НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Невласні інтеграли із нескінченними проміжками інтегрування

Нехай функція *f(x)* означена на проміжку [*a*; +∞) і інтегрована на відрізку [*a; b*] при всякому *b* > *a* Тоді визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує при всякому *b* > *a* і є деякою функцією від *b*: $I(b) = \int_a^b f(x)dx$ визначеною на проміжку [*a*; +∞).

Означення. Якщо функція $I(b)$ має скінчену границю при $b \to +\infty$, то цю границю називають невласним інтегралом І-го роду від функції *f(x)* на проміжку (*a*; +∞) і позначають $I^{+\infty} = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$.

У цьому випадку вважають, що інтеграл $I^{+\infty}$ збігається (або існує). Якщо функція $I(b) = \int_b^a f(x)dx$ при $b \to +\infty$ не має скінченої границі, то символ $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ також називають невласним інтегралом І-го роду, однак в даному випадку вважають, що цей інтеграл розбігається (або не існує). Такому невласному інтегралу не приписують ніякого значення. Аналогічно вводиться поняття невласного інтеграла $I_{-\infty} = \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$. Тоді невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ можна представити у вигляді

$$I_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = I^{+\infty} + I_{-\infty},$$

де *c* деяке дійсне число $-\infty < c < +\infty$.

Якщо існують обидва інтеграли $I^{+\infty}$ і $I_{-\infty}$, тоді інтеграл $I_{-\infty}^{+\infty}$ збіжний (або існує), якщо хоча б один із інтегралів $I^{+\infty}$, $I_{-\infty}$ не існує (розбігається), тоді і інтеграл $I_{-\infty}^{+\infty}$ розбіжний (або не існує).

Для невласних інтегралів І-го роду виконуються властивості визначеного інтеграла, а також теореми Ньютона-Лейбніца, заміни змінної, інтегрування за частинами, інтегрування нерівностей.

На основі формули Ньютона-Лейбніца інтеграли $I^{+\infty}$, $I_{-\infty}$ можна записати у вигляді:

$$I^{+\infty} = \int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

або

$$I_{-\infty} = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)|_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

де $F(x)$ – первісна функція *y* = *f(x)*, $F(+\infty) = \lim_{b \to +\infty} F(b)$ і $F(-\infty) = \lim_{a \to -\infty} F(a)$

Приклад 1

Обчислити інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{3} \ln\frac{x-1}{x+2}|_2^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{3}\left(\ln\frac{b-1}{b+2} - \ln\frac{2-1}{2+2}\right) =$$
$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{3}\left(\ln\frac{b-1}{b+2} - -\ln\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty} \ln\frac{4(b-1)}{b+2} = \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{2}{3}\ln 2$$

Отже, інтеграл збігається.

Приклад 2

Обчислити інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \int_2^{\infty} \ln x d(\ln x) = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \ln x d(\ln x) =$$
$$\lim_{b\to\infty} \frac{\ln^2 x}{2} |_2^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{3} (\ln^2 b - \ln^2 2) = \infty$$

Отже інтеграл розбігається (або не існує).

Приклад 3
Обчислити інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$I_{-\infty}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}(x+1)|_a^0=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(a+1))=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}(-\infty)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$$

$$I^{+\infty}=\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}(x+1)|_0^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}(b+1)-\operatorname{arctg}1)=\operatorname{arctg}(\infty)-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

Отже, $I=I_{-\infty}+I^{+\infty}=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\pi$.

Невласний інтеграл збігається.

Приклад 4
Обчислити інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_{0}^{\infty}x\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\sin x^2d(x^2)=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{0}^{b}\sin x^2d(x^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}-\cos x^2|_0^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(1-\cos b^2)=\frac{1}{2}(1-\lim_{b\to+\infty}\cos b^2).$$

Але $\cos b$ при $b\to+\infty$ не прямує ні до якої границі, коливаючись від -1 до +1.
Тому цей інтеграл розбігається.

Приклад 5

Розглянемо інтеграл $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$, $p>0$.

