

**ЗАВДАННЯ**  
на домашню контрольну роботу  
з узагальнених функцій (УФ)

**Тема 1. Означення та носій УФ**

Довести, що поданий нижче функціонал

$f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \ni \varphi \rightarrow \langle f, \varphi \rangle \in \mathbb{C} \in \text{УФ}$  з простору  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , з'ясувати, чи є ця УФ регулярною, і знайти її носій:

$$1.1. \langle f, \varphi \rangle = \int_{-2}^2 \text{sign} x \varphi'(x) dx;$$

$$1.2. \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \ln |x| \varphi(x) dx;$$

$$1.3. \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \varphi''(x) dx;$$

$$1.4. \langle f, \varphi \rangle = \langle \mathcal{P} \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle := \text{Vp} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx;$$

$$1.5. \langle f, \varphi \rangle = \varphi'(1) + \int_0^{2\pi} \sin x \varphi(x) dx;$$

$$1.6. \langle f, \varphi \rangle = -\varphi(0) + \int_0^3 (x+1) \varphi''(x) dx;$$

$$1.7. \langle f, \varphi \rangle = \langle \mathcal{P} \frac{\cos 2x}{x}, \varphi \rangle := \text{Vp} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 2x}{x} \varphi(x) dx;$$

$$1.8. \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \ln |x-1| \varphi(x) dx;$$

$$1.9. \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \varphi'(x) dx;$$

$$1.10. \langle f, \varphi \rangle = -\varphi''(0) + \int_{-5}^{-2} \cos x \varphi(x) dx;$$

$$1.11. \langle f, \varphi \rangle = \langle \mathcal{P} \frac{1}{x^3}, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^3} dx;$$

$$1.12. \langle f, \varphi \rangle = \varphi(-1) - \varphi'(2) - \int_0^{\pi} \sin x \varphi(x) dx;$$

$$1.13. \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{x+3} \varphi'(x) dx;$$

- 1.14.  $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sign} x \varphi''(x) dx;$
- 1.15.  $\langle f, \varphi \rangle = - \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx;$
- 1.16.  $\langle f, \varphi \rangle = \int_{-3}^1 |x| \varphi'(x) dx;$
- 1.17.  $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-x+1} \varphi''(x) dx;$
- 1.18.  $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{x^2} \varphi'(x) dx;$
- 1.19.  $\langle f, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^3 \varphi^{(k)}(x);$
- 1.20.  $\langle f, \varphi \rangle = \int_{-5}^5 \operatorname{sign} x \varphi'(x) dx;$
- 1.21.  $\langle f, \varphi \rangle = \varphi(0) + \int_1^3 x \varphi''(x) dx;$
- 1.22.  $\langle f, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^4 \varphi(k);$
- 1.23.  $\langle f, \varphi \rangle = \operatorname{Vp} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 3x}{x} \varphi(x) dx;$
- 1.24.  $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (x - e^x) \varphi''(x) dx;$
- 1.25.  $\langle f, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^m \varphi(k), m \in \mathbb{N};$
- 1.26.  $\langle f, \varphi \rangle = \varphi'(-5) + \int_0^{2\pi} \sin 2x \varphi(x) dx;$
- 1.27.  $\langle f, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)}(2k);$
- 1.28.  $\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (x^3 + \sin^2 \frac{1}{2}x) \varphi'(x) dx;$
- 1.29.  $\langle f, \varphi \rangle = \varphi(3) - \int_{-5}^4 |x| \varphi'(x) dx;$

$$1.30. \langle f, \varphi \rangle = \langle \mathcal{D} \frac{\cos 6x}{x}, \varphi \rangle = \text{Vp} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos 6x}{x} \varphi(x) dx;$$

$$1.31. \langle f, \varphi \rangle = -\varphi'(2) + 3\varphi''(-1) - \int_{-1}^3 |x| \varphi(x) dx.$$

## Тема 2. Збіжність у просторі УФ

Довести, що в просторі  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  справджуються співвідношення:

2.1.  $te^{ixt} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0;$

2.2.  $\frac{\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0^+]{} \delta_0;$

2.3.  $\frac{1}{\epsilon} e^{-\frac{x^2}{\epsilon}} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} \sqrt{\pi} \delta_0;$

