С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук,
Т. І. Готинчан, Л. М. Мельничук

Рівняння математичної фізики: основні методи, приклади, задачі

Рекомендовано Вченою радою Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича як навчальний посібник для студентів фізико-математичних та інженерно-технічних спеціальностей

Видавничий дім "Родовід"
Чернівці
2016

УДК 517.958 (075.8)
ББК 22.161.68я73
Р-491

Рекомендовано Вченою радою Чернівецького національного
університету імені Юрія Федьковича
(Протокол № 6 від 30.05.2016 р.)

Рецензенти:

Іванчов М. І., доктор фіз.-мат.наук, професор,
зав. кафедри диференціальних рівнянь Львівського
національного університету ім. Івана Франка;

Вірченко Н. О., доктор фіз.-мат.наук, професор
кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей
Національного технічного університету України "КПІ";

Р-491

Рівняння математичної фізики: основні методи, приклади, задачі: навчальний посібник / С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук, Т. І. Готинчан, Л. М. Мельничук. – Чернівці: Видавничий дім "Родовід", 2016. – 212 с.

ISBN – – –

Навчальний посібник містить короткий довідковий матеріал, приклади розв'язування типових задач, підбірки задач для практичних занять, самостійної роботи і домашнього завдання з рівнянь математичної фізики відповідно до програми вищих навчальних закладів.

Для студентів фізико-математичних та інженерно-технічних спеціальностей.

УДК 517.958 (075.8)
ББК 22.161.68я73

ISBN – – –

Передмова

Викладання курсу рівнянь математичної фізики наштовхується на серйозні технічні труднощі, пов'язані з відсутністю підручника, який повністю відповідає програмі та в якому матеріал викладений у доступній формі, а також відсутністю або недостатньою кількістю навчально-методичних посібників, які містять завдання для самостійних вправ і методичні вказівки до їх розв'язування.

Мета посібника – познайомити студентів з типами задач математичної фізики та з основними методами їх розв'язування. Всього виділено одинадцять тем. До кожної з них наведено короткі відомості з теорії, розв'язано декілька задач і запропоновано вправи для обов'язкового розв'язування (помічені літерою "О"), для самостійного розв'язування (літера "С") та вправи для домашньої роботи (літера "Д"). У кінці кожної теми подано відповіді до вправ.

Під час вивчення курсу рекомендуємо користуватися літературою, вказаною в кінці посібника. Для цього треба вибрати один із підручників (посібників) за основний, інші залучати за необхідністю.

При укладенні посібника автори взяли за основу збірник задач [12], значно доповнивши його й узгодивши з навчальним посібником [9].

У тексті посібника використовуються такі позначення і скорочення. Символ " $:=$ " уживається для запису рівності за означенням, а символ " $\equiv$ " – тотожної рівності. Частинні похідні вигляду $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ позначаються символами u_x і u_{xy} або рідше $\partial_x u$ і $\partial_x \partial_y u$, а похідна від функції u у напрямку вектора $\vec{\nu}$ – символом $\partial_{\vec{\nu}} u$. Початок і кінець розв'язування задачі відмічаються відповідно значками $\lhd$ і $\rhd$.

Тема 1. Виведення основних рівнянь математичної фізики та постановка задач для них

Рівняння, яке зв'язує невідому функцію u, незалежні змінні $x_1, \ldots, x_n$ і частинні похідні від невідомої функції до певного (ненульового) порядку, називається **диференціальним рівнянням із частинними похідними**. Воно має вигляд

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, D_x^1 u, \ldots, D_x^m u) = 0, \tag{1}$$

де $D_x^k u$, $x := (x_1, \ldots, x_n)$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, – сукупність усіх похідних від u порядку k, а F – відома функція своїх аргументів.

Найвищий порядок похідної, яка входить у рівняння (1), називається **порядком рівняння** з частинними похідними.

У математичній фізиці найпоширеніші і найкраще вивчені рівняння другого порядку. У випадку двох незалежних змінних x і y рівняння другого порядку можна записати в такій загальній формі:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \tag{2}$$

Якщо функція F у (2) є лінійною відносно старших похідних u_{xx}, u_{xy} і u_{yy}, то рівняння називається **квазілінійним** і воно має вигляд

$$A(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + 2B(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + C(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} +$$

$$+ f(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Рівняння (1) називається **лінійним**, якщо воно лінійне відносно шуканої функції і всіх її похідних. Наприклад, лінійне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними має вигляд

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y +$$

$$+ f(x, y)u = g(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

де a, b, c, d, e, f – деякі задані функції змінних x і y, які називаються **коефіцієнтами** рівняння. Якщо $g \equiv 0$, тобто g є нульовою функцією, то рівняння (3) називається **однорідним**, у протилежному випадку – **неоднорідним**, при цьому функцію g називають неоднорідністю рівняння.

Класичним або **регулярним розв'язком** рівняння з частинними похідними (1) порядку m називається функція u, яка визначена в області Ω зміни незалежних змінних, якщо в цій області вона має неперервні частинні похідні до порядку m включно і при підстановці в рівняння (1) перетворює його в тотожність.

Багато задач механіки і фізики приводять до дослідження диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку типу (3). Відомо, що рівняння (3) має безліч розв'язків. При розв'язуванні конкретної фізичної задачі необхідно з усіх цих розв'язків вибрати той, який задовольняє певні додаткові умови, що випливають з її фізичного змісту. Отже, задача математичної фізики полягає у відшуканні розв'язку рівняння з частинними похідними, який задовольняє відповідні додаткові умови. Такими додатковими умовами найчастіше є крайові умови, тобто умови, задані на межі середовища, і початкові умови, які задаються у деякий момент часу, з якого починається вивчення даного фізичного явища.

Математична модель задачі, яка описує реальний процес (явище), повинна задовольняти такі вимоги: розв'язок задачі повинен існувати, розв'язок повинен бути єдиним і розв'язок повинен бути стійким. Останнє означає, що малі зміни даних задачі мають викликати відповідно малі зміни розв'язку. Задача, яка задовольняє ці три вимоги, називається **коректною** (**коректно поставленою**).

Щоб правильно скласти математичну модель фізичного процесу, слід спочатку з'ясувати суть даного процесу і вибрати функцію u, яка його однозначно описує. Далі треба використати відповідний закон фізики, що характеризує процес, і застосувати його до довільної ділянки досліджуваного об'єкта. Використовуючи при цьому теореми математичного аналізу, одержуємо після відповідних перетворень, наприклад, співвідношення вигляду

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} F(x_1, x_2, x_3, t, u, u_{x_1}, ..., u_{x_3x_3}, u_t, u_{tt})dx = 0.$$

Оскільки область інтегрування $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ та проміжок (t_1, t_2) довільні, а підінтегральна функція неперервна на $Q := (t_1, t_2) \times \Omega$, то вона в кожній точці області Q має дорівнювати нулю, тобто

$$F(x_1, x_2, x_3, t, u, u_{x_1}, ..., u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, ..., u_{x_3x_3}, u_t, u_{tt}) = 0. \qquad (4)$$

Це і є диференціальне рівняння процесу. Додаткові умови (початкові, крайові тощо) визначають безпосередньо з умов фізичного процесу.

У деяких випадках зручно поступати по-іншому. Замість того, щоб застосовувати закон природи до довільної ділянки, припускають, що змінні величини, які характеризують процес, є двічі неперервно диференційовними функціями, і застосовують цей закон до малої ділянки тіла, обчислюючи значення фізичних характеристик у деяких середніх точках. Потім переходять до границі, стягуючи малу ділянку в точку. При цьому одержують також рівняння вигляду (4).

Приклад 1. Струна довжиною l натягнута з силою T_0 і знаходиться в прямолінійному положенні рівноваги. У момент $t = 0$ точкам струни надаються початкові відхилення і швидкості. Поставити задачу про визначення малих поперечних коливань точок струни при $t > 0$.

$\triangleleft$ Нехай вісь Ox збігається зі станом струни в положенні рівноваги. Під струною розумітимемо тонку нитку, яка згинається без опору, тобто, якщо подумки розрізати її в точці x, то сила дії однієї ділянки на іншу, тобто сила натягу $\overrightarrow{T}(x, t)$ напрямлена вздовж дотичної до струни у момент часу t в точці x (рис. 1).

Оскільки коливання поперечні й малі, то можна вважати, що кожна точка струни переміщується лише у напрямку, перпендикулярному до осі Ox. Тому коливання в кожний момент часу t повністю описується величиною відхилення кожної точки x від її положення рівноваги. Позначимо це відхилення через $u(x, t)$. Згідно з **принципом Даламбера** *всі сили, що діють на виділену ділянку струни, включаючи й сили інерції, повинні врівноважуватись*. Розглянемо малу ділянку струни M_1M_2 і обчислимо суму всіх цих сил (натяг на кінцях ділянки, зовнішні сили та сили інерції). *Величина T сили натягу* за **законом Гука** *пропорційна відносному видовженню ділянки.* Візьмемо довільну ділянку $(x, x+\Delta x)$ струни, яка при її коливанні деформується в ділянку M_1M_2. Довжина дуги цієї ділянки в момент часу t дорівнює $\int\limits_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+u_\xi^2(\xi,t)}d\xi \approx \Delta x$, бо коливання малі й тому можна знехтувати величиною u_ξ^2. Це означає, що видовження ділянок струни в процесі коливання не відбувається і, отже, за законом Гука величина натягу T в кожній точці струни не змінюється з часом. Зауважимо, що величину натягу T можна вважати незалежною і від x, тобто $T \approx T_0$. Справді, оскільки ми вивчаємо лише поперечні коливання, то сили інерції і зовнішні сили напрямлені перпендикулярно до осі Ox, тому сума проекцій всіх сил на вісь Ox дорівнює

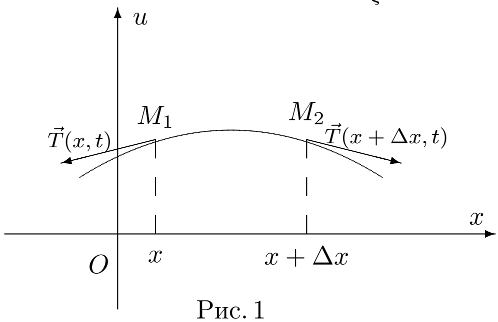


Рис. 1

$$T(x+\Delta x,t)\cos\alpha(x+\Delta x,t) - T(x,t)\cos\alpha(x,t) = 0,$$

де $\alpha(x,t)$ – кут між дотичною в точці з абсцисою x до профілю струни в момент часу t і додатним напрямком осі Ox. Оскільки коливання малі, то $\cos\alpha(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha(x,t)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}} \approx 1$ і тому $T(x,t) \approx T(x+\Delta x,t)$. Звідси, врахувавши довільність x і Δx, одержимо, що величина натягу T не залежить від x. Отже, можна вважати, що $T \approx T_0$ для всіх значень x і t.

Сума проекцій на вісь Ou сил натягу, діючих у точках M_1 і M_2, дорівнює $Y = T_0(\sin\alpha(x+\Delta x,t) - \sin\alpha(x,t))$, але внаслідок наших припущень $\sin\alpha(x,t) = \frac{\mathrm{tg}\alpha(x,t)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha(x,t)}} = \frac{u_x(x,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}} \approx u_x(x,t)$, і тому $Y \approx T_0(u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t))$. Зауваживши тепер, що $u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t) = u_{xx}(x+\theta_1\Delta x,t)\Delta x$, де $\theta_1 \in (0,1)$, остаточно дістанемо $Y \approx T_0u_{xx}(x+\theta_1\Delta x,t)\Delta x$.

Позначимо через $p(x,t)$ густину зовнішньої сили, діючої у момент часу t на точку x струни паралельно осі Ou і розрахованої на одиницю довжини. Тоді проекція на вісь Ou зовнішньої сили, яка діє на ділянку

M_1M_2 струни, дорівнюватиме

$$F = p(x+\theta_2\Delta x, t)\Delta x, \qquad \theta_2 \in (0,1).$$

Нехай $\rho(x)$ – лінійна густина маси струни в точці x. Тоді проекція сили інерції ділянки M_1M_2 струни на вісь Ou дорівнює

$$I = -\rho(x+\theta_3\Delta x)u_{tt}(x+\theta_3\Delta x, t)\Delta x,$$

де $\theta_3 \in (0,1)$. Згідно з принципом Даламбера $Y+F+I=0$, тобто

$$(T_0u_{xx}(x+\theta_1\Delta x,t)+p(x+\theta_2\Delta x,t)-\rho(x+\theta_3\Delta x)u_{tt}(x+\theta_3\Delta x,t))\,\Delta x=0.$$

Якщо поділити цю рівність на Δx і перейти до границі при $\Delta x \to 0$, то дістанемо, що

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = T_0u_{xx}(x,t)+p(x,t), \quad 0<x<l,\ t>0. \tag{5}$$

Це і є шукане **рівняння коливань струни**.

Якщо $\rho = \mathrm{const}$, тобто струна однорідна, то рівняння (5) записується у вигляді

$$u_{tt}(x,t) = a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t), \quad 0<x<l,\ t>0, \tag{6}$$

де $a := \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$, $f(x,t) := \frac{p(x,t)}{\rho}$.

Якщо зовнішня сила відсутня, тобто $p \equiv 0$, то ми дістаємо **рівняння вільних коливань струни** $u_{tt} = a^2u_{xx}$.

Припустимо, що в момент часу $t=0$ відхилення в кожній точці $x \in [0,l]$ дорівнювало $\varphi(x)$, а швидкість $\psi(x)$, тобто

$$\begin{gathered} u(x,t)|_{t=0} := u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,t)|_{t=0} := u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l. \end{gathered} \tag{7}$$

Умови (7) називаються **початковими умовами**.

Далі, оскільки струна обмежена, то треба вказати, що відбувається на її кінцях. Для закріпленої на кінцях струни повинно бути

$$u(x,t)|_{x=0} := u(0,t) = 0, \quad u(x,t)|_{x=l} := u(l,t) = 0, \quad t \ge 0. \tag{8}$$

Якщо кінці струни рухаються за певним законом, то

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \ge 0. \tag{9}$$

У випадку вільних кінців сила натягу на них, а отже, і її проекція $T_0 u_x$ на вісь Ou дорівнює нулю, тобто

$$u_x(0,t)=0, \quad u_x(l,t)=0, \quad t\geq 0. \tag{10}$$

Умови (8), (9), (10) називаються **крайовими умовами**. Крайові умови можуть бути комбінованими, наприклад, лівий кінець вільний, а правий закріплений, тобто $u_x(0,t)=0, u(l,t)=0$ і т.п. $\triangleright$

Зауваження. Можливі випадки, коли густина зовнішньої сили залежить від u і u_t. Тоді рівняння (5) буде квазілінійним рівнянням.

Приклад 2. Скласти математичну модель задачі про малі коливання важкої однорідної нитки, закріпленої верхнім кінцем.

$\triangleleft$ Як і в прикладі 1, коливання описуються відхиленням $u(x,t)$ кожної точки x нитки від її положення рівноваги в момент часу t. Скористаємось принципом Даламбера для довільної ділянки нитки $(x, x+\Delta x)$ (див. рис. 2). Нехай довжина нитки l, а лінійна густина маси $\rho=\mathrm{const}$. Натяг у точках M_1 і M_2 дорівнює відповідно $T(x,t)=\rho g(l-x)$, $T(x+\Delta x,t)=\rho g(l-x-\Delta x)$, де g – прискорення сили тяжіння (вага ділянки нитки $[x,l]$ дорівнює $\rho(l-x)g$). Оскільки сила інерції напрямлена перпендикулярно до осі Ox, а зовнішня сила (вага ділянки M_1M_2) – паралельно осі Ox, то сума проекцій всіх сил на вісь Ox дорівнює нулю:
$-\rho g(l-x)+\rho g(l-x-\Delta x)+\rho g\Delta x=0.$

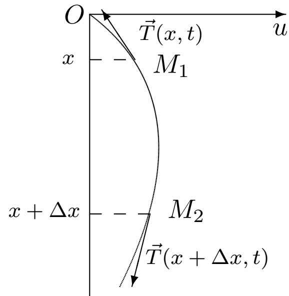


Рис. 2

· Будемо проектувати всі діючі сили на вісь Ou. Сума проекцій сил натягу в момент часу t, як і в прикладі 1, дорівнюватиме

$$F=-\rho g(l-x)\sin\alpha(x,t)+\rho g(l-x-\Delta x)\sin\alpha(x+\Delta x,t)\approx$$

$$\approx \rho g\left((l-x-\Delta x)u_x(x+\Delta x,t)-(l-x)u_x(x,t)\right)=$$

$$=\rho g\big((l-x-\theta_1\Delta x)u_x(x+\theta_1\Delta x,t)\big)_x\Delta x,$$

де $\alpha(x,t)$ – кут, утворений дотичною до профілю нитки в момент часу t і віссю Ox, $\theta_1\in(0,1)$. Зовнішня сила $\overrightarrow{P}$ (вага ділянки M_1M_2) у момент часу t проектується на вісь Ou в нуль, а сила інерції згідно з другим законом Ньютона дорівнює

$$I \approx -\rho u_{tt}(x+\theta_2 \Delta x, t)\Delta x, \quad \theta_2 \in (0,1).$$

На підставі принципу Даламбера $F + I = 0$, тобто

$$\rho g\big((l - x - \theta_1 \Delta x) u_x(x + \theta_1 \Delta x, t)\big)_x \Delta x - \rho u_{tt}(x + \theta_2 \Delta x, t)\Delta x = 0.$$

Звідси, скоротивши на $\rho\Delta x$, перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$ і врахувавши неперервність похідних від u, одержимо

$$u_{tt}(x,t) = g((l-x)u_x(x,t))_x, \quad 0 < x < l, \ t > 0. \tag{11}$$

Отже, малі коливання важкої однорідної нитки описуються рівнянням (11). Якщо відомі початкове положення і початкова швидкість кожної точки нитки, то матимемо початкові умови (7).

Оскільки верхній кінець закріплений, то $u(0,t) = 0$. Щоб дістати умову для нижнього кінця нитки $x = l$, скористаємося тим, що коливання малі, і тому відхилення скінченне, тобто $|u(l,t)| < +\infty$. Така умова оправдана тим, що, хоч коефіцієнти рівняння (11) і гладкі, але коефіцієнт $g(l - x)$ при старшій похідній u_{xx} при $x = l$ перетворюється в нуль, тобто рівняння вироджується. Отже, крайові умови в даному випадку мають такий вигляд:

$$u(0,t) = 0, \quad |u(l,t)| < +\infty, \quad t \geq 0. \quad \triangleright$$

Приклад 3. Вивчити процес поширення тепла в ізотропному твердому тілі за наявності теплових джерел, якщо відома початкова температура точок тіла та тепловий режим на його межі.

$\triangleleft$ Розглянемо тверде тіло $D \subset \mathbb{R}^3$, температура якого в точці $x := (x_1, x_2, x_3)$ у момент часу t визначається функцією $u(x,t)$. Якщо частини тіла мають різну температуру, то в тілі буде відбуватися рух тепла від більш нагрітих частин до менш нагрітих. Візьмемо яку-небудь поверхню S всередині тіла і на ній малий елемент σ, площу якого позначатимемо через $\Delta\sigma$. З теорії теплопровідності відомо, що кількість тепла ΔQ, яка проходить через елемент σ за час Δt, пропорційна добутку $\Delta\sigma\Delta t$ і похідній $\partial_{\vec{\nu}} u$ від температури u вздовж нормалі $\vec{\nu}$ до σ у напрямку руху тепла, тобто

$$\Delta Q = -k\Delta\sigma\Delta t \partial_{\vec{\nu}} u = -k\Delta\sigma\Delta t \,(\mathrm{grad} u)_{\vec{\nu}}, \tag{12}$$

де $k > 0$ – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, $(\mathrm{grad}u)_{\vec{\nu}}$ – проекція вектора $\mathrm{grad}\, u := (u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})$ на нормаль $\vec{\nu}$. За умовою тіло ізотропне, тому коефіцієнт k залежить лише від точки x тіла і не залежить від напрямку нормалі в цій точці.

Для виведення рівняння поширення тепла скористаємося **рівнянням теплового балансу**: *кількість тепла Q_1, витраченого на зміну температури певної області, дорівнює сумі кількості тепла Q_2, що поступило іззовні, і кількості тепла Q_3, що виділилось у межах даної області внаслідок хімічних, радіоактивних та інших процесів.* Розглянемо довільну підобласть $\Omega \subset D$ з гладкою замкненою межею S впродовж часу (t_1, t_2). Нехай у кожній точці x густина маси тіла D дорівнює $\rho(x)$, а теплоємність $c(x)$. Тоді кількість тепла Q_1, яка необхідна для зміни температури області Ω на величину $u(x, t_2) - u(x, t_1)$, $x \in \Omega$, дорівнює

$$Q_1 = \int_\Omega c(x)\rho(x)u(x, t_2)dx - \int_\Omega c(x)\rho(x)u(x, t_1)dx =$$

$$= \int_\Omega c(x)\rho(x)(u(x, t_2) - u(x, t_1))dx$$

або

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega c(x)\rho(x)u_t(x, t)dx,$$

оскільки $u(x, t_2) - u(x, t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} u_t(x, t)dt$.

Згідно з формулою (12) через поверхню S за проміжок часу (t_1, t_2) надходить кількість тепла

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S k(x)\partial_{\vec{\nu}}u(x, t)dS,$$

де $\overrightarrow{\nu}$ – зовнішня нормаль до поверхні S.

Нехай $F(x, t)$ – густина теплових джерел у точці x у момент часу t. Тоді кількість тепла, яке виділилося або поглинулося в області Ω за проміжок часу (t_1, t_2), дорівнює

$$Q_3 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} F(x,t)dx.$$

Складемо тепер рівняння балансу тепла для виділеної області Ω. Очевидно, що $Q_1 = Q_2 + Q_3$, тобто

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\int\limits_{\Omega} c(x)\rho(x)u_t(x,t)dx - \int\limits_{S} k(x)\partial_{\bar{\nu}}u(x,t)dS - \int\limits_{\Omega} F(x,t)dx \right) dt = 0.$$

Згідно з формулою Остроградського-Ґауса

$$\int_S k(x)\partial_{\bar{\nu}}u(x,t)d_xS = \int\limits_{\Omega} \mathrm{div}(k(x)\,\mathrm{grad}u(x,t))dx,$$

тому маємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} (c(x)\rho(x)u_t(x,t) - \mathrm{div}(k(x)\,\mathrm{grad}u(x,t)) - F(x,t))dx = 0,$$

де $\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u) := \sum\limits_{i=1}^{3} (ku_{x_i})_{x_i}$. Оскільки підінтегральна функція неперервна, а область Ω і проміжок часу (t_1, t_2) довільні, то для будь-якої точки $x \in D$ і для довільного моменту часу $t > 0$

$$c(x)\rho(x)u_t(x,t) = \mathrm{div}(k(x)\,\mathrm{grad}u(x,t)) + F(x,t). \tag{13}$$

Це рівняння називається **рівнянням поширення тепла в неоднорідному ізотропному тілі**.

Якщо тіло однорідне, то c, ρ, k – сталі і рівняння (13) можна переписати у вигляді

$$u_t(x,t) = a^2(u_{x_1x_1}(x,t) + u_{x_2x_2}(x,t) + u_{x_3x_3}(x,t)) + f(x,t), \quad x \in D,\ t > 0, \tag{14}$$

де $a := \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$, $f(x,t) := \frac{F(x,t)}{c\rho}$.

Якщо в розглядуваному однорідному тілі немає джерел тепла, тобто $F(x,t) = 0$, $x \in D$, $t > 0$, то дістанемо **однорідне рівняння теплопровідності**

$$u_t(x,t) = a^2(u_{x_1x_1}(x,t) + u_{x_2x_2}(x,t) + u_{x_3x_3}(x,t)), \quad x \in D,\ t > 0, \tag{15}$$

яке є найпростішим рівнянням параболічного типу.

Зокрема, коли температура u залежить лише від координат x_1, x_2, t, що, наприклад, має місце при поширенні тепла в тонкій однорідній пластинці, рівняння (15) переходить у таке:

$$u_t(x,t) = a^2(u_{x_1x_1}(x,t) + u_{x_2x_2}(x,t)), \quad x \in D, \quad t > 0.$$

Нарешті, для тіла лінійного розміру, наприклад, для тонкого однорідного стержня, рівняння теплопровідності набуває вигляду

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad x \in D, \quad t > 0.$$

Якщо в момент часу $t = 0$ температура в кожній точці x тіла дорівнювала $\varphi(x)$, то

$$u(x,t)|_{t=0} := u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{D}, \tag{16}$$

є початковою умовою задачі.

Крайова умова може задаватися різними способами, наприклад:

1) у кожній точці поверхні S задається температура

$$u(x,t)|_S = g_1(z,t), \quad z \in S, \ t \geq 0, \tag{17}$$

де g_1 – відома функція точки z поверхні S і часу t;

2) на поверхні S задається тепловий потік $q = -k\partial_{\vec{\nu}} u$, звідки

$$\partial_{\vec{\nu}_z} u(x,t)|_S = g_2(z,t), \quad z \in S, \ t \geq 0, \tag{18}$$

де $\vec{\nu}_z$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S у точці z, g_2 – відома функція, яка виражається через заданий тепловий потік за формулою $g_2 = -\frac{q}{k}$;

3) на поверхні S задана температура оточуючого середовища u_0; тоді за **законом Ньютона** *тепловий потік* $q = -k\partial_{\vec{\nu}} u$ *пропорційний різниці температур тіла і середовища,* тобто

$$-k\partial_{\vec{\nu}} u(x,t)\Big|_S = H(u(x,t) - u_0)\Big|_S, \quad t \geq 0,$$

де $\overrightarrow{\nu}$ – зовнішня нормаль до S, або, поклавши $h := \frac{H}{k}$,

$$(\partial_{\vec{\nu}} u(x,t) + h(u(x,t) - u_0))|_S = 0, \quad t \geq 0. \tag{19}$$

Отже, математична модель задачі про поширення тепла в ізотропному твердому тілі така: знайти в області $Q = \{(x,t)|x \in D,\, t > 0\}$ розв'язок рівняння (14), який задовольняє початкову умову (16) і одну з крайових умов (17), (18) або (19). ▷

У кожній конкретній ситуації задача про поширення тепла може бути простішою. Про це свідчить наступний приклад.

