9. Оскільки $\|x_n\|^2 = \int\limits_0^1 \left| e^{2\pi int} \right|^2 dt = 1$, то умову 1) наслідку теореми 1.9 виконано. Перевіримо умову 2).

Оскільки

$$\Big|\int\limits_0^t e^{2\pi ins}ds\Big| = \Big|\frac{e^{2\pi in}}{2\pi ins}\Big|_0^t\Big| = \Big|\frac{e^{2\pi int}-1}{2\pi in}\Big| \leqslant \frac{1}{\pi n} \to 0,$$

то

$$\int\limits_0^t e^{2\pi ins}ds \longrightarrow 0 = \int\limits_0^t 0ds, \qquad \text{для всіх } t \in [0,1],$$

і, отже, умову 2) також виконано.

Покажемо, що $\{x_n\}$ не збігається до нуля сильно. Нехай це не так, припустимо, що $x_n \to x$. Тоді $x \equiv 0$ і, отже, $\|x_n\| \longrightarrow 0$. Але $\|x_n\| = 1$, тому ми прийдемо до протиріччя.

Аналогічно задачам (a) та (b) маємо $\|x_n\| = \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$. Тому $x_n \to 0$ і $x_n \rightharpoonup 0$. □

4. У просторі $L_{4/3}(0,1)$ задано функціонал $F = F_y$, $F_y(x) := \displaystyle\int_0^1 x(t)y(t)\,dt$, $y(t) = (5t+6)^{-1/2}$. Знайдіть $\|F\|$ та з'ясуйте, чи досягається вона.

*Розв'язання.* За теоремою 1.7 $\|F\| = \|y\|_{L_q}$. В нашому випадку $q = (1-3/4)^{-1} = 4$, тому

$$\|F\| = \|y\|_{L_4} = \left(\int\limits_0^1 \left|(5t+6)^{-1/2}\right|^4 dt\right)^{1/4} =$$

$$= \left(-\frac{1}{5}(5t+6)^{-1}\Big|_0^1\right)^{1/4} = \left(\frac{1}{66}\right)^{1/4}.$$

Нехай $h(t) = f^{\frac{q}{p}} = (5t+6)^{-3/2}$. Тоді $h \in L_{4/3}[0,1]$ та

$$\frac{|F(h)|}{\|h\|_{L_p}} = \frac{\left|\int\limits_0^1 f(t)\cdot f(t)^{q/p}\,dt\right|}{\left(\int\limits_0^1 \left|f^{q/p}\right|^p\right)^{1/p}} = \frac{\int\limits_0^1 f(t)^q dt}{\left(\int\limits_0^1 f(t)^q\,dt\right)^{1/p}} =$$

$$\left(\int\limits_0^1 f(t)^q\,dt\right)^{1/q} = \|f\|_{L_q}.$$

Таким чином, $\|F\|$ досягається на векторі $h(t) = (5t+6)^{-3/2}$. $\square$

5. Дослідити на передкомпактність в $C_{[0,1]}$ множину $M = \{e^{n(t-1)} : n \in \mathbb{N}\}$.

*Розв'язання.* Передкомпактність множини $M$ будемо досліджувати за допомогою теореми Асколі-Арцела, тобто будемо перевіряти рівномірну обмеженість та одностайну неперервність. Оскільки $0 < e^{t-1} \leqslant 1$ при $t \in [0,1]$, то $0 < e^{n(t-1)} \leqslant 1$ при $n \in \mathbb{N}$ і $t \in [0,1]$. Тобто, сім'я $M$ є рівномірно обмеженою. Нехай $t_1^{(n)} = 1 - 1/n$, $t_2^{(n)} = 1$ та $\varepsilon = (e-1)/3$. Тоді для будь-якого $\delta > 0$ знайдеться $n \in \mathbb{N}$ таке, що $|t_1^{(n)} - t_2^{(n)}| = 1/n < \delta$, і для функції $x_n(t) = e^{n(t-1)}$ виконано нерівність $|x_n(t_1^{(n)}) - x_n(t_2^{(n)})| = (e-1)/e > \varepsilon$. Отже, сім'я $M$ не є одностайно неперервною. Отже, за теоремою Асколі-Арцела, $M$ не є передкомпактною множиною. $\square$

6. Знайти норму оператора $(Ax)(t) = t\sin tx(t)$ в $C_{[0;1]}$.

*Розв'язання.* Маємо: $|(Ax)(t)| = |t\sin tx(t)| \leqslant \sin 1 \cdot \|x\|_{C_{[0;1]}}$, якщо $t \in [0;1]$. Тому $\|A\| \leqslant \sin 1$. Візьмемо $x_0(t) \equiv 1$, $\|x_0\|_{C_{[0;1]}} = 1$. Для неї $(Ax_0)(t) = t\sin t$ і $\|Ax_0\|_{C_{[0;1]}} =$

$\max\limits_{t\in[0;1]} |t\sin t| = \sin 1$, оскільки $(Ax_0)'(t) = \sin t + t\cos t > 0$ при $t \in (0;1)$. Отже, $\|A\| = \sin 1$. $\square$

7. Доведіть обмеженість оператора
$(Ax)(t) = \int_0^1 (t+1)sx(\sqrt{s})\,ds$ в $L_1[0;1]$.

*Розв'язання.* Маємо
$\|(Ax)(t)\|_{L_1[0;1]} = \displaystyle\int_0^1 dt \left|\int_0^1 (t+1)sx(\sqrt{s})\,ds\right| =$
$\displaystyle\int_0^1 (t+1)\,dt \cdot \left|\int_0^1 sx(\sqrt{s})\,ds\right| = \{s = u^2\} = \frac{3}{2}\left|\int_0^1 2u^3x(u)\,du\right| \leqslant$
$3\displaystyle\int_0^1 |x(u)|\,du = 3\|x\|_{L_1[0;1]}$. Звідси $\|A\| \leqslant 3$; отже, оператор $A-$ обмежений. $\square$

8. Дослідити на компактність оператор
$(Ax)(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t x(s)\,ds$ з $C_{[0;1]}$ в $C_{[0;1]}$.

*Розв'язання.* Розглянемо сім'ю функцій $M = \{x_n(t),\ n \in \mathbb{N}\}$, де $x_n(t) = \cos nt$. Сім'я $M$ є обмеженою в $C_{[0;1]}$. Знайдемо її образ $AM = \{y_n(t), n \in \mathbb{N}\}$, де $y_n(t) := (Ax_n)(t)$. Маємо $y_n(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \cos ns\,ds = \dfrac{1}{nt}\sin ns\Big|_0^t = \dfrac{\sin nt}{nt}$, $n \in \mathbb{N}$. Покажемо, що сім'я $AM$ не є одностайно неперервною. Можна (за неперервністю) вважати $y_n(0) = \lim_{t\to 0} y_n(t) = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Візьмемо $t_1^{(n)} = 0$, $t_2^{(n)} = \dfrac{1}{n}$ та $\varepsilon \in (0; 1 - \sin 1)$. Тоді для будь-якого $\delta > 0$ знайдеться $n \in \mathbb{N}$ таке, що $|t_1^{(n)} - t_2^{n)}| = \dfrac{1}{n} < \delta$, і для функції $y_n(t) = \dfrac{1}{nt}\sin nt$ виконано нерівність $|y_n(t_1^{(n)}) - y_n(t_2^{(n)})| = |y_n(0) - \sin 1| = 1 - \sin 1 > \varepsilon$. Отже, сім'я $AM$ не є одностайно неперервною. Тому, за критерієм Асколі-Арцела, множина $AM$ не є передкомпактною в $C_{[0;1]}$ і, отже, оператор $A$ не є компактним з $C_{[0;1]}$ в $C_{[0;1]}$. $\square$

# 2 ТЕОРЕМИ ПРО НЕРУХОМІ ТОЧКИ

Теореми про нерухомі точки займають особливе місце в нелінійному аналізі. Перші результати в цьому напрямку отримано Брауером на початку XX сторіччя для неперервних скінченновимірних відображень. Перенести цю теорію на довільні неперервні нескінченновимірні відображення принципово неможливо. Тому велику цінність становить кожен клас відображень для яких це можна зробити. В цьому розділі посібника розглянемо декілька класів таких відображень та наведемо приклади застосування побудованої теорії до дослідження існування розв'язків крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь. Детальніше ознайомитись з цими питаннями можна в [8],[22],[18].

**2.1 Скінченновимірні відображення.** Розглянемо спочатку відображення, що діють з деякої множини у просторі $\mathbb{R}^n$ в простір $\mathbb{R}^m$.

**Теорема 2.1.** ***(Брауера про нерухому точку).*** *Нехай $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant 1\}$ — одинична куля в $\mathbb{R}^n$ і $F : B \to B$ — неперервне відображення. Тоді $F$ має нерухому точку $x_0 \in B$, тобто $F(x_0) = x_0$.*

*Доведення* теореми буде складатися з двох етапів: по-перше, доведемо твердження теореми за умови гладкості відображення $F$, а, по-друге, встановимо результат для неперервних $F$.

Будемо вважати відображення $F$ нескінченно диференційовним: $F \in C^\infty(B)$. Тоді має місце наступний результат.

**Лема 2.1.** *Нехай $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(\Omega)$. Тоді* *виконується тотожність*

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{\partial}{\partial x_i}D_i(x)\equiv 0, \tag{2.1}$$

*де* $D_i(x) =$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_0}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i-1}}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i+1}}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_0}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_0}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

$x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $x = (x_0, x')$,
$x' = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

*Доведення леми 2.1.* Матрицю (2.2) умовно позначимо

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_0},\ \frac{\partial f}{\partial x_1},\ \dots,\ \frac{\partial f}{\partial x_{i-1}},\ \frac{\partial f}{\partial x_{i+1}},\ \dots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

За теоремою про диференціювання визначника матимемо

$$\frac{\partial}{\partial x_i}D_i(x) =$$

$$\sum_{k=0,\ k\neq i}^{n}\det\left(\frac{\partial f}{\partial x_0},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_{i-1}},\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}},\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{i-1}\det\left(\frac{\partial f}{\partial x_0},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_{i-1}},\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}},\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) +$$

$$\sum_{k=i+1}^{n}\det\left(\frac{\partial f}{\partial x_0},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_{i-1}},\frac{\partial f}{\partial x_{i+1}},\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{i-1}(-1)^k D_{ik}(x) + \sum_{k=i+1}^{n}(-1)^{k-1}D_{ik}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k D_{ik}(x)\sigma_{ik}, \tag{2.3}$$

де $\sigma_{ik}$ та $D_{ik}$ позначено відповідно

$$\sigma_{ik} = \begin{cases} 1, \ k < i, \\ 0, \ k = i, \\ -1, \ k > i, \end{cases}$$

$$D_{ik} = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{i-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_{i+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Оскільки $D_{ik} = D_{ki}$, а $\sigma_{ik} = -\sigma_{ki}$, то

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sum_{k=0}^{n}(-1)^k D_{ik}(x)\sigma_{ik} =$$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{i+k} D_{ik}(x)\sigma_{ik}.$$

В останній рівності зробимо перевизначення індексів $k = i, \ \ i = k$, тоді отримаємо

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+k} D_{ik}(x)\sigma_{ik} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+k} D_{ki}(x)\sigma_{ki} = -\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+k} D_{ik}(x)\sigma_{ik}.$$

Звідси

$$2\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+k} D_{ik}(x)\sigma_{ik} = 0.$$

Але ліва частина дорівнює $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i(x)$. Лему доведено.

$\square$

Перейдемо до доведення теореми 2.1.

*Доведення* будемо проводити від супротивного — нехай $F$ не має нерухомих точок у $B$, тобто для будь-якої $x \in B$ маємо $x \neq F(x)$. Для довільного $x \in B$ розглянемо допоміжне рівняння з параметром $a \in \mathbb{R}^1$

$$|x + a(x - F(x))|^2 = 1, \tag{2.4}$$

або

$$(x + a(x - F(x)), x + a(x - F(x))) = 1,$$
$$|x|^2 - 1 + 2a(x, x - F(x)) + a^2|x - F(x)|^2 = 0.$$

Останнє рівняння для довільної фіксованої точки $x \in B$ можна розглядати як квадратне відносно невідомої $a \in \mathbb{R}^1$. Підрахуємо дискримінант цього рівняння

$$D = (x, x - F(x))^2 + \left(1 - |x|^2\right)\left(|x - F(x)|^2\right).$$

Можливі два випадки

1) $x-$ строго внутрішня точка кулі, тобто $|x| < 1$;

2) $|x| = 1$.

Якщо $|x| < 1$, то $D > 0$. Якщо $|x| = 1$, то
$D = (x, x - F(x))^2$ і

$$\sqrt{D} = (x, x - F(x)) = |x|^2 - (x, F(x)) = 1 - (x, F(x)) =$$
$$1 - |x||F(x)| \cos\angle(x, F(x)) = 1 - |F(x)| \cos\angle(x, F(x)).$$

Але відображення $F$ діє з $B$ у $B$, тобто

$$|F(x)| \leqslant 1 \qquad \text{і} \qquad D = 0 \Leftrightarrow \cos\angle(x, F(x)) = 1,$$

або $x = F(x)$, що неможливо за припущенням на початку нашого доведення.

Таким чином, у будь-якому випадку $D > 0$, ми маємо два кореня рівняння

$$a_{1,2} = -\frac{(x, x - F(x)) \pm \sqrt{D}}{|x - F(x)|^2}.$$

Розглянемо лише додатній корінь

$$a = -\frac{(x, x - F(x)) + \sqrt{D}}{|x - F(x)|^2},$$

бо з попередніх міркувань очевидно, що $\sqrt{D} \geqslant -(x, x-F(x))$, причому рівність має місце лише при $|x| = 1$, тобто $a = 0$ при $|x| = 1$, $a > 0$ при $|x| < 1$.

Для знайденого параметра $a$ розглянемо допоміжну функцію

$$\begin{gathered} f(x,t) : B \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad x \in B \subset \mathbb{R}^n, \\ f(x,t) = x + ta(x - F(x)). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Оскільки $a = 0$ при $|x| = 1$, то $f(x,t) = x$, $|x| = 1$ і

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \qquad |x| = 1. \tag{2.6}$$

Зауважимо також, що

$$|f(1,x)| = |x + a(x - F(x))| = 1, \tag{2.7}$$

так як $a$ — розв'язок квадратного рівняння (2.4).

Для побудованого відображення $f(x,t)$ застосуємо лему 2.1, де $x_0 = t$. Нехай

$$D_0(t,x) = \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Визначимо

$$I_0(t) := \frac{1}{|B|}\int_B D_0(t,x)\,dx. \tag{2.8}$$

Покажемо, що функція $I_0(t)$ має наступні властивості:

$$1) \quad I_0(0) = 1, \qquad 2) \quad I_0(1) = 0, \qquad 3) \quad I_0'(t) \equiv 0. \tag{2.9}$$

Тоді цілком очевидно, що третя властивість суперечить двом попереднім, бо свідчить, що $I_0(t) \equiv \mathrm{const}$, $\forall t$.

Таким чином, припущення щодо неіснування нерухомих точок відображення $F$ в $B$ не є правильним. Тобто, існує деяке $\tilde{x} \in B: \quad \tilde{x} = F(\tilde{x})$. Отже, для завершення доведення першої частини теореми перевіримо властивості (2.9) для функції (2.8).

$$1)\, I_0(0) = \frac{1}{|B|}\int_B D_0(0,x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{|B|}\int_B \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(0,x)\right)\,dx.$$

Але $f(0,x) = x$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = 1$ при $i = j$ та $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$ при $i \neq j$. Тобто матриця

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(0,x)\right) = E, \qquad \det E = 1.$$

Отже $I_0(0) = \dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B dx = 1$.

2. З (2.7) маємо

$$1 = |f(1,x)|^2 = \sum_{j=1}^{n} f_j^2(1,x).$$

Диференціюючи останню рівність за $x_k$, $k = 1, \dots, n$, отримуємо

$$0 = \sum_{j=1}^{n} 2f_j(1,x)\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(1,x), \qquad k = 1, \dots, n.$$

Ці рівняння можна розглядати як систему відносно $f_j(1,x)$, $j = 1, \dots, n$, із визначником $\det\left(\dfrac{\partial f_j(1,x)}{\partial x_k}\right)_{j,k=1}^{n}$. Система повинна мати нетривіальний розв'язок відносно $f_j(1,x)$, $j =$

$1, \ldots, n$, бо $|f(1,x)| = 1$. А це означає, що визначник цієї системи дорівнює нулю: $D_0(1,x) = 0$ в позначеннях леми 2.1.

3. Знайдемо похідну за $t$ від функції (2.8)

$$I_0'(t) = \frac{1}{|B|} \int_B \frac{\partial}{\partial t} D_0(t,x)\, dx. \tag{2.10}$$

Застосуємо твердження леми 2.1 у наступній формі. Перепишемо рівність (2.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} D_0(t,x) - \frac{\partial}{\partial x_1} D_1(t,x) + \frac{\partial}{\partial x_2} D_2(t,x) - \cdots +$$
$$(-1)^n \frac{\partial}{\partial x_n} D_n(t,x) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t} D_0(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_1} D_1(t,x) - \frac{\partial}{\partial x_2} D_2(t,x) + \cdots +$$
$$(-1)^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_n} D_n(t,x) = -\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i(t,x).$$

Тоді з (2.10) випливає

$$I_0'(t) = -\frac{1}{|B|} \int_B \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i(t,x)\, dx =$$
$$-\frac{1}{|B|} \int_{|x|=1} D_i(t,x) \cos\angle(n, x_i)\, ds = 0,$$

оскільки $D_i(t,x) = 0$ при $|x| = 1$, бо $\left.\dfrac{\partial f}{\partial t}\right|_{|x|=1} = 0$, а цей стовпчик завжди присутній у $D_i(t,x)$, $i = 1, \ldots, n$. Властивості (2.9) доведено.

Переходимо до другої частини теореми. Нехай відображення $F$ неперервне. Наблизимо його послідовністю поліномів $F_n(x) \in C^\infty(B)$. Це можна зробити за допомогою теореми Вейєрштрасса. Для кожного з членів послідовності $F_n(x) \in C^{\infty}(B)$ теорему доведено на попередньому етапі; отже, для кожного $F_n(x)$ існує нерухома точка: $x_n \in B$, $x_n = F_n(x_n)$, $\forall n$. Виникає послідовність $x_n$, що є обмеженою $(x_n \in B,\ \forall n)$ а, отже, з неї можна виділити підпослідовність $x_{n_k}$, що збігається: $x_{n_k} \to x_0$. Розглянемо $F_{n_k}(x_{n_k}) = x_{n_k}$, або $F(x_{n_k}) + F_{n_k}(x_{n_k}) - F(x_{n_k}) = x_{n_k}$ і спрямуємо $n_k \to \infty$: $F(x_0) = x_0$, оскільки $|F_{n_k}(x_{n_k}) - F(x_{n_k})| \to 0$, $n_k \to \infty$, за умовою рівномірної апроксимації в $B$ відображення $F$ послідовністю відображень $F_n$. Таким чином, знайдено нерухому точку $x_0 \in B$, $x_0 = \lim\limits_{n_k \to \infty} x_{n_k}$ неперервного скінченновимірного відображення $F : B \to B$. Теорему доведено.

*Зауваження* 2.1. Теорема Брауера справджується, якщо замість кулі $B \subset \mathbb{R}^n$ розглядати опуклу замкнену обмежену множину $\Omega \in \mathbb{R}^n$, що $0 \in \Omega \backslash \partial\Omega$.

Тоді має місце наступне твердження.

**Лема 2.2.** *Нехай $\Omega \in \mathbb{R}^n$ - опукла замкнена обмежена множина, $0 \in \Omega \backslash \partial\Omega$. Відображення $F : \Omega \to \Omega-$ неперервне. Тоді відображення $F$ має нерухому точку в $\Omega$.*

*Доведення.* Розглянемо відображення

$$G(x) = \begin{cases} F(x), & F(x) \in \Omega, \\ \dfrac{F(x)}{|F(x)|} \cdot h(x), & F(x) \notin \Omega, \end{cases} \tag{2.11}$$

де $h(x)$ — відстань від точки 0 до межі $\partial\Omega$ в напрямку $F(x)$. Оскільки $G(x)$ — неперервне відображення множини $\Omega$ в себе, то, за теоремою Брауера, існує нерухома точка $x_0 \in \Omega : G(x_0) = x_0$. Якщо $F(x_0) \in \Omega$, то $F(x_0) = G(x_0) = x_0$, тобто $x_0$ — нерухома точка відображення $F$. Якщо $F(x_0) \notin \Omega$, то $G(x_0) = \dfrac{F(x_0)}{|F(x_0)|} \cdot h(x_0) = x_0$. Звідки випливає, що $F(x_0) =$

$\dfrac{|F(x_0)|}{h(x_0)} \cdot x_0$, але при $F(x_0) \notin \Omega$, $\dfrac{|F(x_0)|}{h(x_0)} > 1$ та $x_0 \in \partial\Omega$ бо $|x_0| = h(x_0)$ в напрямку $F(x_0)$. Тому приходимо до протиріччя з умовою теореми. Тобто другий випадок неможливий. $\square$

**2.2 Нескінченновимірні відображення у банахових просторах.** У цьому підрозділі наводиться теорема існування нерухомої точки неперервного компактного оператора в деякій замкненій обмеженій опуклій множині банахового простору. Компактність оператора дозволяє використати результати попереднього підрозділу щодо існування нерухомої точки скінченновимірних відображень. Завдяки лемі 1.3 компактний оператор можна наблизити послідовністю скінченновимірних операторів.

**Лема 2.3.** *Множина* $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n D}$ *є компактною.*

*Доведення.* Необхідно побудувати множину, яка б була скінченною $\varepsilon$-сіткою для $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n D}$. Якщо така множина існуватиме (нам вдасться її побудувати), то це й доведе компактність множини $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n D}$. Послідовність операторів $A_n-$ це послідовність скінченновимірних операторів (з леми 1.3), а кожен скінченновимірний оператор є компактним. Отже, множини $\overline{A_n D}$ є компактними для будь-якого $n$, таким чином, для кожної з них існує скінченна $\varepsilon$-сітка. Позначимо її

$$\{z_1^n, z_2^n, \ldots, z_{m(\varepsilon)}^n\}. \tag{2.12}$$

Оператор $A-$ компактний (з леми 1.3); отже, множина $\overline{AD}-$ компакт, і для неї існує своя $\varepsilon$-сітка $\{z_1, z_2, \ldots, z_{l(\varepsilon)}\}$.

Скінченою $\varepsilon$-сіткою для множини $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n D}$ буде множина

$$\cup_{n=1}^{N}\{z_1^n, z_2^n, \ldots, z_{m(\varepsilon)}^n\} \cup \{z_1, z_2, \ldots, z_{l(\varepsilon)}\} \tag{2.13}$$

для досить великого $N$. Перевіримо цей факт. Представимо

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n D \equiv \left(\cup_{n=1}^{N} A_n D\right) \cup \left(\cup_{n=N+1}^{\infty} A_n D\right).$$

Тоді очевидно, що для довільного $\xi \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n D$ є альтернатива

$$1) \quad \xi \in \cup_{n=1}^{N} A_n D \qquad \text{або} \qquad 2) \quad \xi \in \cup_{n=N+1}^{\infty} A_n D. \tag{2.14}$$

Розглянемо перший варіант.

Для $\xi \in \cup_{n=1}^{N} A_n D$ $\exists \hat{n} = 1, \ldots, N : \xi \in A_{\hat{n}} D$. Але для кожного $A_n D$, у тому числі і для $\hat{n}$, існує $\varepsilon$-сітка (2.12), тобто

$$\|\xi - z_k^n\| \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall k = 1, 2, \ldots, m(\varepsilon).$$

Розглянемо другий випадок. Нехай $\xi \in \cup_{n=N+1}^{\infty} A_n D$. Тоді $\exists x_0 \in D : \xi = A_n x_0$ для деякого досить великого $n$. На елементі $x_0$ розглянемо $Ax_0$. Завдяки існуванню $\varepsilon$-сітки для множини $\overline{AD}$, матимемо

$$\|Ax_0 - z_i\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \forall i = 1, 2, \ldots, l(\varepsilon). \tag{2.15}$$

Розглянемо

$$\|\xi - z_i\| = \|A_n x_0 - z_i\| = \|A_n x_0 + Ax_0 - Ax_0 - z_i\| \leqslant \\ \|A_n x_0 - Ax_0\| + \|Ax_0 - z_i\| \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

так як перша норма прямує до нуля завдяки апроксимації оператора $A$ послідовністю $A_n$ (лема 1.3), а друга — внаслідок (2.15). Тобто

$$\|\xi - z_k\| \to 0, \quad n \to \infty, \quad \forall k = 1, 2, \ldots, l(\varepsilon). \tag{2.16}$$

Таким чином, з (2.14) і (2.16) випливає, що множина (2.13) є скінченною $\varepsilon$-сіткою для $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n D}$, а це доводить наше твердження. $\square$

**Теорема 2.2. *(Шаудер.)*** *Нехай $D-$ замкнена опукла обмежена множина в банаховому просторі $X$, оператор $A : D \to D-$ неперервний і компактний. Тоді в $D$ існує хоча б одна нерухома точка оператора $A : Ax_0 = x_0$, для деякого $x_0 \in D$.*

*Доведення.* Твердження теореми Шаудера випливає з результатів лем 1.3 і 2.3. Розглянемо скінченновимірну апроксимацію $A_n$ оператора $A$ (лема 1.3). Тоді виникають скінченновимірні підпростори $E_n \subset A_nD$. Базис в $E_n$ буде, наприклад, складатися з елементів $y_1^n, y_2^n, \ldots, y_{k(n)}^n$. Розглянемо $A_n$ на $D \cap E_n$, $A_n : E_n \cap D \to E_n \cap D$. Множина $D \cap E_n$ - замкнена, опукла та обмежена у скінченновимірному просторі, тому можна застосувати теорему 2.1 Брауера існування нерухомих точок скінченновимірних відображень. Таким чином,

$$\exists x_n \in D \cap E_n : \quad A_nx_n = x_n. \tag{2.17}$$

За лемою 2.3 множина $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_nD}-$ компакт, тобто послідовність $A_nx_n$ є фундаментальною, отже, фундаментальною є і послідовність $x_n$. Оскільки простір $X-$ банахів, то існує $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, причому $x_0 \in D$ завдяки замкненості $D$. Перевіримо, що $x_0-$ нерухома точка оператора $A$. Розглянемо

$$\|Ax_0 - x_0\| = \|Ax_0 - Ax_n + Ax_n - A_nx_n + A_nx_n - x_0\| \leqslant \\ \|Ax_0 - Ax_n\| + \|Ax_n - A_nx_n\| + \|A_nx_n - x_0\|.$$

Перша норма $\|Ax_0 - Ax_n\| \to 0$, $n \to \infty$ по неперервності оператора $A$. Друга норма $\|Ax_n - A_nx_n\| \to 0$, $n \to \infty$, оскільки $x_n \in D$, $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ (лема 1.3). Нарешті, $\|x_0 - A_nx_n\| = \|x_n - x_0\| \to 0$, $n \to \infty$, так як $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, а $x_n-$ нерухомі точки операторів $A_n$ з (2.17). Таким чином, $0 \leqslant \|Ax_0 - x_0\| \to 0 \Rightarrow Ax_0 = x_0$, $x_0 \in D-$ нерухома точка оператора $A$. Теорему 2.2 доведено. □

*Зауваження* 2.2. Умови теореми Шаудера вимагають, щоб оператор $A$ був компактним. Але під час доведення теореми використано лише компактність множини $\overline{AD}$, що є наслідком компактності оператора $A$. Цю умову можна забезпечити, відмовившись від компактності оператора, але вимагаючи компактність множини $D$. Оскільки оператор $A$ неперервний, то за умови компактності множини $D$, множина $\overline{AD}$ теж буде компактною. Отже, маємо теорему Шаудера в такому формулюванні.

**Теорема 2.3.** ***(інший варіант теореми Шаудера)****. Нехай $D-$ опукла компактна множина в банаховому просторі $X$, оператор $A : D \to D-$ неперервний. Тоді в $D$ існує хоча б одна нерухома точка оператора $A$ : $Ax_0 = x_0$, для деякого $x_0 \in D$.*

**2.3 Застосування теореми Шаудера.** У цьому підрозділі отримаємо декілька тверджень, що випливають із теореми 2.2. Вони будуть використані для дослідження існування розв'язків крайових та початкових задач для нелінійних диференціальних рівнянь.

**Теорема 2.4.** *Нехай $B_R = \{u \in X : \|u\| < R-$ неперервний компактний оператор. Нехай також рівняння з параметром $Au = \lambda u$, $\lambda > 1$ не має розв'язків на сфері $\|u\| = R$. Тоді оператор $A$ має в $\overline{B_R}$ нерухому точку.*

*Доведення.* Розглянемо оператор

$$Fu = \begin{cases} Au, & \|Au\| \leqslant R, \\ R\dfrac{Au}{\|Au\|}, & \|Au\| > R, \end{cases} \qquad \forall u \in \overline{B_R}. \tag{2.18}$$

Очевидно, $F : \overline{B_R} \to \overline{B_R}$. Крім того, $F$ наслідує властивості оператора $A$, отже, є неперервним і компактним. Застосуємо до оператора $F$ теорему Шаудера, $D = \overline{B_R}$. Таким чином, оператор $F$ має в $\overline{B_R}$ нерухому точку $u_0$. Використовуючи означення (2.18) оператора $F$, матимемо $Fu_0 = Au_0 = u_0$, якщо $\|Au_0\| \leqslant R$ і тоді $u_0$ — нерухома точка оператора $A$. Якщо $\|Au_0\| > R$, то $Fu_0 = R\dfrac{Au_0}{\|Au_0\|} = u_0$, при цьому $\|u_0\| = \|Fu_0\| = R$. Звідси виражається $Au_0 = \dfrac{\|Au_0\|}{R}u_0$. Якщо позначити $\lambda = \dfrac{\|Au_0\|}{R}$, то при $\|Au_0\| > R$ буде $\lambda > 1$ та рівняння $Au_0 = \lambda u_0$ не має розв'язку за умовою теореми. Тобто випадок $\|Au_0\| > R$ не є можливим. Це і доводить теорему. □

**Теорема 2.5.** *Нехай* $A : \overline{B_R} \to X-$ *неперервний компактний оператор, який сферу переводить у кулю:* $\forall u, \ \|u\| = R \ \Rightarrow \|Au\| \leqslant R$. *Тоді в* $\overline{B_R}$ *існує нерухома точка оператора* $A$.

*Доведення.* Використаємо результат попередньої теореми. Покажемо, що за умови $\|Au\| \leqslant R$ для довільного $u$, що $\|u\| = R$, виконуються умови теореми 2.4. Дійсно, нехай існує розв'язок $u_0 : \|u_0\| = R$ рівняння $Au = \lambda u$ для $\lambda > 1$. Матимемо $\|Au_0\| = \lambda\|u_0\| > \|u_0\| = R$. Тобто для $u_0 : \|u_0\| = R \Rightarrow \|Au_0\| > R$, що суперечить умовам теореми. □

**Теорема 2.6.** *Нехай* $X-$ *банахів простір,* $A : X \to X-$ *неперервний оператор і на кожній кулі* $\overline{B_R}$ *компактний. Нехай також для кожного розв'язку рівняння з параметром* $u - tAu = 0$, $t \in [0; 1]$, *виконується апріорна оцінка*

$$\|u\| \leqslant M.$$

*Тоді існує нерухома точка оператора* $A$.