2.4.  $\frac{1}{x} \sin \frac{x}{\epsilon} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} \pi \delta_0;$

2.5.  $\frac{\epsilon}{x^2} \sin^2 \frac{x}{\epsilon} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} \pi \delta_0;$

2.6.  $t^2 e^{ixt} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0;$

2.7.  $\mathcal{D} \frac{\cos kx}{x} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0;$

2.8.  $\frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon}} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} \delta_0;$

2.9.  $\frac{1}{\pi x} \sin kx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \delta_0;$

2.10.  $\frac{1}{\pi k x^2} \sin^2 kx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \delta_0;$

2.11.  $te^{-ixt} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0;$

2.12.  $\sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-kx^2} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \delta_0;$

2.13.  $t^2 e^{-ixt} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0;$

2.14.  $\frac{1}{\epsilon} e^{-\frac{x^2}{\epsilon^2} + \frac{x}{\epsilon}} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} \sqrt{\pi} e^{\frac{1}{4}} \delta_0;$

2.15.  $\frac{1}{\epsilon} e^{-\frac{2x^2}{\epsilon^2}} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta_0;$

2.16.  $\frac{1}{t} e^{-\frac{x^2}{4t^2}} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 2\sqrt{\pi} \delta_0;$

2.17.  $y^2 e^{-ixy} \xrightarrow[y \rightarrow \infty]{} 0;$

2.18.  $\frac{1}{\epsilon} e^{-\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2 - \frac{2x}{\epsilon}} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} e\sqrt{\pi} \delta_0;$

2.19.  $ke^{-\left(\frac{kx}{2}\right)^2} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 2\sqrt{\pi} \delta_0;$

2.20.  $t^3 e^{ixt} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0;$

- 2.21.  $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{t^2} - \frac{2x}{t} - 1} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \delta_0;$
- 2.22.  $t^3 e^{-ixt} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0;$
- 2.23.  $\frac{x}{\epsilon^2} e^{-\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^2} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} 0;$
- 2.24.  $\frac{1}{t} e^{-\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \frac{x}{t} + \frac{3}{4}} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} e\sqrt{\pi}\delta_0;$
- 2.25.  $k^2 x e^{-k^2 x^2} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0;$
- 2.26.  $t e^{-t^2 x^2 + tx + 7/4} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} e^2 \sqrt{\pi} \delta_0;$
- 2.27.  $t^4 e^{ixt} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0;$
- 2.28.  $\mathcal{P} \frac{\cos(k+1)x}{x} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0;$
- 2.29.  $\frac{1}{kx^2} \sin^2 kx \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \pi \delta_0;$
- 2.30.  $\frac{1}{\pi x} \sin(k+1)x \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \delta_0;$
- 2.31.  $(t+2)e^{ix(t+2)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$

### Тема 3. Диференціювання УФ

Знайти похідні перших трьох порядків у просторі  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  від функцій  $f$ , якщо

3.1.  $f(x) = \theta(x - 3)$ ;

3.2.  $f(x) = \theta(x - \pi) \sin x$ ;

3.3.  $f(x) = \operatorname{sign} x$ ;

3.4.  $f(x) = \theta(x + \frac{1}{2}\pi) \cos x$ ;

3.5.  $f(x) = \operatorname{sign}(\cos x)$ ;

3.6.  $f(x) = |x + 1|$ ;

3.7.  $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$ ;

3.8.  $f(x) = \theta(x - 1)e^{3x}$ ;

3.9.  $f(x) = \theta(x - \pi)|\sin x|$ ;

3.10.  $f(x) = \theta(x) \cos(x + 1)$ ;

3.11.  $f(x) = \theta(x - 2)x^3$ ;

3.12.  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ (x + 1)^2, & -1 < x \leq 0, \\ x^2 + 1, & x > 0; \end{cases}$

3.13.  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, x \geq 2, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ (x - 2)^2, & 1 < x < 2; \end{cases}$

3.14.  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ x + 1, & 0 < x \leq 1, \\ x^2 + 1, & x > 1; \end{cases}$

3.15.  $f(x) = e^{-2|x|}$ ;

3.16.  $f(x) = e^{-|x+1| \sin x}$ ;

