ККР2 "Метод Лагранжа. Системи диференціальних рівнянь"

Питання до модульної контрольної роботи:

1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) 2 – го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод Лагранжа.
2. Системи нормальних лінійних диференціальних рівнянь 2 – го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Оцінка за контрольну роботу – 10 балів.

Необхідні теоретичні відомості:

1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння (ЛНДР) 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод Лагранжа.

ЛНДР 2-го порядку має вигляд

$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x),\ a_1, a_2 \in \mathbf{R}$, $f(x)$ - довільна права частина.

Загальний розв'язок відповідного ЛОДР $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ шукаємо у вигляді $y_{\text{з.о.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2,\ y_1, y_2 -$ фундаментальна система розв'язків, де $y_i = e^{k_i x}$, $k_i -$ корені характеристичного рівняння $(i = 1,2)$.

Використовуємо метод Лагранжа (метод варіації довільної сталої) і загальний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$y_{\text{з.н.}} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, де $C_1(x),\ C_2(x)$ - невідомі функції, які знаходимо із системи

$(*)\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$. Система$(*)$ лінійна відносно невідомих функцій $C_1'(x), C_{2(x)}'$, розв'яжемо її методом Крамера: $C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, де

$\Delta = w(y_1, y_2) = w(x)$ визначник Вронського

$$\Delta = w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' ,$$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = -y_2 f(x),\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = y_1 f(x)$. Тоді за формулами Крамера

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} \; ; \; C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} \; =>$$

$$=> C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx + C_1 \; ; \quad C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx + C_2 \, .$$

Загальний розв'язок ЛНДР 2-го порядку запишемо у вигляді

$$y = \left(-\int \frac{y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx + C_1\right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx + C_2\right) y_2 =>$$

$$=> \boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx},$$

де $y_{\text{ч.н.}} = -y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{w(y_1, y_2)} dx$ – частинний розв'язок ЛНДР, а $y_{\text{з.о.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ - загальний розв'язок відповідного ЛОДР.

2. Системи нормальних лінійних диференціальних рівнянь 2 – го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11} x + a_{12} y + f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21} x + a_{22} y + f_2(t). \end{cases}$$

Для розв'язування системи диференціальних рівнянь використаємо метод виключення невідомої, тобто систему зводимо до одного диференціального рівняння від однієї невідомої функції 2-го порядку:

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = f_1(t) + f_2(t)$$

або $$y'' + b_1 y' + b_2 y = f_1(t) + f_2(t) \, .$$

<u>Приклади ЛНДР 2 – го порядку зі сталими коефіцієнтами:</u>

1. $y'' + y = \mathrm{tg} x$ 2. $y'' - 2y + y = \dfrac{e^x}{x}$

3. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$ 4. $y'' + y = -\mathrm{ctg}^2 x$

5. $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}$ 6. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2 + e^{-x}}$

Приклади систем диференціальних рівнянь:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 1. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 5\sin t\,. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 2\sin t\,, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + e^{-t}\,. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - e^t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y + 4t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y + t\ \ , \end{cases}$ $x(0) = 0\,, y(0) = 0\,.$