*Доведення.* Знову використаємо результат теореми 2.4. Перевіримо, що умови цієї теореми виконуються. Нехай, навпаки, для деякого $\lambda_0 > 1$ існує розв'язок $u_0 : \ \|u_0\| = R$ рівняння

$$Au_0 = \lambda_0 u_0.$$

Звідки

$$u_0 - \frac{1}{\lambda_0} A u_0 = 0.$$

Позначимо $t = 1/\lambda_0$. Оскільки $\lambda_0 > 1$, то $t < 1$. За умовами теореми, для розв'язку цього рівняння має місце апріорна оцінка $\|u_0\| \leqslant M$. Виберемо кулю $\overline{B_R}$ з радіусом $R = M+1$. З одного боку, матимемо: $\|u_0\| = R = M + 1 > M$, а, з іншого, повинно бути $\|u_0\| \leqslant M$. Ця суперечність доводить справедливість умов теореми 2.4. Таким чином, існує нерухома точка оператора $A$. □

Наступне твердження не є теоремою про існування нерухомої точки оператора, а стосується існування розв'язків операторного рівняння типу $(I-A)u = h$, що нагадує теореми Фредгольма у випадку інтегрального оператора $A$.

**Теорема 2.7.** *Нехай $X-$ банахів простір, $A : X \to X-$ неперервний оператор і на кожній кулі $\overline{B_R}$ компактний. Нехай*

$$\limsup_{\|u\|\to\infty} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = q < 1. \tag{2.19}$$

*Тоді рівняння $u - Au = h$ має розв'язок в $X$ для будь-якої правої частини $h \in X$.*

*Доведення.* Розглянемо оператор $Fx = Ax + h$, $\forall x \in X$; $F : X \to X-$ неперервний і компактний на кожній кулі (наслідує властивості оператора $A$). Нехай також $\|u\| = R$. Розглянемо

$$\|Fu\| = \|Au+h\| \leqslant \|Au\|+\|h\| = R\left(\frac{\|Au\|}{\|u\|} + \frac{\|h\|}{R}\right). \tag{2.20}$$

За умови (2.19), $\exists\varepsilon > 0$:

$$\frac{\|Au\|}{\|u\|} \leqslant q + \varepsilon. \tag{2.21}$$

Для $\varepsilon = (1-q)/2$ і досить великого $R$

$$\frac{\|h\|}{R} < \varepsilon = \frac{1-q}{2}. \tag{2.22}$$

Підставимо (2.21) та (2.22) в (2.20)

$$\|Fu\| \leqslant R\left(q + \frac{1-q}{2} + \frac{1-q}{2}\right) = R.$$

Таким чином, із $\|u\| = R$ випливає, що $\|Fu\| \leqslant R$. Отже, умови теореми 2.5 виконуються і оператор $F$ має нерухому точку $u_0 \in X$. Але $Fu_0 = Au_0 + h = u_0$, тоді $u_0 - Au_0 = h$. Тобто $u_0$– розв'язок операторного рівняння для будь-якої правої частини $h \in X$. $\square$

**2.4 Застосування теорем про нерухомі точки.** Розглянемо, як теореми про нерухомі точки застосовуються під час дослідження існування розв'язків крайових та початкових задач для нелінійних диференціальних операторів.

Розглянемо задачу Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t),\ x(t_0) = x_0$$

та першу крайову задачу для квазілінійного рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} - a(t)x(t) = F(x,t), \qquad x(0) = x(1) = 0.$$

Покажемо, як існування розв'язків цих задач можна отримати з результатів попереднього розділу про нерухомі точки нелінійних операторів. Основна ідея — довести еквівалентність існування розв'язку задачі та існування розв'язку відповідного операторного рівняння.

Почнемо із задачі Коші. Нехай $f(x,t)$ визначена і неперервна в прямокутнику

$$\pi = \{(x,t) : t \in [t_0 - a, t_0 + a],\ x \in [x_0 - b, x_0 + b]\}.$$

Тоді задача Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \tag{2.23}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.24}$$

має розв'язок $\tilde{x}(t)$, $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, $h = \min\{a, b/M\}$, $M = \max_\pi |f(x,t)|$.

Цей результат з теорії диференціальних рівнянь має назву теореми Пеано. Доведемо його за допомогою теореми Шаудера про існування нерухомої точки компактного неперервного оператора (теорема 2.2). Нехай $\tilde{x}(t)$ — розв'язок задачі (2.23), (2.24). Інтегруючи (2.23) за $\tau \in [t_0, t]$, маємо

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\tilde{x}}{dt}\, d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tilde{x}, \tau)\, d\tau;$$

$$\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tilde{x}(\tau), \tau)\, d\tau;$$

$$\tilde{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tilde{x}(\tau), \tau)\, d\tau. \tag{2.25}$$

Отже, розв'язок задачі Коші є розв'язком інтегрального рівняння (2.25) і навпаки (це доводиться диференціюванням інтегрального рівняння (2.25) за $t$). Таким чином, задача Коші (2.23), (2.24) еквівалентна інтегральному рівнянню (2.25). Існування розв'язку (2.25) доведемо за допомогою теореми

Шаудера з оператором

$$Ax(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), \tau)\, d\tau. \qquad (2.26)$$

Тоді існування розв'язку (2.25) зводиться до пошуку нерухомої точки оператора (2.26).

Нехай $X = C_{[t_0-h,t_0+h]}$ — банахів простір, $h > 0$ — параметр, який оберемо потім. За замкнену обмежену опуклу множину $D$ з теореми 2.2 візьмемо

$$D = \{x(t) \in X : \|x - x_0\| \leqslant b\}\,. \qquad (2.27)$$

Перевіримо, що умови теореми 2.2 виконуються. Покажемо, що $A : D \to D$. Дійсно, для будь-якого $x(t) \in D$ маємо

$$\|Ax - x_0\| = \max_{t\in[t_0-h,t_0+h]} |Ax(t) - x_0| \leqslant$$
$$\max_{t\in[t_0-h,t_0+h]} \int_{t_0}^{t} |f(x(\tau), \tau)|\, d\tau \leqslant$$
$$M \max_{t\in[t_0-h,t_0+h]} |t - t_0| \leqslant Mh \leqslant b,$$

за умови $h < b/M$, $h < a$, а, отже, $h = \min\{b/M, a\}$.

Тоді, згідно з (2.27) маємо $AD \subset D$. Доведемо неперервність і компактність оператора (2.26).
Нехай $x \to x_0$ в $X = C_{[t_0-h,t_0+h]}$. Розглянемо

$$\|Ax - Ax_0\|_X \leqslant \max_t \left| \int_{t_0}^{t} |f(x(\tau), \tau) - f(x_0, \tau)|\, d\tau \right| \leqslant \varepsilon h \to 0,$$

$\varepsilon \to 0$. Тут використано неперервність функції $f(x, t)$ за $x$ в прямокутнику $\pi$. Тобто, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x, t) - f(x_0, t)\| \leqslant \varepsilon,\ \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

Компактність оператора $A$ в $C_{[t_0-h,t_0+h]}$ покажемо за допомогою теореми Асколі-Арцела, критерію компактності у просторі $C_{[t_0-h,t_0+h]}$. Рівномірна обмеженість множини $AD$ випливає з обмеженості множини $D$ і того, що $AD \subset D$. Встановимо одностайну неперервність оператора $A$. Нехай для деякого $\delta > 0$ маємо $\|x - x_0\| < \delta$. Той факт, що $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$, випливає з визначення оператора $A$ та рівномірної неперервності функції $f(x,t)$ на прямокутнику $\pi$

$$\|Ax - Ax_0\| \leqslant \max_{t\in[t_0-h,t_0+h]} \left| \int_{t_0}^{t} |f(x,\tau) - f(x_0,\tau)|\, d\tau \right| < \varepsilon,$$

$\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, як тільки $\|x - x_0\| < \delta$. Отже, усі умови теореми Шаудера виконуються, значить, оператор (2.26) у $D$ має нерухому точку, тобто початкова задача Коші (2.23), (2.24) має розв'язок

$$\tilde{x}(t) \in D, \quad \tilde{x}(t) \in C_{[t_0-h,t_0+h]},\ \|\tilde{x} - x_0\| \leqslant b,\ \ h = \min\{b/M, a\}.$$

Розглянемо далі першу крайову задачу для квазілінійного рівняння другого порядку

$$\frac{d^2x}{dt^2} - a(t)x(t) = f(x,t), \tag{2.28}$$

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{2.29}$$

З курсу звичайних диференціальних рівнянь відомо, що за умови лінійності задачі (2.28), (2.29), тобто $f(x,t) = f(t)$, розв'язок можна подати у явному вигляді за допомогою функції Гріна

$$x(t) = \int_0^1 G(\tau,t) f(\tau)\, d\tau. \tag{2.30}$$

Функція Гріна буде існувати за умов, що $a(t) \in C_{[0,1]}$ та відповідна однорідна задача має тільки тривіальний розв'язок. Зауважимо, що одним із критеріїв тривіальності розв'язку однорідної задачі є умова $a(x) \geqslant 0,\ x \in (0,1)$.

Якщо розглядати нелінійну задачу, то з (2.30) отримуємо не явний вигляд розв'язку, а операторне рівняння

$$x(t) = \int_0^1 G(\tau, t) f(x(\tau), \tau)\, d\tau. \tag{2.31}$$

Отже, якщо праву частину (2.31) позначити за оператор

$$Ax(t) = \int_0^1 G(\tau, t) f(x(\tau), \tau)\, d\tau,$$

отримаємо задачу на знаходження нерухомої точки оператора

$$x(t) = Ax(t). \tag{2.32}$$

**Теорема 2.8.** *Нехай* $a(t) \in C_{[0,1]}$, $a(t) \geqslant 0$, $\forall t \in [0,1]$, $f(x,t) \in C\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^1, t \in [0,1]\}$ *та задовольняє умову зростання за* $x$

$$|f(x,t)| \leqslant C\left(1 + |x|^{\alpha}\right),\ \alpha \in (0,1). \tag{2.33}$$

*Тоді задача* (2.28), (2.29) *має розв'язок у просторі* $C^2_{[0,1]}$.

*Доведення.* За допомогою теореми 2.4 покажемо існування нерухомої точки — розв'язку (2.32). За банахів простір візьмемо $X = C_{[0,1]}$. Перевіримо умову $A : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$. Нехай $x(t) \in C_{[0,1]}$, $Ax(t) = \int_0^1 G(\tau, t) f(x(\tau), \tau)\, d\tau$.

Перевіримо компактність та неперервність оператора $A$. Представимо $A$ у вигляді композиції $A = I \circ N$, де $N-$ оператор Немицького, що визначається заданою функцією

$$f : (Nx)(t) = (N_f x)(t) = f(x(t), t),$$

а $I$ — інтегральний оператор, ядром якого є функція Гріна крайової задачі (2.28), (2.29)

$$Iu(t) = \int_0^1 G(\tau, t) u(\tau)\, d\tau.$$

З курсу функціонального аналізу відомо, що оператор $I$ з неперервним ядром є неперервним і компактним (теорема 1.24). Оператор $N$ є неперервним (лема 1.7). Оскільки $A = I \circ N$, тобто $A$ є композицією неперервних, то $A$ неперервний. Крім того, $I$ — компактний, а, отже, $A$ — компактний оператор як композиція неперервного і компактного (лема 1.4).

Залишилося перевірити умову теореми 2.4: $\|Ax\| \leqslant R$ при $\|x\| = R$ для деякого $R > 0$. Розглянемо

$$\left| \int_0^1 G(\tau, t) f(x(\tau), \tau)\, d\tau \right| \leqslant C \max_t \int_0^1 |f(x(\tau), \tau)|\, d\tau \leqslant$$
$$C \int_0^1 (1 + |x|^\alpha)\, d\tau \leqslant C \int_0^1 \left(1 + \left(\max_t |x|\right)^\alpha\right)\, d\tau =$$
$$C \int_0^1 (1 + \|x\|^\alpha)\, d\tau = C(1 + R^\alpha). \tag{2.34}$$

Тут обмеженість функції Гріна на $[0, 1] \times [0, 1]$ деякою константою $C > 0$ випливає з неперервності цієї функції та теореми Вейєрштрасса про рівномірну обмеженість неперервної на компакті функції. Для виконання нерівності $\|Ax\| \leqslant R$ необхідно вибрати $R$ так

$$C(1 + R^\alpha) \leqslant R \qquad \text{або} \qquad C\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R^{1-\alpha}}\right) \leqslant 1.$$

Останню нерівність можна задовольнити для будь-якої $C > 0$ і досить великого $R > 0$, оскільки $\alpha \in (0, 1)$. Таким чином, усі умови теореми 2.4 виконано; отже, у оператора $A$ існує в $X = C_{[0,1]}$ нерухома точка, яка є розв'язком крайової задачі (2.28), (2.29). Доведемо, що цей розв'язок належить простору $C^2_{[0,1]}$.

Дійсно, якщо $\tilde{x}(t) \in C_{[0,1]}$– розв'язок задачі (2.28), (2.29), то рівняння (2.28) на ньому перетворюється у тотож-

ність
$$\frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} \equiv f(\tilde{x},t) + a(t)\tilde{x}(t). \tag{2.35}$$
За умов теореми права частина (2.35) є неперервною за $t$ функцією, отже, $\tilde{x}''(t) \in C_{[0,1]}$ і, таким чином, $\tilde{x}(t) \in C^2_{[0,1]}$. Теорему доведено. □

Зауважимо — якщо умова $a(t) \geqslant 0,\ x \in (0,1)$ не виконується, то задача (2.28), (2.29) може не мати розв'язків. Дійсно, це доводить наступний приклад. Спробуємо розв'язати задачу
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \pi^2 x(t) = \sin \pi t,\ x(0) = x(1) = 0. \tag{2.36}$$
Загальний розв'язок рівняння (2.36) має вигляд
$$x(t) = C_1 \cos \pi t + C_2 \sin \pi t - \frac{t}{2\pi} \cos \pi t.$$
Знайдемо $C_1, C_2$ з граничних умов
$$x(0) = C_1 = 0, \qquad x(1) = C_2 \sin \pi - \frac{1}{2\pi} \cos \pi = 0.$$
Очевидно, що розв'язків відносно $C_1, C_2$ ця система не має. Але задача (2.28), (2.29) не завжди має розв'язок, навіть за умови $a(t) \geqslant 0$. Треба ще контролювати зростання нелінійної функції $f(x,t)$ за $x$, бо приклади показують, що при лінійному зростанні функції $f(x,t)$ за $x$ розв'язок може не існувати. Дійсно, розглянемо задачу (2.28), (2.29) з
$$f(x,t) = \sin \pi t - \pi^2 x,\ a(t) = 0.$$
Отже, маємо задачу (2.36), що не має розв'язків.

**2.5 Теореми про нерухомі точки ущільнюючих операторів.** Наступним кроком буде узагальнення теореми

Шаудера на клас ущільнюючих операторів. Цей клас операторів більш широкий, ніж клас компактних операторів. Отже, в теоремі 2.2 Шаудера відмовимося від умови компактності оператора, але вимагатимемо, щоб цей оператор був ущільнюючим. Перейдемо до точних формулювань.

**Теорема 2.9.** ***(аналог теореми Шаудера для ущільнюючих операторів)***. *Нехай $D-$ замкнена опукла обмежена множина в банаховому просторі $X$, $F : D \to D-$ неперервний ущільнюючий оператор. Тоді в $D$ існує нерухома точка оператора $F$.*

*Доведення.* Розглянемо числову послідовність $k_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, $k_n \to 1 - 0$, $n \to \infty$, $k_n < 1$, $\forall n$, і відображення

$$F_n = k_n F. \tag{2.37}$$

Доведемо теорему спочатку для відображень $F_n$, а потім для $F$. Маємо

$$\chi(F_n D) = \chi(k_n F D) = k_n \chi(FD) < k_n \chi(D) < \chi(D). \tag{2.38}$$

Тут використано властивість 6) міри некомпактності $\chi$ з теореми 1.27 та припущення, що $F-$ ущільнюючий оператор. Нерівність (2.38) означає, що оператори $F_n-$ ущільнюючі для довільного $n$. Тобто потрібно довести, що за умови (2.38) у оператора існує нерухома точка. Нехай $G : D \to D$ та

$$\chi(GD) \leqslant k\chi(D), \qquad 0 < k < 1. \tag{2.39}$$

Доведемо існування нерухомої точки у оператора $G$. Розглянемо послідовність множин $\{D_i\}_{i=0}^{\infty}$, що визначається наступним чином:

$$D_0 = D,\ D_i = \overline{\mathrm{co}(GD_{i-1})},\ i = 1, 2, \ldots, D_1 = \overline{\mathrm{co}(GD)} \subset \overline{\mathrm{co}\, D},$$

так як $G : D \to D$, $GD \subset D$. За умови опуклості $D$ матимемо $\operatorname{co} D = D = D_0$, тобто $D_1 \subset D_0$. Нехай включення виконується для $i$: $D_i \subset D_{i-1}$; доведемо для $i+1$: $D_{i+1} \subset D_i$. Дійсно, $D_{i+1} = \overline{\operatorname{co}(GD_i)} \subset \overline{\operatorname{co}(GD_{i-1})}$, оскільки за індукцією вважаємо $D_i \subset D_{i-1}$. Але $\overline{\operatorname{co}(GD_{i-1})} = D_i$ за означенням. Отже, $D_{i+1} \subset D_i$, $\forall i$. Маємо спадаючу послідовність $\{D_i\}_{i=0}^{\infty}$, $D_{i+1} \subset D_i$, $\forall i$. Розглянемо

$$\chi(D_i) = \chi(\overline{\operatorname{co}(GD_{i-1})}) = \chi(\operatorname{co}(GD_{i-1})) = \chi(GD_{i-1}) \leqslant k\chi(D_{i-1}). \tag{2.40}$$

Тут використано властивість 2) з теореми 1.27, а також (2.39). Праву частину (2.40) можна продовжити, якщо переписати її для $i-1$: $\chi(D_{i-1}) \leqslant k\chi(D_{i-2})$; тоді $\chi(D_i) \leqslant k^2\chi(D_{i-2})$ і т.д. Тобто $\chi(D_i) \leqslant k^i\chi(D) \to 0$, так як $0 < k < 1$, $k^i \to 0$, $i \to \infty$. Використаємо лему 1.5. Покладемо $\tilde{D} = \cap_{i=0}^{\infty} D_i$ — компактна опукла множина. Розглянемо оператор $G$ на $\tilde{D}$. Нехай $x \in \tilde{D}$, тоді $x \in D_i$, $\forall i$, $Gx \in D_{i+1}$, оскільки $D_{i+1} = \overline{\operatorname{co}(GD_i)}$. Але $D_{i+1} \subset D_i \subset \cdots \subset D$, тобто $Gx \in D_i \Rightarrow Gx \in \tilde{D}$ — компактна множина. Таким чином, $G : \tilde{D} \to \tilde{D}$ — компактний і, застосовуючи теорему Шаудера для нього, маємо

$$\exists x_0 \in \tilde{D} : \quad Gx_0 = x_0, \quad \text{але} \quad \tilde{D} = \cap_{i=0}^{\infty} D_i, \quad \text{отже}$$

$x_0 \in \tilde{D} \Rightarrow x_0 \in D_0 = D$. Отже, у $G$ існує нерухома точка в $D$. Застосовуючи доведений результат для кожного з $F_n$, матимемо

$$\exists x_n : \; F_n x_n = x_n.$$

Доведемо існування нерухомої точки у заданого ущільнюючого неперервного оператора $F$. Розглянемо $\|x_n - Fx_n\|$, оскільки $F_n x_n = x_n$ та $F_n = k_n F$, тому $x_n - Fx_n = (k_n - 1)Fx_n$. Послідовність $k_n - 1 \to 0$, $n \to \infty$, $Fx_n$ — обмежена ($F$ — обмежений оператор), тому $x_n - Fx_n \to 0$, $n \to \infty$, $x_n \in \operatorname{Ker}(I - F)$.

Множина $(I-F)D-$ замкнена за лемою 1.6. Тому $\exists x_0^* \in D$ : $x_0^* \in \mathrm{Ker}(I-F)$, тобто $x_0^* = Fx_0^*$. Існування нерухомої точки у оператора $F$ доведено. $\square$

Застосування теореми про існування нерухомої точки ущільнюючого неперервного оператора проілюструємо на **прикладі** існування розв'язку наступної задачі Коші для функціонально - диференціального рівняння із запізненням

$$\frac{dx}{dt} = f(x(\lambda t), x'(\lambda t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant h, \tag{2.41}$$

$$x(0) = x_0,\ \lambda \in (0,1]. \tag{2.42}$$

**Теорема 2.10.** *Нехай $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ і для $t=0$ рівняння $x'(0) = f(x(0), x'(0))$ має хоча б один розв'язок відносно $x'(0) = x_1$. Крім того,*

$$\lambda \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, x_1) \right| < 1, \qquad \forall \lambda \in (0,1]. \tag{2.43}$$

*Тоді для досить малого $h > 0$ задача* (2.41), (2.42) *має розв'язок у просторі $C^2_{[0,h]}$.*

*Доведення.* Зведемо задачу (2.41), (2.42) до операторного рівняння з ущільнюючим оператором і застосуємо до нього теорему 2.9. Диференцюючи рівняння (2.41) за $t$, маємо

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(\lambda t), x'(\lambda t))x'(\lambda t) \cdot \lambda + \frac{\partial f}{\partial y}(x(\lambda t), x'(\lambda t))x''(\lambda t)\lambda. \tag{2.44}$$

Вважатимемо, що функція $f$ залежить від двох змінних $f(x,y)$, $x = x(\lambda t)$, $y = x'(\lambda t)$. Покладемо в (2.44) $t = 0$ та позначимо $x_2 = x''(0)$

$$x_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_1)\lambda x_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, x_1)\lambda x_2,$$

$$x_2 = \frac{\lambda x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_1)}{1 - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, x_1)}. \tag{2.45}$$

Тобто за умови (2.43) з останньої рівності $x_2$ однозначно визначається. Побудуємо наступний поліном:

$$p(t) = \frac{x_2}{2}t^2 + x_1 t + x_0. \tag{2.46}$$

Покладемо $\xi(t) = x(t) - p(t)$ і перепишемо задачу (2.41), (2.42) відносно нової функції $\xi(t)$. Зауважимо, що $p(t)-$ відомий поліном, бо значення $x_0, x_1, x_2$ визначено однозначно.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + x_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(\lambda t) + p(\lambda t), \xi'(\lambda t) + p'(\lambda t))(\xi'(\lambda t) + \tag{2.47}$$

$$p'(\lambda t))\lambda + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi(\lambda t) + p(\lambda t), \xi'(\lambda t) + p'(\lambda t))(\xi''(\lambda t) + x_2)\lambda;$$

$$\begin{aligned} &\xi(0) = x(0) - p(0) = x_0 - x_0 = 0,\\ &\xi'(0) = x_1 - x_1 = 0,\\ &\xi''(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Розглянемо функцію $z(t) = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, тоді
$\xi'(t) = \int_0^t z(s)\, ds$, $\xi(t) = \int_0^t \int_0^\tau z(s)\, ds d\tau$. І, враховуючи $\xi(t) = x(t) - p(t)$, матимемо

$$x(t) = \int_0^t \int_0^\tau z(s)\, ds d\tau + p(t) = x_Z(t),$$

$$x'(t) = \int_0^t z(s)\, ds + p'(t) = y_Z(t),$$

звідки (2.47) набуде вигляду

$$z(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_Z(\lambda t), y_Z(\lambda t)\right) y_Z(\lambda t)\cdot\lambda + \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_Z(\lambda t), y_Z(\lambda t)\right)\lambda z(\lambda t) + \lambda x_2 \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_Z(\lambda t), y_Z(\lambda t)\right) - x_2,$$

$$z(0) = 0. \tag{2.50}$$

Таким чином, якщо $x(t)$ — розв'язок задачі (2.41), (2.42), то $z(t)$ задовольняє операторне рівняння (2.49), (2.50) і навпаки. Отже, задача (2.41), (2.42) еквівалентна задачі (2.49), (2.50).

Розглянемо наступні оператори:

$$F_1(z) = \lambda y_Z(\lambda t)\frac{\partial f}{\partial x}(x_Z(\lambda t), y_Z(\lambda t)), \tag{2.51}$$

$$F_2(z) = \lambda z(\lambda t)\frac{\partial f}{\partial y}(x_Z(\lambda t), y_Z(\lambda t)), \tag{2.52}$$

$$F_3(z) = \lambda x_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_Z(\lambda t), y_Z(\lambda t)) - x_2, \tag{2.53}$$

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) + F_3(z). \tag{2.54}$$

Тоді рівняння (2.49) перепишеться

$$z = F(z). \tag{2.55}$$

Тобто маємо задачу про нерухому точку оператора (2.54). Покажемо, що $F$ — ущільнюючий і задовольняє умови теореми Шаудера для ущільнюючих операторів. Визначимо простір $C_0[0,h] = \{x(t) \in C_{[0,h]} : x(0) = 0\}$,

$$D = B_R = \{z(t) \in C_0[0,h] : \|z\| \leqslant R\}.$$

Розглянемо кожну компоненту $F_i(z)$, $i = 1,2,3$, оператора (2.54). Покажемо, що оператор $F_1$— компактний. Дійсно, нехай $z \in B_R$, тобто $\|z\| \leqslant R$. Розглянемо образ $B_R$: $F_1 B_R$. Для будь-якого $z \in B_R$, маємо $F_1 z =$

$\lambda y_Z(\lambda t)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_Z(\lambda t), y_Z(\lambda t))$. Оператор $F_1$ є композицією оператора Немицького, який визначається $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, та інтегральних операторів

$$x_Z(t) = \int_0^t \int_0^\tau z(s)\, ds d\tau + p(t), \qquad y_Z(t) = \int_0^t z(s)\, ds + p'(t).$$

Для будь-якого $z \in B_R$ маємо

$$|x_Z(t)| \leqslant \int_0^t \int_0^\tau |z(s)|\, ds d\tau + |p(t)|,$$

$$\|x_Z\| = \max_{t\in[0,h]} |x_Z(t)| \leqslant R\left|\int_0^t \int_0^\tau ds d\tau\right| + |x_0| + |x_1|h +$$

$$|x_2|\frac{h^2}{2} \leqslant \frac{Rh^2}{2} + |x_0| + |x_1|h + |x_2|\frac{h^2}{2} = A.$$

Тобто $\exists A > 0 : \ \|x_Z\| \leqslant A$.

Аналогічну оцінку можна отримати для $\|y_Z\|$

$$\|y_Z\| \leqslant B, \text{ де } B = Rh + |x_1| + |x_2|h.$$

Оскільки за умовою теореми $f(x,y)-$ функція від двох змінних, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, то на компактній множині $\{(x,y) : \|x\| \leqslant A, \ \|y\| \leqslant B\}$ вона обмежена, тобто

$$\exists C_1 > 0 : \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant C_1, \quad \forall (x,y) : \ \|x\| \leqslant A, \ \|y\| \leqslant B.$$

За цих умов $\|F_1(z)\| \leqslant \lambda \cdot BC_1 = C_2$ для довільного $z \in B_R$. Таким чином, множина $F_1 B_R-$ рівномірно обмежена у просторі $C_{[0,h]}$. Для доведення компактності множини $F_1 B_R$ за теоремою Асколі- Арцела нам залишилося показати, що ця множина є одностайно неперервною в $C_{[0,h]}$. Тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \quad |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |F_1 z(t_1) - F_1 z(t_2)| < \varepsilon. \tag{2.56}$$

Доведемо одностайну неперервність операторів $x_Z(t), y_Z(t)$. Для $t_1, t_2: \ |t_1 - t_2| < \delta$ маємо $|x_Z(t_1) - x_Z(t_2)| =$

$$\left| \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{\tau} z(s) ds d\tau + p(t_1) - \int\limits_0^{t_2} \int\limits_0^{\tau} z(s) ds d\tau - p(t_2) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_0^{\tau} z(s)\, ds d\tau \right| + |p(t_1) - p(t_2)| \leqslant \frac{R}{2} |t_2^2 - t_1^2| +$$

$$|x_1||t_1 - t_2| + \frac{|x_2|}{2} |t_2^2 - t_1^2| \leqslant Rh\delta + |x_1|\delta + |x_2|h \to 0, \quad (2.57)$$

при $\delta \to 0$. Аналогічно для оператора $y_Z(t)$

$$|y_Z(t_1) - y_Z(t_2)| = \left| \int_0^{t_1} z(s)\, ds + p'(t_1) - \int_0^{t_2} z(s)\, ds - p'(t_2) \right| \leqslant$$
$$\leqslant R|t_1 - t_2| + |t_1 - t_2||x_2| < \delta(R + |x_2|) \to 0, \qquad \delta \to 0. \tag{2.58}$$

За умови неперервності функції двох змінних $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_Z, y_Z)$ на прямокутнику $\|x_Z\| \leqslant A$, $\|y_Z\| \leqslant B$, а, отже, рівномірної неперервності на цьому прямокутнику, маємо

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y_2) \right| = \omega(\varepsilon) \to 0, \qquad \varepsilon \to 0, \tag{2.59}$$

за умови $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leqslant \varepsilon \to 0$. Остання умова виконується, враховуючи (2.57), (2.58), де у якості аргументів $x = x_Z(t)$, $y = y_Z(t)$ — оператори. Таким чином, з (2.58) та (2.59) отримуємо $|F_1z(t_1)-F_1z(t_2)|=$

$$\left|\lambda y_Z(\lambda t_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_Z(\lambda t_1),y_Z(\lambda t_1))-\lambda y_Z(\lambda t_2)\frac{\partial f}{\partial x}(x_Z(\lambda t_2),y_Z(\lambda t_2))\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_Z(\lambda t_1),y_Z(\lambda t_1))\right|\lambda|y_Z(\lambda t_1)-y_Z(\lambda t_2)|+\lambda|y_Z(\lambda t_2)|\times$$

$$\times\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_Z(\lambda t_1),y_Z(\lambda t_1))-\frac{\partial f}{\partial x}(x_Z(\lambda t_2),y_Z(\lambda t_2))\right|\leqslant$$

$$\lambda C_1\delta(R+|x_2|)+\lambda B\omega(\varepsilon)\to 0,$$

як тільки $\delta,\varepsilon\to 0$. Тобто множина $F_1B_R$ — компактна в $C_{[0,h]}$, отже, оператор $F_1$ — компактний і його міра некомпактності $\chi(F_1B)=0$.

Оператор $F_3$ визначається аналогічно (див. (2.53)). Тому, проводячи аналогічні розрахунки, можна довести, що множина $F_3B$ теж компактна в $C_{[0,h]}$ за критерієм Асколі — Арцела, тобто оператор $F_3$ — компактний і $\chi(F_3B)=0$ (див. додаткову задачу 4).