Приклад 4. Лівий кінець тонкого однорідного стержня довжиною l теплоізольований, через бічну поверхню відбувається теплообмін з навколишнім середовищем, температура якого дорівнює нулю, а температура на правому кінці є заданою функцією часу $g(t)$, $t \geq 0$. Скласти математичну модель задачі про поширення тепла в стержні, якщо початкова температура нульова.

◁ Сумістимо початок координат з лівим кінцем стержня, а вісь Ox спрямуємо вздовж його осі. Оскільки стержень тонкий однорідний, то c, ρ і k сталі, а зміною температури в напрямах осей Oy і Oz можна нехтувати, тобто $u_{yy} = u_{zz} = 0$. Межа стержня складається лише з двох точок $x = 0$ і $x = l$, тому тепло, яке надходить через бічну поверхню, слід вважати "внутрішнім", тобто $\Delta Q_3 = \Delta S \Delta t\, hu$, отже, густина теплових джерел $F(x,t) = \frac{\Delta Q_3}{\Delta v \Delta t} = hu(x,t)\frac{\Delta S}{\Delta v}$, $0 < x < l$, $t > 0$. Якщо припустити, що переріз стержня – круг радіуса r, то $\Delta S = 2\pi r \Delta x, \Delta v = \pi r^2 \Delta x$ і тому $F(x,t) = \frac{2h}{r} u(x,t)$, $0 < x < l$, $t > 0$. Отже, рівняння (14) набуде вигляду

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + bu(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{20}$$

де $b := \frac{2h}{c\rho r}$.

Лівий кінець стержня теплоізольований, а тому потік тепла через нього дорівнює нулю. Оскільки вісь Ox і нормаль $\overrightarrow{\nu}$ протилежно напрямлені, то $\partial_{\vec{\nu}} u = -u_x$, і тому з умови (18) випливає, що

$$u_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{21}$$

На правому кінці

$$u(l,t) = g(t), \quad t \geq 0. \tag{22}$$

Початкова температура згідно з умовою нульова, тобто

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \tag{23}$$

Отже, математична модель задачі виражається рівностями (20)–(23). ▷

Зауваження. Якщо припустити, що температура в кожній точці x усередині тіла усталилась, тобто вона не змінюється з часом, то тоді $u_t = 0$ і рівняння (15) набуває вигляду

$$u_{x_1x_1}(x) + u_{x_2x_2}(x) + u_{x_3x_3}(x) = 0, \quad x \in D. \tag{24}$$

Рівняння (24) називається **рівнянням Лапласа**. Для визначення u тепер не треба задавати початковий розподіл температури (початкову умову), а досить задати лише крайову умову, не залежну від часу.

Задача про знаходження розв'язку рівняння (24) за його значенням на межі розглядуваної області називається **задачею Діріхле**.

Задача про знаходження розв'язку рівняння (24), який задовольняє крайову умову $\partial_{\vec{\nu}_z} u(x)|_S = \varphi(z)$, $z \in S$, називається **задачею Неймана**.

Якщо в тілі є джерела тепла, то рівняння, яке описує усталений тепловий процес, має вигляд

$$u_{x_1x_1}(x) + u_{x_2x_2}(x) + u_{x_3x_3}(x) = f(x), \quad x \in D. \tag{25}$$

Рівняння (25) називавається **рівнянням Пуассона**, для нього також розглядаються задачі Діріхле і Неймана.

Вправи

О1. Сформулювати задачу про малі поздовжні коливання пружного однорідного стержня змінного перерізу $S(x)$ довжиною l при довільних початкових умовах для випадків, коли:

а) стержень має форму зрізаного конуса з радіусами основ r і $R \quad (r < R)$, які закріплені жорстко;

б) кінець стержня $x = 0$ закріплений пружно, а до кінця $x = l$, починаючи з моменту $t = 0$, прикладена поздовжня сила $F(t)$, $t > 0$, на одиницю площі перерізу.

О2. Поставити задачу про малі коливання струни в середовищі з опором, пропорційним швидкості, припускаючи, що кінці струни закріплені.

O3. Дано однорідну кулю радіуса R з нульовою початковою температурою. Поставити задачу про розподіл температури при $t > 0$ всередині кулі, якщо: а) куля нагрівається рівномірно по всій поверхні сталим тепловим потоком q; б) на поверхні кулі відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого залежить тільки від часу.

O4. У трубці довжиною l сталого перерізу S, однорідно заповненій пористою речовиною, відбувається дифузія газу з початковою (при $t = 0$) концентрацією $\varphi(x)$, $0 < x < l$. Поставити задачу про визначення концентрації u газу в трубці при $t > 0$, вважаючи бічну поверхню трубки газонепроникною, для випадків, коли:

а) на кінці $x = 0$, починаючи з моменту $t = 0$, підтримується концентрація газу $\mu(t)$, $t > 0$, а кінець $x = l$ газонепроникний;

б) на кінці $x = 0$, починаючи з моменту $t = 0$, підтримується потік газу $q(t)$, $t > 0$, а кінець $x = l$ перекритий пористою перегородкою, тобто на цьому кінці відбувається газообмін з навколишнім середовищем за законом, аналогічним закону Ньютона для конвективного теплообміну, причому концентрація газу в зовнішньому середовищі дорівнює нулю.

O5. Абсолютно гнучка нитка довжиною l підвішена за кінець $x = l$, а на другому кінці $x = 0$ прикріплено вантаж масою M. Лінійна густина маси нитки ρ змінюється за законом $\rho(x) = \frac{A}{\sqrt{l_1+x}}$, $0 < x < l$, де сталі A і l_1 зв'язані з масою вантажу співвідношенням $M = 2A\sqrt{l_1}$. Довести, що рівняння малих коливань нитки навколо положення рівноваги має вигляд $u_{yy} = \frac{1}{a^2}u_{tt}, a := \sqrt{\frac{g}{2}}, y := \sqrt{l + l_1} - \sqrt{l_1 + x}$.

O6. Поставити задачу для поперечних коливань важкої струни довжиною l, що обертається з кутовою швидкістю ω відносно вертикального положення рівноваги, верхній кінець якої жорстко закріплено, а нижній – вільний.

O7. Поставити задачу про визначення стаціонарної концентрації нестійкого газу в циліндрі радіуса R_0 і висоти h, якщо в циліндрі є джерело газу (внаслідок хімічної реакції) сталої потужності Q, а швидкість розпаду газу пропорційна його концентрації u, для випадків, коли:

а) на основах циліндра $z = 0$ і $z = h$ концентрація газу підтримується нульовою, а бічна поверхня циліндра газонепроникна;

б) основи $z = 0$ і $z = h$ циліндра пористі (через них відбувається дифузія за законом, аналогічним закону Ньютона для конвективного теплообміну), а на бічній поверхні підтримується нульова концентрація газу, при цьому концентрація газу в зовнішньому середовищі дорівнює нулю.

О8. Скласти математичну модель задачі про поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $\{0 < x < p,\ 0 < y < q\}$, які викликані початковим відхиленням $\varphi(x, y) = Axy$, $A =$const, за умови, що частина межі $\{x = p,\ 0 \le y \le q\}$ і $\{y = q,\ 0 \le x \le p\}$ вільна, а інша частина межі закріплена жорстко, вважаючи, що початкові швидкості точок мембрани дорівнюють нулю, а оточуюче середовище не чинить опору коливанням.

С1. Поставити задачу про охолодження тонкого кільця, через поверхню якого відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, що має задану температуру. Нерівномірністю розподілу температури по товщині кільця нехтувати.

С2. Дві пластинки завдовжки l_1 і l_2, виготовлені з різних матеріалів і нагріті до температур u^0 і v^0, у момент $t = 0$ вводяться в дотик одна з одною. Скласти рівняння, які описують процес вирівнювання температур, вважаючи, що вільні грані теплоізольовані від навколишнього середовища.

С3. З'ясувати, чи співвідношення є диференціальним рівнянням із частинними похідними:

а) $u_{xx}^2 + u_{yy}^2 = (u_{xx} - u_{yy})^2$;

б) $(\mathrm{tg} u)_x - u_x \frac{1}{\cos^2 u} = 3u - 2$.

С4. Визначити порядок рівняння з частинними похідними:

а) $2(u_x - 2u)u_{xy} - \left((u_x - 2u)^2\right)_y = xy$;

б) $(u_{yy}^2 - u_y)_x - 2u_{yy}(u_{xy} - u_x)_y = 2(u_x - 1)$;

в) $2u_{xx}u_{xxy} - \left((u_{xx} - u_y)^2\right)_y = 2u_y u_{xxy} - u_x$.

С5. Скласти математичну модель задачі про поперечні коливання круглої мембрани радіуса R, які викликані неперервно розподіленою по мембрані поперечно діючою силою з густиною $q \sin \omega t$, що діє з моменту $t = 0$, якщо край мембрани закріплено пружно.

Домашнє завдання

Д1. Верхній кінець пружного однорідного вертикально підвішеного важкого стержня довжиною l жорстко прикріплено до стелі ліфта, який вільно падає, причому, досягнувши швидкості v, він умить зупиняється. Поставити задачу про малі поздовжні коливання цього стержня.

Д2. Неоднорідна нитка, густина маси якої змінюється за законом $\rho(x) = \frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2}}$, $0 < x < l$, $(a > 0,\ b > l)$ прикріплена кінцем $x = 0$ до нерухомої осі, а на другому кінці $x = l$ прикріплена кулька, маса якої $M = \frac{a}{l}\sqrt{b^2 - l^2}$.

Довести, що при обертанні нитки зі сталою кутовою швидкістю ω навколо вказаної осі рівняння малих коливань має вигляд $u_{tt} = \omega^2 u_{yy}$, де $y := \arcsin \frac{x}{b}$.

Д3. Поставити задачу про малі поздовжні коливання однорідного пружного стержня довжиною l, один кінець якого закріплено жорстко, а другий – пружно, тобто зазнає опору, пропорційного швидкості. Опором середовища знехтувати.

Д4. Дано тонкий однорідний стержень довжиною l, початкова температура якого $\varphi(x)$, $0 \le x \le l$. Поставити крайову задачу про визначення температури стержня, якщо на кінці $x = 0$ підтримується стала температура u_0, а на бічній поверхні і на кінці $x = l$ відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого дорівнює нулю.

Д5. Однорідний стержень довжиною l сталого перерізу S має початкову температуру $\varphi(x)$, $0 \le x \le l$. На поверхні стержня відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з середовищем, яке має температуру $v(t)$, $t > 0$. Кінці стержня $x = 0$ і $x = l$ затиснуті в масивні клеми із заданими теплоємностями C і Q відповідно і достатньо великою теплопровідністю. Сформулювати задачу про визначення температури u при $t > 0$ у цьому стержні для випадків, коли:

а) стержень нагрівається електричним струмом силою I, який тече по ньому;

б) починаючи з моменту $t = 0$, у стержні діють теплові джерела з об'ємною густиною $F(x,t)$, $0 < x < l$, $t > 0$;

в) тепло в стержні поглинається пропорційно u_t у кожній його точці.

Д6. Вивести рівняння стаціонарного процесу дифузії:

а) в однорідному ізотропному середовищі, яке перебуває у стані спокою;

б) в однорідному ізотропному середовищі, яке рухається із заданою швидкістю вздовж осі Ox.

Д7. Поставити задачу про визначення стаціонарного розподілу температури в твердому тілі, що має форму обмеженого циліндра, якщо на нижню його основу подається сталий тепловий потік q, бічна поверхня теплоізольована, а верхня основа підтримується при заданій температурі.

Відповіді

О1. а) $(r + \frac{R-r}{l}x)^2 u_{tt} = \frac{E}{\rho}((r + \frac{R-r}{l}x)^2 u_x)_x$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, $t \geq 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq l$;

б) $\rho S u_{tt} = E(S u_x)_x$, $0 < x < l$, $t > 0$, $S(0)Eu_x(0,t) - \sigma u(0,t) = 0$, $Eu_x(l,t) = F(t)$, $t \geq 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq l$, σ – коефіцієнт жорсткості пружного кріплення.

О2. Для визначення поперечних відхилень u точок струни від їхнього положення рівноваги дістанемо задачу

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) - 2\nu^2 u_t(x,t), 0 < x < l, t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = F(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

де $2\nu^2 := k/\rho$, ρ – лінійна густина маси струни, k – коефіцієнт тертя, тобто коефіцієнт пропорційності в співвідношенні $\Phi = -ku_t$, яке виражає силу тертя, діючу на одиницю довжини струни.

О3. $u_t = a^2(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r)$, $0 < r < R$, $t > 0$; $u(r,0) = 0$, $0 \leq r \leq R$; крайові умови: а) $|u(0,t)| < +\infty$, $u_r(R,t) = \frac{q}{k}$, $t > 0$; б) $|u(0,t)| < +\infty$, $(u_r + hu)|_{r=R} = \varphi(t)$, $t \geq 0$, $h := \frac{H}{k}$.

О4. а) $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, $a^2 := \frac{\alpha D}{c}$,

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

α – коефіцієнт пористості перерізу, який дорівнює відношенню площі пор у даному перерізі до площі цього перерізу;

б) $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad a^2 := \frac{\alpha D}{c}$,

$$u_x(0,t) = -\frac{1}{\alpha SD} q(t), \quad u_x(l,t) + \frac{\alpha}{D} u(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

де D – коефіцієнт дифузії, c – коефіцієнт пористості середовища трубки, α – коефіцієнт дифузії через пористу перегородку.

О6. $u_{tt} = g((l-x)u_x)_x + \omega^2 u$, $0 < x < l$, $t > 0$,

$$u(0,t) = 0, \quad |u(l,t)| < +\infty, \quad t \geq 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

О7. а) $K\Delta u - \gamma u + Q = 0$, $0 < r < R_0$, $0 < z < h$, $t > 0$, $u(r,0) = 0$, $u(r,h) = 0$, $0 \leq r < R_0$, $u_r(R_0, z) = 0$, $0 \leq z \leq h$, де γ – коефіцієнт розпаду газу;

б) $K\Delta u - \gamma u + Q = 0$, $0 < r < r_0$, $0 < z < h$, $t > 0$, $Du_z(r,0) - du(r,0) = 0$, $Du_z(r,h) + du(r,h) = 0$, $0 \leq r < r_0$, $u(r_0, z) = 0$, $0 \leq z \leq h$, де d – коефіцієнт зовнішньої дифузії (обміну), γ – коефіцієнт розпаду газу.

О8. $$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ 0 < x < p,\ 0 < y < q,\ t > 0,$$

$$u(0,y,t) = 0,\ u_x(p,y,t) = 0,\ 0 \leq y \leq q,\ t \geq 0,$$

$$u(x,0,t) = 0,\ u_y(x,q,t) = 0,\ 0 \leq x \leq p,\ t \geq 0,$$

$$u(x,y,0) = Axy,\ u_t(x,y,0) = 0,\ 0 \leq x \leq p,\ 0 \leq y \leq q.$$

С1. $u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_t = b(u - u_0)$, $a := \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$, $b := \frac{\alpha l}{k\sigma}$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$, $u(0,t) = u(l,t)$, $u_x(0,t) = u_x(l,t)$, $t \geq 0$.

С2. $u_{xx} = \frac{c_1\rho_1}{k_1} u_t$, $0 < x < l_1$, $\quad v_{xx} = \frac{c_2\rho_2}{k_2} v_t$, $l_1 < x < l_1 + l_2$.

С3. а) так, б) ні.

С4. а) першого порядку, б) і в) – другого порядку.

С5. $$u_{tt} = a^2(u_{rr} + \tfrac{1}{r} u_r) + \tfrac{q}{\rho} \sin \omega t,\ 0 < r < R,\ t > 0,$$

$$|u(0,t)| < +\infty,\ (u_r(R,t) + hu(R,t)) = 0,\ t \geq 0,$$

$$u(r,0) = 0,\ u_t(r,0) = 0,\ 0 \leq r \leq R,$$

де ρ – поверхнева густина маси мембрани, $h > 0$.

Д1. $u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -\frac{g}{a^2}$, де $a := \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$, $0 < x < l$, $t > 0$; $u(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = 0$, $t \geq 0$; $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = v(x)$, $0 \leq x \leq l$.

Д3. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, $a^2 := \frac{E}{\rho}$; $u(0,t) = 0$, $(ESu_x - ku_t)|_{x=l} = 0$, $t \geq 0$; $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq l$, де k – коефіцієнт тертя для кінця стержня $x = l$.

Д4. $u_t = a^2 u_{xx} - \frac{\alpha p}{c\rho S} u$, $0<x<l$, $t>0$; $u(0,t)=u_0$, $u_x(l,t)+hu(l,t)=0$, $t \geq 0$; $u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$, p – периметр поперечного перерізу стержня, $h := \frac{\alpha}{k}$.

Д5. а) $u_t = \frac{k}{c\rho} u_{xx} - \frac{\chi\sigma}{c\rho S} u + \frac{\chi\sigma}{c\rho S} v(t) + \frac{\beta I^2 R}{c\rho S}$, $0 < x < l$, $t > 0$; $kSu_x(0,t) = Cu_t(0,t)$, $-kSu_x(l,t) = Qu_t(l,t)$, $t \geq 0$; $u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$, β – коефіцієнт пропорційності у формулі $q = \beta I^2 R \Delta x$, яка виражає кількість тепла, що виділяється струмом за одиницю часу в елементі стержня $(x, x+\Delta x)$;

б) $u_t = \frac{k}{c\rho} u_{xx} - \frac{\chi\sigma}{c\rho S} u + \frac{\chi\sigma}{c\rho S} v(t) + \frac{1}{c\rho S} F(x,t)$, $0<x<l, t>0$; $kSu_x(0,t) = Cu_t(0,t)$, $-kSu_x(l,t) = Qu_t(l,t)$, $t \geq 0$; $u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$;

в) $u_t = \frac{k}{c\rho} u_{xx} - \frac{\alpha}{c\rho S} u_t - \frac{\chi\sigma}{c\rho S} u + \frac{\chi\sigma}{c\rho S} v(t)$, $0 < x < l$, $t > 0$; $kSu_x(0,t) = Cu_t(0,t)$, $-kSu_x(l,t) = Qu_t(l,t)$, $t \geq 0$; $u(x,0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$, α – коефіцієнт пропорційності у формулі $q = \alpha u_t S \Delta x$, яка виражає кількість тепла, що поглинається об'ємом $S\Delta x$ елемента стержня $(x, x+\Delta x)$.

Д6. Рівняння стаціонарного процесу дифузії має вигляд
$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(v\, u) = 0 \text{ або } D\Delta u - v_x u_x - v_y u_y - v_z u_z = 0.$$
Звідси маємо такі частинні випадки:

а) рівняння стаціонарного процесу дифузії в однорідному ізотропному середовищі, яке перебуває в стані спокою $(v = 0) : \Delta u = 0$;

б) рівняння стаціонарного процесу дифузії в однорідному ізотропному середовищі, яке рухається із заданою швидкістю v (у випадку руху вздовж осі Ox, тобто $v_x = v, v_y = 0, v_z = 0$): $\Delta u - \frac{v}{D} u_x = 0$. Скористатися **законом Нернста**: $\vec{q} = -D \operatorname{grad} u$, *де u – концентрація, D – коефіцієнт дифузії, $\vec{q}$ – вектор густини потоку речовини.* Крім цього дифузійного потоку речовини, треба врахувати потік переносу $Q = u\vec{v}$, де $\vec{v} := (v_x, v_y, v_z)$ – швидкість руху середовища.

Д7. У циліндричній системі координат маємо задачу
$$\frac{1}{\rho}(\rho u_\rho(\rho,\varphi,z))_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}(\rho,\varphi,z) + u_{zz}(\rho,\varphi,z) = 0,$$
$$0 < \rho < a,\ 0 < \varphi \leq 2\pi,\ 0 < z < h;$$
$$u_z(\rho,\varphi,0) = q,\ u(\rho,\varphi,h) = f(\rho,\varphi),\ 0 \leq \rho \leq a,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$
$$u_\rho(a,\varphi,z) = 0,\ |u(0,\varphi,z)| < +\infty,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq h;$$
$$u(\rho,0,z) = u(\rho,2\pi,z),\ 0 \leq \rho < a,\ 0 \leq z \leq h.$$

Тема 2. Класифікація та зведення до канонічного вигляду рівнянь із частинними похідними другого порядку

1^0. Випадок довільного числа незалежних змінних. Розглянемо в області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x), \tag{1}$$

де $x := (x_1, \ldots, x_n)$, коефіцієнти a_{ij}, a_i, a та права частина f є дійснозначними функціями і, крім того, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $x \in \Omega$, $\{i, j\} \subset \{1, \ldots, n\}$.

Нехай x^0 – довільна точка з Ω. Розглянемо рівняння (1) із обчисленими в цій точці коефіцієнтами a_{ij} групи старших членів, тобто рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x). \tag{2}$$

Зробимо в рівнянні (2) невироджену заміну змінних

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} x_j, \quad k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \det(\alpha_{kj})_{k,j=1}^{n} \neq 0. \tag{3}$$

При заміні (3) функція $u(x)$ перейде в функцію $\tilde{u}(\xi)$. Виразимо похідні від функції u за x через похідні від функції $\tilde{u}$ за ξ :

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{u}_{\xi_k} (\xi_k)_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{u}_{\xi_k} \alpha_{ki},$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{m=1}^{n} (\tilde{u}_{x_i})_{\xi_m} (\xi_m)_{x_j} = \sum_{k,m=1}^{n} \tilde{u}_{\xi_k \xi_m} \alpha_{ki} \alpha_{mj}.$$

Підставивши ці вирази в (2), дістанемо рівняння

$$\sum_{k,m=1}^{n} \bar{a}_{km}(x^0)\tilde{u}_{\xi_k\xi_m} = F(\xi, \tilde{u}, \tilde{u}_{\xi_1}, \ldots, \tilde{u}_{\xi_n}), \tag{4}$$

де $\bar{a}_{km}(x^0) := \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\alpha_{ki}\alpha_{mj}$, а $F(\xi, \tilde{u}, \tilde{u}_{\xi_1}, \ldots, \tilde{u}_{\xi_n})$ – функція, яка не залежить від других похідних функції $\tilde{u}$.

Розглянемо тепер квадратичну форму

$$K = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)y_i y_j, \qquad (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

і зробимо в ній заміну змінних

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} z_k, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{6}$$

Тоді

$$K = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} z_k \sum_{m=1}^{n} \alpha_{mj} z_m =$$

$$= \sum_{k,m=1}^{n} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)\alpha_{ki}\alpha_{mj} \Big) z_k z_m = \sum_{k,m=1}^{n} \bar{a}_{km}(x^0) z_k z_m.$$

Отже, коефіцієнти квадратичної форми при перетворенні (6) змінюються так само, як коефіцієнти групи старших членів рівняння (2) при перетворенні (3). Очевидно, що для знаходження матриці перетворення (3) треба взяти матрицю перетворення (6), знайти для неї обернену матрицю і протранспонувати її.

З курсу алгебри відомо, що невироджене перетворення (6) можна вибрати так, щоб квадратична форма (5) звелася до канонічного вигляду

$$K = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x^0) z_i^2, \quad \lambda_i \in \{-1, 0, 1\}.$$

Тоді, вибравши описаним вище способом перетворення (3), зведемо рівняння (2) до канонічного вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x^0)\tilde{u}_{\xi_i\xi_i} = F(\xi, \tilde{u}, \tilde{u}_{\xi_1}, \ldots, \tilde{u}_{\xi_n}).$$

Позначимо через $n_+ := n_+(x^0)$ число додатних λ_i, через $n_- := n_-(x^0)$ – число від'ємних λ_i, а через $n_0 := n_0(x^0)$ – число нульових λ_i, $n = n_+ + n_- + n_0$.

Рівняння (1) називається **еліптичним у точці** x^0 (рівнянням еліптичного типу в точці x^0), якщо $n_+ = n$ або $n_- = n$.

Рівняння (1) називається **гіперболічним у точці** x^0 (рівнянням гіперболічного типу в точці x^0), якщо $n_+ = n - 1$, а $n_- = 1$, або якщо $n_+ = 1$, а $n_- = n - 1$.

Рівняння (1) називається **параболічним у точці** x^0 (рівнянням параболічного типу в точці x^0), якщо $n_0 = 1$, а $n_- = n - 1$ або $n_+ = n - 1$.

Наведені співвідношення між n_+, n_- і n_0, очевидно, не вичерпують усіх можливих випадків. Тому рівняння у точці x^0 може не належати до жодного із зазначених типів. Таке рівняння називають **безтипним.** Серед безтипних у цьому розумінні рівнянь виділяють ультрагіперболічні й ультрапараболічні.

Рівняння (1) називається:

1) **ультрагіперболічним у точці** x^0, якщо $n_0 = 0$, $n_+ \geq 2$, $n_- \geq 2$;

2) **ультрапараболічним у точці** x^0, якщо $n_0 \geq 2$, а $n_- = 0$ або $n_+ = 0$;

Рівняння (1) називається **еліптичним**, **гіперболічним**, **параболічним**, **ультрагіперболічним** чи **ультрапараболічним в області** Ω, якщо воно є таким у кожній точці цієї області.

З попереднього випливає, що рівняння (1) може в різних підобластях області Ω належати до різних типів. Тоді воно називається рівнянням **мішаного типу.**

Приклад 1. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння
$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0, \qquad (7)$$
де $u := u(x, y, z)$.