Нехай $p=1$, маємо

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln x|_a^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln a)=+\infty.$$

Нехай $p\neq 1$. Тоді

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}|_a^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}(b^{1-p}-a^{1-p}).$$

При $p<1$ інтеграл $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ розбігається:

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}(b^{1-p}-a^{1-p})=+\infty.$$

При $p>1$ інтеграл $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ збігається і дорівнює $\frac{a^{p-1}}{p-1}$.

Таким чином, інтеграл $\int_{a}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ збігається при $p>1$ і розбігається при $p\leq 1$. Розглянемо достатні ознаки збіжності невласних інтегралів I-го роду.

Теорема 1 (перша ознака порівняння)
Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ - дві невід'ємні функції на проміжку $[a,+\infty)$, інтегровані на підрізку $[a,b]$ при всякому $b>a$ і якщо $f(x)\leq g(x)$, то із збіжності невласного інтеграла $\int_{a}^{+\infty}g(x)dx$ випливає збіжність невласного інтеграла $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$ (або із розбіжності невласного інтеграла $\int_{a}^{+\infty}g(x)dx$ випливає розбіжність невласного інтеграла $\int_{a}^{+\infty}g(x)dx$).

При використанні ознаки порівняння на практиці, порівняльною функцією може бути функція $g(x) = \frac{c}{x^p}$, де $c,p \in R$, тобто функція, досліджена в прикладі 5.

Теорема 2 (друга ознака порівняння)

Якщо при $x \to +\infty$ маємо $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, причому $K > 0$, $K \neq \infty$, $g(x) \neq 0$ для всіх досить великих x, то невласні інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Приклад 6

Дослідити на збіжність $I^{+\infty} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 2x dx}{\sqrt[3]{x^4+2x^2+3}}$

Оскільки $\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 3} > \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$, $|\sin^2 2x| \leq 1$, то $0 \leq \frac{\sin^2 2x dx}{\sqrt[3]{x^4+2x^2+3}} \leq \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$

Але інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}$ - збігається (приклад 5). Отже за ознакою порівняння $I^{+\infty}$ також збігається.

Приклад 7

Дослідити на збіжність $I^{+\infty} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+5x+11}}$

Запишемо інтеграл у вигляді суми двох інтгралів

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+5x+11}} = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+5x+11}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+5x+11}}$$

На відрізку [0; 1] інтеграл є скінченим числом. Для порівняння на проміжку [1; +∞) беремо функцію $g(x) = \frac{1}{x^p} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ для якої $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$ розбіжний $p = \frac{2}{3} < 1, f(x) = \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+5x+11}}$, тоді за теоремою 2 маємо

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+5x+11}} \div \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x^2+5x+11}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{5}{x}+\frac{11}{x^2}}} = 1 \neq 0$$

Отже обидва інтеграли за теоремою 2 одночасно розбігаються

Приклад 8

Дослідити на збіжність інтеграл

$$I^{+\infty} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}+\ln x}$$

Використаємо ознаку граничного порівняння (теорема 2) Нехай $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}+\ln x}$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}+\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}} = 1 \neq 0,$$

оскільки

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^{\frac{3}{2}})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3x\sqrt{x}} = 0,$$

Отже, за теоремою 2 обидва інтеграли одночасно вбігаються.

Невласні інтеграли від необмежених функцій

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a,\ b)$ (точка $x = b$ - особлива, в ній функція необмежена) і інтегрована на відрізку $[a;b-\varepsilon]$, де $0 < \varepsilon < b - a$.

Якщо існує границя $\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то її називають невласним інтегралом від розривної функції $f(x)$ в точці $x = b$ на відрізку $[a, b]$ (невласним інтегралом 2-го роду) і позначають

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

У цьому випадку вважають, що невласний інтеграл 2-го роду збігається (або існує), в противному випадку він розбігається (або не існує).

Приклад 1

Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ Очевидно, це невласний інтеграл. Маємо

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \arcsin x\,\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} (\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

.

Приклад 2

Розглянемо інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$, де $p \in R$, отримаємо

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^p}$$

Тобто маємо або

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{b-\varepsilon} \text{ при } p \neq 1, \text{або } \lim_{\varepsilon\to+0} \ln|b-x|\,\Big|_a^{b-\varepsilon} \text{ при } p = 1.$$

Отже, невласний інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ збігається при $p < 1$ і розбігається при $p \geq 1$.