Розглянемо оператор $F_2$ і оцінимо міру некомпактності $\chi(F_2B)$. Покажемо, що для досить малого $h$ — околу точки $(x_0,x_1)$ — образи операторів $x_Z(t),y_Z(t),\ |t|<h$, також потрапляють у досить малий окіл цієї точки. Справді,

$$|x_Z(t)-x_0|=\left|\int_0^t\int_0^\tau z(s)\,dsd\tau+x_1t+x_2\frac{t^2}{2}\right|\leqslant$$

$$Rh^2+|x_1|h+|x_2|\frac{h^2}{2}=r_1(h)\to 0,$$

якщо $h\to 0$. Аналогічно

$$|y_Z(t)-x_1|=\left|\int_0^t z(s)\,ds+x_2t\right|\leqslant R|h|+h|x_2|=r_2(h)\to 0,$$

$h\to 0$. Таким чином, якщо умова (2.43) виконується в точці $(x_0,x_1)$, то для неперервних функцій вона повинна виконуватися в деякому околі цієї точки, тобто для $(x_Z,y_Z)$:

$|x_Z - x_0| \leqslant r_1(h)$, $|y_Z - x_1| \leqslant r_2(h)$:

$$\lambda \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_Z, y_Z) \right| \leqslant k < 1. \tag{2.60}$$

Розглянемо $B_\lambda = \{\zeta(t) = z(\lambda t) : z(t) \in B_R\}$. Нехай $B_R$ покрито скінченним числом куль $B_r(z_i) = \{z(t) : \|z - z_i\| \leqslant r\}$. Тоді $B_\lambda$ покрите скінченним числом куль із центром у точці $\zeta_i(t) = z_i(\lambda t)$:

$$B_\lambda = \cup_{i=1}^{l} B(\zeta_i, r), \qquad \chi(B_\lambda) \leqslant \chi(B_R), \tag{2.61}$$

оскільки

$$\|\zeta(t) - \zeta_i(t)\| = \max_{|t|<h} |z(\lambda t) - z_i(\lambda t)| = \max_{t \in (0, \lambda h]} |z(t) - z_i(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{|t|<h} |z(t) - z_i(t)| = \|z - z_i\| \leqslant r.$$

Для будь-якого $z \in B_R$ позначимо $\mu_Z(t) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_Z(\lambda t), y_Z(\lambda t))$. Тоді, враховуючи (2.52),

$$F_2 B_R \subset \bigcup_{z \in B_R} \mu_Z(t) \cdot \lambda \cdot B_\lambda. \tag{2.62}$$

З теореми 1.27 маємо

$$\chi(F_2 B_R) \leqslant \max_{z \in B_R,\ t_j \in [0,h]} \chi(\mu_Z(t_j) \lambda B_\lambda) \leqslant$$
$$\max_{z \in B_R,\ t_j \in [0,h]} |\mu_Z(t_j)| \lambda \cdot \chi(B_\lambda).$$

З (2.60), (2.61) отримуємо

$$|\mu_Z(t_j)| \lambda \leqslant k < 1,$$
$$\chi(F_2 B_R) \leqslant k \chi(B_R) < 1 \cdot \chi(B_R).$$

Отже, остання нерівність показує, що оператор $F_2$ — ущільнюючий. Але

$$F = F_1 + F_2 + F_3 \qquad \text{і} \qquad \chi(F_1 B_R) = \chi(F_2 B_R) = 0.$$

Тоді знову за теоремою 1.27 маємо

$$\chi(FB_R) \leqslant \chi(F_1B_R)+\chi(F_2B_R)+\chi(F_3B_R) = \chi(F_2B_R) < \chi(B_R).$$

Отже, оператор $F$ — ущільнюючий.

Для застосування теореми про нерухому точку ущільнюючих операторів залишилося перевірити, що оператор $F$ діє з $B_R$ у $B_R$, де $B_R = \{z(t) \in C_0[0,h] : \|z\| \leqslant R\}$ — куля в банаховому просторі $C_0[0,h] = \{z(t) \in C_{[0,h]} : z(0) = 0\}$.

Покажемо, що $F$ не виводить елементи з простору $C_0[0,h]$, тобто $\forall z(t) \in C_0[0,h]$ $Fz \in C_0[0,h]$ — неперервна на $[0,h]$ і $Fz(0) = 0$. Маємо

$$Fz(0) = F_1z(0) + F_2z(0) + F_3z(0) = \lambda x_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_1)+$$
$$\lambda z(0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,x_1) + \lambda x_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,x_1) - x_2 = \lambda x_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_1)+$$
$$\lambda x_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,x_1) - x_2 = \lambda x_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_1)+$$
$$+x_2\left\{\lambda\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,x_1) - 1\right\} =$$
$$\lambda x_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_1) - \lambda x_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_1) = 0.$$

Ми використали означення $x_2$ за (2.45). Нехай $z \in B_R$, тобто $\|z\| \leqslant R$. Покажемо, що

$$Fz \in B_R, \qquad \|Fz\| \leqslant R.$$

Маємо $\|Fz\| \leqslant$

$$\left\|\lambda y_Z(\lambda t)\frac{\partial f}{\partial x}(x_Z,y_Z) + \lambda z(\lambda t)\frac{\partial f}{\partial y}(x_Z,y_Z) + \lambda x_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_Z,y_Z) - \right.$$
$$x_2\| = \left\|\lambda y_Z(\lambda t)\frac{\partial f}{\partial x}(x_Z,y_Z) - \lambda x_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_1)+\right.$$
$$\left.\lambda x_1\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_1) + \lambda z(\lambda t)\frac{\partial f}{\partial y}(x_Z,y_Z) + \lambda x_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_Z,y_Z) - x_2\right\|.$$

Враховуючи (2.45) $\|Fz\| \leqslant$

$$\left\|\lambda y_Z(\lambda t)\frac{\partial f}{\partial x}(x_Z, y_Z) - \lambda x_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_1) - \lambda x_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, x_1) + \right.$$
$$\left. + \lambda z(\lambda t)\frac{\partial f}{\partial y}(x_Z, y_Z) + \lambda x_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_Z, y_Z)\right\| \leqslant$$
$$\left\|\lambda y_Z(\lambda t)\frac{\partial f}{\partial x}(x_Z, y_Z) - \lambda x_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_1)\right\| +$$
$$\lambda|x_2| \left\|\frac{\partial f}{\partial y}(x_Z, y_Z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, x_1)\right\| + \lambda \left\|z(\lambda t)\frac{\partial f}{\partial y}(x_Z, y_Z)\right\|. \tag{2.63}$$

Розглянемо

$$\left\|\lambda y_Z(\lambda t)\frac{\partial f}{\partial x}(x_Z, y_Z) - \lambda x_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_1)\right\| \leqslant$$
$$\left\|\lambda y_Z(\lambda t)\frac{\partial f}{\partial x}(x_Z, y_Z) - \lambda x_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_Z, y_Z) + \right.$$
$$\left. \lambda x_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_Z, y_Z) - \lambda x_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_1)\right\| \leqslant \left\|\lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x_Z, y_Z)|y_Z - x_1|\right\| +$$
$$\lambda|x_1| \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x_Z, y_Z) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_1)\right\| \leqslant C_1 r_2(h) + \lambda|x_1|\omega(h), \tag{2.64}$$

враховуючи (2.59). Аналогічно,

$$\left\|\lambda x_2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_Z, y_Z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, x_1)\right)\right\| \leqslant \lambda|x_2|\omega(h), \tag{2.65}$$

$$\left\|\lambda z(\lambda t)\frac{\partial f}{\partial y}(x_Z, y_Z)\right\| \leqslant kR < R \tag{2.66}$$

з (2.60). Підставимо (2.64), (2.65), (2.66) в (2.63)

$$\|Fz\| \leqslant R + \lambda|x_2|\omega(h) + \lambda C_1 r_2(h) + \lambda|x_1|\omega(h).$$

Оскільки $\omega(h), r_2(h) \to 0$, $h \to 0$, то $\|Fz\| \leqslant R$.

Таким чином, усі умови теореми 2.9 виконуються; отже, у оператора $F$ існує нерухома точка в $B_R$, тобто операторне рівняння (2.55) має розв'язок у $B_R \subset C_0[0,h] : z^*(t) \in C_0[0,h]$. Оскільки $z^*(t) = \xi''(t)$, то $\xi(t) \in C^2_{[0,h]}$. Але $\xi(t) = x(t) - p(t)$, тобто розв'язок $x(t) = \xi(t)+p(t)$ задачі (2.41), (2.42) належить простору $C^2_{[0,h]}$. Теорему доведено. □

## 2.6 Контрольні запитання

1. Сформулюйте теорему Вейєрштрасса про наближення неперервної на компактній множині функції поліноміальною послідовністю.

2. Поясніть, як за допомогою теореми Вейєрштрасса довести теорему Шаудера, використовуючи теорему Брауера.

3. Яким чином можна замінити умову компактності оператора в теоремі 2.2 Шаудера?

4. Як за допомогою теореми 2.2 Шаудера про існування нерухомої точки можна довести існування розв'язку операторного рівняння Фредгольма другого роду?

5. Зведіть задачу Коші $\dfrac{dx}{dt} = f(x,t)$, $x(t_0) = x_0$ до операторного рівняння.

6. Наведіть умову на коефіцієнт $a(t)$ рівняння $\dfrac{d^2x}{dt^2} - a(t)x(t) = f(t)$, що гарантує існування єдиного розв'язку першої крайової задачі $x(0) = x(1) = 0$.

7. Яке зростання функції $f(x,t)$ за змінною $x$ гарантує існування розв'язку крайової задачі $\frac{d^2x}{dt^2} - a(t)x(t) = f(x,t)$, $x(0) = x(1) = 0$ в просторі $C^2_{[0,1]}$, за умови, що однорідна крайова задача (тобто при $f(x,t) = 0$) має лише тривіальний розв'язок?

8. Підрахуйте міру некомпактності за Хаусдорфом $\chi(F_3 B)$, де $B$ — куля, а оператор $F_3$ визначається за формулою (2.53).

9. Нехай для кожного $n$ множина $\{z_1^n, z_2^n, \ldots, z_{m(\varepsilon)}^n\}$ — скінченна $\varepsilon$-сітка для $\overline{A_n D}$, а $\{z_1, z_2, \ldots, z_{l(\varepsilon)}\}$ — скінченна $\varepsilon$-сітка для $\overline{AD}$ ($A : D \to D$ — неперервний компактний оператор, $A_n$ — його скінченновимірні апроксимації з леми 1.3). Побудуйте, якщо це можливо, $\varepsilon$-сітку для множини $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} A_n D}$.

## 2.7 Основні задачі

1. Сформулюйте і доведіть аналог теореми 2.8 для функції $f(x,t) = \lambda x^n + g(t)$, $g(t) \in C_{[0,1]}$.

2. При яких $\lambda$ відображення $(Ax)(t)$ є стискаючим в $C_{[0,1]}$? При вказаному $\lambda$ знайти розв'язок рівняння $Ax = x$ наближено з точністю до $10^{-3}$:

   (a) $(Ax)(t) = \lambda \displaystyle\int_0^1 t^2(1-s)^2 x(s)ds + \frac{2}{3}, \quad \lambda = 1/2;$

   (b) $(Ax)(t) = \lambda \displaystyle\int_0^1 e^{t^2} s x(s)ds + 3, \quad \lambda = 1/8;$

   (c) $x(t) = \lambda \displaystyle\int_0^t x(s)ds + \frac{1}{4}, \quad \lambda = 1/4.$

3. Довести, що вказані системи мають єдиний розв'язок в $\mathbb{R}_+^n$ при заданих умовах:

   (a) $x_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{c_{ik}}{1+e^{3x_k}} + b_i \quad (i = 1, \ldots, n),$

   $$\sum_{i,k=1}^{n} |c_{ik}| < 1, c_{ik} > 0, b_i > 0;$$

(b) $x_i = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik} \sin^2(1 + x_k) + b_i \quad (i = 1, \ldots, n),$

$\sum\limits_{i,k=1}^{n} |c_{ik}| < 1, c_{ik} > 0, b_i > 0.$

4. Доведіть існування розв'язку систем у крузі $|x| \leqslant 1$:

   (a) $\begin{cases} x_1^3 + x_2^2 x_1 + 2x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ x_2^3 + x_1^2 x_2 + 2x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x_1^3 + x_2^2 x_1 + 3x_1 = 1, \\ x_2^3 + x_1^2 x_2 + 3x_2 = \sqrt{3}. \end{cases}$

5. Покажіть неможливість застосування теореми Брауера для дослідження систем

   (a) $\begin{cases} x_1^3 + x_2^2 x_1 + 3x_1 = 2, \\ x_2^3 + x_1^2 x_2 + 2x_2 = 2; \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x_1^3 + x_2^2 x_1 + x_1 = 1, \\ x_2^3 + x_1^2 x_2 + 2x_2 = 2. \end{cases}$

## 2.8 Додаткові задачі

1. Доведіть лему 1.5.

2. Доведіть лему 1.6.

3. В умовах теореми 2.10 доведіть рівномірну обмеженість оператора

$$y_Z(t) = \int_0^t z(s)\,ds + p'(t)$$

   для будь-якої $z(t) \in B_R$.

4. В умовах теореми 2.10 доведіть компактність оператора
$$F_3(z) = \lambda x_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_Z(\lambda t), y_Z(\lambda t)) - x_2.$$

5. У просторі $C^3_{[0,1]}$ розглянемо наступну крайову задачу для звичайного квазілінійного диференціального рівняння 3-го порядку (модельна задача примежового шару):
$$x''' + xx'' = 0, \quad 0 < t < 1, \;\; x(0) = a, \;\; x'(0) = b, \;\; x(1) = c.$$
За допомогою принципа Шаудера встановіть існування розв'язку цієї крайової задачі.

   (a) Доведіть, що ця задача еквівалентна наступному нелінійному інтегральному рівнянню у просторі $C_{[0,1]}$:
   $$x(t) = a + bt + (c - a - b) \frac{\int_0^t \int_0^\tau \exp\left\{-\int_0^\sigma x(s)\, ds\right\} d\sigma d\tau}{\int_0^1 \int_0^\tau \exp\left\{-\int_0^\sigma x(s)\, ds\right\} d\sigma d\tau}.$$

   (b) Нехай хоча б одне з чисел $a, b, c - a - b$ відмінне від нуля. Доведіть, що оператор $\Phi(x)$, що задається правою частиною інтегрального рівняння, відображає кулю $\bar{S}_r(0)$ радіуса $r = |a| + |b| + |c - a - b|$ у себе.

   (c) Доведіть, що $\Phi(x)$ є компактним оператором у цій кулі.

6. Нехай $f$– диференційовна на відрізку $[a, b]$ функція, така, що $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ на $[a, b]$. Чи можна підібрати параметр $\lambda$ так, щоб оператор $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$ був стискаючим?

7. Доведіть, що рівняння
$$y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{\sin(xs)} y(s)\, ds + f(x),$$
де $f \in C_{[0;1]}$, має єдиний розв'язок $y \in C_{[0;1]}$.

## 2.9 Тести для самоконтролю

1. Відображення $f(x) = \dfrac{x^2}{2|x|}$ не має нерухомої точки. Яка з умов теореми про стискаюче відображення порушується?

| | |
|---|---|
| A | повнота простору, на якому визначена функція $f(x)$ |
| B | $f(x)$ стискаюче |
| C | $f(x)$ неперервне |
| D | $f(x)$ відображає $X$ в $X$ |

2. Яка з умов в доведенні теореми про стискаюче відображення $f : X \to X$ є зайвою?

| | |
|---|---|
| A | $f(x)$ неперервне |
| B | $X$ — повний простір |
| C | існує границя послідовності $x_n = f(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ |
| D | $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \alpha\rho(x, y)$, $\forall x, y \in X$, $0 < \alpha < 1$ |

3. Яка умова є зайвою у формулюванні теореми Брауера?

| | |
|---|---|
| A | відображення $f : B_R \to B_R$ |
| B | відображення $f$ скінченновимірне |
| C | відображення $f$ неперервне |
| D | відображення $f$ компактне |

4. За яких припущень стосовно оператора у банаховому просторі $X$ у нього існує нерухома точка у кулі $B_R \to X$?

| | |
|---|---|
| A | $A:\bar{B}_R\to X$ неперервний і компактний |
| B | $A:\bar{B}_R\to \bar{B}_R$ неперервний |
| C | $A:\bar{B}_R\to X$ неперервний і компактний, і рівняння з параметром $Au=\lambda u$ не має розв'язків на сфері $\|u\|=R$ для будь-якого $\lambda>1$ |
| D | $A:\bar{B}_R\to X$ неперервний і компактний, і рівняння з параметром $Au=\lambda u$ не має розв'язків всередині кулі $\|u\|<R$, $\forall\lambda>1$ |

5. Нехай $A:X\to X$ — неперервний оператор в банаховому просторі $X$ і на кожній кулі $\bar{B}_R\subset X$ компактний. Тоді операторне рівняння $u-Au=h$ має розв'язок

| | |
|---|---|
| A | для будь-якого $h\in X$ |
| B | для будь-якого $h\perp \mathrm{Ker}(I-A^*)$ |
| C | для будь-якого $h\in X$ за умови $\limsup\limits_{\|u\|\to\infty}\dfrac{\|Au\|}{\|u\|}=q<1$ |
| D | для будь-якого $h\in X$ за умови $\limsup\limits_{\|u\|\to\infty}\dfrac{\|Au\|}{\|u\|}=q>1$ |

6. Задача Коші $\dot{x}(t)=f(x,t)$, $x(t_0)=x_0$ еквівалентна операторному рівнянню

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $x(t)=x_0+\displaystyle\int_0^t f(x(\tau),\tau)\,d\tau$ | B | $x(t)=\displaystyle\int_{t_0}^t f(x(\tau),\tau)\,d\tau$ |
| C | $x(t)=x_0+\displaystyle\int_{t_0}^t f(x(\tau),\tau)\,d\tau$ | D | $x(t)=\displaystyle\int_0^t f(x(\tau),\tau)\,d\tau$ |

7. Необхідною умовою існування розв'язку задачі $\dfrac{d^2x}{dt^2}-a(t)x(t)=f(x,t)$, $x(0)=x(l)=0$ є

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $a(t)\geqslant 0\ \ \forall t\in[0,l]$ | B | $f(x,t)\geqslant 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}^1,\ t\in[0,l]$ |
| C | $a(t)\leqslant 0\ \ \forall t\in[0,l]$ | D | жодна з умов не є необхідною |

8. За яких умов задача з п. 7 гарантовано не буде мати розв'язку у просторі $C^2_{[0,1]}$?

| | |
|---|---|
| A | $a(t) = -1, \quad f(x,t) = t^2, \ t \in [0,1]\}$ |
| B | $a(t) = -1, \ f(x,t) = x^3 + g(t), \ g(t) \in C_{[0,1]}$ |
| C | $a(t) = -\pi^2, \quad f(x,t) = \sin(\pi t)$ |
| D | $a(t) = -\pi^2, \quad f(x,t) = \sin(2\pi t)$ |

9. Нехай $f(x,y) = x^2 + y^2$, $u(x) \in C[0,1]$. Оператор Немицького, що діє на $u(x)$ і визначається $f(x,y)$, є

| | |
|---|---|
| A | $N_f(u) = u^2$ |
| B | $N_f(u) = x^2 + u^2(x)$ |
| C | $N_f(u) = u(x^2 + y^2)$ |
| D | $N_f(u) = u^2 + x^2 + y^2$ |

10. Яке з наступних висловлювань є вірним?

| | |
|---|---|
| A | кожен компактний оператор є ущільнюючим |
| B | кожен ущільнюючий оператор є компактним |
| C | кожен ущільнюючий оператор є неперервним |
| D | довільний неперервний стискаючий оператор є ущільнюючим |

11. Нехай $D_1, D_2$ — обмежені множини, $\chi(D_i)$, $i = 1,2$ — їх міра некомпактності за Хаусдорфом. Яке з співвідношень є вірним?

| | |
|---|---|
| A | $\chi(D_1 \cup D_2) = \chi(D_1) + \chi(D_2)$ |
| B | $\chi(D_1 \cup D_2) = \max\{\chi(D_1), \chi(D_2)\}$ |
| C | $\chi(D_1 \cup D_2) \leqslant \chi(D_1) + \chi(D_2)$ |
| D | $\chi(D_1 \cup D_2) \leqslant \max\{\chi(D_1), \chi(D_2)\}$ |

12. Нехай $D$ — обмежена множина, $\mathrm{co}\, D$ — її опукла оболонка, $\chi(D)$ — міра некомпактності за Хаусдорфом. Тоді

| | |
|---|---|
| A | $\chi(\mathrm{co}\, D) = \chi(D)$ |
| B | $\chi(\mathrm{co}\, D) \leqslant \chi(D)$ |
| C | $\chi(\mathrm{co}\, D) \geqslant \chi(D)$ |
| D | $\chi(\mathrm{co}\, D) < \chi(D)$ |

13. Нехай $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ і $\lambda\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, x_1)\right| < 1$ для довільного $\lambda \in (0,1]$ в деякій точці $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$. Тоді

| | |
|---|---|
| A | $\lambda\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| < 1 \quad \forall\lambda \in (0,1]$ для будь-якого $(x, y)$ |
| B | $\lambda\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| < 1 \quad \forall\lambda \in (0,1], \forall(x, y)$ з околу точки $(x_0, x_1)$ |
| C | $\lambda\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leqslant 1 \quad \forall\lambda \in (0,1], \forall(x, y)$ з околу точки $(x_0, x_1)$ |
| D | інша відповідь |

## 2.10 Приклади розв'язування задач основного рівня

1. Нехай в (2.28) $f(x,t) = \lambda x^3 + g(t)$, $a(t), g(t) \in C_{[0,1]}$, $a(t) \geqslant 0$. Доведіть, що для існування розв'язку задачі (2.28), (2.29) у просторі $C^2_{[0,1]}$ достатньо виконання наступної умови на функцію $g(t)$ (для відомого параметра $\lambda$)

$$\|g\|_{C_{[0,1]}} \leqslant \frac{2}{3G\sqrt{3G|\lambda|}}, \tag{2.67}$$

де $G = \max\limits_{t\in[0,1]}\left|\displaystyle\int_0^1 G(\tau,t)\,d\tau\right|$, $G(\tau,t)$ — функція Гріна задачі (2.28), (2.29).

*Розв'язання.* Як вже було показано (див. с. 72), існування розв'язку крайової задачі (2.28), (2.29) є еквівалентним задачі про знаходження нерухомої точки оператора

$$Ax(t) = \int_0^1 G(\tau, t)\{\lambda x^3(\tau) + g(\tau)\}\, d\tau. \qquad (2.68)$$

Існування нерухомої точки оператора (2.68) випливає з теореми Шаудера, де за множину $D$ приймемо кулю $\bar{B}_R(0) = \{x(t) \in C_{[0,1]} : \|x\|_{C_{[0,1]}} \leqslant R\}$ для деякого $R > 0$. Необхідно забезпечити умову $A : \bar{B}_R(0) \to \bar{B}_R(0)$, тобто для $\forall x(t) : \|x\|_{C_{[0,1]}} \leqslant R \Rightarrow \|Ax\|_{C_{[0,1]}} \leqslant R$. Дійсно,

$$\|Ax\|_{C_{[0,1]}} = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 \left| G(\tau, t)\{\lambda x^3(\tau) + g(\tau)\} \right| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in[0,1]} |\lambda x^3(t) + g(t)| \max_t \int_0^1 |G(\tau, t)|\, d\tau = G\|\lambda x^3 + g\|_{C_{[0,1]}} \leqslant$$

$$\leqslant G\{|\lambda| \cdot \|x\|^3_{C_{[0,1]}} + \|g\|_{C_{[0,1]}}\} \leqslant G\{|\lambda| R^3 + \|g\|_{C_{[0,1]}}\}.$$

Параметр $\lambda$ та функцію $g(t)$ виберемо з умови $G(|\lambda|R^3 + \|g\|) \leqslant R$ або

$$G|\lambda|R^3 + G\|g\|_{C_{[0,1]}} - R \leqslant 0.$$

Позначимо через $\varphi(R)$ кубічну відносно $R$ функцію $\varphi(R) = G|\lambda|R^3 - R + G\|g\|_{C_{[0,1]}}$. Знайдемо $R_{\min}$, тоді $\varphi(R_{\min}) \leqslant \varphi(R) \leqslant 0$ і $\varphi(R_{\min}) \leqslant 0$;

$$\varphi'(R) = 3G|\lambda|R^2 - 1 = 0, \qquad R_{\min} = \frac{1}{\sqrt{3G|\lambda|}},$$

$$\varphi(R_{\min}) = G|\lambda| \frac{1}{3G|\lambda|\sqrt{3G|\lambda|}} - \frac{1}{\sqrt{3G|\lambda|}} + G\|g\|_{C_{[0,1]}} \leqslant 0.$$

Звідки

$$\|g\|_{C_{[0,1]}} \leqslant \frac{2}{3G\sqrt{3G|\lambda|}}.$$

□

2. При яких $\lambda$ відображення

$$(Ax)(t) = \lambda \int_0^1 t^3 s x(s)\, ds$$

є стискаючим у $C_{[0,1]}$? При $\lambda = 1/5$ знайдіть розв'язок рівняння $Ax = x$ наближено з точністю до $10^{-3}$.

*Розв'язання.* Для того, щоб дізнатися, при яких $\lambda$ відображення $A$ є стискаючим у $C_{[0,1]}$, виконаємо наступні оцінки:

$$|(Ax)(t) - (Ay)(t)| = |\lambda|| \int_0^1 t^3 s(x(s) - y(s))ds| \leqslant$$

$$|\lambda| t^3 \int_0^1 s|x(s) - y(s)|ds \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| t^3 \int_0^1 s \max_{u\in[0,1]} |x(u) - y(u)|ds =$$

$$|\lambda| t^3 \rho(x, y) \int_0^1 sds = t^3 \frac{|\lambda|}{2} \rho(x, y),\ t \in [0, 1],$$

де $\rho(x, y) = \max\limits_{u\in[0,1]} |x(u) - y(u)|$. Далі, базуючись на цих оцінках, маємо: $\rho(Ax, Ay) \leqslant \dfrac{|\lambda|}{2} \rho(x, y)$. Тобто, відображення $A$ є стискаючим у $C_{[0,1]}$ при $|\lambda| < 2$. Тепер при $\lambda = 1/5$ знайдемо розв'язок рівняння $Ax = x$ з вказаною точністю. Покладемо $x_0(t) = 0$ і $x_1(t) = (Ax_0)(t) = t/2$. Згідно з принципом стискаючих відображень, послідовність $(A^n x_0)(t)$ збігається до єдиного розв'язку $x^*$ рівняння $Ax = x$. Більш того, справджується оцінка

$$\rho(A^n x_0, x^*) \leqslant \frac{(1/10)^n}{1 - 1/10} \rho(x_0, x_1) = \left(\frac{1}{10}\right)^n \frac{5}{9}.$$

Тобто, при $n = 3$ досягається точність, що вимагається, оскільки $\rho(A^3 x_0, x^*) \leqslant \dfrac{5}{9} 10^{-3} < 10^{-3}$. Обчислимо $x_3(t) =$

$(A^3x_0)(t)$

$$x_2(t) = (Ax_1)(t) = \frac{1}{5}\int_0^1 t^3 s \frac{s}{2}\,ds = \frac{t^3}{30} + \frac{t}{2},$$
$$x_3(t) = (Ax_2)(t) = \frac{1}{5}\int_0^1 t^3 s \left(\frac{s^3}{30} + \frac{s}{2}\right)\,ds = \frac{13t^3}{375} + \frac{t}{2}.$$

$\square$

3. Довести, що система

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}(1 + x_k) + b_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\max_i \sum_{k=1}^{n} |c_{ik}| < 1, c_{ik} > 0, b_i > 0,$$

має єдиний розв'язок в $\mathbb{R}^n_+$.

*Розв'язання.* У повному метричному просторі $(\mathbb{R}^n_+, \rho(x, y))$, де $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ (тут $x = \{x_i\}_{i=1}^n$, $y = \{y_i\}_{i=1}^n$), розглянемо оператор

$$Ax = y = \{y_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n_+,$$

де $y_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(1+x_k)+b_i$. Тоді для довільного $z = \{z_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n_+$

маємо

$$\rho(Ax, Az) = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} c_{ik}(1 + x_k) + b_i - \sum_{k=1}^{n} c_{ik}(1 + z_k) - b_i \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} c_{ik}(x_k - z_k) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |c_{ik}||x_k - z_k| =$$

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k| \sum_{i=1}^{n} |c_{ik}| \leqslant$$

$$\leqslant \max_i \sum_{k=1}^{n} |c_{ik}| \rho(x, z),$$

тобто $A-$ стискаюче відображення $(\mathbb{R}_+^n, \rho(x, y))$ у себе. Далі, використовуючи принцип стискаючих відображень у цьому просторі, отримуємо, що система має єдиний розв'язок в $\mathbb{R}_+^n$.

$\square$

*Зауваження* 2.3. Можно побачити, що умови на коефіцієнти системи лінійних рівнянь надто жорсткі. Методи лінійної алгебри не вносять таких обмежень, але цим прикладом підкреслюється не точність, а універсальність теорем про нерухомі точки.

4. Доведіть існування розв'язку системи в крузі $|x| \leqslant \frac{1}{3}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^2 x_1 + x_1 = \dfrac{1}{4}, \\ x_2^3 + x_1^2 x_2 + 2x_2 = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Перепишемо дану систему в операторному вигляді

$$\begin{cases} A_1(x) = x_1, \\ A_2(x) = x_2, \end{cases}$$

де

$$A_1(x) = A_1(x_1, x_2) = -x_1^3 - x_2^2 x_1 + \frac{1}{4},$$

$$A_2(x) = A_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_2^3 - \frac{1}{2}x_1^2 x_2 + \frac{1}{8}.$$

Тоді маємо задачу знаходження нерухомої точки оператора $A = (A_1, A_2)$

$$Ax = x.$$

Оператор $A$ — неперервний і скінченновимірний. Застосуємо теорему Брауера. Нам потрібно перевірити, що $A : B_{\frac{1}{3}} \to B_{\frac{1}{3}}$, де $B_{\frac{1}{3}} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant \dfrac{1}{3}\}$. Дійсно, нехай $x \in B_{\frac{1}{3}}$, тобто $x_1^2 + x_2^2 \leqslant \frac{1}{9}$. Розглянемо

$$|Ax|^2 = A_1^2(x) + A_2^2(x) = (x_1^3 + x_2^2 x_1 - \frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4}(x_2^3 + x_1^2 x_2 - \frac{1}{4})^2 =$$

$$= x_1^2(x_1^2 + x_2^2)^2 + \frac{1}{4}x_2^2(x_2^2 + x_1^2)^2 - \frac{1}{2}x_1(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{8}x_2(x_1^2 + x_2^2) + \frac{5}{64} \leqslant$$

$$\leqslant (x_1^2 + x_2^2)^3 + \frac{5}{64} - (x_1^2 + x_2^2)(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{8}x_2) \leqslant$$

$$\leqslant (x_1^2 + x_2^2)^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{64} \leqslant \frac{1}{9^3} + \frac{5}{64} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{27} < \frac{1}{9}.$$

Таким чином, всі умови теореми Брауера виконуються. Отже, оператор $A$ має нерухому точку в крузі $|x| \leqslant \dfrac{1}{3}$. $\square$

# 3 ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ З МОНОТОННИМИ ТА $(\mathbf{S})_+$–ОПЕРАТОРАМИ

**3.1 Монотонні оператори.** В цьому розділі розглядаються монотонні оператори, наводяться означення, приклади, властивості монотонних операторів. Основною метою розділу є доведення абстрактної теореми про існування розв'язків операторного рівняння за допомогою метода Гальоркіна (побудова скінченновимірних наближень розв'язку). Розглядається також приклад задачі Діріхле для нелінійного диференціального рівняння дивергентного вигляду. Показано, як абстрактну теорему можна застосувати для доведення існування розв'язків цієї задачі. Для опрацювання матеріалу цього розділу рекомендуємо літературу [15],[25],[20].