$\triangleleft$ Розглянемо квадратичну форму, складену за групою старших членів рівняння (7),
$$K = z_1^2 + 2z_1z_2 + 2z_2^2 + 4z_2z_3 + 5z_3^2 \qquad (8)$$
і зведемо її до канонічного вигляду. Для цього виділимо повні квадрати
$$K = (z_1 + z_2)^2 + (z_2 + 2z_3)^2 + z_3^2. \qquad (9)$$
Якщо зробити перетворення
$$\eta_1 = z_1 + z_2, \quad \eta_2 = z_2 + 2z_3, \quad \eta_3 = z_3, \qquad (10)$$
то квадратична форма набуде вигляду
$$K = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2. \qquad (11)$$
Отже, рівняння (7) еліптичне в усьому просторі, бо $n_+ = 3$ ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$).

Щоб звести рівняння (7) до канонічного вигляду, треба вибрати відповідне перетворення. Згідно з описаним вище, для цього треба знайти матрицю, обернену до матриці перетворення (10)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
і протранспонувати її. Легко бачити, що цією матрицею є
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Тому
$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

і шукане перетворення таке:

$$\xi_1 = x, \quad \xi_2 = -x + y, \quad \xi_3 = 2x - 2y + z. \tag{12}$$

Відомо, що група старших членів рівняння (7) матиме після перетворення (12) вигляд

$$\tilde{u}_{\xi_1\xi_1} + \tilde{u}_{\xi_2\xi_2} + \tilde{u}_{\xi_3\xi_3}. \tag{13}$$

Для знаходження групи молодших членів рівняння обчислимо похідні

$$u_x = \tilde{u}_{\xi_1}(\xi_1)_x + \tilde{u}_{\xi_2}(\xi_2)_x + \tilde{u}_{\xi_3}(\xi_3)_x = \tilde{u}_{\xi_1} - \tilde{u}_{\xi_2} + 2\tilde{u}_{\xi_3},$$

$$u_y = \tilde{u}_{\xi_2} - 2\tilde{u}_{\xi_3}.$$

Якщо підставити ці вирази в рівняння (7) і врахувати (13), то одержимо канонічний вигляд рівняння (7)

$$\tilde{u}_{\xi_1\xi_1} + \tilde{u}_{\xi_2\xi_2} + \tilde{u}_{\xi_3\xi_3} + \tilde{u}_{\xi_1} = 0. \quad \triangleright$$

Приклад 2. Визначити тип рівняння

$$4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 10u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0, \tag{14}$$

де $u := u(x, y, z)$, і звести його до канонічного вигляду.

$\triangleleft$ Розглянемо квадратичну форму, складену за групою старших членів рівняння,

$$K = 4z_1^2 + 2z_2^2 - 6z_3^2 + 6z_1z_2 + 10z_1z_3 + 4z_2z_3.$$

Виділивши повні квадрати, дістанемо

$$K = \frac{1}{4}(4z_1 + 3z_2 + 5z_3)^2 - \frac{1}{4}(z_2 + 7z_3)^2.$$

Якщо зробити заміну

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(4z_1 + 3z_2 + 5z_3), \quad \eta_2 = \frac{1}{2}(z_2 + 7z_3), \quad \eta_3 = z_3,$$

то квадратична форма набуде канонічного вигляду

$$K = \eta_1^2 - \eta_2^2.$$

Тут $n_0 = 1$, $n_+ = 1$, $n_- = 1$, а тому рівняння (14) не належить до жодного з описаних вище типів, тобто є безтипним.

Визначимо перетворення, яке зводить рівняння (14) до канонічного вигляду. Для цього знайдемо матрицю, обернену до матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

і протранспонуємо її. Такою є матриця

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому перетворення, яке зводить рівняння (14) до канонічного вигляду, таке: $\xi_1 = \frac{1}{2}x, \xi_2 = -\frac{3}{2}x + 2y, \xi_3 = 4x - 7y + z$, а канонічний вигляд рівняння (14)

$$\tilde{u}_{\xi_1\xi_1} - \tilde{u}_{\xi_2\xi_2} + 2\tilde{u} = 0. \quad \triangleright$$

2^0. Випадок двох незалежних змінних. Розглянемо тепер квазілінійне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними x і y

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+f(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \ \ (x,y) \in \Omega, \tag{15}$$

де коефіцієнти a, b і c мають неперервні частинні похідні до другого порядку включно і $|a| + |b| + |c| \neq 0$ в Ω.

Рівнянню (15) відповідає квадратична форма

$$K = a(x,y)z_1^2 + 2b(x,y)z_1z_2 + c(x,y)z_2^2, \quad (x,y) \in \Omega, \quad (z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2.$$

З курсу алгебри відомо, що її канонічний вигляд, а отже, тип рівняння (15), залежить від знаку виразу $b^2 - ac$, а саме: *якщо $b^2 - ac > 0$, то рівняння (15) належить до гіперболічного типу (квадратична форма K знакозмінна), якщо $b^2 - ac = 0$ – до параболічного типу (квадратична форма K знакостала), якщо ж $b^2 - ac < 0$ – до еліптичного типу (квадратична форма K знаковизначена)* в області Ω.

Щоб звести рівняння (15) до канонічного вигляду, треба скласти рівняння характеристик

$$a(x,y)(dy)^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)(dx)^2 = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{16}$$

яке розпадається на два рівняння

$$ady - (b + \sqrt{b^2 - ac})dx = 0, \tag{17}$$

$$ady - (b - \sqrt{b^2 - ac})dx = 0, \tag{18}$$

і знайти їхні перші (загальні) інтеграли

$$\varphi(x, y) = C_1, \quad \psi(x, y) = C_2. \tag{19}$$

У гіперболічному випадку $b^2 - ac > 0$, тому функції φ і ψ є дійснозначними і, крім того, незалежними (якобіан $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)} \neq 0$). Рівності (19) визначають дві різні сім'ї дійсних характеристик. Заміною змінних $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$ рівняння (15) зводиться до канонічнго вигляду

$$\tilde{u}_{\xi\eta} + f_1(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta) = 0. \tag{20}$$

У параболічному випадку $b^2 - ac = 0$, а тому рівняння (17) і (18) збігаються і ми матимемо тільки одну сім'ю дійсних характеристик $\varphi(x, y) = C$. Заміною змінних $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$, де ψ – довільна гладка функція така, що ця заміна змінних невироджена в розглядуваній області, рівняння (15) зводиться до канонічного вигляду

$$\tilde{u}_{\eta\eta} + f_2(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta) = 0. \tag{21}$$

В еліптичному випадку $b^2 - ac < 0$, тому перші інтеграли (19) будуть комплексно спряженими, тобто

$$\varphi(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y), \quad \psi(x, y) = \alpha(x, y) - i\beta(x, y),$$

де α і β – дійснозначні функції. У цьому випадку маємо дві сім'ї уявних характеристик. Заміною $\xi = \alpha(x, y)$, $\eta = \beta(x, y)$ рівняння (15) зводиться до канонічного вигляду

$$\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta} + f_3(\xi, \eta, \tilde{u}, \tilde{u}_\xi, \tilde{u}_\eta) = 0. \tag{22}$$

При зведенні до канонічного вигляду рівняння (15) треба пам'ятати, що таке зведення можливе лише у кожній з тих частин області, де рівняння зберігає тип.

Якщо рівняння (15) лінійне, тобто

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x+$$

$$+e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y), \tag{23}$$

то після невиродженої заміни

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y) \tag{24}$$

воно набуде вигляду

$$\tilde{a}\tilde{u}_{\xi\xi} + 2\tilde{b}\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{c}\tilde{u}_{\eta\eta} + \tilde{d}\tilde{u}_{\xi} + \tilde{e}\tilde{u}_{\eta} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}, \tag{25}$$

де

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\xi,\eta) &:= a(\xi_x)^2 + 2b\xi_x\xi_y + c(\xi_y)^2,\\
\tilde{c}(\xi,\eta) &:= a(\eta_x)^2 + 2b\eta_x\eta_y + c(\eta_y)^2,\\
\tilde{b}(\xi,\eta) &:= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y,\\
\tilde{d}(\xi,\eta) &:= a\xi_{xx} + 2b\xi_{xy} + c\xi_{yy} + d\xi_x + e\xi_y,\\
\tilde{e}(\xi,\eta) &:= a\eta_{xx} + 2b\eta_{xy} + c\eta_{yy} + d\eta_x + e\eta_y,\\
\tilde{f}(\xi,\eta) &:= f, \quad \tilde{g}(\xi,\eta) := g.
\end{aligned} \tag{26}$$

Зауважимо, що в правих частинах (26) треба перейти від змінних x і y до змінних ξ і η, розв'язавши відносно x і y систему рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = \xi,\\ \psi(x,y) = \eta. \end{cases}$$

Можна довести, що коли коефіцієнти рівняння (23) сталі, то і коефіцієнти рівняння (25) є сталими. Формулами (26) зручно користуватися при знаходженні канонічного вигляду рівняння(23).

Приклад 3. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx}(x,y) - 2\cos x u_{xy}(x,y) - (3+\sin^2 x)u_{yy}(x,y) - yu_y(x,y) = 0. \quad (27)$$

$\triangleleft$ Оскільки $a = 1, b = -\cos x, c = -(3+\sin^2 x)$, то $b^2 - ac = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4 > 0$ і, отже, задане рівняння є гіперболічним в усій площині. Рівняння характеристик

$$(dy)^2 + 2\cos x dx dy - (3+\sin^2 x)(dx)^2 = 0$$

розпадається на такі два рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x - 2, \qquad \frac{dy}{dx} = -\cos x + 2.$$

Загальними інтегралами цих рівнянь є відповідно

$$y + \sin x - 2x = C_1, \qquad y + \sin x + 2x = C_2.$$

Для зведення рівняння (27) до канонічного вигляду зробимо заміну $\xi = y + \sin x - 2x$, $\eta = y + \sin x + 2x$. Частинні похідні від функції u за змінними x, y виразимо через похідні від функції $\tilde{u}$ за змінними ξ, η :

$$u_x = \tilde{u}_\xi \xi_x + \tilde{u}_\eta \eta_x = \tilde{u}_\xi(\cos x - 2) + \tilde{u}_\eta(\cos x + 2),$$

$$u_y = \tilde{u}_\xi \xi_y + \tilde{u}_\eta \eta_y = \tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta,$$

$$u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + \tilde{u}_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + \tilde{u}_\xi\xi_{xx} + \tilde{u}_\eta\eta_{xx} =$$

$$= (\cos x - 2)^2\tilde{u}_{\xi\xi} + 2(\cos^2 x - 4)\tilde{u}_{\xi\eta} + (\cos x + 2)^2\tilde{u}_{\eta\eta} - \sin x\tilde{u}_\xi - \sin x\tilde{u}_\eta,$$

$$u_{xy} = \tilde{u}_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + \tilde{u}_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + \tilde{u}_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \tilde{u}_\xi\xi_{xy} + \tilde{u}_\eta\eta_{xy} =$$

$$= (\cos x - 2)\tilde{u}_{\xi\xi} + 2\cos x\tilde{u}_{\xi\eta} + (\cos x + 2)\tilde{u}_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = \tilde{u}_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + \tilde{u}_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + \tilde{u}_\xi\xi_{yy} + \tilde{u}_\eta\eta_{yy} = \tilde{u}_{\xi\xi} + 2\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_{\eta\eta}.$$

Підставивши вирази для цих похідних у рівняння (27), після зведення подібних членів, дістанемо

$$-16\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta) - (y + \sin x)(\tilde{u}_\xi(\xi,\eta) + \tilde{u}_\eta(\xi,\eta)) = 0.$$

Оскільки $y + \sin x = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$, то остаточно матимемо

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta) + \frac{\xi+\eta}{32}(\tilde{u}_\xi(\xi,\eta) + \tilde{u}_\eta(\xi,\eta)) = 0. \quad \triangleright$$

Приклад 4. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$xu_{xx}(x,y) - 2\sqrt{xy}u_{xy}(x,y) + yu_{yy}(x,y) + 0,5u_y(x,y) = 0, \quad x > 0, y > 0. \tag{28}$$

$\triangleleft$ Тут $a = x, b = -\sqrt{xy}, c = y, b^2 - ac = xy - xy = 0$. Отже, рівняння (28) параболічне в області $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$. Воно має одну сім'ю характеристик, які описуються диференціальним рівнянням

$$y^{-1/2}dy = -x^{-1/2}dx.$$

Загальний інтеграл цього рівняння $\sqrt{x} + \sqrt{y} = C$. Тому беремо $\xi = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, а за η можна взяти довільну функцію $\psi \in C^2(\Omega)$, для якої якобіан $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$. Покладемо $\eta = \sqrt{x}$. Маємо

$$u_x = (2\sqrt{x})^{-1}(\tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta), \quad u_y = (2\sqrt{y})^{-1}\tilde{u}_\xi,$$

$$u_{xx} = (4x)^{-1}\tilde{u}_{\xi\xi} + (2x)^{-1}\tilde{u}_{\xi\eta} + (4x)^{-1}\tilde{u}_{\eta\eta} - (4\sqrt{x^3})^{-1}(\tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\eta),$$

$$u_{xy} = (4\sqrt{xy})^{-1}(\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\xi\eta}), \quad u_{yy} = (4y)^{-1}\tilde{u}_{\xi\xi} - (4\sqrt{y^3})^{-1}\tilde{u}_\xi.$$

Якщо підставити ці вирази в рівняння (28), то дістанемо його канонічний вигляд

$$\tilde{u}_{\eta\eta}(\xi,\eta) - \frac{1}{\eta}(\tilde{u}_\xi(\xi,\eta) + \tilde{u}_\eta(\xi,\eta)) = 0. \quad \triangleright$$

Приклад 5. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$y^2u_{xx}(x,y) + 2xyu_{xy}(x,y) + 2x^2u_{yy}(x,y) + yu_y(x,y) = 0, \quad x \neq 0, \ y \neq 0. \tag{29}$$

$\triangleleft$ У цьому рівнянні $a = y^2, b = xy, c = 2x^2, b^2 - ac = -x^2y^2 < 0$ в області, де $x \neq 0$ і $y \neq 0$. Це означає, що воно еліптичне в цій області. Рівняння характеристик $y^2(dy)^2 - 2xydxdy + 2x^2(dx)^2 = 0$ розпадається на два рівняння

$$\frac{dy}{dx} = (1+i)\frac{x}{y}, \quad \frac{dy}{dx} = (1-i)\frac{x}{y}.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо дві сім'ї уявних характеристик

$$(1+i)x^2 - y^2 = C_1, \quad (1-i)x^2 - y^2 = C_2.$$

Введемо нові незалежні змінні $\xi = x^2 - y^2, \eta = x^2$. Для знаходження коефіцієнтів канонічного вигляду рівняння (29) скористаємося формулами (26). Оскільки в еліптичному випадку $\tilde{a} = \tilde{c}$, а $\tilde{b} = 0$, то

$$\tilde{a} = \tilde{c} = y^2(2x)^2 + 2xy(2x)(-2y) + 2x^2(-2y)^2 = 4x^2y^2,$$

$$\tilde{d} = 2y^2 + 2xy \cdot 0 + 2x^2(-2) + y(-2y) = -4x^2,$$

$$\tilde{e} = y^2 \cdot 2 + 2xy \cdot 0 + 2x^2 \cdot 0 + y \cdot 0 = 2y^2, \quad \tilde{f} = f = 0, \quad \tilde{g} = g = 0.$$

Отже, рівняння (29) набуває вигляду

$$4x^2y^2(\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta}) - 4x^2\tilde{u}_\xi + 2y^2\tilde{u}_\eta = 0.$$

Оскільки $y^2 = \eta - \xi$, $x^2 = \eta$, то канонічний вигляд рівняння такий:

$$\tilde{u}_{\xi\xi}(\xi,\eta) + \tilde{u}_{\eta\eta}(\xi,\eta) + \frac{1}{\xi - \eta}\tilde{u}_\xi(\xi,\eta) + \frac{1}{2\eta}\tilde{u}_\eta(\xi,\eta) = 0. \quad \triangleright$$

Зауваження 1. Рівняння (29) визначене також на координатних осях, але там $b^2 - ac = 0$, тобто рівняння перестає бути еліптичним. При цьому коефіцієнти канонічного вигляду $\frac{1}{2\eta} = \frac{1}{2x^2}$ або $\frac{1}{\xi-\eta} = -\frac{1}{y^2}$ стають необмеженими. Лінії $x = 0$ і $y = 0$ називаються **лініями параболічності**.

Приклад 6. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{30}$$

$\triangleleft$ Тут $a = 1, b = 0, c = y, b^2 - ac = -y$. Якщо $y = 0$, то рівняння параболічне і його канонічний вигляд $u_{xx} = 0$, тобто, як і в прикладі 5, $y = 0$ є лінією параболічності. При $y > 0$ наше рівняння є еліптичним, а при $y < 0$ – гіперболічним.

Складемо рівняння характеристик

$$(dy)^2 + y(dx)^2 = 0.$$

Якщо $y > 0$, то звідси дістанемо два рівняння

$$dy + i\sqrt{y}dx = 0, \qquad dy - i\sqrt{y}dx = 0,$$

які мають загальні інтеграли $-2\sqrt{y}i + x = C_1$, $2\sqrt{y}i + x = C_2$. Зробивши заміну $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{y}$, одержуємо за формулами (26), що $\tilde{a} = \tilde{c} = 1$,

$\tilde{b} = 0$, $\tilde{d} = 0$, $\tilde{e} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$, $\tilde{f} = 0$, $\tilde{g} = 0$. Отже, в області еліптичності рівняння (30) має канонічний вигляд

$$\tilde{u}_{\xi\xi}(\xi,\eta) + \tilde{u}_{\eta\eta}(\xi,\eta) - \frac{1}{\eta}\tilde{u}_{\eta}(\xi,\eta) = 0, \quad \eta > 0.$$

В області гіперболічності ($y < 0$) рівняння характеристик розпадається на рівняння

$$dy + \sqrt{-y}dx = 0, \quad dy - \sqrt{-y}dx = 0.$$

Звідси дістаємо дві сім'ї характеристик: $x + 2\sqrt{-y} = C_1, x - 2\sqrt{-y} = C_2$. Заміна змінних $\xi = x + 2\sqrt{-y}, \eta = x - 2\sqrt{-y}$ зводить рівняння (30) до канонічного вигляду

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta) + \frac{1}{2(\xi-\eta)}(\tilde{u}_{\xi}(\xi,\eta) - \tilde{u}_{\eta}(\xi,\eta)) = 0,$$

бо коефіцієнти $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$, $\tilde{b} = 2$, $\tilde{d} = \frac{1}{2\sqrt{-y}}$, $\tilde{e} = -\frac{1}{2\sqrt{-y}}$, $\tilde{f} = 0$, $\tilde{g} = 0$, $\xi - \eta = 4\sqrt{-y} \neq 0$. $\triangleright$

Зауваження 2. Оскільки характеристики вибираються неоднозначно, то коефіцієнти в групі молодших членів канонічної форми рівняння можуть відрізнятися.

Вправи

О1. Визначити тип рівняння і звести його до канонічного вигляду:

1) $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$,
2) $u_{xy} + u_{xz} - u_{yz} - u_x + u_y = 0$,
3) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 6u_{xy} + 2u_{xz} + 2u_{yz} + 2u_x + 2u_y + 2u_z + 4u = 0$,
4) $u_{xy} - 2u_{xz} + u_{yz} + u_x + \frac{1}{2}u_y = 0$,
5) $u_{xx} + 5u_{yy} + 14u_{zz} + 4u_{xy} + 16u_{yz} + 6u_{xz} = 0$.

О2. Пропоновані нижче рівняння звести до канонічного вигляду в кожній з областей, де зберігається тип рівняння:

1) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$,
2) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u = 0$,
3) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 0$,
4) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$,

5) $x^2u_{xx}-2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+xu_x+yu_y=0$,

6) $\sin^2 xu_{xx}-2y\sin xu_{xy}+y^2u_{yy}=0$,

7) $u_{xx}+yu_{yy}+0,5u_y=0$,

8) $xyu_{xx}+u_{yy}+\frac{1}{2}yu_x-\frac{1}{2y}u_y=0, x\geq 0, y>0$,

9) $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$,

10) $y^2u_{xx}-2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=0$,

11) $u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}+u_y-u_x=0$,

12) $u_{xx}-2\sin xu_{xy}-\cos^2 xu_{yy}-\cos xu_y=0$,

13) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$,

14) $u_{xx}-4u_{xy}-3u_{yy}-2u_x+6u_y=0$.

С1. Звести до канонічного вигляду рівняння:

1) $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+4u_{yz}+5u_{zz}-u_x+3u_z=0$,

2) $u_{xx}+2u_{xz}-2u_{xt}+u_{yy}+2u_{yz}+2u_{yt}+2u_{zz}+2u_{tt}=0$,

3) $u_{yy}-2u_{xy}+u_{zz}+u_x+u_y+u_z+u=0$,

4) $2u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-2u_{xy}+2u_x-u_y+u_z+u=0$,

5) $u_{xx}-2u_{xy}-2u_{xz}+u_x+u_y+2u_z+u=0$.

С2. Визначити тип рівняння і звести його до канонічного вигляду:

1) $u_{xx}+2u_{xy}+\cos^2 xu_{yy}-\mathrm{ctg}x(u_x+u_y)=0$,

2) $u_{xx}-xu_{yy}=0$,

3) $u_{xx}+xu_{yy}=0$ для $x\geq 0$,

4) $xu_{xx}+2\sqrt{xy}u_{xy}+yu_{yy}-\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-1)u_y=0$,

5) $e^{2x}u_{xx}+2e^{x+y}u_{xy}+e^{2y}u_{yy}=0$,

6) $\mathrm{tg}^2xu_{xx}-2y\mathrm{tg}xu_{xy}+y^2u_{yy}+(\mathrm{tg}^3x)u_x=0$,

7) $yu_{xx}+xu_{yy}=0$, $x>0$, $y\geq 0$,

8) $y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+2x^2u_{yy}+yu_y=0$.

Домашнє завдання

Д1. Звести до канонічного вигляду рівняння:

1) $4u_{xx}-4u_{xy}-2u_{yz}+u_y+u_z=0$,

2) $u_{xy}-u_{xz}+u_x+u_y-u_z=0$,

3) $u_{xy}-u_{xt}+u_{zz}-2u_{zt}+2u_{tt}=0$,

4) $u_{xy}+u_{xz}+u_{xt}+u_{zt}=0$,

5) $u_{xx}+4u_{xy}-u_{zz}=0$,

6) $3u_{xy}-2u_{xz}-u_{yz}-u=0$.

Д2. У кожній області, де зберігається тип рівняння, звести його до канонічного вигляду:

1) $u_{xx}-2u_{xy}+2u_{yy}=0$,

2) $4u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}-2u_y=0$,

3) $u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+2u_x+u_y+u=0$,

4) $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+\alpha u_x+\beta u_y+cu=0$,

5) $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$,

6) $y^2u_{xx}-x^2u_{yy}=0$,

7) $yu_{xx}+u_{yy}=0, \quad y>0$,

8) $4y^2u_{xx}-e^{2x}u_{yy}=0$,

9) $u_{xx}-2\sin x u_{xy}+(2-\cos^2 x)u_{yy}=0$,

10) $(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+xu_x+yu_y-2u=0$,

11) $e^yu_{xx}+e^xu_{yy}-0,5e^yu_x-0,5e^xu_y=5xy$,

12) $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$,

13) $u_{xx}+2\sin x u_{xy}+\sin^2 x u_{yy}=0$,

14) $xy^2u_{xx}-2x^2yu_{xy}+x^3u_{yy}-y^2u_x=0$.

Відповіді

О1. 1) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}+\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}+\tilde{u}_{\xi_3\xi_3}=0$, $\xi_1=x$, $\xi_2=-x+y$, $\xi_3=x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z$; 2) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}-\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}-\tilde{u}_{\xi_3\xi_3}+2\tilde{u}_{\xi_2}=0$, $\xi_1=x+y$, $\xi_2=-x+y$, $\xi_3=-x-y+z$; 3) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}-\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}+\tilde{u}_{\xi_3\xi_3}+2\tilde{u}_{\xi_1}+\sqrt{2}\tilde{u}_{\xi_2}+\sqrt{2}\tilde{u}_{\xi_3}+4\tilde{u}=0$, $\xi_1=x$, $\xi_2=(3x-y)/2\sqrt{2}$, $\xi_3=(-x-y+4z)/2\sqrt{2}$; 4) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}-\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}+\tilde{u}_{\xi_3\xi_3}+\frac{3}{2}\tilde{u}_{\xi_1}-\frac{1}{2}\tilde{u}_{\xi_2}=0$, $\xi_1=x+y$, $\xi_2=-x+y$, $\xi_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+2y+z)$; 5) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}+\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}+\tilde{u}_{\xi_3\xi_3}=0$, $\xi_1=x$, $\xi_2=-2x+y$, $\xi_3=x-2y+z$.