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(a,b]$ (точка $x = a$ - особлива, в ній функція необмежена) і інтегрована на відрізку $[a + \varepsilon;\ b]$, де $0 < \varepsilon < b - a$.

Якщо існує границя $\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, То її навивають невласним інтегралом від розривної функції $f(x)$ в точці $x = a$ на відрізку $[a, b]$ (невласним інтегралом 2-го роду) і позначають

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Приклад 3

Обчислити невласний інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.Оскільки In 1 = 0, то нідінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ в точці $x = 1$ має розрив, тому

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d\,(\ln x)}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln\ln x\,\Big|_{1+\varepsilon}^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} (\ln\ln 2 - \ln\ln(1+\varepsilon)) = \ln\ln 2 - \ln\ln 1 = \ln\ln 2 - \ln 0 = +\infty.$$

Отже, невласний інтеграл не існує, або розбігається.

Аналогічно прикладу 2, невласний інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ збігається при $p < 1$ і розбігається при $p > 1$.

Зустрічаються також невласні інтеграли від необмеженої функції, що має декілька точок розриву другого роду. Тоді такий інтеграл необхідно представити у вигляді суми інтегралів, в кожному із яких підінтегральна функція має тільки одну точку розриву, і невласний інтеграл вводиться таким чином. Якщо функція *f(x)* визначена на відрізку [*a*,*b*], крім точки $x = c \in [a, b]$, (точка *x* = c - особлива, в ній функція необмежена). Інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$$

називається невизшіченим інтегралом 2-го роду від розривної функції $f(x)$ в точці $x=c \in [a, b]$.

Якщо існують обидві границі, то інтеграл збіжний, якщо хоча б одна границя не існує, то інтеграл розбіжний.

Приклад 4

Дослідити на збіжність інтеграл

$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$. На проміжку [-1; 1] функція $f(x) = \frac{1}{x^2}$ в точці *x* = 0 має розрив. Тоді

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{0-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{0+\varepsilon}^{1}$$

Кожна із цих границь дорівнює нескінченності. Тому невласний інтеграл розбігається. Якщо цей інтеграл обчислювати безпосередньо, не звертаючи увагу на точку розриву *x* = 0 для підінтегральної функції $f(x) = \frac{1}{x^2}$, то отримаємо неправильний результат

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$$

Приклад 5

Дослідити на збіжність інтеграл

$\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$. Підінтегральна функція в точці *x* = 0 $\in$ [—1; 1] має розрив. Тоді

$$\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\left(x^{\frac{2}{5}} - x^{-\frac{3}{5}}\right)dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^{1}\left(x^{\frac{2}{5}} - x^{-\frac{3}{5}}\right)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{5}{7}(-\varepsilon)^{\frac{7}{5}} - \frac{5}{2}(-\varepsilon)^{\frac{2}{5}} - \frac{5}{7}(-1)^{\frac{7}{5}} + \frac{5}{2}(-1)^{\frac{2}{5}}\right) + \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{5}{7} - \frac{5}{2} - \frac{5}{7}(\varepsilon)^{\frac{7}{5}} + \frac{5}{2}(\varepsilon)^{\frac{2}{5}}\right) =$$

$$= \frac{5}{7} + \frac{5}{2} + \frac{5}{7} - \frac{5}{2} = \frac{10}{7}$$

Отже, невласний інтеграл збігається.

Для невласних інтегралів від необмежених функцій мають місце теореми порівняння, аналогічні теоремам 1 і 2.

Приклад 6

Дослідити на збіжність інтеграл

$\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$. Оскільки

$$\sqrt{1-x^4} = \sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = (1-x)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1+x)(1+x^2)}, (1+x>1;\ 1+x^2>1)$$

За порівняльну функцію візьмемо $g(x) = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$, тоді за граничною ознакою порівняння

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Отже, оскільки інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ збігається $(p = \frac{1}{2} < 1)$, то інтеграл $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

теж збігається.

Приклад 7

Дослідити на збіжність інтеграл

$\int_0^1 \frac{dx}{\sin(1-x)}$. Оскільки $\sin(1-x)$ нескінченно мала функція при $x \to 1$, то за порівняльну функцію візьмемо $g(x)= \frac{1}{1-x}$ тоді за граничною ознакою порівняння

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\sin(1-x)} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1 \neq 0$$

Отже, оскільки інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$. розбігається $(p = 1$, то інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sin(1-x)}$ теж розбігається.