Нехай $X$– рефлексивний простір, $X^*$– спряжений до нього простір. Розглянемо оператор $A : X \to X^*$, що для $\forall u \in X \mapsto Au \in X^*$. Дію функціонала $Au \in X^*$ на деякий елемент $u \in X$ позначимо $Au(x) = \langle Au, u\rangle$.

**Означення 3.1. (монотонного оператора).** Нехай $X$– рефлексивний банахів простір. Оператор $A : X \to X^*$ називається **монотонним**, якщо

$$\forall u, v \in X : \quad \langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant 0. \qquad (3.1)$$

Оскільки $(\mathbb{R}^1)^* = \mathbb{R}^1$, то у разі $X = \mathbb{R}^1$, оператор є просто функцією $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, і тоді означення 3.1 є поширенням поняття монотонної функції на випадок загальних банахових просторів $X$. Для $x \in \mathbb{R}^1$ означення 3.1 монотонного оператора перетворюється на

$$(f(x) - f(y))(x - y) \geqslant 0.$$

Це означає, що з умови $x > y$ випливає, що $f(x) \geqslant f(y)$, тобто $f(x)$ монотонно зростає.

**Означення 3.2. (коерцитивного оператора).** Оператор $A : X \to X^*$ називається **коерцитивним**, якщо

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = +\infty. \tag{3.2}$$

При $X = \mathbb{R}^1$ умова коерцитивності означає, що функція $A(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ та $A(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$.

Сформулюємо і доведемо основну теорему даного розділу — теорему існування розв'язку операторного рівняння $Au = f$ з монотонним коерцитивним неперервним оператором, що діє з рефлексивного сепарабельного банахового простору $X$ в $X^*$.

**Теорема 3.1.** *Нехай $X$ — рефлексивний сепарабельний банахів простір. Оператор $A : X \to X^*$ — монотонний коерцитивний і неперервний. Тоді операторне рівняння*

$$Au = f \tag{3.3}$$

*має розв'язок в $X$ для будь-якої правої частини $f \in X^*$.*

Використаємо надалі наступну лему.

**Лема 3.1.** ***(про гострий кут).*** *Нехай $\Omega$ — опукла замкнена обмежена множина в $\mathbb{R}^n$ і нехай $0 \in \Omega \setminus \partial\Omega$ — внутрішня точка області $\Omega$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ — неперервне відображення, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ та задовольняє умову*

$$(f(x), x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot x_i \geqslant 0, \qquad \forall x \in \partial\Omega. \tag{3.4}$$

*Тоді рівняння*

$$f(x) = 0 \tag{3.5}$$

*має розв'язок в області $\Omega$.*

*Доведення леми.* Назва леми походить з умови (3.4). Скалярний добуток $(f(x), x) = |f(x)||x| \cos\angle(f(x), x)$. Значить, умова (3.4) еквівалентна $\cos\angle(f(x), x) \geqslant 0$, тобто кут між векторами $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ та $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ гострий. Покладемо

$$F(x) = x - f(x) \tag{3.6}$$

і до неперервного відображення $F : \Omega \to \mathbb{R}$ застосуємо лему 2.2. Перевіримо, що для відображення (3.6) виконуються умови цієї леми. Доведення будемо проводити від супротивного. Нехай $\exists\, x' \in \partial\Omega :\ F(x') = \lambda x'$ для деякого $\lambda > 1$. З (3.6) матимемо: $x' - f(x') = \lambda x'$. Помножимо скалярно останню рівність на $x'$

$$(x', x') - (x', f(x')) = \lambda(x', x'), \quad (1 - \lambda)|x'|^2 = (f(x'), x')\,.$$

За умови (3.4), $(1 - \lambda)|x'|^2 \geqslant 0$. Але $\lambda > 1$ та $x' \neq 0$ оскільки $x' \in \partial\Omega$, тому $(1 - \lambda)|x'|^2 < 0$ отримуємо протиріччя. Отже, умови леми 2.2 виконано. Значить, відображення $F(x) = x - f(x)$ має нерухому точку $x_0 \in \Omega : F(x_0) = x_0 - f(x_0) = x_0$, звідки $f(x_0) = 0$. Лему доведено. □

*Доведення теореми 3.1.* Для доведення застосуємо метод Гальоркіна — метод побудови скінченновимірних наближень розв'язку операторного рівняння (3.3). А саме, доведення складатиметься з наступних етапів.

1. Завдяки сепарабельності банахового простору $X$, існує злічена всюди щільна підмножина $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$ в $X$. З послідовності $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ виберемо підпослідовність $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ таким чином, щоб будь-який набір $\{w_1, w_2, \dots, w_j\}$ був лінійно незалежним для довільного $j$. Розглянемо рівняння $Au = f$ на скінченновимірному підпросторі $F_j \subset X :\ F_j = \{c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_j w_j,\ c_k \in \mathbb{R}^1,\ k = 1, 2, \dots, j\}$. Визначимо

гальоркінські наближення $u_j = c_1w_1 + \dots + c_jw_j$, як розв'язок системи рівнянь

$$\langle Au_j, w_i\rangle = \langle f, w_i\rangle,\ i = 1, ..., j.$$

Доведемо, що для кожного $j$ на $F_j$ існує розв'язок системи.

2. Доведемо обмеженість послідовності $\{u_j\}$ — послідовності гальоркінських наближень розв'язку рівняння 3.3, тобто покажемо, що існує $M > 0$ для якого $\|u_j\| \leqslant M$, $j = 1, 2, \dots$. Також покажемо обмеженість в $X^*$ послідовності $\{Au_j\}_{j=1}^{\infty}$.

3. Доведемо слабку збіжність деякої підпослідовності $\{u_{jk}\}$ послідовності $\{u_j\}$ до деякого елемента $u_0 \in X$.

4. Доведемо, що $u_0 \in X-$ розв'язок операторного рівняння (3.3).

Приступимо до реалізації цих етапів.

1. Зафіксуємо деяке $j$ і розглянемо скінченновимірний підпростір в $X$

$$F_j \subset X\colon\ F_j = \{c_1w_1 + c_2w_2 + \dots + c_jw_j,\ c_k \in \mathbb{R}^1,\ k = 1, 2, \dots, j\}.$$

Визначимо гальоркінські наближення $u_j = c_1w_1 + \dots + c_jw_j$, як розв'язок системи рівнянь

$$\langle Au_j, w_k\rangle = \langle f, w_k\rangle,\ k = 1, ..., j. \tag{3.7}$$

Існування розв'язку (3.7) доведемо за допомогою леми 3.1. Якщо (3.7) помножити на $c_k$ і просумувати за $k = 1, 2, \dots, j$, то отримаємо

$$\langle Au_j, w\rangle = \langle f, w\rangle,\ \forall w \in F_j, \tag{3.8}$$

де $w = c_1w_1 + c_2w_2 + \dots + c_jw_j$. Для того щоб знайти скінченновимірний розв'язок (3.8) $u_j \in F_j$ для фіксованої базисної системи $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, достатньо знайти коефіцієнти $c_1, c_2, \dots, c_j$ розкладу цього розв'язку. Тобто, задача знаходження розв'язку (3.8) зводиться до знаходження вектора $c^* = \{c_1^*, c_2^*, \dots, c_j^*\} \in \mathbb{R}^j$.

Множину $\Omega \in \mathbb{R}^j$ з леми 3.1 про гострий кут визначимо наступним чином: $\Omega = \{c \in \mathbb{R}^j : \|c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_j w_j\| \leqslant M\}$ для деякого $M > 0$. Обмеженість та замкненість множини $\Omega$ очевидна. Опуклість випливає з нерівності трикутника для норми $\|a + b\| \leqslant \|a\| + \|b\|$. Дійсно, нехай $v_1, v_2 \in \Omega$. Покажемо, що

$$\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 \in \Omega,$$
$$\forall \lambda \in (0,1): \quad \|\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2\| \leqslant \lambda \|v_1\| + (1-\lambda)\|v_2\|.$$

Оскільки $v_1, v_2 \in \Omega$, то $\|v_1\| \leqslant M$, $\|v_2\| \leqslant M$. Тобто

$$\|\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2\| \leqslant \lambda M + (1-\lambda) M = M.$$

Остання нерівність означає, що $\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 \in \Omega$. Визначимо функцію $g : \Omega \to \mathbb{R}^j$ з леми 3.1 про гострий кут

$$g(c) = (g_1(c), ..., g_j(c)), \;\; g_k(c) = \langle A(c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_j w_j) - f, w_k \rangle.$$

З умови неперервності оператора $A$ маємо неперервність функції $g$. Перевіримо, що $g$ задовольняє нерівність (3.4). Дійсно,

$$(g(c), c) = \sum_{k=1}^{j} g_k(c) \cdot c_k = \sum_{k=1}^{j} \langle A(c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_j w_j) - f, w_k \rangle \cdot c_k$$
$$= \sum_{k=1}^{j} \langle A(c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_j w_j) - f, w_k c_k \rangle =$$
$$\langle A(c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_j w_j) - f, w \rangle = \langle Aw - f, w \rangle, \quad w \in F_j.$$

З умови коерцитивності оператора $A$

$$\langle Aw, w \rangle \geqslant \|w\|_X \|f\|_{X^*},$$
$$|\langle f, w \rangle| \leqslant \|w\|_X \|f\|_{X^*} \Rightarrow -\langle f, w \rangle \geqslant -\|f\|_{X^*} \|w\|_X.$$

Використовуючи ці нерівності, матимемо

$$(g(c), c) = \langle Aw - f, w\rangle = \langle Aw, w\rangle - \langle f, w\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \|w\|_X \|f\|_{X^*} - \|f\|_{X^*}\|w\|_X = 0.$$

Таким чином, усі умови леми 3.1 виконано. Отже

$$\exists\, c^* \in \Omega : \quad g(c^*) = 0, \quad c^* = \left(c_1^* w_1 + c_2^* w_2 + \cdots + c_j^* w_j\right),$$
$$g(c^*) = \langle A(c_1^* w_1 + c_2^* w_2 + \cdots + c_j^* w_j) - f, w\rangle = 0,$$
$$\forall k = 1, 2, \ldots, j.$$

Покладемо $u_j^* = c_1^* w_1 + c_2^* w_2 + \cdots + c_j^* w_j$, $\langle Au_j^*, w_k\rangle = \langle f, w_k\rangle$, або

$$\langle Au_j^*, w\rangle = \langle f, w\rangle, \qquad \forall w \in F_j.$$

Тобто $u_j^* \in F_j$— скінченновимірний розв'язок рівняння (3.3). Оскільки $c^* \in \Omega$, то $\|u_j^*\| = \|c_1^* w_1 + c_2^* w_2 + \cdots + c_j^* w_j\| \leqslant M$ за означенням множини $\Omega$. Отже, ми довели існування обмеженої скінченновимірної послідовності розв'язків (3.3) — послідовності гальоркінських наближень.

2. Доведемо обмеженість послідовності $\{Au_j\}$ в $X^*$. Розглянемо $v \in X$: $\|v\| = 1$, $v' = \delta v$; $\|v'\| = \delta$. Тоді

$$\begin{aligned} \langle Au_j, v\rangle &= \frac{1}{\delta}\langle Au_j, \delta v\rangle = \frac{1}{\delta}\langle Au_j, v'\rangle = \\ =&\frac{1}{\delta}\langle Au_j - Av' + Av', v' - u_j + u_j\rangle = \\ =&\frac{1}{\delta}\left\{\langle Au_j - Av', v' - u_j\rangle + \langle Au_j, u_j\rangle + \langle Av', v' - u_j\rangle\right\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

За умови монотонності оператора $A$ маємо $\langle Au_j - Av', v' - u_j\rangle \geqslant 0$, тоді $\langle Au_j - Av', v' - u_j\rangle = -\langle Au_j - Av', u_j - v'\rangle \leqslant 0$, $\langle Au_j, u_j\rangle = \langle f, u_j\rangle \leqslant \|f\| \cdot \|u_j\|$.

За умови неперервності оператора $A$ для $\|w\| \leqslant \delta \Rightarrow \|Aw\| \leqslant K$, тобто є локальна обмеженість — обмеженість на кожній кулі. Тоді з (3.9)

$$\langle Au_j, v\rangle \leqslant \frac{1}{\delta}\|f\|\cdot\|u_j\| + \frac{1}{\delta}\|Av'\|\cdot\|v'-u_j\| \leqslant \frac{1}{\delta}\|f\|M+$$
$$\frac{1}{\delta}K\left(\|v'\|+\|u_j\|\right) \leqslant \frac{1}{\delta}\|f\|M + \frac{1}{\delta}K\cdot\delta + \frac{1}{\delta}KM = N.$$

Тобто $\exists\, N > 0 : \ |\langle Au_j, v\rangle| \leqslant N$, $\forall v \in X$. Таким чином, доведено обмеженість $\{Au_j\}$ в $X^*$.

3. Існування підпослідовності $u_{j_k} \rightharpoonup u_0$ випливає з теореми 1.10 — властивості слабкої компактності рефлексивного банахового простору.

4. *Зауваження 1.* $\overline{\cup_{j=1}^{\infty} F_j} = X$. Тобто, для довільного $u_0 \in X$ існує підпослідовність $\{u^*_{j_k}\} \subset F_j$ така, що $u^*_{j_k} \to u_0$. Фіксуємо деяке $n \in \mathbb{N}$ і розглянемо $j_k \geqslant n$. Для будь-якого $w \in F_n$ матимемо

$$0 \leqslant \langle Au_{j_k} - Au^*_{j_k} + \varepsilon w), u_{j_k} - (u^*_{j_k} + \varepsilon w)\rangle \tag{3.10}$$

за умови монотонності оператора $A$. З іншого боку, $u_{j_k} - u^*_{j_k} \in F_{j_k}$, але $j_k \geqslant n$. І оскільки $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset F_{j_k}$, то $\varepsilon w \in F_n \Rightarrow \varepsilon w \in F_{j_k}$. Тобто, $u_{j_k} - u^*_{j_k} - \varepsilon w \in F_{j_k}$. За умови того, що $u_{j_k}$– підпослідовність скінченновимірних розв'язків (3.3), отримуємо

$$\langle Au_{j_k}, u_{j_k} - u^*_{j_k} - \varepsilon w\rangle = \langle f, u_{j_k} - u^*_{j_k} - \varepsilon w\rangle.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} &\langle Au_{j_k} - A(u^*_{j_k} + \varepsilon w), u_{j_k} - u^*_{j_k} - \varepsilon w\rangle = \\ =&\langle f, u_{j_k} - u^*_{j_k} - \varepsilon w\rangle - \langle A(u^*_{j_k} + \varepsilon w), u_{j_k} - u^*_{j_k} - \varepsilon w\rangle. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Із слабкої збіжності $u_{j_k} \rightharpoonup u_0$, $u^*_{j_k} \rightharpoonup u_0$, для будь-якого $f \in X^*$ маємо

$$\langle f, u_{j_k} - u^*_{j_k} - \varepsilon w\rangle \to \langle f, -\varepsilon w\rangle, \quad j_k \to \infty,$$
$$\langle A(u^*_{j_k} + \varepsilon w), u_{j_k} - u^*_{j_k} - \varepsilon w\rangle \to \langle A(u_0 + \varepsilon w), -\varepsilon w\rangle,$$

оскільки $u^*_{j_k} \to u_0$ сильно в $X$. Таким чином, переходячи в (3.11) до границі по $j_k \to \infty$ з урахуванням (3.10), матимемо

$$\langle f, -\varepsilon w\rangle - \langle A(u_0 + \varepsilon w), -\varepsilon w\rangle \geqslant 0,$$
$$\langle f, w\rangle - \langle A(u_0 + \varepsilon w), w\rangle \leqslant 0.$$

Перейдемо до границі в останній нерівності по $\varepsilon \to 0$

$$\langle f, w\rangle - \langle Au_0, w\rangle \leqslant 0.$$

Тут використано неперервність оператора $A : X \to X^*$, тобто якщо $u_0 + \varepsilon w \to u_0$ при $\varepsilon \to 0$, то $A(u_0 + \varepsilon w) \to Au_0$ в $X^*$. Звідси випливає, що $\langle A(u_0 + \varepsilon w), w\rangle \to \langle Au_0, w\rangle$.

Таким чином, для довільного $w \in F_n$ має місце нерівність

$$\langle Au_0 - f, w\rangle \geqslant 0. \tag{3.12}$$

Оскільки $\overline{\cup_{j=1}^{\infty} F_j} = X$, то (3.12) справджується для довільного $w \in X$

$$\langle Au_0 - f, w\rangle \geqslant 0, \qquad \forall w \in X. \tag{3.13}$$

Аналогічну нерівність отримуємо для $-w \in X$

$$\langle Au_0 - f, -w\rangle \geqslant 0,$$

або

$$\langle Au_0 - f, w\rangle \leqslant 0. \tag{3.14}$$

З (3.13) і (3.14) маємо $\langle Au_0 - f, w\rangle = 0$, $\forall w \in X$. Тобто, маємо рівність в $X^*$: $Au_0 = f$. Отже, $u_0 \in X-$ розв'язок операторного рівняння (3.3). Теорему доведено. □

*Приклад* 3.1. Нехай $X = \mathbb{R}^1$, $X^* = \mathbb{R}^1$, $A : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1-$ неперервна монотонна функція: $\langle Ax, x\rangle = Ax \cdot x$. Умова коерцитивності виглядатиме наступним чином:

$$\frac{Ax \cdot x}{|x|} \to \infty,$$

якщо $|x| \to \infty$. Тобто $Ax \to +\infty$, якщо $x \to +\infty$, $Ax \to -\infty$, якщо $x \to -\infty$. Таким чином, для довільного $f \in \mathbb{R}^1$ існує $x_0 \in \mathbb{R}^1$, що $Ax_0 = f$. Отже, існування розв'язку рівняння отримано без використання умови монотонності оператора (функції) $A$.

**Висновок:** у скінченновимірному випадку умова монотонності оператора не потрібна для існування розв'язку операторного рівняння (3.3).

## 3.2 Сильна збіжність гальоркінських наближень.

У даному підрозділі розглянемо оператори, що задовольняють умову

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant \varphi\left(\|u - v\|\right) \tag{3.15}$$

для неперервної функції $\varphi : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$, $\varphi(s) > 0$ для $s > 0$ і $\varphi(0) = 0$.

Умова (3.15) сильніша, ніж умова монотонності, оскільки $\varphi(\|u - v\|) \geqslant 0$, тому можна очікувати, що при виконанні (3.15) послідовність гальоркінських наближень, яка була побудована в пункті 1 теореми 3.1, буде сильно збігатися до розв'язку $u_0$ рівняння (3.3) (за умови монотонності оператора $A$ ми мали лише слабку збіжність підпослідовності гальоркінських наближень до розв'язку операторного рівняння (3.3)).

Має місце наступний результат.

**Теорема 3.2.** *Нехай $X$— рефлексивний сепарабельний банахів простір, $A : X \to X^*$— неперервний коерцитивний оператор, який задовольняє умову* (3.15) *для деякої неперервної функції $\varphi : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$, $\varphi(s) > 0$, $s > 0$ і $\varphi(0) = 0$. Нехай також $u_j(x)$— послідовність гальоркінських набли-*

*жень*

$$u_j \rightharpoonup u_0, \qquad Au_j \rightharpoonup h \tag{3.16}$$

*для деякого $h \in X^*$. Тоді $u_j \to u_0$ сильно.*

*Доведення.* Покажемо, що $Au_j \rightharpoonup f$, тобто $h = f-$ права частина рівняння (3.3). Дійсно, за умови, що $u_j-$ послідовність гальоркінських наближень

$$Au_j = f \qquad \text{або} \qquad \langle Au_j, w_k\rangle = \langle f, w_k\rangle$$

для кожного фіксованого $k$.

Зі слабкої збіжності $Au_j \rightharpoonup h$, $j \to \infty$, для кожного фіксованого $k$ отримуємо: $\langle Au_j, w_k\rangle \xrightarrow{j\to\infty} \langle h, w_k\rangle$, але ліва частина $\langle Au_j, w_k\rangle = \langle f, w_k\rangle$.

Таким чином, $\langle Au_j, w_k\rangle = \langle f, w_k\rangle$, $\forall w_k \in F_k$. Але $\overline{\cup_{k=1}^{\infty} F_k} = X$ (див. зауваження 1). Тому $\langle h, w\rangle = \langle f, w\rangle$, $\forall w \in X$, отже, $h = f$.

Розглянемо послідовність $\{u_j\}$. У теоремі 3.1, п. 2. було з'ясовано, що послідовність $\{u_j\}$ рівномірно обмежена:
$\exists M > 0 : \|u_j\| \leqslant M$, $\forall j$. Оскільки $u_j \rightharpoonup u_0$, то $\|u_0\| \leqslant M$. Отже,

$$\|u_j - u_0\| \leqslant \|u_j\| + \|u_0\| \leqslant M + M = 2M. \tag{3.17}$$

Позначимо

$$m(\varepsilon) = \min_{\varepsilon \leqslant s \leqslant 2M} \varphi(s),$$

$$\varphi(s) \geqslant m(\varepsilon) > 0; \qquad \forall s:\ \varepsilon \leqslant s \leqslant 2M. \tag{3.18}$$

За умови (3.15)

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(\|u_j - u_0\|\right) \leqslant \langle Au_j - Au_0, u_j - u_0\rangle = \\
=&\langle Au_j, u_j\rangle - \langle Au_j, u_0\rangle - \langle Au_0, u_j - u_0\rangle = \\
=&\langle f, u_j\rangle - \langle Au_j, u_0\rangle - \langle Au_0, u_j - u_0\rangle.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

При $j \to \infty$, $\langle f, u_j \rangle \to \langle f, u_0 \rangle$, оскільки $u_j \rightharpoonup u_0$ та $f \in X^*$,
$\langle Au_j, u_0 \rangle \to \langle f, u_0 \rangle$, оскільки $Au_j \rightharpoonup f$ та $u_0 \in X$,
$\langle Au_0, u_j - u_0 \rangle \to 0$ за умови $u_j \rightharpoonup u_0$ та $Au_0 \in X^*$.

Тоді, переходячи до границі по $j \to \infty$ у (3.19), отримуємо $\varphi(\|u_j - u_0\|) \to 0$ або

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists J = J(\varepsilon) > 0 : \varphi\left(\|u_j - u_0\|\right) < m(\varepsilon),\ \forall j \geqslant J, \quad (3.20)$$

але

$$m(\varepsilon) = \min_{\varepsilon \leqslant s \leqslant 2M} \varphi(s).$$

Покладемо $s = \|u_j - u_0\|$. З (3.17) випливає, що $s \leqslant 2M$. Отже, $\varphi(s) \geqslant m(\varepsilon) \geqslant 0$ з означення $m(\varepsilon)$. Але з (3.20) маємо $\varphi(s) < m(\varepsilon)$, тому $s \leqslant \varepsilon$, тобто $\|u_j - u_0\| \leqslant \varepsilon$. А це означає, що $u_j \to u_0$ сильно в $X$. Теорему доведено. $\square$

Розглянемо далі приклади застосування теореми 3.1 у теорії існування розв'язків задачі Діріхле для нелінійного диференціального рівняння другого порядку дивергентного вигляду в соболєвському просторі $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$, $p > 1$.

**3.3 Існування розв'язку задачі Діріхле.** В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з гладкою межею $\partial\Omega$ розглянемо задачу Діріхле для нелінійного диференціального рівняння другого порядку дивергентного вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x; \nabla u) = f(x), \qquad (3.21)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (3.22)$$

Функції $a_i$ в (3.21) — функції $2n$ змінних.

Покладемо $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Тому $a_i(x, \xi)$ :

$\Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Похідна $\dfrac{d}{dx_i} a_i(x, \xi)$– це повна похідна по $x$ функції $a_i(x, \xi)$ $2n$ змінних

$$\frac{d}{dx_i} a_i(x, \xi) = \frac{d}{dx_i} a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) =$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial a_i}{\partial \xi_n}\frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

Оскільки $\xi = \nabla u$, тому

$$\frac{d}{dx_i} a_i(x, \nabla u) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Враховуючи останню рівність, (3.21) можна переписати наступним чином:

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial \xi_k}(x; \nabla u) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(x; \nabla u) = f(x),$$

звідки випливає, що (3.21) — рівняння другого порядку, нелінійне, його коефіцієнти $a_i$ залежать від $\nabla u$. Дивергентна форма рівняння (3.21) дозволяє шукати розв'язок задачі (3.21), (3.22) з класу $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$, тобто розв'язок, що має похідну лише першого порядку, незважаючи на те, що це – розв'язок рівняння другого порядку.

Помножимо рівняння (3.21) на деяку функцію $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ і проінтегруємо отриману рівність по $\Omega$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{d}{dx_i} a_i(x; \nabla u) \cdot \eta(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\eta(x)\, dx. \qquad (3.23)$$

Ліву частину останньої рівності проінтегруємо, використовуючи формулу Гаусса-Остроградського

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{F} \cdot G\, dx = \int_{\partial\Omega} (\vec{F}, \vec{n}) \cdot G\, dS - \int_\Omega (\vec{F} \cdot \nabla G)\, dx,$$

де у якості $\vec{F} = \vec{a}(x; \nabla u) = (a_1(x; \nabla u), a_2(x; \nabla u), \ldots, a_n(x; \nabla u))$, $G = \eta(x)$. Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{d}{dx_i} a_i(x; \nabla u) \cdot \eta(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} (\vec{a}, \vec{n}) \cdot \eta(x)\, dS -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x; \nabla u) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\, dx = - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x; \nabla u) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\, dx, \tag{3.24}$$

оскільки $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, то $\eta|_{\partial\Omega} = 0$.

Підставляючи (3.24) у (3.23), маємо

$$- \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x; \nabla u) \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega f(x) \cdot \eta(x)\, dx.$$

**Означення 3.3. (узагальнений розв'язок задачі Діріхле** (3.21), (3.22)**).** Функція $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ називається узагальненим розв'язком задачі Діріхле (3.21), (3.22), якщо для будь-якої функції $\eta(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ вона задовольняє інтегральну тотожність

$$- \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x; \nabla u) \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\, dx = \int_\Omega f \cdot \eta\, dx. \tag{3.25}$$

*Зауваження* 3.1. Внаслідок того, що $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$, рівність (3.25) можна розповсюдити на довільну функцію $\eta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, і в означенні 3.3 вважати пробну функцію $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$.

Розглянемо питання коректності означення 3.3, тобто дамо відповідь на питання: "Які властивості повинні мати функції $a_i$ та $f$, щоб для довільного $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ інтеграли в (3.25) були скінченними?"

**Твердження 3.1.** ***(про коректність означення 3.3).*** *Нехай у* (3.25) *функція* $f \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$; $p > 1$, *а функції* $a_i(x; \xi)$

*задовольняють наступну умову:*

$$\exists C > 0: \quad |a_i(x;\xi)| \leqslant C(1 + |\xi|^{p-1}). \tag{3.26}$$

*Тоді означення 3.3 узагальненого розв'язку задачі* (3.21), (3.22) *є коректним, тобто інтеграли в* (3.25) *набувають скінченних значень.*

*Доведення.* Розглянемо ліву частину (3.25). Оскільки $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, то $\nabla u \in L_p(\Omega)$. Кожна з функцій $a_i(x;\xi)$ визначає оператор Немицького $N_i : u \mapsto a_i(x;\nabla u)$, який діє з простору $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. Покажемо, що за умови (3.26) образ $N_i$ належить $L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, тобто $a_i(x;\nabla u) \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ для $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. Дійсно,

$$\int_\Omega |a_i(x;\nabla u)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx \leqslant C^{\frac{p}{p-1}} \int_\Omega \left(1 + |\nabla u|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \cdot C^{\frac{p}{p-1}} \int_\Omega dx + C_1 \cdot C^{\frac{p}{p-1}} \int_\Omega (|\nabla u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}\,dx =$$
$$= C_2 mes\Omega + C_2 \|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega)} < \infty,$$

оскільки $\Omega-$ обмежена множина та $\nabla u \in L_p$.

Для оцінки $\displaystyle\int_\Omega a_i(x;\nabla u) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\,dx$ застосуємо нерівність Гельдера з показником $\dfrac{p}{p-1}$ для $a_i$ і $p$ для $\dfrac{\partial \eta}{\partial x_i}$

$$\left| \int_\Omega a_i(x;\nabla u) \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\,dx \right| \leqslant \int_\Omega |a_i(x;\nabla u)| \left| \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \left( \int_\Omega |a_i(x;\nabla u)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_\Omega \left| \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \|a_i\|_{L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \cdot \|\nabla \eta\|_{L_p} < \infty,$$

оскільки $a_i(x;\nabla u) \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ та $\nabla \eta \in L_p(\Omega)$.

Для $f \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ та $\eta \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ використаємо нерівність Гельдера в правій частині (3.25)

$$\left|\int_\Omega f(x)\cdot\eta(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_\Omega |f|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |\eta|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \\ = \|f\|_{L_{\frac{p}{p-1}}} \cdot \|\eta\|_{L_p} < \infty.$$

Твердження доведено. □

**Теорема 3.3.** ***(існування розв'язку задачі Діріхле*** (3.21)***,*** (3.22) ***у просторі Соболева*** $\mathbf{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}$***,*** $\mathbf{p>1}$***).*** *Нехай коефіцієнти* $a_i(x;\xi) : \Omega\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *неперервні по* $x \in \Omega$ *та по* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *і задовольняють наступні умови:*

1. *Умову зростання за змінною* $\xi$*:*

$$\exists\, C_1 > 0 :\ |a_i(x;\xi)| \leqslant C_1(1+|\xi|^{p-1}); i = 1,\ldots,n. \quad (3.27)$$

2. *Умову монотонності:*

$$\exists C_2 > 0 : \sum_{i=1}^n \left(a_i(x;\xi) - a_i(x;\eta)\right)(\xi_i-\eta_i) \geqslant C_2|\xi-\eta|^p,\ p>1. \quad (3.28)$$

*Тоді для будь-якої функції* $f \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$*,* $p > 1$*, існує єдиний узагальнений розв'язок задачі Діріхле* (3.21)*,* (3.22) *у соболєвському просторі* $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$*,* $p > 1$*.*

*Доведення.* Для доведення існування розв'язку задачі Діріхле (3.21), (3.22) використаємо результат теореми 3.1 про існування розв'язків операторних рівнянь $Au = f$ з монотонним коерцитивним та неперервним оператором $A$, що діє з $X$ в $X^*$, де $X-$ рефлексивний сепарабельний банахів простір.