О2. 1) $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}=0$, $\xi=y-x$, $\eta=x$; 2) $\tilde{u}_{\eta\eta}+\tilde{u}=0$, $\xi=x-y$, $\eta=x+y$; 3) $2\tilde{u}_{\xi\eta}-\tilde{u}_{\xi}=0$, $\xi=x+y$, $\eta=y-3x$; 4) $\tilde{u}_{\xi\eta}+\frac{1}{2\eta}\tilde{u}_{\xi}=0$, $\xi=xy$, $\eta=\frac{y}{x}$; 5) $\eta\tilde{u}_{\eta\eta}+\tilde{u}_{\eta}=0$, $\xi=xy$, $\eta=y$; 6) $\tilde{u}_{\eta\eta}-\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\tilde{u}_{\xi}=0$, $\xi=ytg\frac{x}{2}$, $\eta=y$; 7) $\tilde{u}_{\xi\eta}=0$ при $y<0$, $\xi=x+2\sqrt{-y}$, $\eta=x-2\sqrt{-y}$; $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}=0$ при $y>0$, $\xi=x$, $\eta=2\sqrt{y}$; $\tilde{u}_{\xi\xi}+0,5\tilde{u}_{\eta}=0$ при $y=0$; 8) $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}=0$ при $x>0$, $y>0$, $\xi=\frac{2}{3}y^{3/2}$, $\eta=2x^{1/2}$; $\tilde{u}_{yy}+\frac{1}{2}y\tilde{u}_x-\frac{1}{2y}\tilde{u}_y=0$ при $x=0$, $y>0$; 9) $\tilde{u}_{\eta\eta}=0$, $\xi=\frac{y}{x}$, $\eta=y$; 10) $\tilde{u}_{\eta\eta}+\frac{2\xi}{\xi-\eta^2}\tilde{u}_{\xi}=0$, $\xi=x^2+y^2$, $\eta=y$; 11) $\tilde{u}_{\eta\eta}-\tilde{u}_{\xi}-\tilde{u}_{\eta}=0$, $\xi=2x+y$, $\eta=x$; 12) $\tilde{u}_{\xi\eta}=0$, $\xi=x+y-\cos x$, $\eta=-x+y-\cos x$; 13) $\tilde{u}_{\xi\eta}-\frac{1}{2\xi}\tilde{u}_{\eta}=0$, $\xi=xy$, $\eta=\frac{y}{x}$; 14) $\tilde{u}_{\xi\eta}-\tilde{u}_{\xi}=0$, $\xi=x+y$, $\eta=3x+y$.

С1. 1) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}+\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}+\tilde{u}_{\xi_3\xi_3}-\tilde{u}_{\xi_1}+\tilde{u}_{\xi_2}+\tilde{u}_{\xi_3}=0$, $\xi_1=x$, $\xi_2=-x+y$, $\xi_3=2x-2y+z$; 2) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}+\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}=0$, $\xi_1=x$, $\xi_2=y$, $\xi_3=-x-y+z$, $\xi_4=x-y+t$; 3) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}-\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}+\tilde{u}_{\xi_3\xi_3}+\tilde{u}_{\xi_1}+2\tilde{u}_{\xi_2}+\tilde{u}_{\xi_3}+u=0$, $\xi_1=y$, $\xi_2=x+y$, $\xi_3=z$; 4) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}+\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}+\tilde{u}_{\xi_3\xi_3}+\tilde{u}_{\xi_1}+\tilde{u}_{\xi_2}+\tilde{u}_{\xi_3}+\tilde{u}=0$, $\xi_1=x+y$, $\xi_2=-y$, $\xi_3=z$; 5) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}-\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}+\tilde{u}_{\xi_1}+2\tilde{u}_{\xi_2}+\tilde{u}_{\xi_3}+\tilde{u}=0$, $\xi_1=x$, $\xi_2=x+y$, $\xi_3=-y+z$.

С2. 1) Гіперболічний, $\tilde{u}_{\xi\eta}=0$; 2) в області $\{(x,y)|x>0\}$ гіперболічний, $\tilde{u}_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}(\tilde{u}_\xi-\tilde{u}_\eta)=0$; при $x=0$ параболічний, $\tilde{u}_{xx}=0$; 3) в області $\{(x,y)|x>0\}$ еліптичний, $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}+\frac{1}{3\eta}\tilde{u}_\eta=0$; при $x=0$ параболічний, $\tilde{u}_{xx}=0$; 4) параболічний, $\tilde{u}_{\eta\eta}=0$, $\xi=\sqrt{y}-\sqrt{x}$, $\eta=x$; 5) параболічний, $\tilde{u}_{\eta\eta}-\frac{\xi}{\xi e^\eta+1}\tilde{u}_\xi=0$, $\xi=e^{-y}-e^{-x}$, $\eta=x$; 6) параболічний, $\tilde{u}_{\eta\eta}-\frac{2\xi}{\eta^2}\tilde{u}_\xi=0$, $\xi=y\sin x$, $\eta=y$; 7) еліптичний, $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}+\frac{1}{3\xi}\tilde{u}_\xi+\frac{1}{3\eta}\tilde{u}_\eta=0$, $\xi=y^{3/2}$, $\eta=x^{3/2}$; 8) параболічний, $u_{xx}+\frac{1}{y}u_y=0$, $x=0$, $y\neq 0$; $u_{yy}=0$, $x\neq 0$, $y=0$; еліптичний, $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}+\frac{\eta-\xi}{2(\xi+\eta)}\tilde{u}_\xi+\frac{1}{\eta}\tilde{u}_\eta=0$, $x\neq 0$, $y\neq 0$, $\xi=\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}$, $\eta=\frac{x^2}{2}$.

Д1. 1) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}-\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}+\tilde{u}_{\xi_3\xi_3}+\tilde{u}_{\xi_2}=0$, $\xi_1=x/2$, $\xi_2=x/2+y$, $\xi_3=-x/2-y+z$; 2) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}-\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}+2\tilde{u}_{\xi_1}=0$, $\xi_1=x+y$, $\xi_2=-x+y$, $\xi_3=y+z$; 3) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}-\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}+\tilde{u}_{\xi_3\xi_3}+\tilde{u}_{\xi_4\xi_4}=0$, $\xi_1=x+y$, $\xi_2=-x+y$, $\xi_3=z$, $\xi_4=y+z+t$; 4) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}-\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}+\tilde{u}_{\xi_3\xi_3}-\tilde{u}_{\xi_4\xi_4}=0$, $\xi_1=x+y$, $\xi_2=x-y$, $\xi_3=-2y+z+t$, $\xi_4=z-t$; 5) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}-\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}-\tilde{u}_{\xi_3\xi_3}=0$, $\xi_1=x$, $\xi_2=-x+y/2$, $\xi_3=z$; 6) $\tilde{u}_{\xi_1\xi_1}-\tilde{u}_{\xi_2\xi_2}-\tilde{u}_{\xi_3\xi_3}-\tilde{u}=0$, $\xi_1=-y+z$, $\xi_2=y+z$, $\xi_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(x-2y+3z)$.

Д2. 1) $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}=0$, $\xi=x+y$, $\eta=x$; 2) $\tilde{u}_{\eta\eta}+\tilde{u}_\xi=0$, $\xi=x-2y$, $\eta=x$; 3) $\tilde{u}_{\xi\eta}+\frac{3+2\sqrt{3}}{12}\tilde{u}_\xi+\frac{3-2\sqrt{3}}{12}\tilde{u}_\eta-\frac{1}{12}u=0$, $\xi=y-(2+\sqrt{3})x$, $\eta=y-(2-\sqrt{3})x$; 4) $\tilde{u}_{\eta\eta}+(\alpha+\beta)\tilde{u}_\xi+\beta\tilde{u}_\eta+cu=0$, $\xi=x+y$, $\eta=y$; 5) $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}+\frac{1}{2\xi}\tilde{u}_\xi+\frac{1}{2\eta}\tilde{u}_\eta=0$, $\xi=y^2$, $\eta=x^2$(у кожній чверті); 6) $\tilde{u}_{\xi\eta}+\frac{1}{4(\eta^2-\xi^2)}(\eta\tilde{u}_\xi+\xi\tilde{u}_\eta)=0$, $\xi=y^2-x^2$, $\eta=y^2+x^2$(у кожній чверті); 7) $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}+\frac{1}{3\eta}\tilde{u}_\eta=0$, $\xi=x$, $\eta=\frac{2}{3}y^{3/2}$; 8) $\tilde{u}_{\xi\eta}-\frac{1}{2(\xi-\eta)}(\tilde{u}_\xi-\tilde{u}_\eta)+\frac{1}{4(\xi+\eta)}(\tilde{u}_\xi+\tilde{u}_\eta)=0$, $\xi=y^2+e^x$, $\eta=y^2-e^x(y>0$ або $y<0)$; 9) $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}+\cos\xi\tilde{u}_\eta=0$, $\xi=x$, $\eta=y-\cos x$; 10) $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}-2u=0$, $\xi=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $\eta=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$; 11) $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}=80\frac{\ln\xi}{\xi^2}\cdot\frac{\ln\eta}{\eta^2}$, $\xi=e^{0{,}5y}$, $\eta=e^{0{,}5x}$; 12) $\tilde{u}_{\xi\xi}+\tilde{u}_{\eta\eta}+\tilde{u}_\eta=0$, $\xi=2x-y$, $\eta=x$, 13) $u_{xx}=0$, $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; $\tilde{u}_{\eta\eta}-\frac{\xi-\eta}{1-(\xi-\eta)^2}\tilde{u}_\xi=0$, $\xi=y+\cos x$, $\eta=y$, $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$; 14) $u_{yy}=0$, $x\neq 0$, $y=0$; на осі Oy рівняння вироджується; $\tilde{u}_{\eta\eta}+\frac{2\eta^2}{\xi-\eta^2}\tilde{u}_\xi-\frac{1}{\eta}\tilde{u}_\eta=0$, $\xi=y^2+x^2$, $\eta=x$.

Тема 3. Метод характеристик. Задача Коші і задача Гурса

1^0. Ідея методу полягає в тому, що після зведення до канонічного вигляду за допомогою характеристик рівняння часто спрощується настільки, що стає можливим знаходження його загального розв'язку. Це, в свою чергу, дозволяє досліджувати і розв'язувати задачу Коші та деякі інші задачі для цього рівняння.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$xy^3u_{xx}(x,y) - x^3yu_{yy}(x,y) + (8x^2-1)y^3u_x(x,y) + x^3u_y(x,y) +$$
$$+16x^3y^3u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}. \tag{1}$$

$\triangleleft$ Оскільки $b^2 - ac = x^4y^4 > 0$ при $xy \neq 0$, то рівняння (1) гіперболічне скрізь за винятком координатних осей (ліній параболічності). Розв'яжемо його при $xy \neq 0$. Рівняння характеристик $xy^3dy^2 - x^3ydx^2 = 0$ розпадається на два рівняння $ydy \pm xdx = 0$, тобто характеристиками є гіперболи $y^2 - x^2 = C_1$ та кола $x^2 + y^2 = C_2$. Отже, заміною $\xi = y^2 - x^2, \eta = x^2 + y^2$ рівняння (1) зводиться до канонічного вигляду. Знайдемо нові коефіцієнти, скориставшись формулами (26) з теми 2:

$$\tilde{a} = \tilde{c} = 0,$$
$$\tilde{b} = xy^3(-2x)\cdot 2x - x^3y \cdot 2y \cdot 2y = -8x^3y^3,$$
$$\tilde{d} = xy^3(-2) - x^3y\cdot 2 + (8x^2-1)y^3(-2x) + x^3 \cdot 2y = -16x^3y^3,$$
$$\tilde{e} = xy^3 \cdot 2 - x^3y \cdot 2 + (8x^2-1)y^3 2x + x^3 \cdot 2y = 16x^3y^3,$$
$$\tilde{f} = f = 16x^3y^3, \quad \tilde{g} = g = 0,$$

тому рівняння (1) набуде вигляду

$$-16x^3y^3\tilde{u}_{\xi\eta} - 16x^3y^3\tilde{u}_\xi + 16x^3y^3\tilde{u}_\eta + 16x^3y^3\tilde{u} = 0$$

або

$$(\tilde{u}_\eta + \tilde{u})_\xi - (\tilde{u}_\eta + \tilde{u}) = 0. \tag{2}$$

Позначимо

$$v := \tilde{u}_\eta + \tilde{u}, \tag{3}$$

тоді (2) набуде вигляду $v_\xi - v = 0$, звідки $v = \omega(\eta)e^\xi$, де ω – довільна неперервно диференційовна функція. Підставимо v в (3):

$$\tilde{u}_\eta + \tilde{u} = \omega(\eta)e^\xi.$$

Це звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно $\tilde{u}$ як функції η при фіксованому ξ, права частина якого залежить від параметра ξ. Розв'язуючи його, наприклад, методом варіації довільної сталої, дістанемо $\tilde{u}(\xi,\eta) = e^{-\eta}f(\xi)+e^{\xi-\eta}\int \omega(\eta)e^{\eta}d\eta$, де f – довільна двічі неперервно диференційовна функція. Тут і далі символом $\int \alpha(\eta)d\eta$ позначається якась одна з первісних функції α. Оскільки ω – довільна неперервно диференційовна функція, то і $e^{-\eta}\int \omega(\eta)e^{\eta}d\eta = g(\eta)$, $\eta > 0$, – довільна двічі неперервно диференційовна функція, а тому $\tilde{u}(\xi,\eta) = e^{-\eta}f(\xi) + e^{\xi}g(\eta)$. Повертаючись до старих змінних, маємо

$$u(x,y) = e^{-(y^2+x^2)}f(y^2-x^2) + e^{y^2-x^2}g(y^2+x^2), \quad xy \neq 0. \qquad (4)$$

Зазначимо, що на лініях параболічності $xy = 0$ (4) теж є розв'язком рівняння (1), але містить, по суті, лише одну довільну функцію. Причиною останнього є дотик характеристик $y^2 - x^2 = C_1$ до характеристик $y^2 + x^2 = C_2$ на лініях параболічності. $\triangleright$

2^0. Класичною задачею Коші для рівняння коливань струни називається задача про знаходження функції u з класу $C^2(\Pi^1) \cap C^1(\overline{\Pi^1})$, де $\Pi^1 := \{(x,t)|x \in \mathbb{R}, t > 0\}$, яка задовольняє рівняння

$$u_{tt}(x,t) = a^2u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Pi^1, \qquad (5)$$

і початкові умови

$$u(x,t)|_{t=0} := u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} := u_t(x,0) = \psi(x), \; x \in \mathbb{R}, \qquad (6)$$

де $f \in C(\overline{\Pi^1})$, $f'_x \in C(\overline{\Pi^1})$,$\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ – задані функції. Розв'язок задачі Коші (5), (6) існує, єдиний і при $f \equiv 0$ легко знаходиться методом характеристик. Справді, оскільки $x \pm at =$ const – характеристики рівняння (5), то заміною $\xi = x-at$, $\eta = x+at$ воно зводиться до рівняння $\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0$, загальний розв'язок якого $\tilde{u} = g_1(\xi) + g_2(\eta)$, тобто

$$u(x,t) = g_1(x-at) + g_2(x+at), \quad \{g_1, g_2\} \subset C^2(\mathbb{R}).$$

Задовольняючи початкові умови (6), одержуємо

$$g_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_x^0 \psi(z)dz+C, g_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz-C,$$

звідки

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz, \quad (x,t) \in \Pi^1. \quad (7)$$

Формулу (7) називають **формулою Даламбера** для однорідного рівняння (5). Її можна узагальнити на випадок $f \not\equiv 0$. Справді, легко переконатись, що функція $v(x,t) := \frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz$, $(x,t) \in \Pi^1$, є розв'язком рівняння (5) і при $t = 0$ задовольняє нульові початкові умови $v(x,0) = 0$, $v_t(x,0) = 0$, тому $u + v$, де u визначена в (7), є розв'язком задачі (5), (6), тобто формула

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)dz, \quad (x,t) \in \Pi^1, \quad (8)$$

визначає розв'язок цієї задачі. Ця формула називається **формулою Даламбера** для неоднорідного рівняння (5).

Зазначимо, що формули, аналогічні до (8), правильні також у випадку більшого числа просторових змінних. Зокрема, розв'язок задачі Коші для рівняння коливань мембрани

$$u_{tt}(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)) + f(x,y,t),$$
$$(x,y,t) \in \Pi^2 := \{(x,y,t) | (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0\},$$
$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

при $f \in C^2(\overline{\Pi^2})$, $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ існує, єдиний і зображується **формулою Пуассона**

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\partial_t \int\limits_{K_{at}(x,y)} \frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{K_{at}(x,y)}\frac{\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{K_{a(t-\tau)}(x,y)}\frac{f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}},\ (x,y,t)\in\Pi^2,$$

де $K_{at}(x,y)$ – круг радіуса at з центром у точці (x,y).

Аналогічно, розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння в просторі

$$u_{tt}(x,y,z,t)=a^2(u_{xx}(x,y,z,t)+u_{yy}(x,y,z,t)+u_{zz}(x,y,z,t))+$$

$$+f(x,y,z,t),\quad (x,y,z,t)\in\Pi^3:=\{(x,y,z,t)|(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,t>0\},$$

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z),\quad u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z),\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$

при $f\in C^2(\overline{\Pi^3})$, $\varphi\in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi\in C^2(\mathbb{R}^3)$ існує, єдиний і зображується **формулою Кірхгофа**

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\partial_t\left(\frac{1}{t}\int\limits_{S_{at}(x,y,z)}\varphi(\xi,\eta,\zeta)dS\right)+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2t}\int\limits_{S_{at}(x,y,z)}\psi(\xi,\eta,\zeta)dS+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{K_{at}(x,y,z)}\frac{f(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}{a})}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}d\xi d\eta d\zeta,(x,y,z,t)\in\Pi^3,$$

де $K_{at}(x,y,z)$ – куля радіуса at з центром (x,y,z), а $S_{at}(x,y,z)$ – її межа (сфера).

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші

$$u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)+xt^2,\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0,$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=x+1,\quad x\in\mathbb{R}.$$

$\triangleleft$ Скористаємося формулою (8). У нашому випадку $a = 1$, $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = x + 1$, $f(x, t) = xt^2$. Тому

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}(z+1)dz + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} z\tau^2 dz = \frac{1}{4}(z+1)^2\Big|_{x-t}^{x+t} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t \tau^2 \frac{z^2}{2}\Big|_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} d\tau = t(x+1) + x\int\limits_0^t \tau^2(t-\tau)d\tau = t(x+1) + \frac{1}{12}xt^4.$$

Отже, розв'язком задачі є функція $u(x,t) = t(x+1) + \frac{1}{12}xt^4$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. $\triangleright$

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші для тривимірного рівняння коливань

$$u_{tt}(x,y,z,t) = u_{xx}(x,y,z,t) + u_{yy}(x,y,z,t) + u_{zz}(x,y,z,t),\ (x,y,z,t) \in \Pi^3,$$
$$u(x,y,z,0) = z, \quad u_t(x,y,z,0) = x + z, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

$\triangleleft$ Використаємо формулу Кірхгофа. З умови задачі випливає, що $a = 1$, $f(x,y,z,t) = 0$, $\varphi(x,y,z) = z$, $\psi(x,y,z) = x + z$. Тоді

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi}\partial_t \int\limits_{S_t(x,y,z)} \frac{\zeta}{t} dS + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_t(x,y,z)} \frac{\xi+\zeta}{t} dS.$$

Сфера $S_t(x,y,z)$ задається рівнянням $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = t^2$. Спроектуємо цю сферу на площину $O\xi\eta$. Позначимо через $K_t(x,y,z)$ круг, в який проектується сфера. Зведемо поверхневі інтеграли, які стоять у правій частині, до подвійних, що беруться по кругу $K_t(x,y,z)$:

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi}\partial_t \left(\int\limits_{K_t(x,y,z)} \frac{z + \sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{t\sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} t d\xi d\eta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{K_t(x,y,z)} \frac{z - \sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{t\sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} t d\xi d\eta \right) +$$

$$+ \left(\int\limits_{K_t(x,y,z)} \frac{\xi + z + \sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{t\sqrt{t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} t d\xi d\eta + \right.$$

$$
\left. + \int\limits_{K_t(x,y,z)} \frac{\xi + z - \sqrt{t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}{t\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} t d\xi d\eta \right).
$$

Перші доданки в дужках – інтеграли, взяті по верхній половині сфери $\zeta = z + \sqrt{t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}$; другі – по нижній половині сфери $\zeta = z - \sqrt{t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}$. Перейдемо в подвійних інтегралах по кругу $K_t(x,y,z)$ до полярних координат: $\xi - x = \rho\cos\varphi$, $\eta - y = \rho\sin\varphi$, $0 < \rho < t$, $0 < \varphi \le 2\pi$. Тоді

$$
u(x,y,z,t) = \frac{z}{2\pi}\partial_t \int\limits_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t \frac{(x+z)\rho d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = z + (x+z)t,
$$

$$
(x,y,z,t) \in \Pi^3. \quad \triangleright
$$

Зауваження 1. Задачу з прикладу 3 можна розв'язати простіше. Оскільки функції $\varphi = z$ і $\psi = x+z$ задовольняють рівняння, то розв'язок задачі шукатимемо у вигляді

$$
u(x,y,z,t) = f(t)z + g(t)(x+z),
$$

де f і g – невідомі двічі неперервно диференційовні функції. Після підстановки цієї функції у рівняння одержимо

$$
f''(t)z + g''(t)\,(x+z) = 0,
$$

звідки випливає, що $f''(t) = 0$ і $g''(t) = 0$, $t > 0$. Якщо задовольнити функцією u початкові умови, то матимемо

$$
\begin{cases} f(0)z + g(0)(x+z) = z, \\ f'(0)z + g'(0)(x+z) = x+z \end{cases}
$$

або

$$
\begin{cases} f(0) = 1, \\ f'(0) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} g(0) = 0, \\ g'(0) = 1. \end{cases}
$$

Отже, для f і g одержимо відповідно такі задачі Коші:

$$
\begin{array}{ll} f''(t) = 0, & \quad g''(t) = 0, \\ \begin{cases} f(0) = 1, \\ f'(0) = 0; \end{cases} & \quad \begin{cases} g(0) = 0, \\ g'(0) = 1. \end{cases} \end{array}
$$

Розв'яжемо першу з них. Загальний розв'язок рівняння $f(t) = C_1 t + C_2$ після підстановки в початкові умови дасть значення $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Звідси випливає, що $f(t) = 1$, $t \geq 0$.

Аналогічно одержимо, що $g(t) = t$, $t \geq 0$. Тому

$$u(x, y, z, t) = z + (x + z)t, \quad \{x, y, z\} \subset \mathbb{R}^3, \ t > 0.$$

Оскільки розв'язок задачі Коші єдиний, то іншого розв'язку немає.

Зауваження 2. При розв'язуванні задачі Коші для гіперболічного рівняння у випадку двох або трьох незалежних змінних зручно користуватися таким твердженням: *якщо функції* f, φ, ψ *гармонічні* (див. тему 8) *в* $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, *а* $g \in C^1((0, \infty))$, *то розв'язок задачі Коші*

$$u_{tt}(x, t) = a^2 \Delta u(x, t) + g(t) f(x),$$

$$(x, t) \in \Pi^n := \{(x, t) | x \in \mathbb{R}^n, t > 0\},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

де $\Delta u := u_{x_1 x_1} + \ldots + u_{x_n x_n}$, *виражається формулою*

$$u(x, t) = \varphi(x) + t\psi(x) + f(x) \int\limits_0^t (t - \tau) g(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \Pi^n.$$

3^0. Загальна задача Коші полягає у знаходженні розв'язку гіперболічного $(b^2 - ac > 0)$ в області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ рівняння

$$a(x, y) u_{xx} + 2b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} + d(x, y) u_x + e(x, y) u_y +$$

$$+ f(x, y) u = g(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{9}$$

з достатньо гладкими коефіцієнтами і правою частиною, який на кривій $\Gamma \subset \Omega$ задовольняє умови

$$u|_\Gamma = \varphi, \quad \partial_{\vec{l}} u\Big|_\Gamma = \psi. \tag{10}$$

Якщо крива Γ: 1) регулярна, 2) не є характеристикою і не дотикається до характеристик рівняння (9); 3) не має дотичних, паралельних вектору $\vec{l}$, то при досить гладких φ, ψ в області $\Omega_1 \subset \Omega$, обмеженій характеристиками рівняння (9), які проходять через кінці Γ, існує єдиний розв'язок задачі (9), (10).

Приклад 4. Розв'язати задачу

$$x^2 u_{xx}(x,y) - 2xyu_{xy}(x,y) - 3y^2 u_{yy}(x,y) = 0, \quad x > 0, \ y > 1, \tag{11}$$

$$u(x,1) = 0, \quad u_y(x,1) = \sqrt[4]{x^7}, \quad x > 0. \tag{12}$$

◁ Оскільки $b^2 - ac = 4x^2y^2 > 0$, то рівняння гіперболічне. Крива Γ у цьому випадку – промінь $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = 1\}$, $\vec{l}$ – напрямок, паралельний осі Oy, область $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$. Рівняння характеристик $x^2(dy)^2 + 2xydxdy - 3y^2(dx)^2 = 0$ розпадається на два рівняння $xdy - ydx = 0$ та $xdy + 3ydx = 0$, загальні інтеграли яких $\frac{x}{y} = C_1$ та $x^3y = C_2$. Отже, характеристики і напрям $\vec{l}$ утворюють з Γ ненульові кути α_1, α_2, β, тому розв'язок існує в області, обмеженій характеристиками, які проходять через точку $A(0,1)$: $\frac{x}{y} = 0$, $x^3y = 0$, тобто променями $\{x = 0, y > 0\}$ та $\{y = 0, x > 0\}$, іншими словами, область Ω_1 збігається з Ω (рис. 1). Заміною $\xi = \frac{x}{y}$, $\eta = x^3y$ рівняння (11) зводиться до вигляду $4\eta\tilde{u}_{\xi\eta} - \tilde{u}_\xi = 0$ або $(4\eta\tilde{u}_\eta - \tilde{u})_\xi = 0$, звідки $\tilde{u}_\eta - \frac{1}{4\eta}\tilde{u} = \omega(\eta)$, де ω – довільна неперервно диференційовна функція. Останнє рівняння лінійне і його розв'язок знаходимо, наприклад, методом варіації довільної сталої. Цим розв'язком є функція $\tilde{u}(\xi,\eta) = (f_1(\xi) + f_2(\eta))\sqrt[4]{\eta}$, а загальний розв'язок рівняння (11) має вигляд

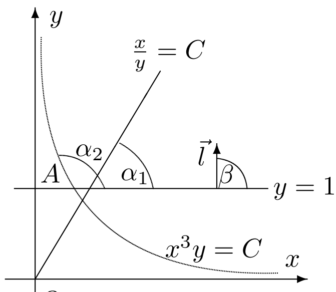


Рис. 1

$$u(x,y) = \big(f_1(x/y) + f_2(x^3y)\big)\sqrt[4]{x^3y}, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{13}$$

де f_1, f_2 – довільні двічі неперервно диференційовні функції.