Приклад 8

Дослідити на збіжність інтеграл

$\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$ Оскільки $e^{\sqrt{x}} - 1$ нескінченно мала функція при $x \to 0$, то за порівняльну функцію візьмемо $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ тоді за граничною ознакою порівняння

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 \neq 0.$$

Отже, оскільки інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ збігається $(p = \frac{1}{2} < 1)$, то інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$ теж збігається.

Приклад 9

Дослідити на збіжність інтеграл

$\int_0^3 \frac{dx}{x^2-2x-8}$.

Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x^2-2x-8} = \frac{1}{(x-2)(x+4)}$ має розрив другого роду

в точці $x = 2 \in [0; 3]$, тобто даний інтеграл є невласним інтегралом від необмеженої функції.

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2-2x-8} = \lim_{\varepsilon\to +0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-2x-8} + \lim_{\varepsilon\to +0} \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{dx}{x^2-2x-8}.$$

Оскільки

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2-2x-8} \div \frac{1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+4)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{6} \neq 0,$$

то інтеграли $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-2x-8}$ і $\int_0^3 \frac{dx}{x-2}$ і одночасно або збігаються, або розбігаються. Але інтеграл $\int_0^3 \frac{dx}{x-2}$ розбігається (p = 1). Тому інтеграл $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-2x-8}$ також розбігається.

Завдання

Обчислити інтеграл або визначити його розбіжність

1. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$	2. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$	3. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2}$
4. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}$	5. $\int_0^{1}\frac{dt}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}$	6. $\int_3^{5}\frac{dx}{\sqrt[4]{(4-x)^2}}$
7. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+2}dx$	8. $\int_0^{\infty} te^{-t^2}dt$	9. $\int_0^{1}\frac{\ln^2 x}{x}dx$
10. $\int_{-2}^{2}\frac{xdx}{x^2-1}$	11. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$	12. $\int_{-\infty}^{2} e^{2-x}dx$
13. $\int_0^{\infty} x\sin x\,dx$	14. $\int_0^{\infty} e^{-3x}dx$	15. $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{(1+x)^3}$
16. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}$	17. $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}x\,dx}{1+x^2}$	18. $\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$
19. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$	20. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$	21. $\int_0^{1}\frac{dx}{x^2-2x}$
22. $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{(1-x)^3}$	23. $\int_3^{\infty}\frac{dx}{2-x}$	24. $\int_0^{\infty} x\cos x\,dx$
25. $\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$	26. $\int_0^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	27. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}$
28. $\int_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	29. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$	30. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{2+2x+x^2}$

Завдання

Обчислити інтеграл або визначити його розбіжність

1. $\int_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	2 $\int_0^{1}\frac{dx}{(x-1)^3}$.	3. $\int_1^{2}\frac{dx}{x\ln^2 x}$
4. $\int_0^{3}\frac{dx}{x^2-4}$	5. $\int_0^{\infty} e^{-2t}dt$	6. $\int_1^{\infty}\frac{dt}{3+t^2}$
7. $\int_0^{2}\frac{dx}{(x-1)^3}$	8. $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$	9. $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$
10. $\int_1^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$	11. $\int_0^{1}\ln x\,dx$	12. $\int_0^{2}\frac{dx}{1-x}dx$
13. $\int_0^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}-1}$	14. $\int_0^{2}\frac{dx}{\sqrt{\lvert 1-x^2\rvert}}$	15. $\int_0^{2}\frac{xdx}{x^2-4x+3}$
16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{ctg}\,x\,dx$	17. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$	18. $\int_1^{2}\frac{xdx}{x^2-1}$
19. $\int_1^{2}\frac{dx}{x\ln x}$	20. $\int_0^{2}\frac{dx}{\sqrt{\lvert 1-x^2\rvert}}$	21. $\int_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

22. $\int_0^{\infty} \frac{x+1}{x^2+1} dx$

23. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

24. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

25. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$

26. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^3}$

27. $\int_0^3 \frac{dx}{x-2}$

28. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$

29. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$

30. $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^3 x}$