Покладемо $X = \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, $p > 1$. Відомо, що $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)-$ рефлексивний сепарабельний банахів простір. Визначимо оператор $A : \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \to \left(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\right)^*$ таким чином, щоб задача Діріхле (3.21), (3.22) була еквівалентна операторному рівнянню $Au = f$.

Такий оператор визначається рівністю

$$\langle Au, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i(x; \nabla u) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx. \tag{3.29}$$

для довільного $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$. Функціонал $f \in \left(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\right)^*$ визначається за допомогою функції $f(x) \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ наступним чином:

$$\langle f, \varphi \rangle = -\int_{\Omega} f(x) \cdot \varphi(x)\, dx, \tag{3.30}$$

для довільного $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$. Тоді, враховуючи означення 3.3 узагальненого розв'язку задачі Діріхле (3.21), (3.22) з $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, маємо: $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)-$ узагальнений розв'язок (3.21), (3.22) тоді і тільки тоді, коли $u$ задовольняє операторне рівняння

$$Au = f \tag{3.31}$$

з оператором $A : \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \to \left(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\right)^*$ і функціоналом $f \in \left(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\right)^*$, які визначаються формулами (3.29) і (3.30) відповідно. Таким чином, задача (3.21), (3.22) еквівалентна операторному рівнянню (3.31).

Існування розв'язку (3.31) доведемо за допомогою теореми 3.1. Для цього потрібно перевірити умови цієї теореми для оператора $A$, що визначається рівністю (3.29). Перевіримо спочатку неперервність оператора (3.29). Нехай $u_j \to u_0$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$. Покажемо, що $Au_j \to Au_0$ в $\left(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\right)^*$, тобто

$$\|Au_j - Au_0\|_{\left(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\right)^*} = \sup_{\|\varphi\|=1} \langle Au_j - Au_0, \varphi\rangle \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Маємо

$$\langle Au_j - Au_0, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^n \int_\Omega (a_i(x;\nabla u_j) - a_i(x;\nabla u_0))\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx,$$

$$|\langle Au_j - Au_0, \varphi\rangle| \leqslant \sum_{i=1}^n \int_\Omega |a_i(x;\nabla u_j) - a_i(x;\nabla u_0)| \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |a_i(x;\nabla u_j) - a_i(x;\nabla u_0)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\|_{L_p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |a_i(x;\nabla u_j) - a_i(x;\nabla u_0)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \|N_i u_j - N_i u_0\|_{L_{\frac{p}{p-1}}} \cdot \|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}. \tag{3.32}$$

Тут $N_i u_j = a_i(x;\nabla u_j)$– оператори Немицького, що визначаються функціями $a_i(x;\xi)$. З властивостей оператора Немицького та умов на функції $a_i(x,\xi)$ випливає, що відображення $N_i : \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \to L_{\frac{p}{p-1}}$ неперервні. Отже, якщо $u_j \to u_0$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, то $N_i u_j \to N_i u_0$ в $L_{\frac{p}{p-1}}$ та $\|N_i u_j - N_i u_0\|_{L_{\frac{p}{p-1}}} \to 0$ при $j \to \infty$. З (3.32) отримаємо

$$\frac{\langle Au_j - Au_0, \varphi\rangle}{\|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}} = \sum_{i=1}^n \|N_i u_j - N_i u_0\|_{L_{\frac{p}{p-1}}} \to 0.$$

Остання рівність означає, що $\|Au_j - Au_0\|_{\left(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\right)^*} \to 0$ при $j \to \infty$. Неперервність оператора $A : \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \to \left(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\right)^*$ доведено.

Доведемо монотонність оператора $A$, визначеного формулою (3.29). Для $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$ маємо

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega [a_i(x;\nabla u) - a_i(x;\nabla v)] \left[\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right] dx.$$

Використаємо умову (3.28) для $\xi = \nabla u$, $\eta = \nabla v$

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant C_2 \int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^p \, dx = C_2 \|\nabla u - \nabla v\|^p_{L_p} \geqslant 0.$$

Монотонність оператора (3.29) встановлена.

Покажемо коерцитивність оператора $A$. Необхідно перевірити, що

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}} = +\infty.$$

Покладемо в (3.28) $\eta = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x;\xi)\xi_i \geqslant C_2|\xi|^p + \sum_{i=1}^{n} a_i(x;0)\xi_i. \tag{3.33}$$

Оскільки $a_i(x;\xi)$ неперервні в $\Omega \times \mathbb{R}^n$, то існує додатна стала $M > 0$: $|a_i(x;0)| \leqslant M$,n$\forall x \in \Omega$ і

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i(x;0)\xi_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i(x;0)| \cdot |\xi_i| \leqslant M \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \cdot 1 \leqslant$$

$$\leqslant M \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} = M|\xi|\sqrt{n} \leqslant (\varepsilon|\xi|) \left(\frac{M\sqrt{n}}{\varepsilon}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon^p |\xi|^p}{p} + \left(\frac{M\sqrt{n}}{\varepsilon}\right)^{\frac{p}{p-1}} \frac{p-1}{p} = \frac{C_2}{2}|\xi|^p + C_3.$$

Тут використано нерівність Юнга з $\varepsilon$

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{b^q}{\varepsilon^q q}, \tag{3.34}$$

для довільних $a, b \geqslant 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\varepsilon > 0$. Вибрано $\varepsilon$ так, щоб $\dfrac{\varepsilon^p}{p} = \dfrac{C_2}{2}$, де $C_2-$ стала з умови (3.28). З (3.3)

$$-\frac{C_2}{2}|\xi|^p - C_3 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i(x;0)\xi_i \leqslant \frac{C_2}{2}|\xi|^p + C_3. \tag{3.35}$$

Підставимо ліву частину (3.35) у (3.33)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x;\xi)\xi_i \geqslant C_2|\xi|^p - \frac{C_2}{2}|\xi|^p - C_3 = \frac{C_2}{2}|\xi|^p - C_3, \tag{3.36}$$

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i(x;\nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx}{\|u\|}. \tag{3.37}$$

Покладемо в (3.37) $\nabla u = \xi$ і використовуємо (3.36)

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} \geqslant \frac{\dfrac{C_2}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - C_3}{\|u\|} =$$
$$= \frac{\dfrac{C_2}{2}\|\nabla u\|^p - C_3}{\|u\|} = \frac{C_2}{2}\|u\|^{p-1} - \frac{C_3}{\|u\|}.$$

Оскільки $p > 1$, то $\frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|} \to \infty$ при $\|u\| \to \infty$. Коерцитивність оператора (3.29) доведено.

Таким чином, умови теореми 3.1 виконано. Отже, для будь-якого $f \in \left(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\right)^*$ існує розв'язок операторного рівняння (3.31) з $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$. А оскільки задача Діріхле (3.21), (3.22) еквівалентна операторному рівнянню (3.31), то існує розв'язок задачі (3.21), (3.22) в соболєвському просторі $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$.

Встановимо єдиність розв'язку. Нехай існують два розв'язки задачі (3.21), (3.22). Це відповідає тому, що існують два розв'язки операторного рівняння (3.31): $Au_1 = f$; $Au_2 = f$, $u_1, u_2 \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, $f \in \left(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\right)^*$. Внаслідок (3.28) (при $\xi = \nabla u$, $\eta = \nabla v$)

$$0 = \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle \geqslant C_2\|u_1 - u_2\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}, \quad \|u_1 - u_2\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} \leqslant 0.$$

Звідки випливає, що $u_1 \equiv u_2$. Теорему доведено. □

Теорема 3.3 допомагає встановити аналог теореми Ріса - теореми про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала над $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$.

**Теорема 3.4.** *Нехай* $h \in \left(\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)\right)^*$ – *лінійний неперервний функціонал над* $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. *Тоді існує набір функцій* $(h_1, h_2, \ldots, h_n): \; h_i(x) \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *такий, що*

$$\langle h, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} h_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx, \qquad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega). \tag{3.38}$$

*Тобто дія функціонала* $h \in \left(\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)\right)^*$ *задаєтъся за допомогою функції* $h_i(x) \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ *за формулою* (3.38).

*Доведення.* Попередня теорема встановлювала існування розв'язку операторного рівняння (3.31) для довільної правої частини $f \in \left(\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)\right)^*$ з оператором $\langle Au, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i(x; \nabla u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx$. Нехай $f = h \in \left(\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)\right)^*$, тоді для нього існує розв'язок $u_h \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ рівняння $\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i(x; \nabla u_h) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx \equiv \langle h; \varphi \rangle$. Отже, покладемо $h_i(x) = a_i(x; \nabla u_h(x)) \in L_{\frac{p}{p-1}}$ (див. твердження 3.1), бо $u_h(x) \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. Таким чином, (3.38) доведено. $\square$

**3.4 Поняття про оператори типу $(\mathbf{S})_+$.** Вперше поняття оператора типу $(S)_+$ з'явилося в роботах Ф.Е. Браудера, як узагальнення поняття монотонного оператора. Основні результати в теорії відображень класу $(S)_+$ отримано в роботах Ф.Е. Браудера та І.В. Скрипника. До того ж І.В. Скрипник вперше застосував топологічний підхід в цій теорії (див.

розділ 4 цього посібника). Згадана теорія дає можливість вивчати нові типи диференціальних задач. Основні ідеї, широкі узагальнення та багато застосувань до нелінійних диференціальних рівнянь можна знайти в монографіях [24],[25].

З теореми 3.2 випливає, що за умов (3.15), $\lim_{j\to\infty}\langle Av_j, v_j - v_0\rangle = 0$ та $v_j \rightharpoonup v_0$ маємо сильну збіжність $v_j \to v_0$. Насправді, умова $\lim\limits_{j\to\infty}\langle Av_j, v_j - v_0\rangle = 0$ може бути переписана так: $\lim\limits_{j\to\infty}\langle Av_j - Av_0, v_j - v_0\rangle = 0$, оскільки $\lim\limits_{j\to\infty}\langle Av_0, v_j - v_0\rangle = 0$, тому що $v_j \rightharpoonup v_0$ та $Av_0 \in X^*$. Таким чином, справджується

**Твердження 3.2.** *Нехай оператор $A : X \to X^*$ задовольняє умови* (3.15) *та* $\lim\limits_{j\to\infty}\langle Av_j, v_j - v_0\rangle = 0$. *Тоді зі слабкої збіжності $v_j \rightharpoonup v_0$ в $X$ маємо сильну збіжність $v_j \to v_0$.*

Це дозволяє виділити цілий клас операторів, для яких має місце твердження 3.2.

**Означення 3.4. (умова $(\mathbf{S})_+$).** Оператор $A : X \to X^*$ задовольняє умову $(S_+)$, якщо для довільної послідовності $\{u_j\} \subset X$ такої, що

$$u_j \rightharpoonup u_0, \quad \lim_{j\to\infty}\langle Au_j,\ u_j - u_0\rangle \leqslant 0 \tag{3.39}$$

для деякого $u_0 \in X$ маємо, що $u_j \to u_0$.

Доведемо абстрактну теорему про існування розв'язку операторного рівняння

$$Au = f \tag{3.40}$$

з оператором $A : X \to X^*$, який задовольняє умову $(S)_+$.

**Теорема 3.5.** ***(Існування розв'язку рівняння з*** $(\mathbf{S})_+$***-оператором).*** *Нехай $X$– рефлексивний сепарабельний банахів простір, $A : X \to X^*$– обмежений неперервний коерцитивний оператор, що задовольняє умову $(S)_+$. Тоді операторне рівняння* (3.40) *має розв'язок $u \in X$ для будь-якої правої частини $f \in X^*$.*

*Доведення.* Нехай $D$– обмежена множина. Тоді існує куля $B_R : \ D \subset B_R$. Оскільки $A$– обмежений оператор, то множина $\{Au : u \in B_R\} \subset B_{R^*} = \{h \in X^* : \|h\| \leqslant R^*\}$– обмежена.

Аналогічно доведенню теореми 3.1, п. 1, побудуємо гальоркінські наближення $u_j \in F_j$ розв'язку рівняння (3.40). Визначимо $u_j \in F_j$, як розв'язок рівняння $\langle Au_j, w\rangle = \langle f, w\rangle$ для довільного $w \in F_j$. Послідовність таких розв'язків $\{u_j\}$ є обмеженою (див. доведення теореми 3.1) і за рефлексивністю простору $X$ з неї можна виділити підпослідовність $\{u_{j_k}\}$, що слабко збігається до деякого $u_0 \in X$. Далі цю підпослідовність будемо позначати $\{u_j\}$.

Для $u_0 \in X$ обираємо послідовність $u_0^{(j)} \in F_j$ таку, що $u_0^{(j)} \to u_0, \ j \to \infty$ сильно в $X$. Це можна зробити завдяки тому, що $\overline{\cup_{j=1}^{\infty} F_j} = X$.

Розглянемо

$$\begin{aligned}\langle Au_j, u_j - u_0\rangle &= \langle Au_j, u_j - u_0^{(j)} + u_0^{(j)} - u_0\rangle\langle Au_j, u_j - u_0^{(j)}\rangle + \\ &+ \langle Au_j, u_0^{(j)} - u_0\rangle = \langle f, u_j - u_0^{(j)}\rangle + \langle Au_j, u_0^{(j)} - u_0\rangle.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Оскільки $u_j \rightharpoonup u_0$ та $u_0^{(j)} \to u_0$, то для довільного $f \in X^*$, унаслідок єдиності слабкої та сильної границі $\langle f, u_j - u_0^{(j)}\rangle \to 0$ при $j \to \infty$. До того ж

$$\left|\langle Au_j, u_0^{(j)} - u_0\rangle\right| \leqslant \|Au_j\| \cdot \|u_0^{(j)} - u_0\|. \tag{3.42}$$

Тоді з обмеженості оператора $A$ та сильної збіжності $u_0^{(j)} \to$

$u_0$ випливає, що $\|u_0^{(j)} - u_0\| \to 0$. Враховуючи (3.41) і (3.42), маємо: $\langle Au_j, u_j - u_0 \rangle \to 0$ при $j \to \infty$. З умови $(S)_+$ для оператора $A$ випливає сильна збіжність гальоркінських наближень $u_j \to u_0$ при $j \to \infty$. Тоді з умови неперервності оператора $A$ маємо $Au_j \to Au_0$, $j \to \infty$. З рівномірної обмеженості послідовності $\{Au_j\}$ в $X$ випливає слабка збіжність деякої її підпослідовності $Au_j \rightharpoonup h$. У теоремі 3.2 було доведено, що $h = f$, тобто $Au_j \rightharpoonup f$, $j \to \infty$. З іншого боку, $Au_j \to Au_0$, при $j \to \infty$. В силу єдиності слабкої границі маємо $Au_0 = f$, тобто $u_0$ — розв'язок операторного рівняння (3.40). Теорему доведено. □

**3.5 Застосування теорії операторних рівнянь з $(\mathbf{S})_+$-операторами.** Теорія операторів типу $(S)_+$ є важливим інструментом у дослідженні питання існування розв'язку задачі Діріхле для нелінійного еліптичного рівняння другого порядку дивергентного вигляду. Розглянемо наступну задачу Діріхле:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, u, \nabla u) = f(x), \tag{3.43}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.44}$$

На відміну від рівняння (3.21), коефіцієнти рівняння (3.43) залежать від невідомої функції $u$ : $a_i = a_i(x, u, \nabla u)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ця обставина, як буде показано нижче, порушуватиме монотонність відповідного оператора $A : \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \to$

$\left(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\right)^*$, що задається рівністю

$$\langle Au, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i(x, u, \nabla u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx,\ u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega),\ \varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega), \tag{3.45}$$

але дозволяє встановити виконання умови $(S)_+$ для цього оператора. Для доведення існування розв'язку задачі Діріхле в просторі $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ зведемо задачу (3.43), (3.44) до операторного рівняння (3.40) з оператором (3.45) і використаємо теорему 3.5 — теорему існування розв'язку рівнянь з операторами типу $(S)_+$. Зауважимо, що розв'язок задачі (3.43), (3.44) розуміється в узагальненому сенсі, тобто за аналогією з означенням 3.3, приходимо до наступного означення розв'язку задачі Діріхле (3.43), (3.44) в соболєвському просторі $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, $p > 1$:

**Означення 3.5. (узагальненого розв'язку задачі Діріхле).** Функція $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, $p > 1$, називається **узагальненим розв'язком задачі Діріхле** (3.43), (3.44), якщо для будь-якої функції $\eta(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ виконується інтегральна тотожність

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i(x, u, \nabla u) \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\Omega} f(x)\eta(x)\, dx. \tag{3.46}$$

Має місце наступна теорема про існування розв'язку задачі (3.43), (3.44) в просторі $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, $p > 1$.

**Теорема 3.6.** *Нехай $f(x) \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, а коефіцієнти рівняння* (3.43) *задовольняють наступні умови :*

*(A1) $a_i(x, u, \xi)$ визначені та неперервні за $x \in \Omega$, $u \in \mathbb{R}^1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$;*

*(A2)* $a_i(x,u,\xi)$ *задовольняють умову зростання*

$$\exists C>0\colon |a_i(x,u,\xi)|\leqslant C\left(1+|\xi|^{p-1}+|u|^{p-1}\right),\ \forall i=1,2,\dots,n;$$

*(A3)* $\forall x\in\bar{\Omega},\ u\in\mathbb{R}^1,\ \xi,\eta\in\mathbb{R}^n,\ \exists C_2>0:$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x,u,\xi)-a_i(x,u,\eta)\right)(\xi_i-\eta_i)\geqslant C_2|\xi-\eta|^p,\ p>1;$$

*(A4)* $\forall x\in\bar{\Omega},\ u,v\in\mathbb{R}^1,\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ \exists C_3>0:$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x,u,\xi)-a_i(x,v,\xi)\right)\leqslant$$
$$\leqslant C_3|u-v|^{\alpha}\left(1+|u|+|v|+|\xi|\right)^{p-1-\alpha},\quad 0<\alpha\leqslant 1;$$

*(A5)* $\forall x\in\bar{\Omega},\ u\in\mathbb{R}^1$ *справджується тотожність* $a_i(x,u,0)\equiv 0$.

*Тоді задача Діріхле* (3.43), (3.44) *має розв'язок з простору* $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, $p>1$.

*Доведення.* Розглянемо оператор (3.45). Тоді, враховуючи означення (3.46), існування розв'язку задачі (3.43), (3.44) еквівалентне існуванню розв'язку операторного рівняння $Au=h$, де

$$\langle Au,\varphi\rangle=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a_i(x,u,\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx,\quad u\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega),\varphi\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega),$$
$$\langle h,\varphi\rangle=-\int_{\Omega}f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{3.47}$$

Для того, щоб показати існування розв'язку операторного рівняння потрібно перевірити всі умови теореми 3.5. Покладемо $X=\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, $p>1-$ рефлексивний сепарабельний банахів простір.

1. Неперервність і обмеженість оператора (3.45) випливає з неперервності і обмеженості коефіцієнтів $a_i$ рівняння (3.43) (див. умови $(A_1)$ та $(A_2)$) та властивостей оператора Немицького (див. доведення теореми 3.3 ).

2. Покажемо коерцитивність оператора (3.45). Покладемо в (A3) $\eta = 0$. Використовуючи (A5), маємо: $\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u,\xi)\xi_i \geqslant C_2|\xi|^p$. Звідки

$$\langle Au, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x,u,\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx \geqslant$$
$$\geqslant C_2 \int_\Omega |\nabla u|^p dx = C_2\|u\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)}.$$

Отже,

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} \geqslant \lim_{\|u\|\to\infty} C_2\frac{\|u\|^p}{\|u\|} = C_2 \lim_{\|u\|\to\infty} \|u\|^{p-1} = \infty,\ p > 1.$$

Далі встановимо той факт, що оператор (3.45) задовольняє умову $(S)_+$. Нехай деяка послідовність $u_j \rightharpoonup u_0$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ та $\lim\limits_{j\to\infty}\langle Au_j, u_j - u_0\rangle \leqslant 0$. Покажемо, що $u_j \to u_0$ сильно в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, тобто $\|u_j - u_0\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} \to 0$ при $j \to \infty$. Оскільки $u_j \rightharpoonup u_0$, а $Au_0 \in \left(\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)\right)^*$, то

$$\begin{aligned}&\lim_{j\to\infty}\langle Au_j - Au_0, u_j - u_0\rangle = \\ &= \lim_{j\to\infty}\langle Au_j, u_j - u_0\rangle - \lim_{j\to\infty}\langle Au_0, u_j - u_0\rangle \leqslant 0.\end{aligned} \tag{3.48}$$

З іншого боку,

$$
\begin{aligned}
&\langle Au_j - Au_0, u_j - u_0\rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (a_i(x, u_j, \nabla u_j) - a_i(x, u, \nabla u_0)) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right) dx = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (a_i(x, u_j, \nabla u_j) - a_i(x, u_j, \nabla u_0)) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right) dx + \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (a_i(x, u_j, \nabla u_0) - a_i(x, u_0, \nabla u_0)) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right) dx \geqslant \\
&\geqslant C_2 \int_\Omega |\nabla u_j - \nabla u_0|^p \, dx - \\
&C_3 \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u_j - u_0|^\alpha \left[1 + |u_0| + |u_j| + |\nabla u_0|\right]^{p-1-\alpha} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right) dx.
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

Розглянемо окремо

$$
\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u_j - u_0|^\alpha \left[1 + |u_0| + |u_j| + |\nabla u_0|\right]^{p-1-\alpha} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right) dx.
$$

Застосуємо нерівність Гельдера з показниками $\frac{p}{\alpha}$, $\frac{p}{p-1-\alpha}$ та $p$. За умови, що $\frac{\alpha}{p} + \frac{p-1-\alpha}{p} + \frac{1}{p} = 1$. Маємо

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u_j - u_0|^\alpha \left[1 + |u_0| + |u_j| + |\nabla u_0|\right]^{p-1-\alpha} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right) dx \leqslant \\
&\leqslant \left(\int_\Omega |u_j - u_0|^p \, dx\right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int_\Omega (1 + |u_0| + |u_j| + |\nabla u_0|)^p \, dx\right)^{\frac{p-1-\alpha}{p}} \times \\
&\times \left(\int_\Omega |\nabla u_j - \nabla u_0|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Оскільки $u_j \rightharpoonup u_0$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, то $\|u_j\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} \leqslant C$. З компактності вкладення $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ (теорема 1.34), випливає існування підпослідовності $u_j$, яка сильно збігається в $L_p(\Omega)$ до $u_0$. Таким чином,

$$\left(\int_\Omega |u_j - u_0|^p \, dx\right)^{\frac{\alpha}{p}} \to 0.$$

Інші члени в правій частині (3.50) обмежені, отже,

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_\Omega |u_j - u_0|^\alpha \left[1 + |u_0| + |u_j| + |\nabla u_0|\right]^{p-1-\alpha} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right) dx = 0.$$

З останньої умови, (3.48) та (3.49) отримуємо

$$C_2 \int_\Omega |\nabla u_j - \nabla u_0|^p \, dx \leqslant 0.$$

Отже,

$$\int_\Omega |\nabla u_j - \nabla u_0|^p \, dx \to 0.$$

Сильну збіжність $u_j \to u_0$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ доведено. Таким чином, оператор (3.45) задовольняє умову $(S)_+$. Всі умови теореми 3.5 виконуються, тобто, рівняння (3.47) має розв'язок $u^* \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, який є узагальненим розв'язком задачі Діріхле (3.43), (3.44). Теорему доведено. □

## 3.6 Контрольні запитання

1. Дайте означення монотонного оператора. Як виглядає умова монотонності для $X = \mathbb{R}^n$?

2. Який оператор називається коерцитивним? Наведіть приклади коерцитивних операторів.

3. Перевірте умову гострого кута для функції

$$g(c) = \{\langle A(c_1 w_1 + ... + c_j w_j) - f, w_k,\ k = 1, ..., j\},$$

де $A$ — оператор з теореми 3.1.

4. Нехай $\Omega = \{c \in \mathbb{R}^j : \|c_1 w_1 + ... + c_j w_j\| \leqslant M\}$ для деякого $M > 0$. Доведіть обмеженість і замкненість множини $\Omega$.

5. У яких випадках умова монотонності оператора $A$ не потрібна для існування розв'язку операторного рівняння $Au = f$ ?

6. Як побудувати послідовність скінченновимірних підпросторів простору $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, в яких розглядається послідовність гальоркінських наближень?

7. Сформулюйте умову слабкої компактності рефлексивного банахового простору.

8. Наведіть приклад достатньої умови для сильної збіжності гальоркінських наближень.

9. Наведіть приклад монотонного диференціального оператора.

10. Сформулюйте теорему вкладення соболєвських просторів. За яких умов ці вкладення будуть компактними.

11. Що можна сказати про поведінку у просторі $L_p(\Omega)$ послідовності функцій $\{u_j\} \subset \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, обмеженої в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$?

## 3.7 Основні задачі

1. Якщо оператори $A$ та $B-$ монотонні, чи буде оператор $A + B$ також монотонним? При яких $\alpha$ та $\beta$ буде монотонним оператор $\alpha A + \beta B$?

2. Якщо оператори $A$ та $B$ задовольняють умову $(S)_+$, чи буде оператор $A+B$ також задовольняти цю умову? А оператор $-A$ буде з класу $(S)_+$?

3. При яких $\alpha$ та $\beta$ оператор $\alpha A+\beta B$ буде задовольняти умову $(S)_+$, якщо оператори $A$ та $B$ задовольняють цю умову?

4. Нехай $X-$ простір Гільберта, тоді $X^*=X$. Доведіть, що оператор $I-T : X \to X$, де $I-$ тотожній оператор, а $T-$неперервний та компактний, задовольняє умову $(S)_+$.

5. Доведіть, що довільний **сильно монотонний** оператор $A : X \to X^*$, тобто такий, що
$$\langle Au-Av, u-v\rangle \geqslant C\|u-v\|^2,$$
буде коерцитивним.

6. Доведіть існування розв'язку систем у крузі $|x| \leqslant 1$ за допомогою леми про гострий кут:

(a) $\begin{cases} x_1^3+x_2^2x_1+2x_1=1, \\ x_2^3+x_1^2x_2+2x_2=2; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1^3+x_2^2x_1+x_1=1, \\ x_2^3+x_1^2x_2+2x_2=2; \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1^3+x_2^2x_1+3x_1=2, \\ x_2^3+x_1^2x_2+2x_2=2; \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1^3+x_2^2x_1+3x_1=\sqrt{7}, \\ x_2^3+x_1^2x_2+3x_2=3. \end{cases}$

## 3.8 Додаткові задачі

1. Доведіть, що оператор $A : X \to X^*$ монотонний тоді й тільки тоді, коли для довільних $u, v \in X$ функція $\varphi_{u,v}(t)=\langle A(u+tv), v\rangle$ зростає на $[0,1]$.

2. Оператор $A : X \to X^*$ називають локально обмеженим, якщо для довільного фіксованого $u \in X$ існують константи $\varepsilon>0,\ M>0$, такі, що $\|Au\| \leqslant M$ при $\|u-v\| \leqslant \varepsilon$.

Доведіть, що довільний монотонний оператор є локально обмеженим.

3. Доведіть, що довільний лінійний монотонний оператор $A : X \to X^*$ є неперервним.

4. Оператор $A$ називають **демінеперервним**, якщо з $u_j \to u_0$ в $X$ випливає, що $Au_j \rightharpoonup Au_0$ в $X^*$. Доведіть теорему 3.1, замінивши умову неперервності оператора $A$, умовою демінеперервності.

5. Доведіть монотонність оператора $A : \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega))^*$, $p \geqslant 2$, заданого формулою
$$\langle Au, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_\Omega |u|^{p-2} u \varphi dx.$$

6. Чи буде оператор з попередньої задачі задовольняти умову $(S)_+$?

7. Доведіть, що оператор $A : \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))^*$, який задається рівністю
$$\langle Au, \varphi \rangle = \int_\Omega u \varphi dx$$
не задовольняє умову $(S)_+$.

8. Розглянемо оператор $A : \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \supset D(A) \to (\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega))^*$, $1 < p < 2$, що задається рівністю
$$\langle Au, \varphi \rangle = \int_\Omega u \varphi dx.$$
З'ясуйте, якою буде область визначення $D(A)$ в залежності від $p$.

9. Розглянемо оператор $A : \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega) \to (\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega))^*$:
$$\langle Au, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x, \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$
Будемо вважати, що виконуються наступні умови на коефіцієнти:
$a_1$) дійснозначні функції $a_i(x, \xi)$, $i = 1, ..., n$, визначені для $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ та неперервно диференційовні за всіма аргументами; до того ж, $a_i(x, 0) = 0$ для $x \in \overline{\Omega}$;
$a_2$) існують такі додатні сталі $\nu_1, \nu_2$, що для всіх $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in R^n$ виконуються нерівності:
**умова еліптичності**
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, \xi)\eta_i\eta_j \geqslant \nu_1(1 + |\xi|)^{p-2}|\eta|^2, \tag{3.51}$$
**умова зростання коефіцієнтів**
$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x, \xi)| \leqslant \nu_2(1 + |\xi|)^{m-2}, \tag{3.52}$$
де
$$a_{ij}(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} a_i(x, \xi), i = 1, ..., n, \ j = 1, ..., n. \tag{3.53}$$
Доведіть, що такий оператор задовольняє умови монотонності та коерцитивності.