Підставимо (13) в (12):

$$(f_1(x) + f_2(x^3))\sqrt[4]{x^3} = 0, \quad x > 0,$$

$$(-xf_1'(x) + x^3 f_2'(x^3))\sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{4}(f_1(x) + f_2(x^3))\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{x^7}, \quad x > 0,$$

або

$$f_1(x) + f_2(x^3) = 0, \quad -f_1'(x) + x^2 f_2'(x^3) = 1, \quad x > 0. \tag{14}$$

Виключаючи f_1, дістаємо вираз $f_2'(x^3) = \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{4}(x^3)^{-2/3}$, тобто $f_2'(z) = \frac{1}{4}z^{-2/3}$, звідки $f_2(z) = \frac{3}{4}z^{1/3} + C$, $z > 0$. Тоді з (14) випливає, що $f_1(x) = -f_2(x^3) = -\frac{3}{4}x - C$, $x > 0$. Підставивши f_1 і f_2 у (13), одержимо розв'язок задачі (11), (12)

$$u(x,y) = (-\frac{3x}{4y} - C + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^3 y} + C)\sqrt[4]{x^3 y} = \frac{3}{4}\sqrt[4]{x^7 y}(\sqrt[3]{y} - \frac{1}{y}),$$

$$(x,y) \in \Omega. \qquad \triangleright$$

Зауваження 3. Метод характеристик не придатний для еліптичних рівнянь, оскільки вони не мають дійсних характеристик, але й задача Коші для них, взагалі кажучи, некоректна [9].

Зауваження 4. Мішану задачу (задачу з початковими і крайовими умовами) можна звести до задачі Коші, продовжуючи коефіцієнти рівняння і початкові дані через межу так, щоб крайові умови виконувались. Застосовуючи після продовження метод характеристик, можна таким способом розв'язати й мішану задачу.

Приклад 5. Знайти u, якщо

$$u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) + 2u_x(x,y) + 2u_y(x,y) = 0, \quad x > 0,\ y > 0, \tag{15}$$

$$u(x,0) = x^2, \quad u_y(x,0) = 0, \quad x \geq 0, \tag{16}$$

$$u(0,y) = 0, \quad y \geq 0. \tag{17}$$

$\triangleleft$ Продовжимо початкові функції з умов (16) на від' ємну піввісь і розглянемо задачу Коші

$$u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) + 2u_x(x,y) + 2u_y(x,y) = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ y > 0, \tag{15'}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_y(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{16'}$$

де функція $\varphi(x)$ при $x > 0$ збігається з x^2. Задача (15′), (16′) розв'язується методом характеристик аналогічно до того, як у прикладі 4. Оскільки $x \pm y = \mathrm{const}$ є характеристиками рівняння (15′), то заміною $\xi = x - y$, $\eta = x + y$ воно зводиться до канонічного вигляду $\tilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{u}_\eta = 0$, звідки знаходимо $\tilde{u}(\xi,\eta)=(f_1(\xi)+f_2(\eta))e^{-\xi}$, тобто загальний розв'язок рівняння $(15')$

$$u(x,y)=(f_1(x-y)+f_2(x+y))e^{y-x}. \tag{18}$$

Підставимо (18) у $(16')$. Маємо

$$(f_1(x)+f_2(x))e^{-x}=\varphi(x), \quad x\in\mathbb{R},$$

$$(-f_1'(x)+f_2'(x))e^{-x}+(f_1(x)+f_2(x))e^{-x}=0, \quad x\in\mathbb{R},$$

тоді

$$f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x)e^{x}, \quad -f_1'(x)+f_2'(x)=-\varphi(x)e^{x},$$

звідки

$$f_1(x)=\frac{1}{2}(\varphi(x)e^{x}+\int\limits_0^x\varphi(z)e^{z}dz-C),$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2}(\varphi(x)e^{x}-\int\limits_0^x\varphi(z)e^{z}dz+C).$$

Підставивши останні два вирази у (18), одержимо розв'язок задачі Коші $(15')$, $(16')$ у вигляді

$$u(x,y)=\frac{1}{2}(\varphi(x-y)e^{x-y}+\varphi(x+y)e^{x+y}+\int\limits_{x+y}^{x-y}\varphi(z)e^{z}dz)e^{y-x}, \ \ x\in\mathbb{R},\ y>0.$$

Щоб підібрати продовження φ, підставимо цей розв'язок у (17):

$$\varphi(-y)e^{-y}+\varphi(y)e^{y}+\int\limits_{y}^{-y}\varphi(z)e^{z}dz=0, \quad y\geq 0.$$

Звідси випливає, що $\varphi(y)e^{y}$ – непарна функція. Оскільки при $y>0$ $\varphi(y)=y^2$, то $\varphi(y)=y|y|e^{|y|-y}$, тобто розв'язком є функція

$$u(x,y)=\frac{1}{2}((x-y)|x-y|e^{|x-y|}+(x+y)|x+y|e^{|x+y|}-\int\limits_{x+y}^{x-y}z|z|e^{|z|}dz)e^{y-x},$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad y \geq 0. \quad \triangleright$$

Розглянемо задачу (5), (6) з $f \equiv 0$ для випадку напівобмеженої струни, яка в положенні рівноваги збігається з інтервалом $(0, +\infty)$ і кінець $x = 0$ якої закріплений жорстко (або він вільний), тобто задачу

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x < +\infty,$$
$$u(0,t) = 0 \quad (\text{або } u_x(0,t) = 0), \quad t \geq 0.$$

Розв'язок цієї задачі можна знайти за допомогою формули Даламбера (7), якщо продовжити початкові функції на $\mathbb{R}$ непарним способом у випадку закріпленого жорстко кінця $x = 0$, тобто $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\psi(-x) = -\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, і парним способом у випадку вільного кінця $x = 0$, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\psi(-x) = \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 6. Знайти розв'язок рівняння $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t)$, $0 < x < +\infty$, $t > 0$, який задовольняє умови $u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = \sin^2 x$, $x \geq 0$, і $u(0,t) = 0$, $t \geq 0$.

$\triangleleft$ Продовжимо функції $\varphi(x) = x^2$ і $\psi(x) = \sin^2 x$ на від'ємну піввісь непарно:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \geq 0, \\ -x^2 \text{ при } x < 0; \end{cases} \quad \psi_1(x) = \begin{cases} \sin^2 x \text{ при } x \geq 0, \\ -\sin^2 x \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Тоді, згідно з формулою Даламбера (7), розв'язок запишеться у вигляді

$$u(x,t) = \frac{\varphi_1(x-at) + \varphi_1(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(z)dz =$$

$$= \begin{cases} \frac{(x+at)^2 + (x-at)^2}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \sin^2 z dz \quad \text{при } t \leq \frac{x}{a}, \\ \frac{(x+at)^2 - (x-at)^2}{2} + \frac{1}{2a} (\int\limits_{0}^{x+at} \sin^2 z dz - \int\limits_{x-at}^{0} \sin^2 z dz) \text{ при } t > \frac{x}{a} > 0, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x^2 + a^2 t^2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{4a} \cos 2x \sin 2at \quad \text{при } t \leq \frac{x}{a}, \\ 2axt + \frac{1}{4a}(2x - \sin 2x \cos 2at) \quad \text{при } t > \frac{x}{a} > 0. \end{cases} \qquad \triangleright$$

4^0. **Задача Гурса** полягає в знаходженні такого розв'язку рівняння (9), який набуває заданих значень на двох відрізках характеристик, що перетинаються під ненульовим кутом. Якщо дані задачі досить гладкі й узгоджені, тобто збігаються в точці перетину характеристик $\varphi(x,y) = \text{const}$, $\psi(x,y) = = \text{const}$ (рис. 2), то задача Гурса має єдиний розв'язок в області, обмеженій цими характеристиками.

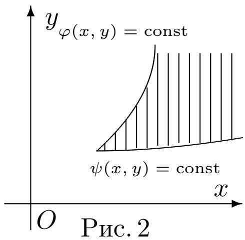


Рис. 2

. **Приклад 7.** Розв'язати задачу

$$x^2 u_{xx}(x,y) - y^2 u_{yy}(x,y) - 2yu_y(x,y) = 0, \quad x > 0,\ y > 0, \tag{19}$$

$$u(x,y)|_{\frac{x}{y}=1} = x^3, \quad u(x,y)|_{xy=1} = x, \quad x > 0. \tag{20}$$

◁ Оскільки $b^2 - ac = x^2y^2 > 0$, то у першій чверті площини рівняння (19) гіперболічне. З його рівняння характеристик $x^2dy^2 - y^2dx^2 = 0$ знаходимо характеристики $\frac{x}{y} = C_1$ та $xy = C_2$. Отже, задача (19), (20) є задачею Гурса з даними на характеристиках $\frac{x}{y} = 1$, $xy = 1$, $x > 0$. У точці $(1,\ 1)$ перетину характеристик дані задачі узгоджені ($x^3 = x = 1$). Канонічний вигляд рівняння (19) $\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta) - \frac{1}{2\xi}\tilde{u}_\eta(\xi,\eta) = 0$, $\xi = \frac{x}{y}$, $\eta = xy$; звідки $\tilde{u}(\xi,\eta) = (f_1(\xi) + f_2(\eta))\sqrt{\xi}$, тобто загальний розв'язок рівняння (19)

$$u(x,y) = \left(f_1\left(\frac{x}{y}\right) + f_2(xy)\right)\sqrt{\frac{x}{y}}, \quad x > 0,\ y > 0, \tag{21}$$

$$f_1 \in C^2(\mathbb{R}), \quad f_2 \in C^2(\mathbb{R}).$$

Підставимо (21) у (20) і врахуємо умову узгодження $u(1,1) = 1$:

$$\begin{cases} f_1(1) + f_2(x^2) = (x^2)^{\frac{3}{2}}, \\ (f_1(x^2) + f_2(1))\sqrt{x^2} = \sqrt{x^2}, \quad x > 0, \\ f_1(1) + f_2(1) = 1. \end{cases}$$

Звідси $f_1(1) = 1 - f_2(1) = C$, $f_2(z) = z^{3/2} - f_1(1) = z^{3/2} - C$, $z > 0$. Підставляючи їх у (21), знаходимо розв'язок задачі (19), (20)

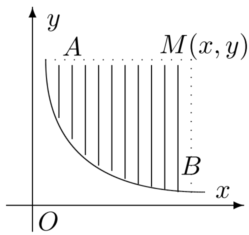
$$u(x,y) = (C + x^{3/2}y^{3/2} - C)\sqrt{\frac{x}{y}} = x^2y, \quad x > 0,\ y > 0. \quad \triangleright$$

Якщо маємо деяку задачу для неоднорідного рівняння, то, підібравши будь-який його частинний розв'язок, зведемо цю задачу до задачі для однорідного рівняння.

Приклад 8. Знайти u, якщо

$$xyu_{xy}(x,y) + xu_x(x,y) - yu_y(x,y) - u(x,y) = 2y, \quad x > 0,\ y > 0, \tag{22}$$

$$u(x,y)|_{xy=1} = 1 - y, \quad u_y(x,y)|_{xy=1} = x - 1. \tag{23}$$



$\lhd$ Рівняння (22) у першій чверті площини гіперболічне і вже має канонічний вигляд, але неоднорідне. Його характеристики $x = C_1$, $y = C_2$ та напрям $\vec{l}$, який паралельний до осі Oy, перетинають криву Γ (гіперболу $xy = 1$) під ненульовим кутом, тому задана задача Коші (див. пункт 3^0) має єдиний розв'язок у заштрихованій області. Легко бачити, що $w = -y$ є частинним розв'язком рівняння (22), тому шукаємо розв'язок рівняння у вигляді

$$u(x,y) = v(x,y) - y. \tag{24}$$

Підстановка (24) у (22), (23) приводить до задачі

$$xyv_{xy}(x,y) + xv_x(x,y) - yv_y(x,y) - v(x,y) = 0, \tag{22$'$}$$

$$v(x,y)|_{xy=1} = (u+y)|_{xy=1} = 1, \quad v_y(x,y)|_{xy=1} = (u_y+1)|_{xy=1} = x. \tag{23$'$}$$

Рівняння (22$'$) можна подати у вигляді $x(yv_y + v)_x = yv_y + v$, тому, як і в прикладі 1, одержимо, що його загальний розв'язок

$$v(x,y) = \frac{1}{y}f(x) + xg(y), \quad x > 0,\ y > 0, \tag{25}$$

де f, g – довільні двічі неперервно диференційовні функції. Підстановка (25) в (23$'$) дає

$$\begin{cases} xf(x) + xg(\frac{1}{x}) = 1, \\ -x^2 f(x) + xg'(\frac{1}{x}) = x,\ x > 0, \end{cases}$$

звідки випливає, що $f(x) = \frac{1}{x} - g(\frac{1}{x})$, а $g'(\frac{1}{x}) + xg(\frac{1}{x}) = 2$ або $g'(z) + \frac{1}{z}g(z) = 2$, $z > 0$. Розв'язуючи це лінійне диференціальне рівняння, наприклад, методом варіації довільної сталої, одержуємо, що $g(z) =$

$\frac{C}{z} + z$, $z > 0$, а тоді $f(x) = \frac{1}{x} - g(\frac{1}{x}) = -Cx$. Після підстановки f і g у (25), дістанемо, що $v(x,y) = xy$, і, отже, згідно з (24), матимемо $u(x,y) = xy - y$, $x > 0$, $y > 0$. $\triangleright$

Вправи

О1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1) $u_{xy} + au_x = 0$;
2) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$;
3) $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$;
4) $u_{xx} + 2au_{xy} + a^2 u_{yy} + u_x + au_y = 0$;
5) $e^{-2x}u_{xx} - e^{-2y}u_{yy} - e^{-2x}u_x + e^{-2y}u_y + 8e^y = 0$;
6) $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$;
7) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$;
8) $xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{1}{2}(u_x - u_y) = 0, x > 0, y > 0$.

О2. Знайти розв'язок задачі Коші:

1) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$, $u(x,y)|_{y=0} = 3x^2$, $u_y(x,y)|_{y=0} = 0$;
2) $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0$, $u(x,y)|_{y=\sin x} = x + \cos x$, $u_y(x,y)|_{y=\sin x} = \sin x$;
3) $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0$, $u(x,y)|_{y=0} = -\frac{x^2}{2}$, $u_y(x,y)|_{y=0} = -\sin x$;
4) $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0$, $u(x,y)|_{y=3x} = 0$, $u_y(x,y)|_{y=3x} = e^{-5x^2}$, $x < 1$, $y < 3$;
5) $u_{xx} - 6u_{xy} + 5u_{yy} = 0$, $u(x,y)|_{y=x} = \sin x$, $u_y(x,y)|_{y=x} = \cos x$;
6) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$, $u(x,y)|_{x=1} = y$, $u_y(x,y)|_{x=1} = y$, $x > 0$, $y < 0$;
7) $e^x u_{xy} + u_{yy} = 0$, $u(x,y)|_{y=e^{-x}} = 0$, $u_y(x,y)|_{y=e^{-x}} = e^{2x}$;
8) $u_{xy} - \frac{1}{x}u_y = 0$, $u(x,y)|_{x=2y} = 4y$, $u_x(x,y)|_{x=2y} = 2$.

О3. В області $\Pi^1 := \{(x,t) | x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ знайти розв'язок задачі Коші:

1) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,t)|_{t=0} = \cos x$, $u_t(x,t)|_{t=0} = \sin x$;
2) $u_{tt} = 4u_{xx} + xt$, $u(x,t)|_{t=0} = x^2$, $u_t(x,t)|_{t=0} = x$;
3) $u_{tt} = u_{xx} + e^x$, $u(x,t)|_{t=0} = \sin x$, $u_t(x,t)|_{t=0} = x + \cos x$;
4) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,t)|_{t=0} = \frac{\sin x}{x}$, $u_t(x,t)|_{t=0} = \frac{x}{1+x^2}$;
5) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,t)|_{t=0} = \frac{x}{1+x^2}$, $u_t(x,t)|_{t=0} = \sin x$.

О4. Використовуючи метод продовження і формулу Даламбе-

ра, знайти в області $\Pi^1_+ := \{(x,t)|0 \le x < +\infty, t \ge 0\}$ розв'язок задачі:
1) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \sin x$, $u_x(0,t) = 0$;
2) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $u(x,0) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$;
3) $u_{tt} = 4u_{xx}$, $u(x,0) = e^{-x^2}$, $u_t(x,0) = \sin x$, $u(0,t) = 0$;
4) $u_{tt} = 4u_{xx}$, $u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = 0$, $u_x(0,t) = \cos t$.

О5. Розв'язати задачу:
1) $u_{tt} = u_{xx}, 0 \le x < +\infty, t > 0$, $u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = x$, $u(0,t) = t^2$;
2) $u_{tt} = 4u_{xx} + 16t^2$, $0 \le x < +\infty$, $t > 0$, $u(x,0) = \frac{x^4}{6}$, $u_t(x,0) = 2\sin x$, $u(0,t) = 4t^4$;
3) $u_{tt} = 3u_{xx} + 2(1-6t^2)e^{-2x}$, $0 \le x < +\infty$, $t > 0$, $u(x,0) = 1$, $u_t(x,0) = x$, $u_x(0,t) + 2u(0,t) = 2 + t$.

О6. Розв'язати задачу Гурса:
1) $u_{xy} + x^2 y u_x = 0, x > 0, y > 0, u(x,y)|_{x=0} = 0, u(x,y)|_{y=0} = x$;
2) $u_{xy} - e^x u_{yy} = 0$, $x > 0$, $y > -e^x$, $u(x,y)|_{x=0} = y^2$, $u(x,y)|_{y=-e^x} = 1 + x^2$;
3) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0, x > 1, y > x, u(x,y)|_{x=1} = 1, u(x,y)|_{y=x} = x$;
4) $3x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$, $x > 1$, $1 < y < x$, $u(x,y)|_{y=x} = 0$, $u(x,y)|_{y=1} = \cos\frac{\pi x}{2}$;
5) $u_{xy} - \frac{1}{x-y}(u_x - u_y) = 1$, $x > 2$, $y < -x$, $u|_{y=-x} = 0$,
$u|_{x=2} = 2 + 2y + 0,5y^2$.

С1. Знайти загальний розв'язок рівняння:
1) $(u_x + u)_y + 2x^2 y(u_x + u) = 0$;
2) $u_{xy} + xu_x + 2yu_y + 2xyu = 0$;
3) $(u_x + u)_y + x(u_x + u) + x^2 y = 0$;
4) $2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0$;
5) $3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 4u_y + \frac{5}{16}u = 0$;
6) $u_{xx} - 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x - 2u_y + 4e^{5x+\frac{3}{2}y} = 0$.

С2. На кінці $x = 0$ циліндричного стержня, настільки довгого, що його можна вважати напівобмеженим, діє збурююча сила $A\sin\omega t$. Довести, що відносне видовження перерізу стержня з абсцисою x у момент часу t виражається формулою

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t \le \frac{x}{a}, \\ A \sin \frac{\omega}{a}(at - x) \text{ при } t > \frac{x}{a}, \end{cases}$$
якщо початкові відхилення і початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю.

C3. Поширюючи збурення краю за допомогою прямої хвилі, розв'язати задачу
$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ x > 0,\ t \ge 0;$$
$$u_x(0,t) = \nu(t),\ t > 0; \quad u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ x \ge 0.$$

C4. Відрізок струни, який закріплений на кінцях $x = 0$ і $x = l$, має в початковий момент часу форму параболи, симетричної відносно перпендикуляра, проведеного через середину відрізка $[0, l]$. Знайти форму струни в моменти часу $t_1 = \frac{l}{2a}$ і $t_2 = \frac{l}{a}$, вважаючи, що початкові швидкості відсутні.

C5. Скориставшись зауваженнями 1 і 2, розв'язати задачу:
1) $u_{tt} = \Delta u + 6xyt$, $u|_{t=0} = x^2 - y^2$, $u_t|_{t=0} = xy$;
2) $u_{tt} = \Delta u + t \sin y$, $u|_{t=0} = x^2$, $u_t|_{t=0} = \sin y$;
3) $u_{tt} = \Delta u + 2xyz$, $u|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2$, $u_t|_{t=0} = 1$;
4) $u_{tt} = 8\Delta u + t^2 x^2$, $u|_{t=0} = y^2$, $u_t|_{t=0} = z^2$.

C6. Довести, що при $|x| \ne |t|$ функція $u(x,t) = \frac{x^2+t^2}{(x^2-t^2)^2}$ є розв'язком рівняння коливання струни (5) з $a = 1$, $f \equiv 0$.

C7. Нехай u – розв'язок рівняння (5) з $a = 1$, $f \equiv 0$. Довести, що функція $v(x,t) = u\left(\frac{x}{x^2-t^2}, \frac{t}{x^2-t^2}\right)$ також є розв'язком цього рівняння скрізь, де вона визначена.

C8. Розв'язати задачу Коші:
1) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} + (\sin^2 x - 9)u_{yy} - \cos x u_y = 36$, $u|_{y=\cos x} = -x^2$, $u_y|_{y=\cos x} = -\frac{2}{3}$;
2) $x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} = 0$, $u|_{y=1} = 0$, $u_y|_{y=1} = x^{4/3}$;
3) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} + u_x + (2 - \sin x - \cos x)u_y = 0$, $u|_{y=\cos x} = 0$, $u_y|_{y=\cos x} = e^{-x/2}\cos x$;
4) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 16$, $u|_{y=0} = 3x^2$, $u_y|_{y=0} = 0$;
5) $3u_{xx} - 2u_{xy} - u_{yy} + \frac{4}{y-x}(u_x + u_y) = x - y$, $u(x,y)|_{x=0} = 1$, $u_x(x,y)|_{x=0} = y^2$.

Домашнє завдання

Д1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$;
2) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$;
3) $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u = 2e^{x+y}$;
4) $u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2)u_y = 0$;
5) $u_{xy} + yu_y - u = 0$;
6) $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0$;
7) $u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0$.

Д2. Розв'язати задачу Коші:

1) $u_{xy} + u_x = 0$, $u|_{y=x} = \sin\, x$, $u_x|_{y=x} = 1$;
2) $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 2$, $u|_{y=0} = 0$, $u_y|_{y=0} = x + \cos x$;
3) $xu_{xx} + (x + y)u_{xy} + yu_{yy} = 0$, $u|_{y=\frac{1}{x}} = x^3$, $u_x|_{y=\frac{1}{x}} = 2x^2$, $x > 0$, $y > 0$;
4) $u_{xx} + 2(1+2x)u_{xy} + 4x(1+x)u_{yy} + 2u_y = 0$, $u|_{x=0} = y, u_x|_{x=0} = 2$;
5) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} - \cos x u_y = 0$, $u|_{y=\cos x} = \sin x$, $u_y|_{y=\cos x} = \frac{1}{2}e^x$;
6) $u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} + u_x + (\sin x + \cos x + 1)u_y = 0$, $u|_{y=-\cos x} = 1 + 2\sin x$, $u_y|_{y=-\cos x} = \sin x$;
7) $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = xe^{2y}$, $u|_{y=0} = \sin x$, $u_y|_{y=0} = \frac{1}{1+x^2}$;
8) $y^2u_{yy} - x^2u_{xx} = 0$, $u(x, y)|_{y=1} = 3x$, $u_y(x, y)|_{y=1} = 6x^2$.

Д3. Розв'язати задачу Коші:

1) $u_{tt} = u_{xx}$, $u|_{t=0} = x^2$, $u_t|_{t=0} = x$;
2) $u_{tt} = u_{xx} + \sin x$, $u|_{t=0} = \sin x$, $u_t|_{t=0} = 0$;
3) $u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x$, $u|_{t=0} = 1$, $u_t|_{t=0} = 1$;
4) $u_{tt} = u_{xx} + a\sin bt$, $u|_{t=0} = \cos x$, $u_t|_{t=0} = \sin x$;
5) $u_{tt} = u_{xx} + x\sin t$, $u|_{t=0} = \sin x$, $u_t|_{t=0} = \cos x$;
6) $u_{tt} = \Delta u + x^3 - 3xy^2$, $u|_{t=0} = e^x \cos y$, $u_t|_{t=0} = e^y \sin x$;
7) $u_{tt} = 2\Delta u$, $u|_{t=0} = 2x^2 - y^2$, $u_t|_{t=0} = 2x^2 + y^2$;
8) $u_{tt} = \Delta u + 6te^{x\sqrt{2}} \sin y \cos z$, $u|_{t=0} = e^{x+y} \cos z\sqrt{2}$, $u_t|_{t=0} = e^{3y+4z} \sin 5x$.

Д4. В області $\Pi^1_+ := \{(x, t)\,|\, 0 \le x < +\infty, t \ge 0\}$ знайти розв'язок задачі:

1) $u_{tt} = a^2u_{xx}$, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}$, $u(0, t) = 0$;

2) $u_{tt} = a^2u_{xx}$, $u(x,0) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $u_t(x,0) = \frac{x}{1+x^2}$, $u(0,t) = 0$;
3) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = \sin \pi t$;
4) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $u_x(0,t) = -\sin \pi t$.