3.17.  $f(x) = \theta(x - 1)e^{-x}$ ;

3.18.  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$

$$3.19. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$3.20. f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ \sin x, & x \leq 0; \end{cases}$$

$$3.21. f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq \pi, \\ \cos x, & |x| > \pi; \end{cases}$$

Довести в просторі  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  рівності:

$$3.22. x^n \mathcal{P}_x^{\frac{1}{x}} = x^{n-1}, n \geq 1;$$

$$3.23. x \mathcal{P}_x^{\frac{1}{x^2}} = \mathcal{P}_x^{\frac{1}{x}};$$

$$3.24. (\ln |x|)' = \mathcal{P}_x^{\frac{1}{x}};$$

$$3.25. x^k \delta_0^{(n)} = (-1)^k k! C_n^k \delta_0^{(n-k)}, \{k, n\} \subset \mathbb{N}, n \geq k;$$

$$3.26. x^k \delta_0^{(n)} = 0, \{k, n\} \subset \mathbb{N}, n < k;$$

$$3.27. |\sin x|'' + |\sin x| = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - k\pi);$$

$$3.28. \alpha \delta_0^{(n)} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} C_n^k \alpha^{(n-k)}(0) \delta_0^{(k)}, \alpha \in C^\infty(\mathbb{R});$$

$$3.29. x^m \mathcal{P}_x^{\frac{1}{x^2}} = x^{m-2}, m \geq 2;$$

$$3.30. (x \operatorname{sign} x)'' = 2\delta_0;$$

$$3.31. |x - 1|''' = 2\delta_1'.$$

#### Тема 4. Прямий добуток УФ

Знайти  $f(x) \times g(y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , якщо

- 4.1.  $f(x) = \cos x \delta^{(4)}(x)$ ,  $g(y) = \delta(y - 2)$ ;
- 4.2.  $f(x) = \theta(x)$ ,  $g(y) = \delta(y)$ ;
- 4.3.  $f(x) = x^3 \delta^{(5)}(x)$ ,  $g(y) = \delta^{(3)}(y)$ ;
- 4.4.  $f(x) = x^4 \delta^{(3)}(x)$ ,  $g(y) = \delta^{(4)}(y)$ ;
- 4.5.  $f(x) = \cos x \delta^{(3)}(x)$ ,  $g(y) = \delta(y - 6)$ ;
- 4.6.  $f(x) = \delta(x - 2)$ ,  $g(y) = \cos y \delta^{(4)}(y)$ ;
- 4.7.  $f(x) = \delta'(x)$ ,  $g(y) = \theta(y)$ ;
- 4.8.  $f(x) = \delta^{(3)}(x)$ ,  $g(y) = y^3 \delta^{(5)}(y)$ ;
- 4.9.  $f(x) = \cos 2x \delta^{(5)}(x)$ ,  $g(y) = \delta'(y - 1)$ ;
- 4.10.  $f(x) = \delta(x + 2)$ ,  $g(y) = \cos 2y \delta^{(3)}(y)$ ;
- 4.11.  $f(x) = \delta(x - 2)$ ,  $g(y) = \cos y \delta^{(4)}(y)$ ;
- 4.12.  $f(x) = \delta(x)$ ,  $g(y) = \theta(y)$ ;
- 4.13.  $f(x) = \delta^{(3)}(x)$ ,  $g(y) = (y + 1)^3 \delta^{(5)}(y)$ ;
- 4.14.  $f(x) = \delta^{(4)}(x)$ ,  $g(y) = y^4 \delta''(y)$ ;
- 4.15.  $f(x) = \delta(x - 6)$ ,  $g(y) = \cos y \delta''(y)$ ;
- 4.16.  $f(x) = \cos x \delta^{(4)}(x)$ ,  $g(y) = \delta(y - 2)$ ;
- 4.17.  $f(x) = \theta(x - 1)$ ,  $g(y) = \delta'(y)$ ;
- 4.18.  $f(x) = x^3 \delta^{(5)}(x)$ ,  $g(y) = \delta^{(3)}(y)$ ;
- 4.19.  $f(x) = \delta'(x)$ ,  $g(y) = \cos 2y \delta^{(4)}(y)$ ;
- 4.20.  $f(x) = \cos 2x \delta''(x)$ ,  $g(y) = \delta(y + 2)$ ;
- 4.21.  $f(x) = \theta(x + 1)$ ,  $g(y) = \delta''(y + 1)$ ;
- 4.22.  $f(x) = \theta(x - 2)$ ,  $g(y) = e^y \delta'(y)$ ;
- 4.23.  $f(x) = (x + 1)^3 \delta''(x)$ ,  $g(y) = \theta(y - 3)$ ;
- 4.24.  $f(x) = (x^2 + e^{-x}) \delta'(x)$ ,  $g(y) = \theta(y - 1)$ ;
- 4.25.  $f(x) = \cos 2x \delta''(x)$ ,  $g(y) = \delta(y + 2)$ ;
- 4.26.  $f(x) = \delta(x - 3)$ ,  $g(y) = \cos(2y + \frac{\pi}{2}) \delta^{(4)}(y)$ ;
- 4.27.  $f(x) = \theta(x - 1)$ ,  $g(y) = \sin y \delta'(y)$ ;
- 4.28.  $f(x) = \delta(x + 5)$ ,  $g(y) = \delta^{(4)}(y)$ ;
- 4.29.  $f(x) = \delta^{(3)}(x + 1)$ ,  $g(y) = y^4 \delta^{(5)}(y)$ ;
- 4.30.  $f(x) = \delta'(x + 1)$ ,  $g(y) = \cos(y - 1) \delta''(y)$ ;