## 3.9 Тести для самоконтролю

1. Оператор $A : X \to X^*$ є монотонним за умови

| | |
|---|---|
| A | $\forall u, v \in X : \quad \langle Au - Av, u - v \rangle \geqslant 0$ |
| B | $\forall u, v \in X : \quad \langle Au, u - v \rangle \geqslant 0$ |
| C | $\forall u, v \in X : \quad \langle Au - Av, u - v \rangle > 0$ |
| D | $\forall u, v \in X : \quad \langle Au - Av, u - v \rangle = 0$ |

2. Оператор $A : X \to X^*$ називається коерцитивним, якщо

| | |
|---|---|
| A | $\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|} = q,\ 0 \leqslant q < +\infty$ |
| B | $\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|} = 0$ |
| C | $\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|} = +\infty$ |
| D | $\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\|Au\|}{\|u\|} \geqslant 0$ |

3. За яких умов на оператор $A : X \to X^*$ ($X-$ рефлексивний сепарабельний банахів простір) операторне рівняння $Au = f$ має розв'язок в $X$ для будь-якого $f \in X^*$?

| | |
|---|---|
| A | $A : X \to X^*-$ неперервний і компактний |
| B | $A : X \to X^*-$монотонний і коерцитивний |
| C | $A : X \to X^*-$ монотонний |
| D | $A : X \to X^*-$ монотонний, коерцитивний, неперервний |

4. За якої умови на оператор $A : X \to X^*$ матимемо сильну збіжність послідовності наближень Гальоркіна?

| | |
|---|---|
| A | $\forall u, v \in X : \quad \langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant 0$ |
| B | $\forall u, v \in X : \quad \langle Au - Av, u - v\rangle \geqslant \varphi(\|\|u - v\|\|)$, $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ неперервна, $\varphi(s) > 0,\ \forall s > 0,\ \varphi(0) = 0$ |
| C | $\forall u, v \in X : \quad \langle Au - Av, u - v\rangle > 0$ |
| D | $\forall u, v \in X : \quad \langle Au - Av, u - v\rangle = \varphi(\|\|u - v\|\|)$ |

5. Яке з наведених рівнянь має дивергентний вигляд?

| | |
|---|---|
| A | $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x;\nabla u)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x)$ |
| B | $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x;\nabla u)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + c(x;\nabla u)\,u = f(x)$ |
| C | $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{d}{dx_i} a_i(x;\nabla u) = f(x)$ |
| D | $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x;\nabla u)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(x;\nabla u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = f(x)$ |

6. Якому простору має належати права частина рівняння $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{d}{dx_i} a_i(x;\nabla u) = f(x)$, для того, щоб означення узагальненного розв'язку задачі Діріхле $u|_{\partial\Omega} = 0$ в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ було коректним?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $f \in L_p(\Omega)$, $p > 1$ | B | $f \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, $p > 1$ |
| C | $f \in L_\infty(\Omega)$ | D | $f \in L_1(\Omega)$ |

7. Яка умова має виконуватися на коефіцієнти рівняння $\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x;\nabla u) = f(x)$, для того, щоб означення узагальненного розв'язку задачі Діріхле $u|_{\partial\Omega} = 0$ в $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ було коректним?

| | |
|---|---|
| A | $\exists C > 0 : \lvert a_i(x;\nabla u)\rvert \geqslant C\lvert\nabla u\rvert^2$ |
| B | $\exists C > 0 : \lvert a_i(x;\nabla u)\rvert \leqslant C(1 + \lvert\nabla u\rvert)$ |
| C | $\exists C > 0 : \lvert a_i(x;\nabla u)\rvert \geqslant C(1 + \lvert\nabla u\rvert^{p-1})$ |
| D | $\exists C > 0 : \lvert a_i(x;\nabla u)\rvert \leqslant C(1 + \lvert\nabla u\rvert^{p-1})$ |

8. Яка умова на коефіцієнти $a_i(x;\nabla u)$ гарантує монотонність оператора $A : \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega) \to \left(\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)\right)^*$, $p > 1$,

$$\langle Au, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i(x; \nabla u) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx?$$

| | |
|---|---|
| A | $\exists C>0 : \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i(x;\xi)-a_i(x;\eta))\,(\xi_i-\eta_i) \geqslant C\vert\xi-\eta\vert^p$ |
| B | $\exists C>0 : \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i(x;\xi)-a_i(y;\xi))\,(x_i-y_i) \geqslant C\vert x-y\vert^p$ |
| C | $\exists C > 0 : \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i(x;\xi)-a_i(x;\eta))\,(\xi-\eta_i) \leqslant C\vert\xi-\eta\vert^p$ |
| D | $\exists C>0 : \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i(x;\xi)-a_i(x;\eta))\,(\xi_i-\eta_i) \geqslant C\vert\xi-\eta\vert^{p-1}$ |

9. Будь-який лінійний неперервний функціонал $h$ над $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ можна подати у вигляді

| | |
|---|---|
| A | $\langle h, \varphi \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \int_{\Omega} h_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx, \qquad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega),$ <br> $h_i(x) \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega),\ i = 1, .., n$ |
| B | $\langle h, \varphi \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \int_{\Omega} h_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx, \qquad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega),$ <br> $h_i(x) \in L_1(\Omega),\ i = 1, .., n$ |
| C | $\langle h, \varphi \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \int_{\Omega} h_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx, \qquad \forall \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega),$ <br> $h_i(x) \in L_p(\Omega),\ i = 1, .., n$ |
| D | жодний з наведених функціоналів не є лінійним |

10. Кажуть, що оператор $A : X \to X^*$ задовольняє умову $(S)_+$, якщо для будь-якої послідовності, що $u_j \rightharpoonup u_0$ з умови $\lim_{j\to\infty} \langle Au_j, u_j - u_0 \rangle \leqslant 0$ матимемо

| | |
|---|---|
| A | $Au_j \to Au_0$ сильно в $X$ для деякого $u_0 \in X$ |
| B | $Au_j \rightharpoonup Au_0$ слабко $X$ для деякого $u_0 \in X$ |
| C | $u_j \to u_0$ сильно в $X$ для деякого $u_0 \in X$ |
| D | $u_j \to u_0$ майже всюди в $X$ для деякого $u_0 \in X$ |

## 3.10 Приклади розв'язування задач основного рівня

1. Довести, що оператор $I : H \to H$, де $I(x) = x$, а $H-$ простір Гільберта, задовольняє умову $(S)_+$.

*Розв'язання.* Розглянемо довільну послідовність $\{u_j\}$ таку, що $u_j \rightharpoonup u_0$ та $\lim_{j\to\infty}\langle Iu_j, u_j - u_0\rangle \leqslant 0$. Оскільки $H-$ простір Гільберта, то за теоремою Ріса про загальний вигляд функціонала $\langle Au, \varphi\rangle = (Au, \varphi)$. Оскільки $u_j \rightharpoonup u_0$, маємо

$$\lim_{j\to\infty}\langle Iu_j - Iu_0, u_j - u_0\rangle \leqslant 0.$$

Таким чином, $\lim_{j\to\infty}\|u_j - u_0\| \leqslant 0$, звідки маємо сильну збіжність $u_j \to u_0$. □

2. Довести, що система має розв'язок в крузі $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^2 x_1 + 4x_1 = 3, \\ x_2^3 + x_1^2 x_2 + 3x_2 = 2. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Розглянемо неперервне відображення $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, що задається формулою

$$f(x_1; x_2) = (x_1^3 + x_2^2 x_1 + 4x_1 - 3; x_2^3 + x_1^2 x_2 + 3x_2 - 2).$$

Застосуємо лему про гострий кут до цього відображення

$$(f, x) = (x_1^3 + x_2^2 x_1 + 4x_1 - 3)x_1 + (x_2^3 + x_1^2 x_2 + 3x_2 - 2)x_2 = \\ = (x_1^2 + x_2^2)^2 + 3(x_1^2 + x_2^2) + x_1^2 - 3x_1 - 2x_2.$$

Для зручності можемо перейти до полярної системи координат $x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi$. Тоді

$$(f, x) = r^4 + 3r^2 + r^2\cos^2\varphi - r(3\cos\varphi + 2\sin\varphi) \geqslant r^4 + 3r^2 - \sqrt{13}r.$$

При $x \in \partial B_1(0)$, тобто $r = 1$ маємо, що $(f, x) \geqslant 4 - \sqrt{13} > 0$. З леми про гострий кут випливає, що рівняння $f(x) = 0$ має розв'язок в області $B_1(0)$. А це означає, що й система нелінійних рівнянь має розв'язок в крузі $B_1(0)$. $\square$

3. Нехай функції $a_i(x, u, \xi)$, $i = 1, ..., n$, неперервні за $x \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ та $u \in \mathbb{R}^1$ і до того ж неперервно диференційовні за $\xi \in \mathbb{R}^n$; $a_i(x, u, 0) = 0, i = 1, ..., n$ для довільних $x \in \bar{\Omega}$, $u \in \mathbb{R}^1$. Будемо вважати, що мають місце наступні умови

**1) умова еліптичності**

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, \xi)\eta_i\eta_j \geqslant \mu(|u|)(1 + |\xi|)^{p-2}|\eta|^2, \ \eta \in R^n, \ p \geqslant 2,$$

де $a_{ij}(x, u, \xi) = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j} a_i(x, u, \xi)$, $\mu(t) \geqslant 0$ — неспадаюча неперервна функція;

**2) умова зростання**

$$a_i(x, u, \xi) \leqslant \nu(|u|)(1 + |\xi|)^{p-1}, \ i = 1, ..., n,$$

де $\nu(t) \geqslant 0$ — незростаюча неперервна функція.

Доведіть, що за таких припущень для довільних $x \in \bar{\Omega}$, $u \in \mathbb{R}^1$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ мають місце нерівності

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(x, u, \xi) - a_i(x, u, \eta))(\xi_i - \eta_i) \geqslant \mu(|u|)|\xi - \eta|^2$$

та

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u, \xi)\xi_i \geqslant \mu_1(|u|)|\xi|^p,$$

де $\mu_1(t)$ - функція з тими самими властивостями, що й $\mu(t)$.

*Розв'язання.* Покажемо спочатку справедливість першої нерівності, для цього потрібна лише умова еліптичності

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(x,u,\xi)-a_i(x,u,\eta))(\xi_i-\eta_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\frac{d}{dt}a_i(x,u,t\xi+(1-t)\eta)dt(\xi_i-\eta_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,u,t\xi+(1-t)\eta)(\xi_j-\eta_j)(\xi_i-\eta_i)\Big)dt\geqslant$$

$$\geqslant\mu(|u|)\int_0^1(1+|t\xi+(1-t)\eta|)^{p-2}dt\cdot|\xi-\eta|^2\geqslant\mu(|u|)|\xi-\eta|^2.$$

Далі перейдемо до доведення другої нерівності, відомої, як умова, що забезпечує коерцитивність відповідного оператора

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x,u,\xi)\xi_i=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\frac{d}{dt}a_i(x,u,t\xi)dt\cdot\xi_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,u,t\xi)\xi_i\xi_j\Big)dt\geqslant$$

$$\geqslant\mu(|u|)\int_0^1(1+t|\xi|)^{p-2}dt\cdot|\xi|^2=\frac{\mu(|u|)|\xi|}{(p-1)}(1+t|\xi|)^{p-1}|_0^1=$$

$$=\frac{\mu(|u|)|\xi|}{(p-1)}\Big((1+|\xi|)^{p-1}-1\Big)\geqslant\frac{\mu(|u|)}{p-1}|\xi|^p=\mu_1(|u|)|\xi|^p.$$

Зауважимо, що під час доведення нерівностей було використано умову зростання, але умову $a_i(x,u,0)=0$, виключити не можна. Покажемо, якого вигляду набуває друга нерівність в цьому випадку

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u,\xi)\xi_i = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \Big(\frac{d}{dt} a_i(x,u,t\xi)dt + a_i(x,u,0)\Big) \cdot \xi_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \Big( \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,u,t\xi)\xi_i\xi_j \Big) dt + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u,0)\xi_i.$$

Оцінимо другий доданок за умовою зростання та нерівністю Юнга

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u,0)\xi_i\right| \leqslant \nu(|u|)|\xi| = (\mu(|u|))^{\frac{1}{p}}|\xi|\frac{1}{(\mu(|u|))^{\frac{1}{p}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu(|u|)}{p}|\xi|^p + \frac{p-1}{p(\mu(|u|))^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Тоді

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u,\xi)\xi_i \geqslant \mu(|u|) \int_0^1 (1+t|\xi|)^{p-2} dt \cdot |\xi|^2 - \nu(|u|)|\xi| \geqslant$$

$$\geqslant \mu_1(|u|)|\xi|^p - \nu_1(|u|).$$

$\square$

# 4 ТОПОЛОГІЧНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ

Топологічний ступінь або, за іншою термінологією, обертання векторного поля є фундаментальним поняттям в алгебраїчній топології та аналізі. Велику роль відіграють топологічні методи й у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Основою цих методів є введення та доречне застосування властивостей деякого інваріанта, який і має назву — ступінь відображення. Вперше такий інваріант розглядався у роботах Кронекера (1869) та Пуанкаре (1883). Але класичного формулювання це поняття набуло у роботах Брауера (1911). Протягом XX сторіччя поняття ступеня відображення застосовувалось для багатьох класів операторів у банахових просторах.

Побудувати ступінь неперервного скінченновимірного відображення можна різними методами (див. [21],[16],[17]), але оберемо аналітичну гілку, щоб обійти застосування апарату алгебраїчної топології. Теорію ступеня Лере-Шаудера можна більш детально вивчити в книгах [21],[16],[18]. З теорією ступеня для відображень класу $(S)_+$ можна ознайомитись в монографіях І.В. Скрипника [24],[25].

## 4.1 Ступінь скінченновимірного відображення.

Розглянемо неперервне відображення $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$, де $D \subset \mathbb{R}^n-$ обмежена відкрита множина. Припустимо, що $f(x) \neq 0$ при $x \in \partial D$. Тоді відображенню $f$ може бути поставлена у відповідність цілочисельна характеристика $\deg(f, D, 0)$, яка називається ступенем відображення. Ступінь відображення однозначно визначається наступними умовами.

1. Умова нормування. Якщо
$$f(x) = x - x_0 = (x_1 - x_{0,1}, \ldots, x_n - x_{0,n}),$$
де $x_0$ — фіксована точка, то
$$\deg(f, D, 0) = \begin{cases} 1, \ x_0 \in D, \\ 0, \ x_0 \notin \bar{D}. \end{cases}$$

2. Умова адитивності відносно області. Якщо область $D$ розбито на дві частини $\bar{D} = \bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$, такі, що $D_1$ та $D_2$ — відкриті множини і $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, $f(x) \neq 0$ при $x \in \partial D_1 \cup \partial D_2$, то $\deg(f, D, 0) = \deg(f, D_1, 0) + \deg(f, D_2, 0)$.

3. Умова гомотопічної інваріантності. Нехай $h : [0;1] \times \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ — неперервне відображення, причому $h(t, x) \neq 0$ при $x \in \partial D$. Тоді $\deg(h, D, 0)$ не залежить від $t$.

На перший погляд поняття ступеня відображення, що вводиться, здається надто абстрактним. Проте, згадаємо один відомий результат з комплексного аналізу.

**Теорема 4.1.** *[13] Нехай функція $f$ голоморфна в області $D \subset \mathbb{C}$, за винятком, можливо, деякої множини полюсів, і $G \Subset D$ — область, межа якої $\partial G$ є неперервною кривою і не містіть нулів та полюсів $f$. В цих умовах нехай $N$ та $P$ відповідно позначають загальне число нулів та полюсів в області $G$, тоді*
$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$
*Якщо $f$ таке, що $P = 0$, то*
$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz,$$
*і в якості ступеня відображення можна покласти $\deg(f, G, 0) = N$.*

Перевіримо, що характеристика, яка вводиться таким чином, задовольняє всі умови.

1. Очевидно, що відображення $f(z) = z - z_0$ має один нуль $z = z_0$, якщо $z_0 \in G$, і не має нулів, якщо $z_0 \notin \bar{G}$, тобто $\deg(f, G, 0) = \begin{cases} 1, & z_0 \in G, \\ 0, & z_0 \notin \bar{G}. \end{cases}$
2. Адитивність випливає з адитивності інтеграла.
3. Розглянемо множину аналітичних функцій, що неперервно залежать від параметра $t$, причому $f_t(z) \neq 0$ при $z \in \partial G$. Відомо, що тоді $N_t = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial G} \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\, dz$ неперервно залежить від параметра $t$, а оскільки $N_t$ — ціле число, то $N_t = \mathrm{const}$.

З попереднього прикладу можна побачити, що ступінь відображення пов'язаний з існуванням розв'язків рівняння $f(z) = 0$. Сформулюємо фундаментальну теорему, яку буде доведено пізніше.

**Теорема 4.2.** ***(принцип ненульового ступеня).*** *Нехай $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ — неперервне відображення, таке, що $f(x) \neq 0$ при $x \in \partial D$ і припустимо, що $\deg(f, D, 0) \neq 0$. Тоді рівняння $f(x) = 0$ має принаймні один розв'язок в $D$.*

Таким чином, ступінь відображення має дуже корисні властивості, але досі немає формули для його обчислення. Запропонуємо один із способів введення ступеня скінченновимірного відображення.

Спочатку розглянемо регулярні відображення.

**Означення 4.1.** Відображення $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ називають регулярним, якщо виконуються наступні умови:

1) $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ неперервне на $\bar{D}$, $f(x) \neq 0$ для $x \in \partial D$;

2) усі частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \dots, n)$ неперервні в $D$;

3) для кожної точки $x_0 \in D$ такої, що $f(x_0) = 0$, виконується умова

$$J_f(x_0) \equiv \det \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

де $J_f(x_0)$ — якобіан відображення $f$ в точці $x_0$).

Остання умова означає відсутність критичних точок. Якщо вона не виконується, то гладке відображення є нерегулярним. Відзначимо одну важливу властивість регулярних відображень.

**Лема 4.1.** *Нехай $f(x)$– регулярне відображення. Тоді множина точок $x_i$, таких, що $x_i \in D$ і $f(x_i) = 0$, є скінченною.*

*Доведення.* Припустимо протилежне — існування нескінченної послідовності $\{x_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, такої, що $f(x_j) = 0$. З компактності $\bar{D}$ випливає, що існує підпослідовність $x_{j_k}$, яка збігається до деякого елемента $\bar{x} \in D$. Оскільки відображення $f$ неперервне, маємо $f(x_{j_k}) \to f(\bar{x})$ при $k \to \infty$, отже, $f(\bar{x}) = 0$ і, внаслідок регулярності відображення, маємо $J_f(\bar{x}) \neq 0$. Розглянемо $y_j = \dfrac{x_j - \bar{x}}{|x_j - \bar{x}|}$ — вектори одиничної довжини, що задають нескінченну множину точок на одиничній сфері. З компактності сфери випливає, що існує підпослідовність $y_{j_m} \to \bar{y}$, така, що $|\bar{y}| = 1$.

Розглянемо різницю

$$0 = f_i(x_j) - f_i(\bar{x}) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f_i(tx_j + (1-t)\bar{x})\, dt =$$
$$= \sum_{p=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial z_p}(x_{j,p} - \bar{x}_p)\, dt, \quad i = 1, \ldots, n,$$

де $z = tx_j + (1-t)\bar{x} = (z_1, \ldots, z_n)$, а $x_j = (x_{j,1}, \ldots, x_{j,n})$. Поділимо обидві частини на $|x_j - \bar{x}|$, отримаємо $\sum\limits_{p=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial z_p}(tx_j + (1-t)\bar{x}) y_{j,p}\, dt = 0$; тут $y_j = (y_{j,1}, \ldots, y_{j,n})$. При $j \to \infty$, $x_j \to \bar{x}$ і $tx_j + (1-t)\bar{x} \to \bar{x}$, а також $y_{j,p} \to \bar{y}_p$. І в силу неперервності частинних похідних, $\frac{\partial f_i}{\partial z_p}(tx_j + (1-t)\bar{x}) \to \frac{\partial f_i}{\partial z_p}(\bar{x})$. Таким чином, оскільки підінтегральний вираз не залежить від $t$, його можна винести з-під знака інтеграла $\sum\limits_{p=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_p}(\bar{x})\bar{y}_p = 0$; $i = 1, \ldots, n$, при $|\bar{y}| = 1$. Це означає, що однорідна система лінійних рівнянь відносно $\bar{y}_p$ має нетривіальний розв'язок, що є можливим тільки за умови $\det \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x}) = 0$, а це суперечить регулярності відображення. Тобто, множина точок $x_j$ є скінченною. $\square$

Беручи до уваги наведену лему, бачимо, що наступне означення має сенс.

**Означення 4.2.** Нехай $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ — регулярне відображення. Тоді ступінь відображення $f$ визначається рівностями

1) $\deg(f, D, 0) = 0$, якщо $f(x) \neq 0$ при $x \in \bar{D}$;

2)$\deg(f, D, 0) = \sum\limits_{i=1}^{m} \operatorname{sign} J_f(x_i)$, де $x_i$ — такі точки з області $D$, що $f(x_i) = 0$.

Перевіримо наявність усіх властивостей ступеня

1. $f_0(x) = x - x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (умова нормування);
якщо $x_0 \notin \bar{D}$, то $\deg(f_0, D, 0) = 0$;
якщо $x_0 \in D$, то $\deg(f_0, D, 0) = \operatorname{sign} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$

2. Умова адитивності очевидним чином випливає з означення.

3. Якщо $f_t(x)$ — сім'я регулярних відображень, які неперервно залежать від параметра $t$, причому $f_t(x) \neq 0$ при $x \in \partial D$, то $\deg(f_t, D, 0) = \text{const}$. Це випливає з того, що $J_{f_t}(x_i)$ неперервно залежить від $t$ і не може змінювати знак при зміні $t$. Таким чином, для поняття ступеня, що було введене, має місце і властивість гомотопічної інваріантності.

Розглянемо випадок нерегулярного відображення — існує точка $x_0 \in D$, в якій $f(x_0) = 0$, але $J_f(x_0) = 0$. Введемо множину $E = \{y : f(x) = y \text{ при } x \in D \text{ і } J_f(x) = 0\}$. Такі $y$ називають нерегулярними значеннями відображення. Якщо б вдалося знайти $y \notin E$, але при цьому дуже близьке до нуля, то змогли б наблизити нерегулярне відображення $f(x)$ регулярним відображенням $f_y(x) = f(x) - y$ так, щоб

$$\lim_{y \to 0} \max_{x \in \bar{D}} |f_y(x) - f(x)| = 0.$$

Таку можливість дає наступна теорема.

**Теорема 4.3.** ***(Сарда).*** *Нехай $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ — відображення класу $C^1(\bar{D})$. Тоді $mesE = 0$.*

*Доведення.* Оскільки $D$ — обмежена множина, то існує гіперкуб $Q$, який містить $D$. Нехай сторона $Q$ дорівнює $A$. Поділимо $Q$ на $N^n$ гіперкубів зі стороною $A/N$. Розглянемо один з таких гіперкубів $Q'$, що $Q' \cap D \neq \varnothing$. Припустимо також, що $E' = f(Q') \cap E \neq \varnothing$, інакше $mesE = 0$.

Оцінимо $mesE'$. Множина $E'$ складається з $y = f(x)$, таких, що в $Q'$ знайдеться $x$, при якому $J_{f(x)} = 0$. Очевидно, що $E' \subseteq f(Q')$, а, отже, $mesE' \leqslant mesf(Q')$. Нехай $x' \in Q'$: $J_f(x') = 0$. Тоді для $\forall x \in Q'$ маємо

$$|f_i(x) - f_i(x')| = \left|\int_0^1 \frac{d}{dt} f_i(tx + (1-t)x')\,dt\right| =$$
$$= \left|\int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial z_k}(x_k - x'_k)\Big)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 \Big(\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial f_i}{\partial z_k}(tx + (1-t)x')\right| |x_k - x'_k|\Big)\,dt,$$

оскільки $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in C^1(\bar{Q}')$, можемо вважати, що $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)\right| \leqslant M_{ik} = \text{const}$. При цьому

$$|f_i(x) - f_i(x')| \leqslant \sum_{k=1}^n M_{ik}|x_k - x'_k| \leqslant$$
$$\leqslant A/N \sum_{k=1}^n M_{ik} \leqslant A/N \max_{k\in[1;n]} M_{ik} \cdot n.$$

Отже, $|f(x) - f(x')| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n (f_i(x) - f_i(x'))^2} \leqslant M \cdot A/N \cdot n^{3/2}$, де

$$M = \max_{i,k\in[1;n]} M_{ik}.$$

Таким чином, $f(Q') \subset B_{2AMn^{3/2}/N}(f(x'))$. Але така оцінка є досить грубою, оскільки не дозволяє показати, що $mesf(Q') \cdot N^n \to 0$ при $N \to \infty$.

Оцінимо різницю

$$f_i(x) - f_i(x') - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial z_k}(x')(x_k - x'_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \left[ \frac{\partial f_i(tx + (1-t)x')}{\partial z_k} - \frac{\partial f_i(x')}{\partial z_k} \right] (x_k - x'_k)\, dt.$$

З рівномірної неперервності функцій $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_k}$ на $Q'$ випливає, що

$$\left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial f_i(y)}{\partial x_k} \right| \leqslant \omega(|x-y|),$$

де

$$\omega(r) = \max_{\substack{i,k \in [1;n] \\ |x-y| \leqslant r;\ x,y \in Q'}} \left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial f_i(y)}{\partial x_k} \right|.$$

До того ж $|tx + (1-t)x' - x'| = t|x - x'| \leqslant |x - x'| \leqslant A/N \cdot \sqrt{n}$. У підсумку

$$\left| f_i(x) - f_i(x') - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(x')}{\partial z_k}(x_k - x'_k) \right| \leqslant \omega\left(\frac{A\sqrt{n}}{N}\right) \cdot \frac{A}{N}$$

і

$$\left| f(x) - f(x') - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x')}{\partial z_k}(x_k - x'_k) \right| \leqslant \omega\left(\frac{A\sqrt{n}}{N}\right) \cdot \frac{An}{N}\ .$$

З умови $J_f(x') = 0$ випливає, що $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(x')}{\partial x_k} \cdot c_k = 0$ при $i = 1, \ldots, n$ і деякому ненульовому наборі $c_k$. Тобто, лінійна оболонка векторів $L = \left\{ \frac{\partial f(x')}{\partial x_i};\ i = 1, \ldots, n \right\}$ така, що

$\dim L \leqslant n-1$. Розглянемо множину

$$\Pi = \left\{ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in L : \rho(f(x); f(x')+u) \leqslant \omega\left(\frac{A\sqrt{n}}{N}\right)\cdot\frac{An}{N}\right\}.$$

З огляду на вищесказане, $\Pi$ буде смугою в $\mathbb{R}^n$. Якщо в $Q'$ є критична точка, то $f(Q')$ міститься в $B_{\frac{2AM}{N}n^{3/2}}(f(x')) \cap \Pi$. Таким чином, $f(Q')$ міститься в циліндрі і

$$mes f(Q') \leqslant \left(\frac{2AM}{N}n^{3/2}\right)^{n-1}\mathcal{H}^{n-1}\cdot 2\omega\left(\frac{A\sqrt{n}}{N}\right)\frac{An}{N}.$$

Просумовуючи за всіма гіперкубами $Q'$, які містяться в $Q$, отримуємо

$$\begin{aligned} mesE &\leqslant \sum_{Q'\subset Q} mes f(Q') \leqslant \frac{2^n A^n M^{n-1}}{N^n}\cdot n^{\frac{3n-1}{2}}\mathcal{H}^{n-1}N^n\omega\left(\frac{A\sqrt{n}}{N}\right) \\ &= C\cdot\omega\left(\frac{A\sqrt{n}}{N}\right) \to 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

при $N \to +\infty$. Це завершує доведення теореми. $\square$

Сформулюємо і доведемо низку допоміжних тверджень.

Побудуємо функцію $\omega(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geqslant 1. \end{cases}$ Відомо, що $\omega(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ і $\dfrac{1}{\varepsilon^n}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\omega\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)dx = 1$.

**Теорема 4.4.** *Нехай $y$ — регулярне значення відображення $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ класу $C^1$, причому $f(x) \neq y$ при $x \in \partial D$. Тоді існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$*

$$\deg(f-y, D, 0) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_D \omega\left(\frac{|f(x)-y|}{\varepsilon}\right)\cdot J_f(x)\,dx.$$

*Доведення.* Побудуємо в області $D$ кулі $B_r(x_i)$, де $x_i \in D$ — такі точки, що $f(x_i) = y$, а $r$ вибираємо так, що $B_r(x_i) \subset D$ і $B_r(x_i) \cap B_r(x_j) = \varnothing$ при $i \neq j$. Це можна зробити, тому що кількість точок $x_i$ скінченна. Оскільки $y$ — регулярне значення, маємо $J_f(x_i) \neq 0$, а з огляду на неперервність $J_f(x)$ можемо стверджувати, що $J_f(x) \neq 0$ для $x \in B_r(x_i)$ і досить малого $r$. Зазначимо, що $f(x)-y \neq 0$ в $\overline{D \setminus \cup_{i=1}^N B_r(x_i)}$. Більш того, $|f(x) - y| \geqslant \varepsilon_0 > 0$ при деякому $\varepsilon_0$. Таким чином, при таких $x$ маємо $\omega\left(\dfrac{|f(x) - y|}{\varepsilon}\right) = 0$, якщо $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Тоді

$$\frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_D \omega\left(\frac{|f(x)-y|}{\varepsilon}\right) J_f(x)dx = \frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{i=1}^N \int\limits_{B_r(x_i)} \omega\left(\frac{|f(x)-y|}{\varepsilon}\right) J_f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{i=1}^N \int_{B_r(x_i)} \omega\left(\frac{|f(x)-y|}{\varepsilon}\right) \operatorname{sign} J_f(x_i)\cdot \operatorname{sign} J_f(x)\cdot J_f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{i=1}^N \operatorname{sign} J_f(x_i) \int\limits_{B_r(x_i)} \omega\left(\frac{|f(x)-y|}{\varepsilon}\right) |J_f(x)| dx = \{f(x)-y=z\} =$$

$$\sum_{i=1}^N \operatorname{sign} J_f(x_i) \cdot \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_{B_r(x_i)} \omega\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) dz = \sum_{i=1}^N \operatorname{sign} J_f(x_i) = \deg(f-y, D, 0).$$

□

**Теорема 4.5.** *Нехай $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$— відображення класу $C^2$, $f(x) \neq 0$ при $x \in \partial D$ і $0$— нерегулярне значення відображення $f$. Тоді існує $\delta > 0$, таке, що для будь-яких регулярних значень $y', y'' \in B_\delta(0)$ виконано рівність* $\deg(f - y', D, 0) = \deg(f - y'', D, 0)$.

*Доведення.* З неперервності відображення $f$ і умови $f(x) \neq 0$ при $x \in \partial D$ випливає, що $|f(x)| \geqslant \rho > 0$ при $x \in \partial D$. А, отже, при $\delta < \rho$ маємо $f(x) \neq y'$ і $f(x) \neq y''$ при $x \in \partial D$. Розглянемо різницю

$$\frac{1}{\varepsilon^n}\left[\omega\left(\frac{|f(x)-y'|}{\varepsilon}\right) - \omega\left(\frac{|f(x)-y''|}{\varepsilon}\right)\right] J_f(x) =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^1 \frac{d}{ds}\omega\left(\frac{|f(x)-sy'-(1-s)y''|}{\varepsilon}\right) ds \cdot J_f(x) =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 \frac{\partial\omega}{\partial x_k}\cdot(y''_k - y'_k)J_f(x)\,ds.$$

З курса лінійної алгебри відомо, що визначник $J_f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}A_{kj}(x)$, де $A_{kj}$ — алгебраїчне доповнення до елемента $\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}$. Введемо функцію

$$v_j = \sum_{k=1}^{n}\int_0^1 \omega\left(\frac{|f(x)-sy'-(1-s)y''|}{\varepsilon}\right)(y''_k - y'_k)A_{kj}(x)\,ds.$$

Маємо

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v_j(x)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial x_l}\frac{\partial f_l}{\partial x_j}(y''_k - y'_k)A_{kj}\right)ds +$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 \omega\cdot(y''_k - y'_k)\frac{\partial A_{kj}}{\partial x_j}\,ds.$$

Другий інтеграл у правій частині останньої рівності, внаслідок леми 2.1 дорівнює нулю. Нарешті,

$$\frac{1}{\varepsilon^n}\left[\omega\left(\frac{|f(x)-y'|}{\varepsilon}\right) - \omega\left(\frac{|f(x)-y''|}{\varepsilon}\right)\right] J_f(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}v_j(x).$$

При $x \in \partial D$ маємо $|f(x)-sy'-(1-s)y''| \geqslant \rho-\delta$, тому при $\varepsilon < \rho - \delta$ отримуємо $\omega\left(\frac{|f(x)-sy'-(1-s)y''|}{\varepsilon}\right) = 0$. Отже, при досить малому $\varepsilon > 0$, $v_j(x) \equiv 0$ на $\partial D$. За теоремою Остроградського-Гауса,

$$\sum_{j=1}^{n} \int_D \frac{\partial v_j}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial D} v_j(x) \cdot \cos(n; x_j)\, ds = 0.$$

Враховуючи результат попередньої теореми,

$$\deg(f - y', D, 0) - \deg(f - y'', D, 0) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_D \frac{\partial v_j}{\partial x_j}\, dx = 0.$$

Теорему доведено. □

**Означення 4.3.** Нехай $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ — відображення класу $C^2$ і нуль — нерегулярне значення відображення $f$. Тоді визначимо

$$\deg(f, D, 0) = \deg(f - y, D, 0),$$

де $y$ — регулярне значення відображення $f$ з $B_\delta(0)$, де $\delta > 0$ досить мале.