Д5. Розв'язати задачу:
1) $u_{tt} = u_{xx}+2, x > 0, t > 0, u|_{t=0} = x+\cos x, u_t|_{t=0} = 1, u_x|_{x=0} = 1$;
2) $u_{tt} = u_{xx}, x > 0, t > 0, u|_{t=0} = x^2, u_t|_{t=0} = 0, (u_t+u)|_{x=0} = 2t+t^2$;
3) $u_{tt}=u_{xx}-6,\ x>0, t>0,\ u|_{t=0}=x^2, u_t|_{t=0}=0, (u_t+2u_x)|_{x=0}=-4$;
4) $u_{tt} = a^2u_{xx}, x > 0, t > 0,\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = A$, A – стала, $x \geq 0$, $(u_x + hu)|_{x=0} = 0, t \geq 0$;
5) $u_{tt} = a^2u_{xx}, x > 0, t > 0,\ u|_{t=0} = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{l}, & 0 \leq x \leq l, \\ 0, & l < x < +\infty, \end{cases}$
$u_t|_{t=0} = 0, x \geq 0,\ (u_x - hu)|_{x=0} = 0, t \geq 0$.

Д6. Розв'язати задачу Гурса:
1) $u_{xy} + u_x = x,\ x > 0,\ y > 0,\ u|_{x=0} = y^2,\ u|_{y=0} = x^2$;
2) $2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0, y > |x|, u|_{y=x} = 1, u|_{y=-x} = (1 + x)e^x$;
3) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} + xu_x - yu_y = 0,\ \frac{1}{x} < y < x,\ x > 1,\ u|_{y=x} = x$, $u|_{y=\frac{1}{x}} = 1 + \ln x$;
4) $xu_{xx}+(x-y)u_{xy}-yu_{yy} = 0, 0 < y < x, x > 0, u|_{y=0} = 0, u|_{y=x} = x$;
5) $2u_{xx}+u_{xy}-u_{yy}+u_x+u_y = 0,\ x > 0, -\frac{1}{2}x < y < x, u|_{y=x} = 1+3x$, $u|_{y=-x/2} = 1$.

Відповіді

О1. 1) $u(x,y) = \varphi(x)e^{-ay} + g(y)$; 2) $\tilde{u}_{\xi\eta} = 0$, $u = f(x + y - \cos x) + g(x - y + \cos x)$; 3) $\tilde{u}_{\xi\eta} + \frac{1}{7}\tilde{u}_\eta = \frac{2}{49}$, $u = \frac{2}{7}(2x + y) + f(x - 3y) + g(2x + y)e^{\frac{1}{7}(3y-x)}$; 4) $\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_\xi = 0$, $u = f(y - ax) + g(y - ax)e^{-x}$; 5) $\tilde{u}_{\xi\eta} = \xi + \eta$, $u = e^y(e^{2y} - e^{2x}) + f(e^y - e^x) + g(e^y + e^x)$; 6) $\tilde{u}_{\eta\eta} + \frac{1}{\eta}\tilde{u}_\eta = 0$, $u = f(xy)\ln|y|+g(xy)$; 7) $\tilde{u}_{\xi\eta}-\frac{1}{2\xi}\tilde{u}_\eta = 0$, $u = \sqrt{xy}f(\frac{y}{x})+g(xy)$; 8) $\tilde{u}_{\xi\eta} = 0$, $u = f(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + g(\sqrt{x} - \sqrt{y})$.

О2. 1) $u = 3x^2 + y^2$; 2) $u = x + \cos(x + \sin x - y)$;
3) $u = -\frac{x^2}{2} - \cos x + \cos(x + e^y - 1)$; 4) $u = (y - 3x)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$;
5) $u = -\frac{3}{2}\sin\frac{y+5x}{6} + \frac{5}{2}\sin\frac{y+x}{2}$; 6) $u = \frac{y}{3x} + \frac{2}{3}x^2y$; 7) $u(x,y) = 2e^x - \frac{4}{y+e^{-x}}$;
8) $u(x,y) = 2x$.

О3. 1) $u = \cos(x - t)$; 2) $u = x^2 + xt + 4t^2 + \frac{1}{6}xt^3$; 3) $u = xt + \sin(x + t) - (1 - \mathrm{ch}t)e^x$; 4) $u = \frac{x\sin x\cos t - t\cos x\sin t}{x^2-t^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{1+(x+t)^2}{1+(x-t)^2}$; 5) $u =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{x+t}{1+(x+t)^2}+\frac{x-t}{1+(x-t)^2}\right)+\sin x\sin t.$

О4. 1) $u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{a}\sin x\sin at, & at<x<+\infty,\\ \frac{1}{a}(1-\cos x\cos at), & 0\le x\le at;\end{cases}$

2) $u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{(x+at)^2}{1+(x+at)^2}+\frac{(x-at)^2}{1+(x-at)^2}\right) & \text{при } x>at,\\ \frac{1}{2}\left(\frac{(x+at)^2}{1+(x+at)^2}-\frac{(x-at)^2}{1+(x-at)^2}\right) & \text{при } 0\le x\le at;\end{cases}$

3) $u(x,t)=e^{-(x^2+4t^2)}\mathrm{ch}4xt+\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\cos x\cos 2t), 0\le x<2t,\\ \frac{1}{2}\sin x\sin 2t, \quad x\ge 2t;\end{cases}$

4) $u(x,t)=\begin{cases}x, & x\ge 2t,\\ 2\sin(\frac{x}{2}-t)+2t, & x<2t.\end{cases}$

О5. 1) $u=x^2+xt+t^2$; 2) $u=4t^4+4t^2x^2+\frac{1}{6}x^4+\sin x\sin 2t$; 3) $u=1+xt+t^2e^{-2x}$.

О6. 1) $u(x,y)=\int\limits_0^x e^{-y^2z^2/2}dz$; 2) $u(x,y)=x^2+(y+e^x-1)^2$; 3) $u(x,y)=x$; 4) $u(x,y)=y\cos\frac{\pi x}{2y}$; 5) $u(x,y)=\frac{(x+y)^2}{2}$. Рівняння подати у вигляді $(u_y-\frac{1}{x-y}u)_x+\frac{1}{x-y}(u_y-\frac{1}{x-y}u)=1$ і зробити заміну $v:=u_y-\frac{1}{x-y}u$, тоді загальний розв'язок $u(x,y)=\frac{f(x)+g(y)}{x-y}-\frac{(x-y)^2}{6}$.

С1. 1) $u=e^{-x}(\psi(y)+\int\limits_0^x\varphi(\xi)e^{\xi-\xi^2y^2}d\xi)$; 2) $u=e^{-xy}(yf(x)+f'(x)+\int\limits_0^y(y-\eta)g(\eta)e^{-x\eta}d\eta)$. Позначивши $u_y+xu=:v$, одержати рівняння $u=v_x+2yv$, $(v_y+xv)_x+2y(v_y+xv)=0$; 3) $u=(1+y)(1-e^{-x})-xy+e^{-x}(\varphi(y)+\int\limits_0^x e^{\xi(1-y)}\psi(\xi)d\xi)$. Користуючись позначенням $u_x+u=:e^{-xy}v$, перетворити вихідне рівняння до вигляду $v_y=-x^2ye^{xy}$, звідки знайти v. Далі, підставляючи знайдений вираз для v у рівність $u_x+u=e^{-xy}v$, одержати рівняння $u_x+u=1-xy+e^{-xy}\psi(x)$, розв'язуючи яке, отримати відповідь; 4) $u=f(y-x)+e^{\frac{1}{2}(y-x)}g(y-2x)$; 5) $u=f(x+3y)+g(3x+y)e^{\frac{7x+y}{16}}$; 6) $u=e^{\frac{1}{2}(x+y)}((2x+y)e^{4x+y}+f(2x+y)+g(4x+y))$.

С2. Треба розв'язати задачу

$$u_{tt}=a^2u_{xx}, x>0, t>0,$$
$$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ x\ge 0,$$
$$u(0,t)=A\sin\omega t,\ t\ge 0.$$

С3. $u(x,t)=\begin{cases}0, & t\le\frac{x}{a},\\ -a\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}\nu(\tau)d\tau, & t>\frac{x}{a}.\end{cases}$

С4. $u(x,\frac{l}{2a})=0$, $u(x,\frac{l}{a})=-\frac{4h}{l^2}(x-l)x$, $0\le x\le l$.

С5. 1) $u=xyt(1+t^2)+x^2-y^2$; 2) $u=x^2+t^2+t\sin y$; 3) $u=x^2+y^2-2z^2+t+t^2xyz$; 4) $u=y^2+tz^2+8t^2+\frac{8}{3}t^3+\frac{1}{12}t^4x^2+\frac{2}{45}t^6$.

С6. Розкласти u на прості дроби,тоді
$u(x,t)=\frac{1}{2(x-t)^2}+\frac{1}{2(x+t)^2}=f(x-t)+g(x+t)$.

С7. Оскільки $u(x,t)=f(x-t)+g(x+t)$, то
$v(x,t)=f\left(\frac{x}{x^2-t^2}-\frac{t}{x^2-t^2}\right)+g\left(\frac{x}{x^2-t^2}+\frac{t}{x^2-t^2}\right)=f\left(\frac{1}{x+t}\right)+g\left(\frac{1}{x-t}\right)=$
$=g_1(x+t)+f_1(x-t)$.

С8. 1) $u=-x^2-\frac{13}{3}(y-\cos x)^2-\frac{2}{3}(y-\cos x)$; 2) $u=\frac{3}{4}\sqrt[4]{x^7y}(\sqrt[3]{y}-\frac{1}{y})$; 3) $u=2e^{-\frac{1}{4}(2x-y+\cos x)}\cos x\sin\frac{1}{2}(y-\cos x)$. За допомогою заміни $\xi=2x-y+\cos x$, $\eta=2x+y-\cos x$ рівняння звести до канонічного вигляду $4\tilde{u}_{\xi\eta}+\tilde{u}_\eta=0$. Загальний розв'язок цього рівняння $\tilde{u}_{\xi\eta}=f(\xi)+e^{-\xi/4}g(\eta)$. Далі повернутися до змінних x і y та, задовольнивши початкові умови, знайти вигляд функцій f і g.
4)$u=3x^2-\frac{5}{3}y^2$; 5) $u(x,y)=1+xy^2+\frac{x^2}{2}(x-3y)$.

Д1. 1) $u=\sqrt{\frac{x}{y}}f(xy)+g(\frac{y}{x})$; 2) $u=f(x-y)+g(3x+y)$; 3) $u=e^{x+y}+(f(x)+g(y))e^{3x+2y}$; 4) $u=f(y+2x+\sin x)+e^{-(y+2x+\sin x)/4}g(y-2x+\sin x)$; 5) $u=yf(x)+f'(x)+\int\limits_0^y(y-\eta)e^{-x\eta}g(\eta)d\eta$. Користуючись позначенням $v:=u_y$, перетворити вихідне рівняння до вигляду $v_{xy}+yv_y=0$; 6) $u=f(x)e^{-y^2/2}+g(y)e^{-(x^2+y^2)/2}$; 7) $u=f(x+y)+e^{-(x+y)/6}g(5x-y)$.

Д2. 1) $u=\sin y-1+e^{x-y}$; 2) $u=xy+\frac{3}{2}\sin\frac{2y}{3}\cos(x+\frac{y}{3})$;
3) $u=\frac{x^2}{y}$; 4) $u=2x+y-x^2$; 5) $u=e^x\mathrm{sh}\left(\frac{y-\cos x}{2}\right)+\sin x\cos\left(\frac{y-\cos x}{2}\right)$;
6) $u=1-\sin(y-x+\cos x)+e^{y+\cos x}\sin(x+y+\cos x)$;
7) $u=\frac{1}{2}x^2(e^y-1)+\sin x+\frac{x^3-(x-e^y-1)^3}{6}+\mathrm{arctg}(x+e^y-1)-\mathrm{arctg}x$;
8) $u(x,y)=3x+2x^2(y^2-\frac{1}{y})$.

Д3. 1) $u=x^2+xt+t^2$; 2) $u=\sin x$; 3) $u=1+t+\frac{1}{9}(1-\cos 3t)\sin x$; 4) $u=\frac{at}{b}-\frac{a}{b^2}\sin bt+\cos(x-t)$; 5) $u=x(t-\sin t)+\sin(x+t)$; 6) $u=\frac{1}{2}t^2(x^3-3xy^2)+e^x coxy+te^y\sin x$;7) $u=2x^2-y^2+(2x^2+y^2)t+2t^2+2t^3$; 8) $u=e^{x+y}\cos(z\sqrt{2})+te^{3y+4z}\sin 5x+t^3e^{x\sqrt{2}}\sin y\cos z$.

Д4. 1) $u=\frac{1}{4a}\ln\frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2}$; 2) $u=\frac{1}{4a}\ln\frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2}+$

$$+\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{(x+at)^2}{1+(x+at)^2}+\frac{(x-at)^2}{1+(x-at)^2}\right) & \text{при } x>at,\\ \frac{1}{2}\left(\frac{(x+at)^2}{1+(x+at)^2}-\frac{(x-at)^2}{1+(x-at)^2}\right) & \text{при } 0\le x\le at;\end{cases}$$

3) $u(x,t)=\begin{cases} 0, & x\ge t,\\ -\sin\pi(x-t), & x<t; \end{cases}$

4) $u(x,t)=\begin{cases} 0, & x\ge t,\\ \frac{1}{\pi}(-\cos\pi(x-t)+1), & x<t. \end{cases}$

Д5. 1) $u=x+t+t^2+\cos x\cos t$; 2) $u=x^2+t^2$; 3) $u=x^2-2t^2$;

4) $u(x,t)=\begin{cases} At, & 0<at\le x,\\ \frac{A(t-hx)}{1-ah}, & x<at<+\infty; \end{cases}$

5) $u(x,t)=\varphi(t-x/a)+\psi(t+x/a)$, де

$-\varphi(-z)=\psi(z)=\begin{cases} \frac{1}{2}\sin\frac{\pi az}{l}, & 0\le z\le l/a,\\ 0, & l/a<z<+\infty, \end{cases}$

$\varphi(z)=\begin{cases} \frac{1}{\pi^2+h^2l^2}\left(\frac{\pi^2-h^2l^2}{2}\sin\frac{\pi az}{l}+\pi hl\left(\cos\frac{\pi az}{l}-e^{-ahz}\right)\right), & 0\le z\le l/a,\\ -\frac{1}{\pi^2+h^2l^2}\left(1+e^{hl}\right)e^{-ahz}, & l/a<z<+\infty. \end{cases}$

Д6. 1) $u=y^2+\frac{1}{2}x^2(1+e^{-y})$; 2) $u=(1+\frac{x}{2}-\frac{y}{2})e^{\frac{1}{2}(x-y)}$;
3) $u=\sqrt{xy}+\frac{1}{2}\ln\frac{x}{y}$; 4) $u=y$; 5) $u=(2y+x)e^{-(y-x)/3}+1$.

Тема 4. Метод Фур'є відокремлення змінних. Розв'язування однорідних мішаних задач для гіперболічних рівнянь

У попередній темі ми розв'язували рівняння гіперболічного типу в необмежених областях зміни просторових змінних при $t > 0$ (наприклад, коливання нескінченної струни розглядалися при $-\infty < x < +\infty$ і $t > 0$). Уся сукупність розв'язків таких рівнянь визначається з точністю до двох довільних функцій. Для виділення певного розв'язку ми задавали дві умови (умови Коші): значення шуканої функції і її похідної за t при $t = 0$. Якщо ж нас цікавить розв'язок рівняння при $t > 0$ в обмеженій області зміни просторових змінних, наприклад, коливання струни, що має скінченну довжину, то в доповнення до початкових умов треба ще задавати поведінку шуканої функції на межі області зміни просторових змінних. Задачу про розв'язування диференціального рівняння з додатковими початковими і крайовими умовами називають **мішаною** або **початково-крайовою задачею**. Найчастіше розв'язування мішаних задач для рівнянь математичної фізики (не обов'язково гіперболічних) проводиться **методом Фур'є відокремлення змінних** або коротше **методом Фур'є**.

Цей метод застосовний для однорідних рівнянь з однорідними крайовими умовами. Опишемо загальну схему методу Фур'є для рівняння

$$A(y)u_{yy}(x,y) + B(y)u_y(x,y) + C(y)u(x,y) =$$

$$= \frac{1}{\rho(x)}((p(x)u_x(x,y))_x - q(x)u(x,y)), \qquad (1)$$

де A, B, C – неперервні функції на $[0, y_0]$, а ρ, p, p', q – неперервні функції на $[0, l]$, причому $\rho > 0$, $p > 0$, $q \geq 0$. За таких припущень стосовно ρ і p тип рівняння (1) визначається знаком A, а саме, якщо при $y \in [0, y_0]$: $A(y) > 0$, то тип *гіперболічний*, $A(y) = 0$ – *параболічний* і $A(y) < 0$ – *еліптичний*. У гіперболічному й параболічному випадках змінна y є часовою змінною, область зміни якої може бути необмеженою, тобто $y_0 = +\infty$. Область зміни x у всіх випадках є скінченним відрізком $[0, l]$.

Основні однорідні рівняння математичної фізики є частинними випадками рівняння (1).

Нехай $Q_{y_0} := (0, l) \times (0, y_0)$. Розглянемо задачу про знаходження функції $u(x, y)$, $(x, y) \in \overline{Q_{y_0}}$, яка є розв'язком рівняння (1) у Q_{y_0}, задовольняє однорідні крайові умови за змінною x

$$\alpha u_x(0, y) + \beta u(0, y) = 0, \quad \gamma u_x(l, y) + \delta u(l, y) = 0, \quad 0 \le y \le y_0, \tag{2}$$

і неоднорідні умови за змінною y:

1) $A > 0$ (гіперболічний випадок)

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l; \tag{3}$$

2) $A = 0$ (параболічний випадок)

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l; \tag{4}$$

3) $A < 0$ (еліптичний випадок)

$$\begin{gathered} \alpha_1 u_y(x, 0) + \beta_1 u(x, 0) = \varphi(x), \\ \gamma_1 u_y(x, y_0) + \delta_1 u(x, y_0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \end{gathered} \tag{5}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ – сталі, які задовольняють умови $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, $\gamma_1^2 + \delta_1^2 \neq 0$.

Задача (1), (2), (3) є мішаною задачею для гіперболічного рівняння; задача (1), (2), (4) – мішаною задачею для параболічного рівняння; а задача (1), (2), (5) – крайовою задачею для еліптичного рівняння.

Шукатимемо ненульові розв'язки рівняння (1), які задовольняють умови (2), у вигляді добутку функцій

$$u(x, y) = X(x) Y(y), \quad (x, y) \in Q_{y_0}. \tag{6}$$

Підстановка (6) у рівняння (1) дає

$$A(y) X(x) Y''(y) + B(y) X(x) Y'(y) + C(y) X(x) Y(y) =$$

$$= \frac{1}{\rho(x)}((p(x)X'(x))'Y(y) - q(x)X(x)Y(y)).$$

Поділивши цю рівність на $X(x)Y(y)$, дістанемо

$$\frac{A(y)Y''(y) + B(y)Y'(y) + C(y)Y(y)}{Y(y)} = \frac{(p(x)X'(x))' - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)}.$$

Ліва частина цієї тотожності не залежить від x, а права – від y, отже, рівність можлива тільки у випадку, коли її ліва й права частини дорівнюють сталій величині. Якщо позначити цю сталу через $-\lambda$, то одержимо два звичайні диференціальні рівняння

$$A(y)Y''(y) + B(y)Y'(y) + (C(y) + \lambda)Y(y) = 0, \; y \in (0, y_0); \qquad (7)$$

$$(p(x)X'(x))' + (\lambda\rho(x) - q(x))X(x) = 0, \; x \in (0, l). \qquad (8)$$

Розв'язки (6) повинні задовольняти крайові умови (2). При підстановці (6) у (2) дістанемо умови, які повинна задовольняти функція X,

$$\alpha X'(0) + \beta X(0) = 0, \quad \gamma X'(l) + \delta X(l) = 0. \qquad (9)$$

Задача (8), (9) називається **задачею Штурма–Ліувілля**. Вона має нетривіальні розв'язки не при всіх значеннях λ. Ті значення λ, при яких вона має нетривіальні розв'язки, називаються **власними числами (значеннями)**, а відповідні їм нетривіальні розв'язки X – **власними функціями** задачі Штурма–Ліувілля.

Власні числа і власні функції задачі Штурма–Ліувілля (8), (9) мають такі властивості:

1) *існує зліченна множина власних чисел* $\lambda_1, ..., \lambda_k, ...$ $(\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_k \leq ...)$ *і відповідних їм власних функцій* $X_1(x)$, ..., $X_k(x)$, ..., $x \in (0, l)$;

2) *усі власні числа дійсні і невід'ємні; для першої й третьої крайових задач власні числа додатні, для другої крайової задачі з* $q = 0$ *власним числом є також* $\lambda = 0$;

3) *власні функції* X_k *і* X_m, *які відповідають різним власним числам* λ_k *і* λ_m, *ортогональні між собою з вагою* ρ *на відрізку* $[0,l]$, тобто

$$\int\limits_0^l \rho(x)X_k(x)X_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq m, \\ ||X_m||^2 \neq 0 & \text{при } k = m; \end{cases}$$

4) **(теорема Стеклова)** *всяка функція* f, *яка є неперервною на сегменті* $[0,l]$ *разом зі своїми похідними першого і другого порядків та задовольняє крайові умови (9), розкладається в рівномірно збіжний ряд Фур'є за системою власних функцій* $X_k, k \in \mathbb{N}$, *задачі (8), (9)*:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x), \quad x \in [0,l]. \qquad (10)$$

Коефіцієнти a_k *визначаються за формулою*

$$a_k = \frac{1}{||X_k||^2} \int\limits_0^l \rho(x)X_k(x)f(x)dx, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (11)$$

Зауваження. Розклад f у ряд Фур'є (10) можливий і тоді, коли $f \in L_{2,\rho}((0,l))$ $\quad (\int\limits_0^l \rho(x)|f(x)|^2dx < +\infty)$. При цьому ряд (10) з коефіцієнтами (11) збігається в середньому до f на $(0,l)$, тобто

$$||f - \sum_{k=1}^{n} a_k X_k||_{L_{2,\rho}} := \Big(\int\limits_0^l \rho(x)|f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k X_k(x)|^2 dx \Big)^{1/2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Якщо знайдено власні числа і власні функції задачі (8), (9), то, підставивши $\lambda = \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$, у рівняння (7), одержимо рівняння

$$A(y)Y_k''(y) + B(y)Y_k'(y) + (C(y) + \lambda_k)Y_k(y) = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (12)$$

Якщо $A \neq 0$, тобто маємо гіперболічний або еліптичний випадки, то загальний розв'язок рівняння (12) має вигляд

$$Y_k(y) = A_k Y_{1k}(y) + B_k Y_{2k}(y),\ y \in [0, y_0],\ k \in \mathbb{N},$$

де Y_{1k} і Y_{2k} – лінійно незалежні розв'язки цього рівняння, а A_k і B_k – довільні сталі.

У параболічному випадку, коли $A = 0$ і $B \neq 0$, загальний розв'язок визначається формулою

$$Y_k(y) = A_k Y_{1k}(y) := A_k \exp\left\{ -\int\limits_0^y \frac{C(z) + \lambda_k}{B(z)} dz \right\},\ y \in [0, y_0],\ k \in \mathbb{N}.$$

Знайдені X_k і Y_k підставляємо в (6) і одержуємо розв'язки $u_k(x, y)$, $(x, y) \in \overline{Q_{y_0}}$, $k \in \mathbb{N}$, рівняння (1), які задовольняють умови (2). При цьому

$$u_k(x, y) = \begin{cases} (A_k Y_{1k}(y) + B_k Y_{2k}(y)) X_k(x), & \text{якщо } A \neq 0, \\ A_k Y_{1k}(y) X_k(x), & \text{якщо } A = 0,\ B \neq 0. \end{cases}$$

За допомогою розв'язків u_k, $k \in \mathbb{N}$, будуємо розв'язки поставлених задач для рівняння (1). Для цього розглянемо ряд

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y), \quad (x, y) \in \overline{Q_{y_0}}, \tag{13}$$

який у випадку, коли $A \neq 0$, має вигляд

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k Y_{1k}(y) + B_k Y_{2k}(y)) X_k(x), \quad (x, y) \in \overline{Q_{y_0}}, \tag{14}$$

а якщо $A = 0$, $B \neq 0$, то вигляд

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k Y_{1k}(y) X_k(x), \quad (x, y) \in \overline{Q_{y_0}}. \tag{15}$$

Якщо ряд (13) збігається рівномірно в $\overline{Q_{y_0}}$ разом з рядами, які одержуються з нього почленним диференціюванням двічі за x і y, то його сума є розв'язком рівняння (1) і задовольняє крайові умови (2), бо таку властивість мають члени ряду. Щоб знайти коефіцієнти A_k і B_k із (14) і (15), треба задовольнити функцією u, яка визначається рівністю (13), умови (3) – (5) за змінною y. У залежності від типу рівняння (1) матимемо різні ситуації.

Гіперболічний тип ($A > 0$)**.** Підставивши (14) у (3), дістанемо

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k Y_{1k}(0) + B_k Y_{2k}(0)) X_k(x), \\ \psi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k Y'_{1k}(0) + B_k Y'_{2k}(0)) X_k(x), \quad x \in [0, l]. \end{aligned} \tag{16}$$

Якщо функції φ і ψ можна розкласти у ряди Фур'є за системою власних функцій $\{X_k, k \in \mathbb{N}\}$, то

$$\begin{cases} A_k Y_{1k}(0) + B_k Y_{2k}(0) = \frac{1}{||X_k||^2} \int\limits_0^l \rho(x)\varphi(x) X_k(x) dx, \\ A_k Y'_{1k}(0) + B_k Y'_{2k}(0) = \frac{1}{||X_k||^2} \int\limits_0^l \rho(x)\psi(x) X_k(x) dx. \end{cases} \tag{17}$$

Знайшовши A_k і B_k з цієї системи, підставимо їх у ряд (14). Як результат дістанемо розв'язок задачі (1) – (3).