**4.31.**  $f(x) = x^3\delta^{(3)}(x), g(y) = \delta''(y + 2).$

## Тема 5. Згортка УФ

Знайти в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  згортки:

- 5.1.  $(\theta(x) \cos x) * (\theta(x)e^{-x})$ ;
- 5.2.  $(\theta(x) \sin x) * (\theta(x)e^{-x})$ ;
- 5.3.  $(\theta(x - 2)) * (\theta(x - 3))$ ;
- 5.4.  $(\theta(x)x) * (\theta(x)x^2)$ ;
- 5.5.  $(x^2 \exp\{-x^2\}) * (x^2 \exp\{-x^2\})$ ;
- 5.6.  $(\theta(x) \sin x) * (\theta(x) \cos x)$ ;
- 5.7.  $(\theta(x) \sin x) * (\theta(x) \sin x)$ ;
- 5.8.  $(\theta(x) \cos x) * (\theta(x) \cos x)$ ;
- 5.9.  $(x \exp\{-x^2\}) * (\exp\{-x^2\})$ ;
- 5.10.  $(x \exp\{-2x^2\}) * (\exp\{-2x^2\})$ ;
- 5.11.  $\delta'(x) * \delta''(x - 1)$ ;
- 5.12.  $\theta(x) * \delta^{(3)}(x)$ ;
- 5.13.  $\delta'(x) * 1$ ;
- 5.14.  $\theta(x + 1) * \theta(x - 1)$ ;
- 5.15.  $\delta''(x - 1) * \delta'(x - 2)$ ;
- 5.16.  $\delta'(x - 5) * (\theta(x)x^2)$ ;
- 5.17.  $(\theta(x)e^{-x}) * \delta'(x)$ ;
- 5.18.  $\delta'''(x + 1) * \delta''(x - 1)$ ;
- 5.19.  $\theta(x - 2) * \theta(x + 2)$ ;
- 5.20.  $(\theta(x) \sin x) * \delta''(x + 1)$ ;
- 5.21.  $(\delta'(x) * \delta'''(x - 3))$ ;
- 5.22.  $\delta''(x + 1) * \delta'(x + 2)$ ;
- 5.23.  $(\theta(x)e^{-x^2}) * \delta'(x)$ ;
- 5.24.  $\delta'(x) * \theta(x)$ ;
- 5.25.  $\delta'(x) * x\theta(x)$ ;
- 5.26.  $\theta(x)(x + 1)^3 * \delta''(x)$ ;
- 5.27.  $\delta'(x + 1) * x^2\theta(x - 1)$ ;
- 5.28.  $(\theta(x) \cos x) * \delta'(x)$ ;
- 5.29.  $\delta''(x + 7) * \theta(x)(x - 1)$ ;
- 5.30.  $\theta(x)e^x * \delta''(x)$ ;