У попередніх міркуваннях диференційовність відображення була ключовою умовою при визначенні ступеня відображення. Покажемо, що можна ввести ступінь неперервного відображення, не вимагаючи його диференційовності.

Відомо, що неперервне відображення $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ можна продовжити до неперервного відображення $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такого, що $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $x \in \bar{D}$. Уведемо послідовність нескінченно диференційовних функцій

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} \omega\left(\frac{|x - y|}{\varepsilon}\right) \tilde{f}(y)\, dy.$$

Покажемо, що $f_\varepsilon \to f(x)$ рівномірно при $\varepsilon > 0$ і $x \in \bar{D}$

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\tilde{f}(y)\,dy -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \omega\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) dz\cdot f(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \omega\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right)\Big(\tilde{f}(x-z) - f(x)\Big)\,dz$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B_\varepsilon(0)} \omega\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right)\Big(\tilde{f}(x-z) - f(x)\Big)\,dz =$$

$$= \max_{z\in B_\varepsilon(0)} |\tilde{f}(x-z) - f(x)| \leqslant C(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

**Означення 4.4.** Ступенем неперервного відображення $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ будемо називати число

$$\deg(f, D, 0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \deg(f_\varepsilon, D, 0).$$

Для перевірки коректності цього означення необхідно показати, що така границя існує і не залежить від вибору послідовності $f_\varepsilon(x)$. Через те, що $f(x) \neq 0$ при $x \in \partial D$ випливає, що $|f(x)| \geqslant \rho > 0$, $x \in \partial D$. Тобто, $|f_\varepsilon(x)| \geqslant \rho - M_\varepsilon$, де $M_\varepsilon : \ |f_\varepsilon(x) - f(x)| \leqslant M_\varepsilon$, $M_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Можна вибрати $\varepsilon_0$ таким малим, що для $\forall\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 : \ M_\varepsilon \leqslant \rho/3$, тоді $|f_\varepsilon(x)| \geqslant 2\rho/3$ і існує $\deg(f_\varepsilon, D, 0)$. Розглянемо відображення $f_{\varepsilon_1}$ і $f_{\varepsilon_2}$ при $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_0$. Зв'яжемо їх гомотопією

$$f_t(x) = tf_{\varepsilon_1}(x) + (1-t)f_{\varepsilon_2}(x).$$

Перевіримо, що $f_t(x) \neq 0$, $t \in [0;1]$, $x \in \partial D$. Маємо

$$f_t(x) = f(x) + t\left[f_{\varepsilon_1}(x) - f(x)\right] + (1-t)\left[f_{\varepsilon_2}(x) - f(x)\right],$$

$$|f_t(x)| \geqslant |f(x)| - t|f_{\varepsilon_1}(x) - f(x)| - (1-t)|f_{\varepsilon_2}(x) - f(x)| \geqslant$$

$$\geqslant \rho - \frac{t\rho}{3} - (1-t)\frac{\rho}{3} = \frac{2\rho}{3} > 0.$$

Тоді, за властивістю гомотопічної інваріантності, $\deg(f_{\varepsilon_1}, D, 0) = \deg(f_{\varepsilon_2}, D, 0)$. Таким чином, $\deg(f_\varepsilon, D, 0)$ не залежить від $\varepsilon$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Нехай $f'_\varepsilon(x)$– інша послідовність нескінченно диференційовних функцій, що наближує функцію $f(x)$. Покажемо, що $\deg(f_\varepsilon, D, 0) = \deg(f'_\varepsilon, D, 0)$. Для цього зв'яжемо гомотопією $f_t(x) = tf_\varepsilon(x) + (1-t)f'_\varepsilon(x)$ ці відображення.

$$|f_t(x)| = |f(x)+t\,[f_\varepsilon(x) - f(x)]+(1-t)[f'_\varepsilon(x)-f(x)]| \geqslant \frac{2\rho}{3} > 0.$$

За властивістю гомотопічної інваріантності, ступінь однаковий для $t = 0$ і $t = 1$. Це завершує обґрунтування введеного поняття ступеня неперервного відображення.

Умови нормування і адитивності відносно області, очевидно, справджуються. Доведемо гомотопічну інваріантність.

Нехай $f_t : [0,1] \times \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ — неперервне відображення, таке, що $f_t(x) \neq 0$ при $t \in [0,1]$, $x \in \partial D$. Покажемо, що $\deg(f_t, D, 0)$ не залежить від $t$. Для цього побудуємо апроксимацію відображення $f_t$

$$f_{\varepsilon,t}(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \omega\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) f_t(y)\,dy.$$

Функція $f_{\varepsilon,t}(x)$ рівномірно збігається до $f_t(x)$. Оскільки $f_t(x) \neq 0$ при $x \in \partial D$, то звідси випливає, що і $f_{\varepsilon,t}(x) \neq 0$ при $x \in \partial D$ і досить малому $\varepsilon$. Отже, $\deg(f_t, D, 0) = \deg(f_{\varepsilon,t}, D, 0)$ при малому $\varepsilon$. Візьмемо два значення $t_1$ та $t_2$ і доведемо, що $\deg(f_{\varepsilon,t_1}, D, 0) = \deg(f_{\varepsilon,t_2}, D, 0)$. Для цього побудуємо гомотопію

$$f_\tau(x) = \tau f_{\varepsilon,t_1} + (1-\tau)f_{\varepsilon,t_2}.$$

Як і раніше, легко показати, що $f_\tau(x) \neq 0$ при $x \in \partial D$, що власне і доводить властивість гомотопічної інваріантності.

**Теорема 4.6.** ***(принцип ненульового ступеня).*** *Нехай $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$– неперервне відображення, таке, що*

*$f(x) \neq 0$ при $x \in \partial D$ і $\deg(f, D, 0) \neq 0$. Тоді рівняння $f(x) = 0$ має розв'язок в $D$.*

*Доведення.* Припустимо, що таких розв'язків немає. Тоді $f(x) \neq 0$, $x \in \bar{D}$, отже, $|f(x)| \geqslant \rho > 0$ при $x \in \bar{D}$; $|f_\varepsilon(x) - f(x)| < M_\varepsilon$, $x \in \bar{D}$, де $f_\varepsilon-$ гладка апроксимація відображення $f$. Звідси, підбираючи досить мале $\varepsilon$, отримуємо, що $f_\varepsilon(x) \neq 0$ при $x \in \bar{D}$. Тобто, $\deg(f_\varepsilon, D, 0) = 0$, і ми дійшли суперечності. □

Продемонструємо ефективність побудованої теорії на прикладі теореми 2.1, доведенної у розділі 2. Розглянемо множину

$$D = B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < R\}.$$

**Теорема 4.7.** ***(Брауера).*** *Нехай $f : \bar{B}_R \to \bar{B}_R-$ неперервне відображення. Тоді існує нерухома точка $x_0 \in \bar{B}_R$ цього відображення, така, що $f(x_0) = x_0$.*

*Доведення.* Розглянемо гомотопію $f_t(x) = x - tf(x)$. При $t = 0$ $f_0 = x$, при $t = 1$ $f_1(x) = x - f(x)$. Нехай $x \in \partial B_r$ і $0 \leqslant t < 1$ $(|x| = R;\ |f(x)| \leqslant R)$, тоді $|f_t(x)| = |x - tf(x)| \geqslant |x| - t|f(x)| \geqslant R - t \cdot R = (1 - t)R > 0$. Якщо $t = 1$, то або $x - f(x) = 0$ при $x \in \partial B_R$, що одразу ж доводить теорему, або $x - f(x) \neq 0$. Таким чином, можемо вважати, що $f_t(x) \neq 0$ при $t \in [0, 1]$, $x \in \partial B_R$. Отже, за властивістю гомотопічної інваріантності $\deg(f_t, B_R, 0)$ не залежить від $t$. Тобто $\deg(f_1, D, 0) = \deg(f_0, D, 0) = 1$, оскільки $f_0(x) = x$. А, отже, існує розв'язок рівняння $\bar{x} - f(\bar{x}) = 0$. Теорему доведено. □

Далі сформулюємо та доведемо одну з найважливіших теорем нелінійного аналізу.

**Теорема 4.8.** ***(принцип Лере-Шаудера).*** *Нехай $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n-$ неперервні при $t \in [0; 1]$ відображення, такі,* *що при досить великому $R$ виконується умова*

$$\deg(f_0, B_R, 0) \neq 0.$$

*Припустимо, що існує число $M$, що для будь-якого розв'язку рівняння $f_t(x) = 0$ має місце оцінка: $|x| \leqslant M$. Тоді рівняння $f_1(x) = 0$ має розв'язок.*

*Доведення.* Якщо $R \geqslant R_0$, то $\deg(f_0, B_R, 0) \neq 0$. Оскільки всі можливі розв'язки рівняння $f_t(x)$ лежать у кулі $B_M(0)$, то при $x \in \partial B_{R_0+M}(0)$, $f_t(x) \neq 0$, що завдяки властивості гомотопічної інваріантності забезпечує умову $\deg(f_1, B_{R_0+M}(0), 0) \neq 0$, тобто рівняння $f_1(x) = 0$ має розв'язок. □

Введене поняття ступеня відображення має досить важливі властивості, але обчислення ступеня конкретного відображення є майже неможливим. Тому принципове значення мають наступні теореми.

**Теорема 4.9.** ***(гострого кута).*** *Нехай $0 \in D$ і $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$– неперервне відображення, що задовольняє умови $f(x) \neq 0$ при $x \in \partial D$ і $(f(x), x) \geqslant 0$ при $x \in \partial D$. Тут $(y, x)$– скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$. Тоді* $\deg(f, D, 0) = 1$.

*Доведення.* Розглянемо відображення $f_t(x) : [0; 1] \times \bar{D} \to \mathbb{R}^n$, $f_t(x) = tx + (1-t)f(x)$. При $x \in \partial D$ $(f_t(x); x) = t|x|^2 + (1-t)(f(x); x) > 0$ при $t > 0$. А для $t = 0$ $f_t(x) \neq 0$ за умовою. Отже, за властивістю гомотопічної інваріантності, $\deg(f_1, D, 0) = \deg(f_0, D, 0) = 1$. □

**Теорема 4.10.** ***(про непарне відображення).*** *Нехай $f : \overline{B_R(0)} \to \mathbb{R}^n$– неперервне відображення, що задовольняє умови $f(x) \neq 0$ при $|x| = R$ і $f(-x) = -f(x)$ при $|x| = R$. Тоді* $\deg(f, B_R(0), 0)$– *непарне число.*

**4.2 Ступінь Лере-Шаудера.** Досить природним є бажання узагальнити поняття топологічного ступеня на відображення у банахових просторах. Головною перешкодою в цьому є той факт, що з принципових міркувань ступінь не можна, із збереженням всіх властивостей, перенести на довільне, нехай навіть неперервне, нескінченновимірне відображення.

Тому першим класом нескінченновимірних відображень, для яких було введене і отримало широке застосування поняття ступеня, були відображення вигляду $I-T-$ "тотожне мінус цілком неперервне". Ступінь таких відображень отримав назву ступеня Лере-Шаудера. Нагадаємо, що цілком неперервним оператором називають неперервний компактний оператор. Нехай $D-$ обмежена область банахового простору $X$. Розглянемо відображення $F = I - T : X \supset \bar{D} \to X$, яке задане рівністю $Fx = x - Tx$. Тут $I-$ тотожний оператор, а $T-$ цілком неперервний. Нехай $Fx \neq 0$, $x \in \partial D$. Як вже відомо, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує скінченновимірний оператор $T_\varepsilon : \bar{D} \to X_k$ ($X_k \subset X$; $\dim X_k = k$), що для нього $\|T_\varepsilon u - Tu\|_X < \varepsilon$ при $u \in \bar{D}$. Покладемо $D_k = D \cap X_k$, $F_k x = x - T_\varepsilon x$ . Тоді $F_k : \bar{D}_k \to X_k-$ неперервне скінченновимірне відображення і для нього визначене число $\deg(F_k; D_k; 0)$ за умови, що $F_k x \neq 0$ при $x \in \partial D_k$. Зазначимо, що $k-$ число елементів $\varepsilon$-сітки $\{z_1, \ldots, z_k\}$ для множини $F(\bar{D})$ і при зменшенні $\varepsilon > 0$ число $k$ деяким чином зростає. Лінійну оболонку елементів $\varepsilon$-сітки позначимо: $X_k = L(z_1; \ldots; z_k)$. Тобто покажемо, що в якості ступеня нескінченновимірного відображення $F$ можна буде взяти ступінь його скінченновимірного наближення $F_k$ при досить малому $\varepsilon$. Для цього прояснимо низку моментів.

Нехай $Fx = x - Tx \neq 0$ при $x \in \partial D$. В цьому випадку знайдеться число $\rho > 0$, таке, що $\|Fx\| \geqslant \rho > 0$ при $x \in \partial D$. Справді, нехай існує така послідовність $x_i \in \partial D$ $(i = 1, 2, \dots)$, що

$$\lim_{i\to\infty} \|x_i - Tx_i\| = 0.$$

Оскільки оператор $T$ компактний, то без обмеження загальності міркувань можна вважати, що елементи $Tx_i$ утворюють послідовність, що збігається до деякого елемента $y \in X$. Але тоді і послідовність $x_i$ збігається до $y$

$$\lim_{i\to\infty} \|x_i - y\| \leqslant \lim_{i\to\infty} \|x_i - Tx_i\| + \lim_{i\to\infty} \|Fx_i - y\| = 0.$$

Отже, $y \in \partial D$. При цьому $Fy = y$, що веде до суперечності. Неперервне відображення $F_k$ також не має нулів на $\partial D_k$ , оскільки

$$\|F_k x\| = \|x - T_\varepsilon x\| \geqslant \|x - Tx\| - \|Tx - T_\varepsilon x\| \geqslant \rho - \varepsilon > 0,$$

при досить малому $\varepsilon$. Таким чином, визначене число $\deg(F_k; D_k; 0)$. Нам знадобиться лема, яку було доведено в роботі Лере і Шаудера.

**Лема 4.2.** ***(Лере, Шаудер)*** *Нехай $f : \bar{D} \subset \mathbb{R}^{p+k} \to \mathbb{R}^{p+k}$ — неперервне відображення, таке, що $f(x) = (f_1(x); \dots; f_{p+k}(x)) \neq 0$ при $x \in \partial D$, і $f_i(x) = x_i$ при $i > k$. Тоді $\deg(f; D; 0) = \deg(f'; D'; 0)$, де $f'(x) = (f_1(x); \dots; f_k(x))$; $D' = D \cap \{x_{k+1} = \dots = x_{k+p} = 0\}$.*

**Лема 4.3.** *Нехай $T'_\varepsilon$ — інше наближення оператора $T$, таке, що $F'_{k'}x = x - T'_\varepsilon x$ відображає $D_{k'} = D \cap X_{k'}$ в $X_{k'}$, а $\|T'_\varepsilon u - Tu\| < \varepsilon$ при $u \in \partial D$. Тоді при досить малому $\varepsilon$ маємо $\deg(F_k; D_k; 0) = \deg(F'_{k'}; D_{k'}; 0)$.*

*Доведення.* Маємо $X_k = L(z_1; \dots; z_k)$ — лінійна оболонка $\varepsilon$-сітки. Нехай $X_{k'} = L(z'_1; \dots; z'_{k'})$. Розглянемо суму підпросторів $X_k$ і $X_{k'}$. Нехай $\dim(X_k + X_{k'}) = n \geqslant \max\{k; k'\}$, тоді покладемо $p = n - k$ і $p' = n - k'$.

Спираючись на лему 4.2, отримаємо, що $\deg(F_k; D_k; 0) = \deg(F_n; D_n; 0)$ і $\deg(F'_{k'}; D_{k'}; 0) = \deg(F'_n; D_n; 0)$.

Перевіримо, що $F_n$ і $F'_n$ гомотопні на $\bar{D}_n$, для цього розглянемо відображення

$$h(t; x) = tF_n(x) + (1-t)F'_n(x); \quad x \in \partial D_n; \quad t \in [0; 1];$$

$$h(t; x) = x - tT_\varepsilon x - (1-t)T'_\varepsilon x;$$

$$\begin{gathered} \|h(t; x)\| = \|x - tT_\varepsilon x - (1-t)T'_\varepsilon x - Tx + tTx + (1-t)Tx\| \\ \geqslant \|x - Tx\| - \|t(T_\varepsilon x - Tx)\| - \|(1-t)(T'_\varepsilon x - Tx)\| \geqslant \\ \geqslant \rho - t\varepsilon - (1-t)\varepsilon = \rho - \varepsilon > 0, \end{gathered}$$

при досить малому $\varepsilon > 0$. Тобто, $\deg(F_n; D_n; 0) = \deg(F'_n; D_n; 0)$, і лему доведено. □

**Означення 4.5. Ступенем Лере-Шаудера** відображення $I - T$ (тотожний оператор мінус цілком неперервний) області $D \subset X$ за умови $u - Tu \neq 0$ для $u \in \partial D$, називається число, що визначається рівністю $\deg_{LS}(I - T; D; 0) = \deg(F_k; D_k; 0)$. Тут $F_k x = x - T_\varepsilon x$ — скінченновимірне відображення при досить малому $\varepsilon > 0$.

Виявляється, що введене таким чином поняття ступеня зберігає усі відомі корисні властивості ступеня скінченновимірних відображень.

Властивості ступеня Лере-Шаудера.

1. $\deg_{LS}(I; D; 0) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \in D, \\ 0, & \text{при } 0 \notin \bar{D}. \end{cases}$

2. Гомотопічна інваріантність. Нехай $T_t : \bar{D} \to X$ — параметрична сім'я відображень, така, що $T_t u$ неперервне за $t$ і $u$. При цьому для кожного $t$ множина $T_t \bar{D}$ компактна.

Припустимо, що $u - T_t u \neq 0$ при $u \in \partial D$, $t \in [0;1]$. Тоді $\deg_{LS}(I - T_t; D; 0)$ не залежить від $t$.

3. Якщо $\deg_{LS}(I - T; D; 0) \neq 0$, то рівняння $u - Tu = 0$ має розв'язок у $D$. Інакше кажучи, оператор $T$ має в $D$ нерухому точку.

Нехай $T_t : \bar{D} \to X$, $t \in [0;1]$– сім'я цілком неперервних операторів, що є неперервною за $t$. Припустимо, що $u - T_t u \neq 0$ при $t \in [0;1]$, $u \in \partial D$ і $\deg_{LS}(I - T_0; D; 0) \neq 0$. Тоді рівняння $u - T_1 u = 0$ має розв'язок в $D$. Справді, за властивістю гомотопічної інваріантності $\deg_{LS}(I - T_1; D; 0) \neq 0$, отже, рівняння $u - T_1 u = 0$ має розв'язок в $D$.

Розглянемо застосування даної теорії до питання існування розв'язків нелінійних крайових задач

$$\frac{d^2x}{dt^2} - a(t;x) = f(t),$$
$$x(0) = x(1) = 0.$$

**Теорема 4.11.** *Припустимо, що $a(t;x)$ неперервно диференційовна при $t \in [0;1]$, $x \in \mathbb{R}$ функція, що $\dfrac{\partial a(t;x)}{\partial x} \geqslant a_0 > 0$. Тоді задача Діріхле має хоча б один розв'язок для довільної функції $f(t) \in C_{[0;1]}$.*

*Доведення.* Якщо $x(t)$– розв'язок крайової задачі, то $\dfrac{d^2x}{dt^2} = a(t;x) + f(t)$. Тоді $x(t)$ може бути подане у вигляді

$$x(t) = \int_0^1 G(t;s) \cdot [a(s;x(s)) + f(s)]\, ds, \tag{4.2}$$

де $G(t;s)$– відповідна функція Гріна. Розглянемо оператор $TC_{[0;1]} \to C_{[0;1]}$,

$$Tx(t) = \int_0^1 G(t;s)[a(s;x(s)) + f(s)]\, ds. \tag{4.3}$$

Пропонуємо перевірити самостійно, що такий оператор буде цілком неперервним. Побудуємо параметричну сім'ю операторів $T_\tau$

$$T_\tau x(t) = \tau \int_0^1 G(t;s)[a(s;x(s)) + f(s)]\,ds. \tag{4.4}$$

Тоді існує $\deg_{LS}(I - T_\tau; D; 0)$. Залишається належним чином вибрати область $D$, тобто щоб $0 \in D$ і $x - T_\tau x \neq 0$ при $x \in \partial D$, $\tau \in [0;1]$.

Розглянемо задачу Діріхле

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \tau a(t;u(t)) + \tau f(t), \qquad \tau \in (0;1],$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

Доведемо, що

$$\max_{t\in[0;1]} |u(t)| \leqslant \max_{t\in[0;1]} \frac{|f(t) + a(t;0)|}{a_0},$$
$$\max |u(t)| = \max\{\max u_+(t); -\min u_-(t)\}.$$

Нехай $t_1$– точка додатного максимуму для $u(t)$, де $u(t)$– розв'язок задачі.

Тоді $\dfrac{d^2u(t_1)}{dt^2} \leqslant 0$. Таким чином,

$$\tau a(t_1;u(t_1)) + \tau f(t_1) \leqslant 0,$$
$$a(t_1;u(t_1)) - a(t_1;0) \leqslant -[f(t_1) + a(t_1;0)] \leqslant \max_{t\in[0;1]} |f(t) + a(t;0)|.$$

За теоремою Лагранжа,

$$a_0 u(t_1) \leqslant \frac{\partial}{\partial x} a(t_1;\theta u(t_1)) \cdot u(t_1) \leqslant \max_{t\in[0;1]} |f(t) + a(t;0)|,$$

звідки

$$u(t_1) \leqslant \frac{1}{a_0} \max_{t\in[0;1]} |f(t) + a(t;0)|.$$

Аналогічно розглядається випадок від'ємного мінімуму.

Якщо позначити

$$\frac{1}{a_0}\max_{t\in[0;1]}|f(t)+a(t;0)|=R,$$

то у якості $D$ можна взяти $B_{R+1}(0)$. Очевидно, що $0\in D$ і $u-T_\tau u\neq 0$ при $u\in\partial D$. Таким чином, відображення $I-T$ $(\tau=1)$ є гомотопним відображенню $I$ $(\tau=0)$, ступінь якого дорівнює 1. Отже, $\deg(I-T;D;0)=1$ і задача Діріхле має розв'язок в $D$. $\square$

**4.3 Ступінь відображень типу $(S)_+$.** Нехай $X-$ рефлексивний сепарабельний банахів простір. Розглянемо оператор $A:D\subset X\to X^*$, де $D-$ обмежена відкрита множина. Будемо вважати, що $A-$ обмежений демінеперервний оператор, що задовольняє умову $(S)_+$ . При цьому $Au\neq 0$, $u\in\partial D$. Метою даного пункта є визначення $\deg(A;\bar{D};0)-$ ступеня відображення $A$ множини $D$ відносно нуля простору $X^*$. З огляду на сепарабельність простору, існує $\{v_i\}$, $i=1,2,\ldots$ довільна повна система простору $X$. Будемо вважати, що при кожному $n$ елементи $v_1,\ldots,v_n$ лінійно незалежні. Визначимо при кожному $n=1,2,\ldots$ скінченновимірні апроксимації $A_n$ відображення $A$ наступним чином:

$$A_n u=\sum_{i=1}^{n}\langle Au,v_i\rangle v_i \qquad \text{для} \quad u\in\bar{D}_n,\quad D_n=D\cap F_n,$$

де $\langle Au,v\rangle$ означає дію елемента $Au\in X^*$ на елемент $v\in X$, а $F_n=L(v_1;\ldots;v_n)$.

**Лема 4.4.** *Припустимо, що $A-$ демінеперервний обмежений оператор класу $(S)_+$ і $Au\neq 0$ при $u\in\partial D$. Тоді існує $k_1$, таке, що $A_k u\neq 0$ при $u\in\partial D_k$ для $k\geqslant k_1$.*

*Доведення.* Припустимо, що виконується зворотне твердження. Нехай існує послідовність $u_k \in \partial D_k$, така, що $A_k u_k = 0$ при $k \to +\infty$. Таким чином,

$$\sum_{i=1}^{k} \langle Au_k; v_i \rangle v_i = 0 \Longrightarrow \langle Au_k; v_i \rangle = 0 \qquad \text{при} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Оскільки $u_k \in \partial D_k$, а $D$ — обмежена область, то і послідовність $u_k$ обмежена. Отже, з огляду на рефлексивність простору, можемо вважати, що $u_k \rightharpoonup u_0 \in X$. Доведемо, що $u_k$ сильно збігається до $u_0 \in \partial D$ і що $Au_0 = 0$.

Позначимо через $\{\tilde{u}_k\}$ довільну послідовність, що сильно збігається до $u_0$ та $\tilde{u}_k \in F_k,\ k = 1, 2....$

Розглянемо вираз

$$\langle Au_k, u_k - u_0 \rangle = \langle Au_k, u_k \rangle - \langle Au_k, u_0 \rangle = -\langle Au_k, u_0 \rangle,$$
$$\text{оскільки} \quad \langle Au_k, v_i \rangle = 0,$$
$$\langle Au_k, u_0 \rangle = \langle Au_k, u_0 - \tilde{u}_k \rangle + \langle Au_k, \tilde{u}_k \rangle.$$

Перший доданок в останній рівності прямує до нуля при $k \to \infty$, оскільки $\tilde{u}_k \to u_0$, а другий доданок дорівнює нулю, оскільки $\langle Au_k, v_i \rangle = 0$. Нарешті,

$$\lim_{k \to \infty} \langle Au_k, u_k - u_0 \rangle = 0.$$

Звідси, завдяки умові $(S)_+$ для оператора $A$, отримуємо сильну збіжність $u_k$ до $u_0$, що забезпечує $u_0 \in \partial D$ та $Au_0 = 0$. Останнє суперечить умові леми. Отже, при досить великому $k$ маємо $A_k u \neq 0$ при $u \in \partial D_k$. □

Таким чином, при $k \geqslant k_1$ визначене число $\deg(A_k; D_k; 0)$.

**Лема 4.5.** *Існує таке $k_2 \geqslant k_1$, що $deg(A_k; D_k; 0)$ не залежить від $k$ при $k \geqslant k_2$.*

*Доведення.* Покажемо, що при $k \geqslant k_2$

$$\deg(A_k; D_k; 0) = \deg(A_{k+1}; D_{k+1}; 0).$$

Розглянемо відображення

$$\tilde{A}_{k+1}u = \sum_{i=1}^{k} \langle Au, v_i \rangle v_i + \langle h_{k+1}; u \rangle v_{k+1},$$

де $h_{k+1}$– деякий елемент простору $X^*$, що задовольняє умови

$$\langle h_{k+1}, v_i \rangle = 0 \qquad \text{при} \quad i \leqslant k; \qquad \langle h_{k+1}, v_{k+1} \rangle = 1.$$

При $k \geqslant k_1$ і $x \in \partial D_{k+1}$ маємо $\tilde{A}_{k+1}u \neq 0$. Дійсно, якщо $\tilde{A}_{k+1}u = 0$ при $u \in \partial D_{k+1}$, то $\langle h_{k+1}, u \rangle = 0$ в силу лінійної незалежності $v_1, \ldots, v_{k+1}$. Тоді при $u \in \partial D_k$ маємо $A_k u = \tilde{A}_{k+1}u = 0$ і прийдемо до суперечності з результатом леми 4.4. Тобто, визначене число $\deg(\tilde{A}_{k+1}; D_{k+1}; 0)$. З леми Лере-Шаудера

$$\deg(\tilde{A}_{k+1}; D_{k+1}; 0) = \deg(A_k; D_k; 0).$$

Покажемо, що $\tilde{A}_{k+1}$ гомотопне $A_{k+1}$ на $\bar{D}_{k+1}$, де

$$A_{k+1}u = \sum_{i=1}^{k+1} \langle Au, v_i \rangle v_i = A_k u + \langle Au, v_{k+1} \rangle v_{k+1}$$

Розглянемо

$$A_{k+1}^{(t)}u = t\tilde{A}_{k+1}u + (1-t)A_{k+1}u =$$
$$= A_k u + (t\langle h_{k+1}; u \rangle + (1-t)\langle Au; v_{k+1} \rangle)v_{k+1}.$$

Потрібно з'ясувати, що при $u \in \partial D_{k+1}$ виконується $A_{k+1}^{(t)}u \neq 0$ для досить великих $k$. Нехай це не так. Тоді існують послідовності $k_j \to +\infty$, $\{u_j\} \subset D_{k_j+1}$ і $\{t_j\} \subset [0; 1]$, що для них $A_{k_j+1}^{(t_j)}u_j = 0$. З лінійної незалежності системи $v_1, \ldots, v_{k_j+1}$ отримуємо, що

$$\langle Au_j, v_j \rangle = 0 \qquad \text{при} \quad i = 1, \ldots, k_j,$$
$$(1-t_j)\langle Au_j, v_{k_j+1} \rangle + t_j \langle h_{k_j+1}, u_j \rangle = 0.$$

Раніше було зафіксовано, що випадки $t_j = 0$ і $t_j = 1$ неможливі. Будемо вважати, що $0 < t_j < 1$. Оскільки $u_j \in D_{k_j+1}$, то, завдяки рефлексивності простору, вважатимемо, що $u_j$ слабко збігається до деякого елемента $u_0$. До того ж виберемо послідовність $\tilde{u}_j \in F_{k_j}$, що сильно збігається до $u_0$. Тоді

$$\lim_{j\to\infty}\langle Au_j, u_j - u_0\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle Au_j, \tilde{u}_j - u_0\rangle + \lim_{j\to\infty}\langle Au_j, u_j - \tilde{u}_j\rangle =$$
$$= \lim_{j\to\infty}\langle Au_j, u_j\rangle - \lim_{j\to\infty}\langle Au_j, \tilde{u}_j\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle Au_j, u_j\rangle,$$

з огляду на вибір $\tilde{u}_j$ і того, що $\langle Au_j, v_i\rangle = 0$ при $i = 1, \ldots, k_j$, оскільки $u_j \in \partial D_{k_j+1}$ і

$$u_j = \sum_{i=1}^{k_j+1} c_i v_i, \qquad \langle h_{k_j+1}; u_j\rangle = \sum_{i=1}^{k_j+1} c_i \langle h_{k_j+1}; v_i\rangle = c_{k_j+1}.$$

Отже,

$$u_j = \sum_{i=1}^{k_j} c_i v_i + \langle h_{k_j+1}, u_j\rangle v_{k_j+1}.$$

У підсумку

$$\lim_{j\to\infty}\langle Au_j; u_j - u_0\rangle = \lim_{j\to\infty}\langle Au_j, \sum_{i=1}^{k_j} c_i v_i + \langle h_{k_j+1}, u_j\rangle v_{k_j+1}\rangle =$$
$$= \lim_{j\to\infty}\langle h_{k_j+1}, u_j\rangle\langle Au_j, v_{k_j+1}\rangle = -\lim_{j\to\infty}\frac{t_j}{1-t_j}\langle h_{k_j+1}, u_j\rangle^2 \leqslant 0.$$

За умовою $(S)_+ : u_j \to u_0$, і з демінеперервності оператора $A$випливає, що $\langle Au_0, v\rangle = 0$ при $\forall v \in \cup_{k=1}^{+\infty} F_k$. Внаслідок сепарабельності простору $X$, можна знайти послідовність $\{v_j\} \subset \cup_{k=1}^{+\infty} F_k$, таку, що $v_j \to \tilde{v} \in X$. Таким чином, переходячи до границі по $j$ в $\langle Au_0, v_j\rangle = 0$, ясно що $\langle Au_0, \tilde{v}\rangle = 0$ для $\forall v \in X$, тобто $Au_0 = 0$, а це суперечить умові $Au = 0$, $u \in \partial D$. Далі за індукцією можна показати, що $deg(A_k; D_k; 0) = deg(A_{k+p}; D_{k+p}; 0)$ для довільного $p \geqslant 1$. Це й доводить твердження леми. $\square$

Наступним етапом є доведення незалежності $\deg(A_k; D_k; 0)$ від вибору системи функцій $\{v_i\}$.