Параболічний тип ($A = 0$, $B \neq 0$)**.** Для знаходження коефіцієнтів A_k необхідно задовольнити рядом (15) початкову умову (4):

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k Y_{1k}(0) X_k(x), \quad x \in [0, l].$$

Звідси випливає, що

$$A_k = \frac{1}{Y_{1k}(0)||X_k||^2} \int\limits_0^l \rho(x)\varphi(x) X_k(x) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Підставивши ці коефіцієнти у (15), одержимо розв'язок задачі (1), (2), (4).

Еліптичний тип ($A < 0$)**.** Розв'язок рівняння (1), який задовольняє крайові умови (2), як і в гіперболічному випадку, знаходиться у вигляді ряду (14). Задовольнивши цим рядом крайові умови (5) за змінною y, дістанемо систему рівнянь, аналогічну до (17), з якої знайдемо коефіцієнти A_k і B_k. Підстановка їх у (14) дає розв'язок задачі (1), (2), (5).

Приклад 1. Вивчити вільні коливання тонкого однорідного стержня довжиною π, лівий кінець якого закріплений, а правий вільний, якщо початкове відхилення від положення рівноваги дорівнює $\frac{\pi}{32}x(2\pi - x)$, $0 \le x \le \pi$, а початкова швидкість нульова.

$\triangleleft$ Оскільки коливання вільні, а стержень однорідний, то рівняння коливань

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0. \tag{18}$$

За умовою задачі лівий кінець стержня закріплений, тому $u(0,t) = 0$. Те, що правий кінець вільний, означає, що $u_x(\pi,t) = 0$. Отже, крайові умови мають вигляд

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0. \tag{19}$$

Початкові умови такі:

$$u(x,0) = \frac{\pi}{32}x(2\pi - x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{20}$$

Будемо шукати ненульові частинні розв'язки рівняння (18), які задовольняють крайові умови (19), у вигляді добутку функцій

$$u(x,t) = T(t)X(x), \tag{21}$$

кожна з яких залежить від однієї змінної. Після підстановки (21) у (18) і відокремлення змінних дістаємо два звичайні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x), \qquad \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{22}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{23}$$

Тут і надалі замість $-\lambda$ будемо писати $-\lambda^2$, щоб підкреслити недодатність цього числа.

Якщо функція u з (21) задовольняє умови (19), то

$$X(0) = 0, \qquad X'(\pi) = 0. \tag{24}$$

Отже, задачею Штурма–Ліувілля є задача (23), (24). Знайдемо її власні числа і власні функції. Загальний розв'язок рівняння (23)

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad 0 \le x \le \pi.$$

Задовольняючи цією функцією умови (24), одержуємо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cos \lambda 0 + C_2 \sin \lambda 0, \\ 0 = -C_1 \lambda \sin \lambda \pi + C_2 \lambda \cos \lambda \pi, \end{cases}$$

яка містить невідомі величини C_1, C_2 і λ. Додатковою тут є умова, що $u \not\equiv 0$, а, отже, і $X \not\equiv 0$. Тому при $C_1 = 0$, що випливає з першого рівняння, дістанемо з другого рівняння дві умови $C_2 \ne 0$ і $\cos \lambda \pi = 0$. З останньої умови випливає, що $\lambda \pi = \left(\frac{2n+1}{2}\right) \pi$ або $\lambda_n = \frac{2n+1}{2}$, де $n \in \mathbb{Z}_+$. Це і є власні числа задачі (23), (24), а власними функціями, які їм відповідають, є

$$X_n(x) = \sin \frac{2n+1}{2} x, \quad 0 \le x \le \pi, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{25}$$

Тут взято $C_2 = 1$ тому, що власні функції визначаються з точністю до довільної сталої C_2.

Для знаходження T з (22), враховуючи те, що $\lambda = \lambda_n$, дістанемо рівняння

$$T_n''(t) + a^2 \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 T_n(t) = 0, \quad t \ge 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Звідси одержуємо, що

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{2n+1}{2} at + B_n \sin \frac{2n+1}{2} at, \quad t \ge 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{26}$$

Отже, кожному власному числу λ_n відповідає розв'язок задачі (18), (19), який є добутком функцій (25) і (26), тобто

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos \frac{2n+1}{2} at + B_n \sin \frac{2n+1}{2} at\right) \sin \frac{2n+1}{2} x,$$

$$0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0. \tag{27}$$

Оскільки функції (27) ні при якому виборі сталих A_n і B_n не задовольняють умови (20), то розв'язок задачі (18) – (20) шукатимемо у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2n+1}{2} at + B_n \sin \frac{2n+1}{2} at \right) \sin \frac{2n+1}{2} x,$$

$$0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0. \tag{28}$$

Задовольняючи рядом (28) умови (20), дістаємо рівності

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{2n+1}{2} x = \frac{\pi}{32} x(2\pi - x), \quad 0 \le x \le \pi,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n a \frac{2n+1}{2} \sin \frac{2n+1}{2} x = 0, \quad 0 \le x \le \pi,$$

з яких знаходимо значення коефіцієнтів A_n і B_n:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\pi}{32} x(2\pi - x) \sin \frac{2n+1}{2} x dx =$$

$$= \frac{1}{8(2n+1)} \left(x(2\pi - x) \cos \frac{2n+1}{2} x \Big|_{\pi}^{0} + 2 \int\limits_0^{\pi} (\pi - x) \cos \frac{2n+1}{2} x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)^2} \left((\pi - x) \sin \frac{2n+1}{2} x \Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \sin \frac{2n+1}{2} x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{2n+1}{2} x \Big|_{\pi}^{0} = \frac{1}{(2n+1)^3}; \quad B_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, розв'язок задачі (18) – (20) має вигляд

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{2n+1}{2} at \sin \frac{2n+1}{2} x, \ 0 \le x \le \pi, \ t \ge 0.$$

Одержаний ряд і його похідні збігаються рівномірно для $0 \le x \le \pi$, $t \ge 0$, що можна довести, скориставшись мажорантною ознакою Вейєрштрасса й ознакою Діріхле. $\triangleright$

Приклад 2. Знайти розв'язок рівняння

$$u_{tt}(x,t) + 2h_1 u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{29}$$

(h_1 – мале дійсне число), який задовольняє крайові

$$u_x(0,t) = 0, u_x(l,t) + h_2 u(l,t) = 0, \quad h_2 > 0, \quad t \ge 0, \tag{30}$$

і початкові умови

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{31}$$

$\triangleleft$ Підставивши $u(x,t) = X(x)T(t)$ у рівняння (29), дістанемо, що $X(x)T''(t) + 2h_1 X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$, а після відокремлення змінних одержимо рівняння

$$T''(t) + 2h_1 T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{32}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 \le x \le l. \tag{33}$$

Якщо задовольнити крайові умови (30), то матимемо

$$X'(0) = 0, \quad X'(l) + h_2 X(l) = 0. \tag{34}$$

Для знаходження X маємо задачу Штурма–Ліувілля (33), (34). Загальний розв'язок рівняння (33) $X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x$. Тоді $X'(x) = -C_1\lambda \sin\lambda x + C_2 \lambda \cos\lambda x$ і тому, задовольнивши умови (34), дістанемо

$$\begin{cases} C_2\lambda = 0, \\ C_1(-\lambda\sin\lambda l + h_2\cos\lambda l) + C_2(\lambda\cos\lambda l + h_2\sin\lambda l) = 0, \ \lambda \ne 0. \end{cases}$$

Оскільки $\lambda \ne 0$, то з першого рівняння цієї системи дістаємо $C_2 = 0$, а тоді з другого рівняння одержимо рівність $C_1(-\lambda\sin\lambda l + h_2\cos\lambda l) = 0$. Очевидно, що $C_1 \ne 0$, бо в протилежному випадку $X \equiv 0$, а тому $-\lambda\sin\lambda l + h_2\cos\lambda l = 0$, тобто $\mathrm{tg}\mu = \frac{h_2 l}{\mu}$, де $\mu = \lambda l$. Як легко бачити, розглядаючи в площині $O\mu z$ перетин двох ліній $z = \mathrm{tg}\mu, z = \frac{h_2 l}{\mu}$, це рівняння має зліченну множину пар коренів $\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, ...$, які однакові за абсолютною величиною і протилежні за знаком. Розглядатимемо лише додатні $\mu_1, \mu_2, \ldots$. Тоді з рівності $\mu_k = \lambda_k l$, $k \in \mathbb{N}$, знаходимо власні числа задачі (33), (34).

У випадку $\lambda = 0$ загальний розв'язок рівняння (33) має вигляд $X(x) = C_1 x + C_2$. Задовольняючи умови (34), дістаємо систему

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 + h_2(C_1 l + C_2) = 0, \end{cases}$$

звідки випливає, що $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, а це означає, що $X \equiv 0$.

Отже, власні числа мають вигляд $\lambda_n = \frac{\mu_n}{l}$ і їм відповідають власні функції $X_n(x) = \cos \frac{\mu_n}{l} x$, $0 \le x \le l$, $n \in \mathbb{N}$.

Розглядаємо тепер рівняння (32) з $\lambda = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$. Це лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, загальний розв'язок якого

$$T_n(t) = e^{-h_1 t}(A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t), q_n = \sqrt{\mu_n^2 a^2 l^{-2} - h_1^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $\mu_n^2 a^2 l^{-2} - h_1^2 \ge 0$. Тому розв'язком задачі (29), (30) є

$$u_n(x,t) = e^{-h_1 t}(A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t) \cos \frac{\mu_n}{l} x, \quad n \in \mathbb{N},$$

а розв'язок задачі (29) – (31) шукаємо у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-h_1 t}(A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t) \cos \frac{\mu_n}{l} x,$$

$$0 \le x \le l, \quad t \ge 0. \tag{35}$$

Задовольнивши початкові умови (31), дістанемо рівності

$$\begin{gathered} \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \tfrac{\mu_n}{l} x, \\ \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-h_1 A_n + B_n q_n) \cos \tfrac{\mu_n}{l} x, \quad 0 \le x \le l. \end{gathered} \tag{36}$$

Система функцій $\{\cos \frac{\mu_n}{l} x, n \in \mathbb{N}\}$ ортогональна на $[0, l]$, тому, помноживши рівності (36) на $\cos \frac{\mu_m}{l} x$ та зінтегрувавши в межах від 0 до l, одержимо співвідношення

$$\int_0^l \varphi(x) \cos \frac{\mu_m}{l} x dx = A_m \int_0^l \cos^2 \frac{\mu_m}{l} x dx,$$

$$\int_0^l \psi(x)\cos\frac{\mu_m}{l}xdx = (-h_1A_m + B_mq_m)\int_0^l \cos^2\frac{\mu_m}{l}xdx,$$

з яких випливає, що

$$A_m = \frac{\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{\mu_m}{l}xdx}{\int_0^l \cos^2\frac{\mu_m}{l}xdx}, \quad B_m = \frac{\int_0^l (\psi(x) + h_1\varphi(x))\cos\frac{\mu_m}{l}xdx}{q_m\int_0^l \cos^2\frac{\mu_m}{l}xdx}.$$

Оскільки

$$\int_0^l \cos^2\frac{\mu_m}{l}xdx = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right),$$

то скориставшись рівністю $\mathrm{tg}\mu_m = \frac{h_2l}{\mu_m}$ і тим, що $\sin 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$, одержимо, що

$$\frac{1}{C_m} := \int_0^l \cos^2\frac{\mu_m}{l}xdx = \frac{l}{2}\frac{\mu_m^2 + h_2l + (h_2l)^2}{\mu_m^2 + (h_2l)^2}.$$

Отже, коефіцієнти A_m і B_m визначаються формулами

$$A_m = C_m\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{\mu_m}{l}xdx,$$

$$B_m = \frac{C_m}{q_m}\int_0^l [\psi(x) + h_1\varphi(x)]\cos\frac{\mu_m}{l}xdx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Підставивши ці значення коефіцієнтів у ряд (35), отримаємо шуканий розв'язок задачі (29) – (31), якщо функції φ і ψ задовольняють умови теореми Стеклова. $\triangleright$

Приклад 3. Розв'язати задачу

$$u_{tt}(x,t) = a^2u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{37}$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{38}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \tag{39}$$

$\triangleleft$ Шукатимемо ненульовий розв'язок задачі (37), (38) у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{40}$$

Підставивши (40) у рівняння (37) і відокремивши змінні, дістанемо такі два звичайні диференціальні рівняння:

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{41}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq l. \tag{42}$$

Якщо задовольнити функцією (40) умови (38), то одержимо, що

$$X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0. \tag{43}$$

Розв'яжемо задачу Штурма–Ліувілля (42), (43). Загальний розв'язок рівняння (42) $X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x$. Підставивши X у крайові умови (43), дістанемо

$$0 = C_2\lambda, \quad 0 = -C_1\lambda\sin\lambda l + C_2\lambda\cos\lambda l.$$

Якщо $\lambda \neq 0$, то $C_2 = 0$ і тоді $C_1 \neq 0$, бо в протилежному випадку $X \equiv 0$. Тому одержуємо, що $\sin\lambda l = 0$, тобто $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ і $X_n(x) = \cos\frac{n\pi}{l}x$, $0 \leq x \leq l$, $n \in \mathbb{N}$. У випадку, коли $\lambda = 0$, загальний розв'язок рівняння (42) має вигляд $X_0(x) = C_1 x + C_2$. Якщо задовольнити умови (43), то одержимо, що $C_1 = 0$. Тоді $C_2 \neq 0$, бо нас цікавлять ненульові розв'язки задачі Штурма–Ліувілля. Можна взяти $C_2 = 1$, а це означає, що $X_0(x) = 1$, $0 \leq x \leq l$.

Отже, ми маємо власні числа $\lambda_0 = 0$ і $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, $n \in \mathbb{N}$, яким відповідають власні функції $X_0(x) = 1$ і $X_n(x) = \cos\frac{n\pi}{l}x$, $n \in \mathbb{N}$, задачі (42), (43).

При $\lambda = \lambda_0 = 0$ рівняння (41) має розв'язок $T_0(t) = A_0 t + B_0$, а при $\lambda = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, розв'язком є функція $T_n(t) = A_n \cos\frac{an\pi}{l}t + B_n \sin\frac{an\pi}{l}t$, $n \in \mathbb{N}$.

Складемо ряд

$$u(x,t) = A_0 t + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n \cos\frac{an\pi}{l}t + B_n \sin\frac{an\pi}{l}t\Big)\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

$$0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \tag{44}$$

Задовольняючи початкові умови (39), одержуємо співвідношення для визначення A_0, A_n, B_0 і B_n:

$$\begin{cases} B_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x), \\ A_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \frac{an\pi}{l} \cos \frac{n\pi}{l} x = \psi(x), \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

Звідси

$$B_0 = \frac{1}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) dx, \qquad A_0 = \frac{1}{l} \int\limits_0^l \psi(x) dx,$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad B_n = \frac{2}{an\pi} \int\limits_0^l \psi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (44), дістанемо розв'язок задачі (37) – (39) за умови, що функції φ і ψ задовольняють умови теореми Стеклова. $\triangleright$

Зауваження. За допомогою методу Фур'є розв'язуються також мішані задачі для рівнянь гіперболічного, параболічного та еліптичного типів і у випадку, коли є декілька просторових змінних.

Приклад 4. В однорідної прямокутної мембрани $\{0 \le x \le s,\ 0 \le y \le p\}$ частина межі $\{x = 0,\ 0 \le y < p\}$ вільна, а інша частина закріплена жорстко. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, вивчити поперечні коливання мембрани, якщо початкові відхилення

$$u(x, y, 0) = A \cos \frac{\pi x}{2s} \sin \frac{\pi y}{p}, \quad 0 \le x \le s,\ 0 \le y \le p,$$

а початкові швидкості нульові.

$\triangleleft$ Математична модель задачі така:

$$u_{tt}(x, y, t) = a^2 (u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)),$$

$$0 < x < s,\ 0 < y < p,\ t > 0, \tag{45}$$

$$u_x(0, y, t) = 0, u(s, y, t) = 0, \quad 0 \le y \le p,\ t \ge 0, \tag{46}$$

$$u(x, 0, t) = 0, u(x, p, t) = 0, \quad 0 \le x \le s,\ t \ge 0, \tag{47}$$

$$\begin{gathered} u(x,y,0) = A\cos\tfrac{\pi x}{2s}\sin\tfrac{\pi y}{p}, \quad 0 \le x \le s,\ 0 \le y \le p, \\ u_t(x,y,0) = 0, \quad 0 \le x \le s,\ 0 \le y \le p. \end{gathered} \tag{48}$$

Шукатимемо нетривіальні розв'язки рівняння (45), які задовольняють крайові умови (46), (47), у вигляді $u(x,y,t) = T(t)V(x,y)$. Як і в попередніх прикладах, дістанемо рівняння для T

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \quad t > 0, \tag{49}$$

і мішану задачу для V

$$V_{xx}(x,y) + V_{yy}(x,y) + \lambda^2 V(x,y) = 0, \quad 0 < x < s,\ 0 < y < p, \tag{50}$$

$$V_x(0,y) = 0, \quad V(s,y) = 0, \quad 0 \le y \le p, \tag{51}$$

$$V(x,0) = 0, \quad V(x,p) = 0, \quad 0 \le x \le s. \tag{52}$$

Задачу (50) – (52), в свою чергу, розв'язуватимемо методом відокремлення змінних:

$$V(x,y) = X(x)Y(y),$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y) + \lambda^2 Y(y)}{Y(y)} = -\mu^2,$$

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X(s) = 0, \tag{53}$$

$$Y''(y) + k^2 Y(y) = 0, \quad k^2 = \lambda^2 - \mu^2, \quad Y(0) = 0,\ Y(p) = 0. \tag{54}$$

Власними числами задачі (53) є $\mu_m = \frac{(2m+1)\pi}{2s}$, власними функціями – $X_m(x) = \cos\frac{(2m+1)\pi x}{2s}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, а задачі (54) – відповідно $k_n = \frac{n\pi}{p}$ і $Y_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{p}$, $n \in \mathbb{N}$.

Тоді

$$V_{mn}(x,y) = \cos\frac{(2m+1)\pi x}{2s}\sin\frac{n\pi y}{p},$$

$$m \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le x \le s, \quad 0 \le y \le p,$$

є власними функціями задачі (50) – (52), що відповідають власним числам $\lambda_{mn}^2 = \mu_m^2 + k_n^2 = \frac{(2m+1)^2\pi^2}{4s^2} + \frac{n^2\pi^2}{p^2}$. При цьому окремі власні числа можуть бути кратними, тобто одному власному числу відповідатимуть декілька лінійно незалежних функцій V_{mn} (при різних m і n може бути одне і те саме значення λ_{mn}).

Підставивши $\lambda^2 = \lambda_{mn}^2$ у рівняння (49), одержимо рівняння

$$T''_{mn}(t) + \lambda_{mn}^2 a^2 T_{mn}(t) = 0,$$

загальним розв'язком якого є

$$T_{mn}(t) = A_{mn}\cos a\lambda_{mn}t + B_{mn}\sin a\lambda_{mn}t,$$

$$t \geq 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Скориставшись принципом суперпозиції, отримаємо, що ряд

$$u(x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{mn}\cos\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{4s^2}+\frac{n^2}{p^2}}a\pi t + \right.$$

$$\left. +B_{mn}\sin\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{4s^2}+\frac{n^2}{p^2}}a\pi t\right)\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2s}\sin\frac{n\pi y}{p},$$

$$t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq s, \quad 0 \leq y \leq p, \tag{55}$$

коли він збігається рівномірно разом зі своїми формальними похідними, тобто рядами, одержаними почленним диференціюванням, до другого порядку, задовольняє рівняння (45) і крайові умови (46), (47), бо таку властивість мають члени ряду.

Задовольняючи початкові умови (48), дістаємо

$$\begin{cases} A\cos\frac{\pi x}{2s}\sin\frac{\pi y}{p} = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_{mn}\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2s}\sin\frac{n\pi y}{p}, \\ 0 = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{4s^2}+\frac{n^2}{p^2}}a\pi\cos\frac{(2m+1)\pi x}{2s}\sin\frac{n\pi y}{p}, \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq s, \quad 0 \leq y \leq p.$$

Звідси випливає, що $A_{01} = A$, $A_{mn} = 0$, $m \neq 0$ і $n \neq 1$ одночасно, $B_{mn} = 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, оскільки V_{mn} лінійно незалежні.

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (55), одержимо розв'язок задачі (45) – (48)

$$u(x,y,t) = A\cos\sqrt{\frac{1}{4s^2}+\frac{1}{p^2}}a\pi t\cos\frac{\pi x}{2s}\sin\frac{\pi y}{p}, \ 0\leq x\leq s, \ 0\leq y\leq p, \ t\geq 0. \ \triangleright$$

Вправи

О1. У пропонованих задачах дати фізичне тлумачення умов задач, знайти розв'язки цих задач і дослідити на рівномірну збіжність одержані функціональні ряди:

1) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$
$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \sin \frac{2\pi}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l;$

2) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$
$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{h}{c}x, 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h(x-l)}{c-l}, c < x \leq l, \end{cases} \quad u_t(x,0) = 0, 0 \leq x \leq l;$$

3) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$
$u(x,0) = \sin \frac{5\pi}{2l} x, \quad u_t(x,0) = \sin \frac{\pi}{2l} x, \quad 0 \leq x \leq l;$

4) $u_{tt}(x,t) + 2u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + u(x,t),$
$0 < x < \pi, \quad t > 0,$
$u_x(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0,$
$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$

5) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$
$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 1, \quad 0 \leq x \leq l;$

6) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
$u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$
$u(x,0) = \cos \frac{\pi}{2l} x, \quad u_t(x,0) = \cos \frac{3\pi}{2l} x + \cos \frac{5\pi}{2l} x, \quad 0 \leq x \leq l;$

7) $u_{tt}(x,t) = 9u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 4, \quad t > 0,$
$u_x(0,t) = 0, \quad u(4,t) = 0, \quad t \geq 0,$
$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 16 - x^2, \quad 0 \leq x \leq 4;$

8) $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + 10u(x,t), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$
$u(0,t) = 0, \quad u_x(\frac{\pi}{2},t) = 0, \quad t \geq 0,$
$u(x,0) = \frac{1}{9}\sin x + \sin 3x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$

9) $$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = \sin\tfrac{5}{2l}x + \sin\tfrac{3\pi}{2l}x, \quad 0 \le x \le l;$$

10) $$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = h(x^4 - 2x^3 + x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1.$$

O2. Вивчити коливання струни довжиною l із закріпленими кінцями, якщо початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а початкове відхилення має форму параболи, віссю симетрії якої є пряма $x = \frac{l}{2}$, а вершиною – точка $(\frac{l}{2}, h)$.

O3. Знайти відхилення від положення рівноваги закріпленої на кінці $x = l$ однорідної горизонтальної струни, лівий кінець якої $x = 0$ переміщується так, що дотична до струни залишається горизонтальною, якщо в початковий момент часу струна мала форму $\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2l}$, $0 \le x \le l$, а початкова швидкість відсутня.

O4. Кінець $x = 0$ однорідного стержня закріплений жорстко, а до кінця $x = l$ прикладена поздовжня сила $P = \mathrm{const}$, під дією якої стержень перебуває у стані рівноваги. Знайти коливання стержня після того, як у початковий момент часу сила P перестає діяти, вважаючи, що початкові швидкості дорівнюють нулю.

O5. Розв'язати задачу:

1) $$u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t),$$
$$0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi, \ t > 0,$$
$$u(0,y,t) = 0, \ u(\pi,y,t) = 0, \ y \in [0,\pi], \ t \ge 0,$$
$$u(x,0,t) = 0, \ u(x,\pi,t) = 0, \ x \in [0,\pi], \ t \ge 0,$$
$$u(x,y,0) = 3\sin x \sin 2y, \ u_t(x,y,0) = 5\sin 3x \sin 4y, \ \{x,y\} \subset [0,\pi];$$

2) $$u_{tt}(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)),$$
$$0 < x < s, \ 0 < y < p, \ t > 0,$$
$$u(0,y,t) = 0, \ u_x(s,y,t) = 0, \ y \in [0,p], \ t \ge 0,$$
$$u(x,0,t) = 0, \ u_y(x,p,t) = 0, \ x \in [0,s], \ t \ge 0,$$
$$u(x,y,0) = Axy, \ u_t(x,y,0) = 0, \ x \in [0,s], \ y \in [0,p];$$

$$
\begin{gathered}
3) \quad u_{tt}(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)),\\
0 < x < p,\ 0 < y < p,\ t > 0,\\
u(0,y,t) = 0,\ u(p,y,t) = 0,\ y \in [0,p],\ t \ge 0,\\
u(x,0,t) = 0,\ u(x,p,t) = 0,\ x \in [0,p],\ t \ge 0,\\
u(x,y,0) = A\sin\tfrac{\pi x}{p}\sin\tfrac{\pi y}{p},\ u_t(x,y,0) = 0,\\
x \in [0,p],\ y \in [0,p].
\end{gathered}
$$

C1. Розв'язати задачу про коливання струни довжиною l із закріпленими кінцями, якщо в початковому положенні струна знаходиться в спокої, а початкова швидкість задається формулою:

а) $\psi(x) = v_0 = \text{const}, \quad x \in [0,l]$;

б) $\psi(x) = \begin{cases} v_0 \text{ при } x \in [\alpha,\beta], \\ 0 \text{ при } x \notin [\alpha,\beta], \end{cases}$ де $0 \le \alpha < \beta \le l$;

в) $\psi(x) = \begin{cases} A\cos\frac{\pi(x-x_0)}{2\alpha}, \text{ якщо } x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha], \\ 0, \text{ якщо } x \notin [x_0-\alpha, x_0+\alpha], \end{cases}$

де $0 \le x_0 - \alpha < x_0 + \alpha \le l$.

