

МКР3. Диференціальне числення функції багатьох змінних.

1. Знайти область визначення функції $z = z(x, y)$ і зобразити на площині.
2. Задано функцію $u = u(x, y, z)$, точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$.
Знайти:
 - a) $\overrightarrow{\text{grad}}u(x, y, z)$ в точці A ;
 - b) похідну функції $u = u(x, y, z)$ в точці A за напрямком \overrightarrow{AB} .
3. З'ясувати, чи є векторне поле \vec{a} соленоїдальним і потенціальним, якщо $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$.
4. Знайти dz і d^2z , якщо $z = z(x, y)$.

Основні формули

Задано скалярне поле $u = u(x, y, z)$. Тоді

$$\overrightarrow{\text{grad}}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}u(A) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

Похідна за напрямком :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \overrightarrow{\text{grad}}u(A) \cdot \vec{s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

де \vec{s} - одиничний вектор напрямку і $\vec{s} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$.

Задано векторне поле $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$.

Тоді основні характеристики векторного поля обчислюються за формулами:

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Умови потенціальності і соленоїдальності векторного поля:

$\overrightarrow{rot \vec{a}} = 0 \Rightarrow$ поле потенціальне ,

$div \vec{a} = 0 \Rightarrow$ поле соленоїдальне .

Повний диференціал функції двох змінних $z = z(x, y)$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy ,$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 .$$