**Лема 4.6.** *Нехай виконуються умови попередніх лем і* $\{v_j^*\}$– *інша система елементів простору* $X$*, що має такі самі властивості, що і система* $\{v_j\}$*. Тоді*

$$\lim_{k\to\infty} \deg(A_k; D_k; 0) = \lim_{k\to\infty} \deg(A_k^*; D_k^*; 0),$$

*де* $D_k^* = D \cap F_k^*$, $F_k^* = L(v_1^*, \ldots, v_k^*)$, $A_k^* u = \sum\limits_{i=1}^{k} \langle Au, v_i^* \rangle v_i^*$.

*Доведення.* Вважатимемо, що елементи $v_1, \ldots, v_k, v_1^*, \ldots, v_k^*$ лінійно незалежні, інакше можна побудувати допоміжну систему $\{\tilde{v}_i\}$, що $v_1, \ldots, v_k, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_k$ і $v_1^*, \ldots, v_k^*, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_k$ — лінійно незалежні системи. Тоді, показавши, що

$$\lim_{k\to\infty} \deg(A_k; D_k; 0) = \lim_{k\to\infty} \deg(\tilde{A}_k; \tilde{D}_k; 0)$$

та

$$\lim_{k\to\infty} \deg(A_k^*; D_k^*; 0) = \lim_{k\to\infty} \deg(\tilde{A}_k; \tilde{D}_k; 0),$$

отримаємо необхідне твердження.

Розглянемо відображення

$$\bar{A}_{2k} u = A_k u + \sum_{i=1}^{k} \langle h_{k+i}, u \rangle v_i^*, \qquad \bar{A}_{2k} : \bar{D}_{2k} \to F_{2k},$$

$$F_{2k} = L(v_1, \ldots, v_k, v_1^*, \ldots, v_k^*), \qquad D_{2k} = D \cap F_{2k},$$

$$\langle h_{k+i}, v_j \rangle = 0; \qquad \langle h_{k+i}, v_j^* \rangle = \delta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, k.$$

Також введемо відображення

$$\hat{A}_{2k} u = A_k u + A_k^* u, \qquad \hat{A}_{2k} : \bar{D}_{2k} \to F_{2k}.$$

Якщо покажемо, що $\deg(\bar{A}_{2k}; D_{2k}; 0) = \deg(\hat{A}_{2k}; D_{2k}; 0)$ при досить великих $k$, то отримаємо наступну послідовність рівностей

$\deg(\bar{A}_{2k}; D_{2k}; 0) = \deg(A_k; D_k; 0)$– в силу леми Лере-Шаудера про відображення різних розмірностей;

$\deg(\hat{A}_{2k}; D_{2k}; 0) = \deg(\hat{A}^*_{2k}; D_k; 0)$, де $\bar{A}^*_{2k}$– відображення $\bar{A}_{2k}$, де системи $\{v_i\}$ і $\{v_i^*\}$ помінялися місцями. Очевидно, що $\hat{A}_{2k}$ симетричне відносно цих систем;

$\deg(\bar{A}^*_{2k}; D_{2k}; 0) = \deg(A^*_k; D^*_k; 0)$– за лемою Лере-Шаудера. У підсумку буде випливати твердження леми. Таким чином, залишається довести, що

$$A^{(t)}_{2k} u = t\hat{A}_{2k} u + (1-t)\bar{A}_{2k} u \neq 0,$$

при $u \in \partial D_{2k}$ і досить великому $k$. Доведемо це методом від супротивного, припускаючи існування послідовностей $\{u_j\} \subset \partial D_{2k}$ і $\{t_j\} \subset [0;1]$, таких, що $A^{(t_j)}_{2k_j} u_j = t_j \hat{A}_{2k_j} u_j + (1 - t_j)\bar{A}_{2k_j} u_j = 0$. Звідси випливає, що $\langle Au_j, v_i\rangle = 0$, $i = 1, \ldots, k_j$, $t_j\langle Au_j, v_i^*\rangle + (1-t_j)\langle h_{k_j+i}, u_j\rangle = 0$, $i = 1, \ldots, k_j$. Як і раніше, зрозуміло, що $t_j \in (0;1)$, оскільки при $t_j = 0$ і $t_j = 1$ рівність $A^{(t_j)}_{2k_j} u_j = 0$ при $u_j \in \partial D_{2k_j}$ є неможливою. Можемо вважати, що $u_j \rightharpoonup u_0$, $t_j \to t_0$. Вибираємо послідовність $\tilde{u}_j \in F_{k_j}$ так, щоб $\tilde{u}_j$ сильно збігалась до $u_0$. Маємо $u_j \in \partial D_{2k_j}$, отже,

$$u_j = \sum_{i=1}^{k_j} (c_i \cdot v_i + c_i^* v_i^*),$$

де $c_i^* = \langle h_{k_j+i}, u_j\rangle$. Отримуємо, що

$$\langle Au_j, u_j - u_0\rangle = \langle Au_j, \tilde{u}_j - u_0\rangle + \langle Au_j, u_j - \tilde{u}_j\rangle = \langle Au_j, \tilde{u}_j - u_0\rangle +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k_j} \langle Au_j, v_i^*\rangle\langle h_{k_j+i}, u_j\rangle = \langle Au_j, \tilde{u}_j - u_0\rangle - \frac{1-t_j}{t_j} \sum_{i=1}^{k_j} \langle h_{k_j+i}, u_j\rangle^2.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{j\to\infty}\langle Au_j, u_j - u_0\rangle \leqslant 0.$$

Отже, в силу умови $(S)_+$ для оператора $A$, маємо сильну збіжність $u_j \to u_0$ і $Au_0 = 0$ при $u \in \partial\Omega$, оскільки оператор $A$ є демінеперервним. Таким чином, ми приходимо до суперечності. Це й завершує доведення леми. □

Доведені леми роблять змістовним наступне означення.

**Означення 4.6.** Нехай $D-$ обмежена відкрита множина рефлексивного сепарабельного банахового простору $X$,
$A : \bar{D} \to X^*-$ демінеперервний обмежений оператор, що задовольняє умову $(S)_+$ і $Au \neq 0$ при $u \in \partial D$. Тоді ступенем відображення $A$ області $D$ відносно $0 \in X^*$ називають число

$$\lim_{k\to\infty}\deg(A_k, D_k, 0) = \deg(A; D; 0),$$

де

$$A_k u = \sum_{i=1}^{k}\langle Au, v_i\rangle v_i, \qquad F_k = L(v_1, \ldots, v_k), \qquad D_k = D \cap F_k.$$

Легко перевірити, що поняття ступеня, уведене таким чином, має відомі нам властивості ступеня скінченновимірного відображення.

*Гомотопічна інваріантність.* Нехай $A_t : \bar{D} \to X^*$ є сім'єю неперервних відносно $(t; u) \in [0; 1] \times \bar{D}$ обмежених відображень, $A_t$ задовольняє при будь-якому $t \in [0; 1]$ умову $(S)_+$, і до того ж $A_t u \neq 0$ при $u \in \partial D$. Тоді $\deg(A_0; D; 0) = \deg(A_1; D; 0)$.

*Принцип ненульового ступеня.* Нехай справджуються всі припущення відносно оператора $A$ і $\deg(A; D; 0) \neq 0$. Тоді рівняння $Au = 0$ має розв'язок в $D$.

Справді, якщо $\deg(A; D; 0) \neq 0$, то при великих $k$ маємо $\deg(A_k; D_k; 0) \neq 0$, звідки випливає, що $A_k u = 0$ має розв'язок в $D_k$, тобто існує $u_k$, таке, що $A_k u_k = 0$ і $\langle A u_k, v_i \rangle = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Оскільки $u_k \in D$, то в силу рефлексивності $X$ можемо вважати, що $u_k$ слабко збігається до деякого $u_0 \in X$. З умови $(S)_+$ тоді випливає, що $u_k \to u_0$. З демінеперервності отримуємо $\langle A u_0, v \rangle = 0 \;\; \forall v \in \cup_{k=1}^{\infty} F_k$. Та нарешті $A u_0 = 0$.

## 4.4 Контрольні запитання

1. Дайте означення ступеня скінченновимірного відображення. Яке головне призначення цієї харктеристики?
2. Дайте означення регулярного відображення. Чи буде відображення $f(x) = x^3$ регулярним?
3. Доведіть принцип ненульового ступеня для регулярних скінченновимірних відображень.
4. Чи є умова диференційовності відображення необхідною для визначення його ступеня?
5. Чи для довільного неперервного відображення в банаховому просторі можна ввести поняття ступеня?
6. Чи існує формула за якою можна знайти ступінь довільного неперервного скінченновимірного відображення?
7. Що таке гомотопія? Яку властивість називають гомотопічною інваріантністю?
8. Як застосовується теорія ступеня відображення при дослідженні нелінійних задач?
9. Як з'ясувати, що ступінь відображення не дорівнює нулю?

10. Наведіть головну ідею того, як перенести поняття ступеня скінченновимірного відображення на відображення у банахових просторах.

11. Чи гарантує принцип ненульового ступеня також і єдиність розв'язку?.

12. Чому при дослідженні існування розв'язків рівняння $Au = f$, так важлива апріорна оцінка $\|u\| \leqslant M$?

## 4.5 Основні задачі

1. Знайдіть ступені $\deg(f, D, 0)$ наступних відображень відповідних множин
   (a) $\quad f(x) = x^2 - 5x + 6,\ D = [0; 4],$
   (b) $\quad f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8,\ D = [0; 3],$
   (c) $\quad f(x) = x^3,\ D = [-1; 1],$
   (d) $\quad f(x) = x^2,\ D = [-1; 2],$
   (e) $\quad f(x) = (x_1^2 - 1, x_2 - x_3, (x_3 - 3)(x_2^2 + 1)),$
   $D = B_5(0) \subset \mathbb{R}^3,$
   (f) $\quad f(x) = (x_1^3 - 1, x_1 + 3x_2),\ D = B_2(0) \subset \mathbb{R}^2.$

2. Доведіть, що $deg(f, D, 0) = deg(f, \Omega, 0)$, де область $\Omega$ отримана з області $D$ неперервною деформацією, причому всі точки $x_i :\ f(x_i) = 0$ в процесі деформації не опинялись на межі $\partial\Omega$.

3. Відомо, що коли рівняння $f(x) = 0$ не має розв'язків в області $D$, то $deg(f, D, 0) = 0$. Чи має місце обернене твердження?

4. Нехай відображення $f : B_1(0) \to \mathbb{R}^n$ має таку властивість, що для довільних $x \in \partial B_1(0),\ \lambda \geqslant 0 :$

$$f(x) + \lambda x \neq 0.$$

Доведіть, що тоді рівняння $f(x) = 0$ має розв'язок в кулі $B_1(0)$.

5. Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ неперервне відображення, що задовольняє умову
$$\frac{(f(x), x)}{|x|} \to \infty$$
при $|x| \to \infty$. Доведіть, що тоді рівняння $f(x) = y$ має розв'язок для довільного $y \in \mathbb{R}^n$.

6. Доведіть теорему Шаудера за допомогою ступеня Лере-Шаудера.

7. Розглянемо довільну відкриту обмежену множину $0 \in \Omega \subset R^2$ з гладкою межею $\partial\Omega$. Нехай $f_1(x, y)$ та $f_2(x, y)-$ гладкі функції від двох змінних, які одночасно не обертаються у нуль на $\partial\Omega$. Розглянемо також функцію $f = (f_1, f_2) : R^2 \to R^2$. Якщо межу області $\partial\Omega$ можна задати параметрично
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \ t \in [0, 1], \end{cases}$$
при зростанні $t$, межа пробігається в напрямку - проти годинникової стрілки, $f = (f_1(x, y); f_2(x, y)) = (f_1(x(t), y(t)); f_2(x(t), y(t))) = (p(t); q(t))$. Тоді має місце **формула Пуанкаре**
$$\deg(f, \Omega, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{p(t)q'(t) - p'(t)q(t)}{p^2(t) + q^2(t)} dt.$$
Перевірте, що визначений за цією формулою ступінь відображення має всі відомі нам властивості. Обчисліть ступінь для $f = (x^3 + y^2 x + 3x - 2; y^3 + x^2 y + 2y - 2)$ та $\Omega = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 < 1\}$.

## 4.6 Додаткові задачі

1. Доведіть формулу Пуанкаре з попередньої задачі, показавши, що
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{p(t)q'(t)-p'(t)q(t)}{p^2(t)+q^2(t)}dt=\sum_{i=1}^{m}\operatorname{sign}\det\Big(\frac{\partial f(x_i,y_i)}{\partial x}\Big),$$
де $(x_i,y_i)\in\Omega$ — точки, у яких $f=0$.

2. Нехай $X$ — простір Гільберта, тоді $X=X^*$. Відомо, що оператор $I-T-$ тотожний мінус цілком неперервний, задовольняє умову $(S)_+$. Таким чином для відображення $I-T$ можна побудувати дві характеристики: $\deg_{LS}(I-T,D,0)$ та $\deg_{(S)+}(I-T,D,0)$. Чи будуть ці ступені однаковими?

3. Нехай оператор $A:X\to X^*$ задовольняє умову $(S)_+$. Відкрита обмежена множина $D\subset X$ така, що $0\in\bar{D}\backslash\partial D$. Доведіть, що якщо для довільного $u\in\partial D$ має місце нерівність $\langle Au,u\rangle\geqslant 0$, то $\deg(A,D,0)=1$.

4. Оператор $A:\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)\to(\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega))^*$, що задається формулою
$$\langle Au,\varphi\rangle=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx,\ \varphi\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega),\ p\geqslant 2,$$
називають **оператор p-Лаплас**. Як можна для цього відображення ввести поняття ступеня? Порахуйте ступінь $\deg(A,B_1(0),0)$.

5. Нехай $\Omega$ — обмежена область в $\mathbb{R}^n$. Розглядається задача

Діріхле

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i},\ x \in \Omega,$$
$$f_i(x) \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega),\ p \geqslant 2,$$
$$u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega.$$

(a) Отримайте з інтегральної рівності

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} f_i\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx,$$

апріорну оцінку $\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)} \leqslant M$, де $M$ залежить тільки від $\|f_i\|_{L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}$.
(b) Обчисліть $\deg(A_f u, B_{M+1}(0), 0)$ для відображення, що задається формулою

$$\langle A_f u, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} - f_i(x)\Big)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx,$$
$$\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega),\ p \geqslant 2.$$

(c) Зробіть висновок про існування розв'язків задачі Діріхле.

## 4.7 Тести для самоконтролю

1. Ступінь відображення — це

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | довільне дійсне число | B | тільки ціле число |
| C | тільки натуральне число | D | невід'ємне ціле число |

2. Ступінь відображення $f(x) = 5x^2 - 1$ визначається

| | |
|---|---|
| A | як степінь многочлена |
| B | як коефіцієнт при старшому степені |
| C | як степінь похідної |
| D | з інших міркувань |

3. Нехай $\bar{D} = \bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$, такі, що $D_1$ та $D_2$– відкриті множини і $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, $f(x) \neq 0$ при $x \in \partial D_1 \cup \partial D_2$. Тоді

| | |
|---|---|
| A | $\deg(f, D, 0) = \deg(f, D_1, 0)$ |
| B | $\deg(f, D, 0) = \deg(f, D_1, 0) + \deg(f, D_2, 0)$ |
| C | $\deg(f, D, 0) = \deg(f, D_2, 0)$ |
| D | інший варіант |

4. Нехай $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$–неперервне відображення, $f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$, де $D \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена відкрита множина. Припустимо, що $f(x) \neq 0$ при $x \in \partial D$ Тоді рівняння $f(x) = 0$ має роз'язок в $D$ за умови

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $f(x)$ диференційовне | B | $\deg(f, D, 0) \neq 0$ |
| C | $\deg(f, D, 0) = 0$ | D | інша відповідь |

5. Множина розв'язків рівняння $f(x) = 0$ в $D$ є скінченною за умови

| | |
|---|---|
| A | відображення $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ неперервне |
| B | відображення $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ нерегулярне, неперервне |
| C | відображення $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ регулярне, неперервне |
| D | жодна з відповідей не точна |

6. Нехай $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ – регулярне відображення. Тоді ступінь $\deg(f, D, 0)$ цього відображення визначається наступним чином

| | |
|---|---|
| A | $\deg(f, D, 0) = 0,\ f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{D}$ |
| B | $\deg(f, D, 0) \neq 0,\ f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{D}$ |
| C | $\deg(f, D, 0) = 0,\ f(x) = 0, \quad \forall x \in D$ |
| D | $\deg(f, D, 0) \neq 0,\ f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{D}$ |

7. Нехай $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — неперервні при $t \in [0;1]$ відображення і існує число $M$ таке, що для будь-якого розв'язку рівняння $f_t(x) = 0$ виконується оцінка: $|x| \leqslant M$. Тоді рівняння $f_1(x) = 0$ має розв'язок за умови

| | |
|---|---|
| A | $\deg(f_0, B_R, 0) \neq 0$ для досить великого $R$ |
| B | $\deg(f_0, B_R, 0) = 0$ для деякого $R$ |
| C | $\deg(f_t, B_R, 0) \neq 0$, $\forall t \in [0;1]$ для досить великого $R$ |
| D | $\deg(f_t, B_R, 0) = 0$, $\forall t \in [0;1]$ для досить великого $R$ |

8. Нехай $f(x)$, $g(x)$ — неперервні відображення. Які формули не можуть задавати гомотопію між цими відображеннями?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $\frac{t}{2-t} \cdot f(x) + (1-t)e^t \cdot g(x)$ | B | $\sin \pi t \cdot f(x) + \cos \frac{\pi t}{2} \cdot g(x)$ |
| C | $\frac{t}{2t-1} \cdot f(x) + (1-t^2) \cdot g(x)$ | D | всі задають гомотопію |

9. Цілком неперервний оператор $T : D \to D$, $D$ — обмежена множина в банаховому просторі $X$ матимите в $D$ нерухому точку за умови

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $\deg_{LS}(I - T; D; 0) = 0$ | B | $\deg_{LS}(T; D; 0) \neq 0$ |
| C | $\deg_{LS}(I - T; D; 0) \neq 0$ | D | $\deg_{LS}(T; D; 0) = 0$ |

10. Нехай $T_t : \bar{D} \to X-$ параметрична сім'я відображень, така, що $T_t u$ неперервне за $t$ і $u$. При цьому для кожного $t$ множина $T_t\bar{D}$ компактна. Припустимо, що $u - T_t u \neq 0$ при $u \in \partial D$, $t \in [0;1]$. Тоді

| | |
|---|---|
| A | $\deg_{LS}(I - T_t; D; 0)$ залежить від $t$ |
| B | $\deg_{LS}(I - T_t; D; 0)$ не залежить від $t$ |
| C | $\deg_{LS}(I - T_t; D; 0) = \deg_{LS}(T_t; D; 0)$ |
| D | $\deg_{LS}(I - T_t; D; 0) = \deg_{LS}(T_0; D; 0)$ |

## 4.8 Приклади розв'язування задач основного рівня

1. Обчисліть ступінь відображення $f(x) = x^2 - 7x + 12$ при $D = [-1; 5]$.

*Розв'язання.* Спочатку потрібно знайти корені рівняння $x^2 - 7x + 12 = 0$, які до того ж знаходяться у внутрішності множини $D$, це точки $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Обчислимо похідну (одновимірний якобіан) $f'(x) = 2x - 7$ та знайдемо знаки похідної в точках $x_1$ та $x_2$: $\operatorname{sign} f'(3) = -1$, $\operatorname{sign} f'(4) = 1$, тоді $\deg(f, D, 0) = -1 + 1 = 0$. Зауважимо, що ступінь відображення дорівнює нулю, але нам відомо, що корені рівняння є. Таким чином, якщо ступінь відображення $f(x)$ дорівнює нулю, то це не означає, що рівняння $f(x) = 0$ не має розв'язків. $\square$

2. Обчисліть ступінь відображення $f(x) = (x_1^2 - 4x_1 + x_2; 2x_1 - x_2 + x_3; x_3^4 - 1)$ при $D = B_5(0)$.

*Розв'язання.* Знайдемо розв'язки рівняння $f(x) = 0$, для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x_1^2 - 4x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_3^4 - 1 = 0. \end{cases}$$

Система має розв'язки: $(1; 3; 1)$, $(1 + \sqrt{2}; 1 + 2\sqrt{2}; -1)$, $(1 - \sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}; -1)$. Легко перевірити, що всі вони належать $D$. Якобіан перетворення має вигляд

$$J_f(x) = \begin{vmatrix} 2x_1 - 4 & 1 & 0, \\ 2 & -1 & 1, \\ 0 & 0 & 4x_3^3 \end{vmatrix} = -8x_3^3(x_1 + 1).$$

Тоді $\operatorname{sign} J_f(1;3;1) = -1$, $\operatorname{sign} J_f(1+\sqrt{2};1+2\sqrt{2};-1) = 1$; $\operatorname{sign} J_f(1-\sqrt{2};1-2\sqrt{2};-1) = -1$. Нарешті, ступінь відображення $\deg(f,D,0) = -1+1-1 = -1$. $\square$

3. Обчисліть ступінь відображення $f(x) = x^5$ для $D = (-1;1)$.

*Розв'язання.* Рівняння $x^5 = 0$ має єдиний розв'язок $x = 0$. Але похідна $f'(x) = 5x^4$ в цій точці дорівнює нулю. Таким чином, відображення $f(x)$ не є регулярним. Розглянемо допоміжне відображення $f_\varepsilon(x)$ з $\varepsilon > 0$, яке є регулярним і водночас із тим $\|f_\varepsilon(x) - f(x)\|_{C_{[-1;1]}} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Таким відображенням буде, наприклад, $f_\varepsilon(x) = x^5 - \varepsilon$. Дійсно, рівняння $x^5 - \varepsilon = 0$ має корінь $x_0 = \sqrt[5]{\varepsilon}$, при цьому $f'_\varepsilon(x_0) = 5\varepsilon^{\frac{4}{5}} > 0$. Отже, $\deg(f,D,0) = \deg(f_\varepsilon,D,0) = 1$.

Обчислимо ступінь цього відображення за лемою про гострий кут. Дійсно, $(f(x),x) = x^6$, тому при $x \in \partial D = \{1,-1\}$ буде $(f(x),x) = 1$. Звідки випливає $\deg(f,D,0) = 1$. Дуже важливим є те, що знайдено ступінь не шукаючи розв'язки рівняння $f(x) = 0$, а навпаки, порахувавши ступінь можна зробити висновок про їх наявність. $\square$

4. Нехай $D-$ область у гільбертовому просторі $H$. Для компактного та неперервного оператора $A : H \to H$ має місце нерівність $(Ax,x) < \|x\|^2$ при $x \in \partial D$. Доведіть, що оператор $A$ має нерухому точку в області D.

*Розв'язання.* Розглянемо відображення $I-A$. Для нього існує ступінь Лере-Шаудера. Зв'яжемо неперервною гомотопією відображення $I-A$ та $I$. Покажемо, що $F(x,t) = t(I-A)x + (1-t)Ix = x - tAx \neq 0$ при $x \in \partial D, t \in [0,1]$. Маємо $(F,x) = (x,x) - t(Ax,x) > 0, x \in \partial D$. Отже, $\deg(I-A,D,0) = \deg(I,D,0) = 1$, звідки випливає, що рівняння $x - Ax = 0$ має розв'язок в $D$. Це і доводить існування нерухомої точки оператора $A$. $\square$

# СПИСОК ОСНОВНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. Березанский Ю.М. Функциональный анализ, / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. — К.: Вища школа, 1990. — 600 с.

2. Буряченко К.О. Розв'язність операторних рівнянь $Au = f$ з монотонними та $S_+$-операторами: Тексти лекцій, / К.О. Буряченко. — Донецьк: ДонНУ, 2007. — 28 с.

3. Буряченко К.О. Теореми про нерухомі точки та їх застосування в теорії диференціальних рівнянь: Тексти лекцій, / К.О. Буряченко, О.Л. Зуєв. — Донецьк: ДонНУ, 2007. — 43 с.

4. Деревягин М.С. Задачи к курсу функционального анализа. Часть 1. Метрические пространства: Методическое пособие, / М.С. Деревягин, В.А. Деркач, М.М. Маламуд. — Донецк: ДонНУ, 2005. — 54 с.

5. Деркач В.А. Задачи к курсу функционального анализа. Часть 2. Линейные функционалы: Методическое пособие, / В.А. Деркач, И.Ю. Доманов, М.М. Маламуд. — Донецк: ДонНУ, 2005. — 46 с.

6. Канторович Л.В. Функциональный анализ, / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — Санкт-Петербург: Невский Диалект, 2004. — 816 с.

7. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа, / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1972. — 496 с.

8. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа, / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. - М.:Наука, 1965. - 520 с.

9. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева, / В.Г. Мазья. — М.: Наука, 1985. — 416 с.

10. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной, / И.П. Натансон. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

11. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения, / Л.С. Понтрягин. — М.: Наука, 1982. — 386 с.

12. Треногин В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу, / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. — М.: Физматлит, 2002. — 240 с.

13. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, / Б.В. Шабат. — М.: Наука, 1983. — 450 с.


## СПИСОК ДОДАТКОВОЇ ЛІТЕРАТУРИ


14. Антоневич А.Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения, / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. — Минск: БГУ, 2003. — 430 с.

15. Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

16. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, / М.А. Красносельский. — М.:Наука, 1956. — 392 с.

17. Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа, / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М.: Наука, 1975. — 512 с.

18. Куфнер А. Нелинейные дифференциальные уравнения, / А. Куфнер, С. Фучик. — М.: Наука, 1988. — 304 с.

19. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, / О.А. Ладыженская. — М.: Наука, 1973. — 408 с.

20. Лионс Ж.-М. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, / Ж.-М. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 587 с.

21. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу, / Л. Ниренберг. — М.: Мир, 1977. — 232 с.

22. Садовский Б.Н. Об одном принципе неподвижной точки, / Б.Н. Садовский. // Функциональный анализ и его приложения. 1967. — Т. 1. — Вып. 2, с. 74-76.

23. Садовский Б.Н. Предельно компактные и уплотняющие операторы, / Б.Н. Садовский. // УМН. — 1972. — Т. 27. — Вып. 1(163), с. 82-146.

24. Скрыпник И.В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка, / И.В. Скрыпник. — К.: Наукова думка, 1973. — 219 с.

25. Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач, / И.В. Скрыпник. — М.: Наука, 1990. — 448 с.

26. Скрыпник И.В. Избранные труды. Т.1, / И.В. Скрыпник. — К.: Наукова думка, 2008. — 407 с.

# ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК


Відкрите покриття множини, 29
Відображення стискаюче, 39
Гомотопічна інваріантність, 181
Гомотопія, 181
Збіжність,
сильна 19,
слабка 19
Критерій компактності в $L_p$, 32
Критерій слабкої збіжності,
в банаховому просторі 19,
в $C_{[a,b]}$ 21
в $l_p$ 20,
в $L_p[a, b]$ 20,
Лема про гострий кут, 132
Міра некомпактності за Хаусдорфом, 40
Множина,
епсілон-сітка 29,
компактна 29,
передкомпактна 29,
тотальна 19,
цілком обмежена 30
Нерухома точка, 39
Норма, компактна відносно іншої норми, 36
Оператор,
інтегральний 33,
коерцитивний 131,
компактний 32,
лінійний 25,
монотонний 130,
Немицького 42,
необхідна умова існування оберненого оператора 27,
неперервний 25,
норма оператора 27,
обернений 27,
обмежений 25,
розширення оператора 26,
ущільнюючий 41,
типу $(S)_+$ 157
Послідовність,
рівномірно обмежена 18
Принцип ненульового ступеня, 183
Простір,
другий спряжений 15,
спряжений 15,
рефлексивний 16
Сім'я множин,
одностайно неперервна 31,
рівномірно обмежена 31
Ступінь,
відображення 181,
відображень класу $(S)_+$ 208,
Лере-Шаудера 201, 204
Теорема,
Асколі-Арцела 31,
Банаха про неперервність оберненого оператора 28,
Банаха-Штейнгауза 18,
Брауера про нерухому точку 72,
існування розв'язку рівняння з $(S)_+$-оператором 158,
критерій компактності Хаусдорфа 30,
Пітре 37,
принцип стискаючих відображень 39,

про єдиність продовження функціонала 14,
про канонічне вкладення нормованого простору 16,
про обчислення норми функціоналу 13,
про повноту спряженого простору 15,
про слабку компактність рефлексивного банахового простору 21,
Ріса для гільбертового простору 16,
Ріса для простору $L_p$ 17,
Сарда 188,
Шаудера 85
Узагальнений розвязок задачі Діріхле, 147, 161
Умови Каратеодорі, 43
Функціонал,
лінійний 12,
неперервний 13,
норма функціонала 13,
обмежений 13,
продовження лінійного функціоналу 14

Навчальне видання

Шраменко Володимир Миколайович
Буряченко Катерина Олександрівна
Лиманський Дмитро Володимирович

*Застосування нелінійного функціонального аналізу до теорії диференціальних рівнянь*

Редактор О.І. Хвостова

План вид. 2010 р., поз. № 7