**5.31.**  $(\theta(x) \sin x) * \delta''(x)$ .

## Тема 6. Перетворення Фур'є

Знайти перетворення Фур'є функції  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ :

6.1.  $f(x) = xe^{-a|x|}$ ,  $a > 0$ ;

6.2.  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, a], \\ 0, & x \notin [0, a]; \end{cases}$

6.3.  $f(x) = \sin 2x$ ;

6.4.  $f(x) = \operatorname{sh} 3x$ ;

6.5.  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-a, a], \\ 0, & x \notin [-a, a]; \end{cases}$

6.6.  $f(x) = -5x^2 + x - 1$ ;

6.7.  $f(x) = \operatorname{ch} 2x$ ;

6.8.  $f(x) = \begin{cases} i/4, & 0 < x < 2a, \\ -i/4, & -2a < x < 0, \quad i = \sqrt{-1}; \\ 0, & |x| > 2a, \end{cases}$

6.9.  $f(x) = x^3 - 1$ ;

6.10.  $f(x) = \cos 4x$ ;

6.11.  $f(x) = \theta(x)e^{-ax}$ ,  $a > 0$ ;

6.12.  $f(x) = \frac{1}{2}xe^{a|x|}$ ,  $a < 0$ ;

6.13.  $f(x) = xe^{-x^2}$ ;

6.14.  $f(x) = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{\pi}(x^2+a^2)}$ ,  $a > 0$ ;

6.15.  $f(x) = x^2e^{-2x^2}$ ;

6.16.  $f(x) = e^{-x^2/2} \cos 3x$ ;

6.17.  $f(x) = x^5 - x^2$ ;

6.18.  $f(x) = x^2e^{-|x|}$ ;

6.19.  $f(x) = \operatorname{ch} 6x$ ;

6.20.  $f(x) = \sin 3x + 2$ ;

6.21.  $f(x) = \theta(x)$ .

Розв'язати задачу з методички:

6.22. 19.П2(а);

- 6.23.** 19.П2(б);
- 6.24.** 19.П2(в);
- 6.25.** 19.П2(г);
- 6.26.** 19.П2(д);
- 6.27.** 19.П2(е);
- 6.28.** 19.П2(е);
- 6.29.** 19.П2(ж);
- 6.30.** 19.П2(з);
- 6.31.** 19.П2(и).

## Тема 7. Рівняння в просторі УФ

Знайти загальні розв'язки в  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  рівнянь:

7.1.  $(x - 1)u = 0$ ;

7.2.  $x(x - 1)u = 0$ ;

7.3.  $(x^2 - 1)u = 0$ ;

7.4.  $xu = 1$ ;

7.5.  $xu = \mathcal{D}'\frac{1}{x}$ ;

7.6.  $x^2u = 2$ ;

7.7.  $\cos xu = 0$ ;

7.8.  $xu' = \mathcal{D}'\frac{1}{x}$ ;

7.9.  $x^2u' = 0$ ;

7.10.  $xu' = 1$ ;

7.11.  $(x + 1)^2u' = 0$ ;

7.12.  $(x + 1)u''' = 0$ ;

7.13.  $(x - 2)u = 0$ ;

7.14.  $(x + 1)^3u' = 0$ ;

7.15.  $x^2u' = 1$ ;

7.16.  $(x - 1)^2u = 0$ ;

7.17.  $(x - 1)(x - 2)u = 0$ ;

7.18.  $(x^2 - x - 2)u = 0$ ;

7.19.  $(x^2 - 6x + 5)u = 0$ ;

7.20.  $(x + 1)(x - 2)u' = 0$ ;

7.21.  $x^3u = 1$ ;

7.22.  $(x - 3)(x - 5)u = 0$ ;

7.23.  $xu' = 2$ ;

7.24.  $x^2u' = 0$ ;

7.25.  $(x + 2)^2u'' = 0$ ;

7.26.  $x^2(x - 1)^3u = 0$ ;

7.27.  $(x - 1)^2u'' = 0$ ;

7.28.  $xu' = \mathcal{D}'\frac{1}{x}$ ;

7.29.  $(x^2 - x - 6)u = 0$ ;

7.30.  $(x - 1)^2u' = 0$ ;

**7.31.**  $(x + 2)u = 3.$

**Тема 8. Фундаментальні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь**

Знайти фундаментальні розв'язки в просторі  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  рівняння  $Lu = 0$ , якщо:

- 8.1.  $L = \frac{d}{dx} - 2x$ ;
- 8.2.  $L = \frac{d^4}{dx^4} - 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$ ;
- 8.3.  $L = \frac{d}{dx} + 3x^2$ ;
- 8.4.  $L = \frac{d^4}{dx^4} - a^4, a \in \mathbb{R}$ ;
- 8.5.  $L = \frac{d}{dx} - \sin x$ ;
- 8.6.  $L = \frac{d^3}{dx^3} - 3\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx}$ ;
- 8.7.  $L = \frac{d}{dx} + \cos x$ ;
- 8.8.  $L = \frac{d^3}{dx^3} - a^3, a \in \mathbb{R}$ ;
- 8.9.  $L = \frac{d}{dx} + 4x \sin(x^2 + \frac{\pi}{3})$ ;
- 8.10.  $L = \frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} + 5$ ;
- 8.11.  $L = \frac{d}{dx} - \frac{2x}{1+x^2}$ ;
- 8.12.  $L = \frac{d^2}{dx^2} + 3\frac{d}{dx} + 2$ ;
- 8.13.  $L = \frac{d}{dx} - \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$ ;
- 8.14.  $L = \frac{d^2}{dx^2} + 4\frac{d}{dx} + 4$ ;
- 8.15.  $L = \frac{d}{dx} - 4x^3 + 4x - 1$ ;
- 8.16.  $L = \frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} + 1$ ;
- 8.17.  $L = \frac{d}{dx} - 2^x$ ;
- 8.18.  $L = \frac{d^2}{dx^2} + 4\frac{d}{dx}$ ;
- 8.19.  $L = \frac{d}{dx} + x^2 3^{x^3+1}$ ;
- 8.20.  $L = \frac{d^2}{dx^2} - a^2, a \in \mathbb{R}$ ;
- 8.21.  $L = \frac{d}{dx} - x^2 e^{x^3}$ ;
- 8.22.  $L = (\frac{d}{dx} + a)^2, a \in \mathbb{R}$ ;
- 8.23.  $L = \frac{d}{dx} + \sin 2x$ ;
- 8.24.  $L = (\frac{d}{dx} - a)^3, a \in \mathbb{R}$ ;



- 8.25.  $L = \frac{d}{dx} - 4x^2 + 1$ ;  
8.26.  $L = \left(\frac{d}{dx} + a\right)^4$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ;  
8.27.  $L = \frac{d}{dx} + 2x \sin x^2$ ;  
8.28.  $L = \frac{d^4}{dx^4} + 2\frac{d^2}{dx^2} + 1$ ;  
8.29.  $L = \frac{d}{dx} + \frac{3x^2}{1+x^3}$ ;  
8.30.  $L = \frac{d^3}{dx^3} - 2\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}$ ;  
8.31.  $L = \frac{d}{dx} + x \cos x^2$ .

**ТЕМИ ЗАВДАНЬ**  
**на домашню контрольну роботу з дисципліни**  
**“Методи математичної фізики”**

- Тема А** : Диференціальні рівняння з частинними похідними 1-го порядку
- Тема Б** : Класифікація та зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь із частинними похідними 2-го порядку
- Тема 1** : Означення та носій узагальнених функцій
- Тема 2** : Збіжність у просторі узагальнених функцій
- Тема 3** : Диференціювання узагальнених функцій
- Тема 4** : Прямий добуток узагальнених функцій
- Тема 5** : Згортка узагальнених функцій
- Тема 6** : Перетворення Фур’є
- Тема 7** : Рівняння в просторі узагальнених функцій
- Тема 8** : Фундаментальні розв’язки лінійних диференціальних рівнянь

**Зауваження**

Завдання з тем А і Б взято з підручника *“Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики”* (автори С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Г.П. Івасюк, Н.В. Рева): тема А – Вправи до розділу 1, тема Б – Вправи до розділу 2.

Завдання з тем 1–8 узято з матеріалу *“Завдання на домашню контрольну роботу з узагальнених функцій (УФ).”*