C2. Знайти закон вільних коливань струни, розміщеної на відрізку $[0,l]$, якщо в початковий момент струні була надана форма кривої $\varphi(x) = \frac{l}{100}\sin\frac{\pi x}{2l}$, $0 \le x \le l$, а потім струна була відпущена без початкової швидкості. Струна закріплена в лівому кінці, а правий може вільно переміщуватися так, що дотична в ньому весь час залишається горизонтальною.

C3. В однорідної прямокутної мембрани $\Pi := \{(x,y) | 0 \le x \le s, 0 \le y \le p\}$ частина межі $\{(x,y) | x = 0, 0 \le y < p\}$ вільна, а решта закріплена жорстко. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, знайти поперечні коливання мембрани, викликані початковим розподілом швидкостей $u_t(x,y,0) = A(s-x)\sin\frac{\pi y}{p}$, $(x,y) \in \Pi$.

C4. Розв'язати задачу:

$$
\begin{gathered}
1) \quad u_{tt}(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)),\\
0 < x < p,\ 0 < y < q,\ t > 0,\\
u(0,y,t) = 0,\ u(p,y,t) = 0,\ y \in [0,q],\ t \ge 0,\\
u(x,0,t) = 0,\ u(x,q,t) = 0,\ x \in [0,p],\ t \ge 0,\\
u(x,y,0) = Axy(p-x)(q-y),\ u_t(x,y,0) = 0,\\
x \in [0,p],\ y \in [0,q].
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
2) \quad u_{tt}(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)), \\
0 < x < p,\ 0 < y < q,\ t > 0, \\
u(0,y,t) = 0,\ u(p,y,t) = 0,\ y \in [0,q],\ t \geq 0, \\
u(x,0,t) = 0,\ u(x,q,t) = 0,\ x \in [0,p],\ t \geq 0, \\
u(x,y,0) = 0,\ u_t(x,y,0) = Axy(p-x)(q-y), \\
x \in [0,p],\ y \in [0,q].
\end{gathered}
$$

Домашнє завдання

Д1. Знайти закон коливання струни довжиною l, розміщеної на відрізку $[0,l]$, якщо в початковий момент часу $t=0$ струні надано форму кривої $\varphi(x) = \frac{x(l-x)}{8l}$, $x \in [0,l]$, а потім струна відпущена без початкової швидкості. Струна закріплена на кінцях. Зовнішні сили відсутні.

Д2. Знайти відхилення від положення рівноваги закріпленої на кінцях $x=0$ і $x=l$ однорідної струни, якщо в початковий момент: 1) струна мала форму $\frac{1}{8}\sin\frac{3\pi x}{l}$, $0 \leq x \leq l$, а початкові швидкості відсутні; 2) точки струни знаходились у положенні рівноваги і їй була надана початкова швидкість $\frac{1}{3}\sin\frac{5\pi x}{l}$, $0 \leq x \leq l$.

Д3. Знайти закон коливання струни довжиною l, якщо у початковий момент усім точкам струни надана швидкість, яка дорівнює $\frac{a}{10}$, де a – стала, яка фігурує в рівнянні струни. Початкове відхилення відсутнє. Кінці струни закріплені. Зовнішні сили відсутні.

Д4. Знайти відхилення від положення рівноваги, закріпленої на кінці $x=0$, однорідної горизонтальної струни, правий кінець якої при $x=l$ переміщується так, що дотична до струни є весь час горизонтальною. У початковий момент часу струна мала форму $\varphi(x) = \frac{1}{15}\sin\frac{11\pi x}{2l}\cos\frac{4\pi x}{2l}$, $x \in [0,l]$, а початкові швидкості нульові.

Д5. Розв'язати задачу:

$$
\begin{gathered}
1) \qquad u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\
u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0, \\
u(x,0) = Ax(\pi - x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi;
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
2) \quad u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\
u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \\
u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l;
\end{gathered}
$$

3) $$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$u(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0,\quad t\geq 0,$$
$$u(x,0)=x,\quad u_t(x,0)=\sin\tfrac{\pi}{2l}x+\sin\tfrac{3\pi}{2l}x,\quad 0\leq x\leq l;$$

4) $$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(l,t)+hu(l,t)=0,\quad h>0,\quad t\geq 0,$$
$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=1,\quad 0\leq x\leq l;$$

5) $$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0,\quad t\geq 0,$$
$$u(x,0)=x(l-x),\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\leq x\leq l;$$

6) $$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$u_x(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\geq 0,$$
$$u(x,0)=l^2-x^2,\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\leq x\leq l;$$

7) $$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<2,\quad t>0,$$
$$u_x(0,t)=0,\quad u(2,t)=0,\quad t\geq 0,$$
$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=4-x^2,\quad 0\leq x\leq 2;$$

8) $$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\geq 0,$$
$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{2h}{l}x \text{ при } 0\leq x\leq\frac{l}{2},\\ \frac{2h}{l}(l-x) \text{ при } \frac{l}{2}<x<l,\end{cases}\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\leq x\leq l;$$

9) $$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$u_x(0,t)-hu(0,t)=0,\quad h>0,\quad u(l,t)=0,\quad t\geq 0,$$
$$u(x,0)=1+hx-\tfrac{1+hl}{l^2}x^2,\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\leq x\leq l.$$

Д6. Закріпленій у точці $x=l$ однорідній горизонтальній струні, лівий кінець якої може переміщуватися з горизонтальною дотичною, надано початкову швидкість $\psi(x)=\frac{x(l-x)}{l^2}$, $x\in[0,l]$. Знайти закон її вільних коливань, якщо в початковий момент часу вона мала форму $\varphi(x)=\sin\frac{\pi x}{l}$, $x\in[0,l]$.

Д7. Однорідній квадратній мембрані зі стороною l, яка закріплена по контуру, надали форму $u(x,y,0)=\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}$, $\{x,y\}\subset[0,l]$. Знайти закон вільних коливань, якщо початкова швидкість точок мембрани дорівнює a/l, де a – стала з рівняння коливань.

Д8. Роз'язати мішану задачу:

$$1)\quad u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0<x<l,\quad 0<y<p,\quad t>0,$$
$$u_x(0,y,t)=0,\quad u(l,y,t)=0,\quad 0\le y\le p,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0,t)=0,\quad u(x,p,t)=0,\quad 0\le x\le l,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,y,0)=0,\ u_t(x,y,0)=A(l-x)\sin\tfrac{\pi}{p}y,\ 0\le x\le l,\ 0\le y\le p;$$

$$2)\quad u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\quad 0<x<p,\quad 0<y<p,\quad t>0,$$
$$u(0,y,t)=0,\quad u(p,y,t)=0,\quad 0\le y\le p,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0,t)=0,\quad u(x,p,t)=0,\quad 0\le x\le p,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,y,0)=0,\ u_t(x,y,0)=\tfrac{a}{50},\ 0\le x\le p,\ 0\le y\le p,$$

де a – стала з рівняння коливання мембрани.

Відповіді

О1. 1) $u(x,t)=\frac{l}{2\pi a}\sin\frac{2\pi a}{l}t\sin\frac{2\pi}{l}x;$

2) $u(x,t)=\frac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi c}{l}\cos\frac{an\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x;$

3) $u(x,t)=\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l}+\cos\frac{5a\pi t}{2l}\sin\frac{5\pi x}{2l};$

4) $u(x,t)=8e^{-t}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}((-1)^n-\frac{2}{\pi(2n+1)})\sin\frac{2n+1}{2}t\cos\frac{2n+1}{2}x;$

5) $u(x,t)=t+\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{l}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l};$

6) $u(x,t)=\cos\frac{a\pi t}{2l}\cos\frac{\pi x}{2l}+\frac{2l}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi t}{2l}\cos\frac{3\pi x}{2l}+\frac{2l}{5a\pi}\sin\frac{5a\pi t}{2l}\cos\frac{5\pi x}{2l};$

7) $u(x,t)=\frac{4096}{3\pi^4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^4}\sin\frac{3\pi(2n+1)t}{8}\cos\frac{\pi(2n+1)x}{8};$

8) $u(x,t)=\frac{1}{18}(e^{3t}+e^{-3t})\sin x+\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\sin 3x;$

9) $u(x,t)=\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{2l}\sin\frac{5x}{2l}+\frac{2l}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi t}{2l}\sin\frac{3\pi x}{2l}+$
$\frac{8l}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l};$

10) $u(x,t)=\frac{96h}{\pi^5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}\sin(2n+1)\pi x\cos a(2n+1)\pi t.$

О2. $u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,$

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=\tfrac{4h}{l^2}x(l-x),\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le l;$$

$u(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\cos\frac{(2k+1)a\pi t}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$

О3. $u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,$

$$u_x(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\ge 0,$$

$$u(x,0)=\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2l},\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le l;$$
$u(x,t)=\frac{1}{9}\cos\frac{3a\pi t}{2l}\cos\frac{3\pi x}{2l}$.

O4. $u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,$
$$u(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=\frac{Px}{E\sigma},\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le l,$$
де E – модуль Юнга, σ – площа поперечного перерізу стержня;
$u(x,t)=\frac{8Pl}{E\sigma\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$.

O5. 1) $u(x,y,t)=3\cos\sqrt{5}t\sin x\sin 2y+\sin 5t\sin 3x\sin 4y$;

$$2)\ u(x,y,t)=\frac{64Asp}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{(2k+1)^2(2n+1)^2}\times$$

$$\times\cos\sqrt{\frac{(2k+1)^2}{4s^2}+\frac{(2n+1)^2}{4p^2}}\pi at\sin\frac{2k+1}{2s}\pi x\sin\frac{2n+1}{2p}\pi y;$$

$$3)\ u(x,y,t)=A\cos\frac{\sqrt{2}a\pi t}{p}\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{p}.$$

C1. а) $u(x,t)=\dfrac{4lv_0}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}\sin\dfrac{(2k+1)a\pi t}{l}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{l}$;

$$б)\ u(x,t)=\frac{2lv_0}{\pi^2 a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{k\pi\alpha}{l}-\cos\frac{k\pi\beta}{l}}{k^2}\sin\frac{a\pi kt}{l}\sin\frac{k\pi x}{l};$$

$$в)\ u(x,t)=\frac{8Al}{\pi^2 a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi k\alpha}{l}\sin\frac{\pi kx_0}{l}}{k(1-(\frac{2\alpha k}{l})^2)}\sin\frac{a\pi kt}{l}\sin\frac{\pi kx}{l}.$$

C2. $u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,$
$$u(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=\frac{l}{100}\sin\frac{\pi x}{2l},\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le l;$$
$u(x,t)=\frac{l}{100}\cos\frac{a\pi t}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l}$.

C3. Розв'язком задачі

$$u_{tt}(x,y,t)=a^2(u_{xx}(x,y,t)+u_{yy}(x,y,t)),$$
$$0<x<s,\quad 0<y<p,\quad t>0,$$
$$u_x(0,y,t)=u(s,y,t)=0,\quad 0\le y\le p,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0,t)=u(x,p,t)=0,\quad 0\le x\le s,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,y,0)=0,u_t(x,y,0)=A(s-x)\sin\frac{\pi y}{p},0\le x\le s,0\le y\le p,$$

є функція $u(x,y,t)=\frac{8As}{a\pi^3}\sin\frac{\pi y}{p}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\omega_k}\sin(a\pi\omega_k t)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2s}$, де $\omega_k:=\sqrt{(\frac{2k+1}{2s})^2+\frac{1}{p^2}}$.

С4. 1) $u(x,y,t)=\frac{16Ap^2q^2}{\pi^6}\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}\cos\left(a\pi\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{p^2}+\frac{(2n+1)^2}{q^2}}t\right)\times$
$\times\frac{\sin\frac{(2m+1)\pi x}{p}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{q}}{(2m+1)^3(2n+1)^3}$;

2) $u(x,y,t)=\frac{16Ap^2q^2}{a\pi^7}\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(a\pi\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{p^2}+\frac{(2n+1)^2}{q^2}}t\right)}{\sqrt{\frac{(2m+1)^2}{p^2}+\frac{(2n+1)^2}{q^2}}}\times$
$\times\frac{\sin\frac{(2m+1)\pi x}{p}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{q}}{(2m+1)^3(2n+1)^3}$.

Д1. $u(x,t)=\frac{l}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$.

Д2. 1)
$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=\frac{1}{8}\sin\frac{3\pi x}{l},\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le l;$$

$u(x,t)=\frac{1}{8}\cos\frac{3a\pi t}{l}\sin\frac{3\pi x}{l}$;

2)
$$u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=\frac{1}{3}\sin\frac{5\pi x}{l},\quad 0\le x\le l;$$

$u(x,t)=\frac{l}{15a\pi}\sin\frac{5a\pi t}{l}\sin\frac{5\pi x}{l}$.

Д3. $u(x,t)=\frac{2l}{5\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)a\pi t}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$.

Д4. $u(x,t)=\frac{1}{30}(\cos\frac{7a\pi t}{2l}\sin\frac{7\pi x}{2l}+\cos\frac{15a\pi t}{2l}\sin\frac{15\pi x}{2l})$.

Д5. 1) $u(x,t)=\frac{A\pi^2}{6}-A\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos 2akt\cos 2kx$;

2) $u(x,t)=\frac{2l}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(-1)^{k+1}\cos\frac{ak\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$;

3) $u(x,t)=\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l}+\frac{2l}{3a\pi}\sin\frac{3a\pi t}{2l}\sin\frac{3\pi x}{2l}+\frac{8l}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\times$
$$\times\cos\frac{(2k+1)a\pi t}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l};$$

4) $u(x,t)=\frac{2h}{a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{h^2+\lambda_k^2}}{\lambda_k(l(h^2+\lambda_k^2)+h)}\sin a\lambda_k t\cos\lambda_k x$, де λ_k – додатні корені рівняння $\lambda\mathrm{tg}\lambda l=h$;

5) $u(x,t) = \frac{l^2}{6} - \frac{l^2}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos\frac{2ak\pi t}{l} \cos\frac{2k\pi x}{l}$;

6) $u(x,t) = \frac{32l^2}{\pi^3} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \cos\frac{a(2k-1)t}{2l} \cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}$;

7) $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 512}{((2k-1)\pi)^4 a} \sin\frac{a(2k-1)\pi t}{4} \cos\frac{(2k-1)\pi x}{4}$;

8) $u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2} \cos\frac{ak\pi t}{l} \sin\frac{k\pi x}{l}$;

9) $u(x,t) = \frac{4(1+hl)}{l^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2+h^2l^2}{(\mu_k^2+h^2l^2+hl)\mu_k}(1-\cos\mu_k)\cos\frac{a\mu_k t}{l} \sin\frac{\mu_k}{l}(l-x)$, де μ_k, $k \in \mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $\mathrm{tg}\mu = -\frac{\mu}{hl}$.

Д6. $u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Big(-\frac{2}{(2k-3)(2k+1)} \cos\frac{a(2k-1)\pi t}{2l} + \frac{4l}{a(2k-1)^3\pi^2}(-1+$ $+\frac{4(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi} \sin\frac{a(2k-1)\pi t}{2l})\Big) \cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}$.

Д7.
$$u_{tt}(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t)+u_{yy}(x,y,t)),$$
$$0<x<l, \quad 0<y<l, \quad t>0,$$
$$u(0,y,t)=0,\ u(l,y,t)=0, \quad 0\le y\le l, \quad t\ge 0,$$
$$u(x,0,t)=0,\ u(x,l,t)=0, \quad 0\le x\le l, \quad t\ge 0,$$
$$u(x,y,0)=\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}, \quad u_t(x,y,0)=\frac{a}{l}, \quad 0\le x\le l, \quad 0\le y\le l;$$

$u(x,y,t) = \Big(\cos\frac{a\sqrt{2}\pi t}{l} + \frac{16}{\sqrt{2}\pi^3}\sin\frac{a\sqrt{2}\pi t}{l}\Big)\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l} + \frac{16}{\pi^3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\times$ $\times\frac{1}{(2n+1)\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}}\sin\frac{a\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}\pi t}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi y}{l}$.

Д8. 1) $u(x,y,t) = \frac{8Al}{a\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2\omega_k}\sin a\omega_k t\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}\sin\frac{\pi y}{p}$, де $\omega_k = \pi\sqrt{\frac{(2k-1)^2}{4l^2}+\frac{1}{p^2}}$;

2) $u(x,y,t) = \frac{0{,}32p}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{a\pi\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}}{p}t}{(2k+1)(2n+1)\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{p}\times$ $\times\sin\frac{(2n+1)\pi y}{p}$.

Тема 5. Розв'язування неоднорідних мішаних задач для гіперболічних рівнянь методом Фур'є

Розглянемо задачу про знаходження розв'язку неоднорідного рівняння

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = (p(x)u_x(x,t))_x - q(x)u(x,t) + \overline{f}(x,t),$$

$$0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

де ρ, p, p' і q – неперервні функції на відрізку $[0,l]$; $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $x \in [0,l]$, який задовольняє крайові умови

$$\begin{aligned} \alpha u(0,t) + \beta u_x(0,t) = \mu_1(t), \\ \gamma u(l,t) + \delta u_x(l,t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, і початкові умови

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \tag{3}$$

Вважатимемо, що задані функції $\overline{f}$, μ_1, μ_2, φ і ψ мають потрібну гладкість.

1^0. Задача з однорідними крайовими умовами. Нехай необхідно знайти розв'язок неоднорідного рівняння (1) при $0 < x < l$, $t > 0$, який задовольняє однорідні крайові умови

$$\begin{aligned} \alpha u(0,t) + \beta u_x(0,t) = 0, \\ \gamma u(l,t) + \delta u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{2'}$$

і початкові умови (3).

Цю задачу не можна розв'язати методом відокремлення змінних, тобто шукати розв'язок у вигляді $u(x,t) = X(x)T(t)$, оскільки при $\overline{f} \not\equiv 0$ змінні не відокремлюються. Тому шукатимемо розв'язок задачі (1), (2'), (3) у вигляді

$$u = w + v, \tag{4}$$

де функція w є розв'язком задачі

$$\begin{gathered}\rho(x)w_{tt}(x,t)=(p(x)w_x(x,t))_x-q(x)w(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,\\ \alpha w(0,t)+\beta w_x(0,t)=0,\\ \gamma w(l,t)+\delta w_x(l,t)=0,\quad t\geq 0,\\ w(x,0)=\varphi(x),\quad w_t(x,0)=\psi(x),\quad 0\leq x\leq l.\end{gathered}\tag{5}$$

Тоді, очевидно, функція v повинна бути розв'язком задачі

$$\rho(x)v_{tt}(x,t)=(p(x)v_x(x,t))_x-q(x)v(x,t)+\overline{f}(x,t),$$

$$0<x<l,\quad t>0,\tag{6}$$

$$\begin{gathered}\alpha v(0,t)+\beta v_x(0,t)=0,\\ \gamma v(l,t)+\delta v_x(l,t)=0,\quad t\geq 0,\end{gathered}\tag{7}$$

$$v(x,0)=0,\quad v_t(x,0)=0,\quad 0\leq x\leq l.\tag{8}$$

Задача (5) вивчалась у темі 4, і там було доведено, що її можна розв'язати методом відокремлення змінних. При цьому було одержано, що розв'язок має вигляд

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\sqrt{\lambda_n}t+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}t)X_n(x),$$

$$0\leq x\leq l,\quad t\geq 0,\tag{9}$$

де λ_n, $n\in\mathbb{N}$, – власні числа, X_n, $n\in\mathbb{N}$, – власні функції задачі Штурма–Ліувілля

$$\begin{gathered}(p(x)X'(x))'+(\lambda\rho(x)-q(x))X(x)=0,\quad 0\leq x\leq l,\\ \alpha X(0)+\beta X'(0)=0,\\ \gamma X(l)+\delta X'(l)=0,\end{gathered}$$

а $\cos\sqrt{\lambda_n}t$ і $\sin\sqrt{\lambda_n}t$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння

$$T_n''(t)+\lambda_n T_n(t)=0,\quad t\geq 0.$$

Коефіцієнти ряду (9) визначаються за формулами

$$A_n = ||X_n||^{-2} \int_0^l \rho(x)\varphi(x)X_n(x)dx,$$

$$B_n = (||X_n||^2\sqrt{\lambda_n})^{-1} \int_0^l \rho(x)\psi(x)X_n(x)dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

Розв'язок задачі (6) – (8) шукатимемо у вигляді ряду Фур'є за власними функціями відповідної однорідної задачі (5)

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)X_n(x), \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0. \tag{10}$$

Якщо ряд (10) збігається рівномірно стосовно x на $[0, l]$, то крайові умови (7) задовольняються незалежно від вибору g_n, бо функції X_n задовольняють ці умови. Тому досить підібрати g_n так, щоб задовольнялись рівняння (6) і початкові умови (8). Припустивши, що ряд (10) допускає почленне двократне диференціювання за t і x, підставимо його в рівняння (6)

$$\rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} g_n''(t)X_n(x) = (p(x) \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)X_n'(x))_x -$$

$$-q(x) \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)X_n(x) + \overline{f}(x,t), \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0. \tag{11}$$

Оскільки X_n є розв'язком рівняння

$$(p(x)X_n'(x))' + (\lambda_n\rho(x) - q(x))X_n(x) = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

то (11) можна переписати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g_n''(t) + \lambda_n g_n(t))X_n(x) = \frac{\overline{f}(x,t)}{\rho(x)}. \tag{12}$$

Розкладемо функцію $f(x,t) := \frac{\overline{f}(x,t)}{\rho(x)}$ у ряд Фур'є за власними функціями X_n

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x), \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0, \tag{13}$$

де
$$f_n(t) = ||X_n(x)||^{-2} \int\limits_0^l \rho(y) f(y,t) X_n(y) dy.$$
Підставивши (13) в (12), дістанемо
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n''(t) + \lambda_n g_n(t) - f_n(t) \right) X_n(x) = 0, \ 0 \le x \le l, \quad t \ge 0.$$
Ця рівність задовольнятиметься, якщо вимагати, щоб
$$g_n''(t) + \lambda_n g_n(t) - f_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \ t \ge 0. \tag{14}$$

Функція v задовольняє початкові умови (8), коли
$$g_n(0) = 0, \quad g_n'(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Задача (14), (15) є задачею Коші для звичайного диференціального рівняння. Розв'язуючи її, знайдемо
$$g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int\limits_0^t f_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n}(t-\tau) d\tau, \quad t \ge 0.$$
Підставивши в (10) вирази для g_n, $n \in \mathbb{N}$, знайдемо розв'язок задачі (6) – (8), а згідно з (4) сума (9) і (10) дає розв'язок задачі (1) – (3).

Зауваження 1. Розв'язок задачі (1), (2′), (3) можна зразу шукати у вигляді ряду (10), де X_n, $n \in \mathbb{N}$, – власні функції однорідної задачі (5). Тоді для g_n матимемо задачу
$$g_n''(t) - \lambda_n g_n(t) = f_n(t), \quad n \in \mathbb{N}, \ t > 0,$$
$$g_n(0) = \varphi_n, \quad g_n'(0) = \psi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$
де φ_n і ψ_n – відповідні коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є функцій φ і ψ за системою власних функцій $\{X_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ на $[0, l]$.

Приклад 1. Розв'язати крайову задачу
$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + x(x-l)t^2, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{16}$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{17}$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l. \tag{18}$$

◁ Задача Штурма–Ліувілля для однорідної задачі, яка відповідає задачі (16), (17), має вигляд

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0,\ \ 0\le x\le l,\quad X(0)=0,\quad X(l)=0.$$

Власними числами цієї задачі є $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$, $n\in\mathbb{N}$, а відповідними власними функціями – $X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$, $x\in[0,l]$, $n\in\mathbb{N}$. Розкладемо функцію $x(x-l)t^2$, $x\in[0,l]$, $t>0$, у ряд Фур'є за системою функцій $\{\sin\frac{n\pi x}{l}, n\in\mathbb{N}\}$ на проміжку $[0,l]$:

$$x(x-l)t^2=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\quad 0\le x\le l,\quad t\ge 0, \tag{19}$$

де

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l x(x-l)t^2\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\begin{cases}\frac{8t^2l^2}{\pi^3(2k+1)^3}, & n=2k+1,\\ 0, \quad n=2k, & k\in\mathbb{Z}_+.\end{cases}$$

Розв'язок задачі (16) – (18) шукатимемо у вигляді ряду

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\quad 0<x<l,\quad t>0. \tag{20}$$

Підставивши (19) і (20) у рівняння (16), дістанемо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(g_n''(t)+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2g_n(t)\right)\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

або

$$g_n''(t)+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2g_n(t)=f_n(t),\quad n\in\mathbb{N}. \tag{21}$$

Якщо задовольнити початкові умови (18), то одержимо, що

$$g_n(0)=0,\quad g_n'(0)=0,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{22}$$

Розв'язком задачі (21), (22) є функція

$$g_n(t)=\frac{l}{n\pi}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi}{l}(t-\tau)d\tau,$$

підставивши в яку значення f_n, матимемо $g_n(t)=0$, $n=2k$ і

$$g_n(t)=\frac{8l^3}{\pi^4(2k+1)^4}\int\limits_0^t\tau^2\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}(t-\tau)d\tau=\frac{8l^3}{\pi^4(2k+1)^4}\times$$

$$\times\left(-\frac{2l^3}{(2k+1)^3\pi^3}+\frac{lt^2}{(2k+1)\pi}+\frac{2l^3}{(2k+1)^3\pi^3}\cos\frac{(2k+1)\pi}{l}t\right),$$

якщо $n=2k+1$, $k\in\mathbb{Z}_+$.

Після підстановки знайдених виразів для g_n у (20) дістанемо розв'язок задачі (16) – (18):

$$u(x,t)=\frac{8l^4t^2}{\pi^5}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{2k+1}{l}\pi x}{(2k+1)^5}-\frac{16l^6}{\pi^7}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{2k+1}{l}\pi x}{(2k+1)^7}+$$

$$+\frac{16l^6}{\pi^7}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2k+1}{l}\pi t}{(2k+1)^7}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x, \quad 0\le x\le l,\ t\ge 0. \ \triangleright$$

2^0. Задача з неоднорідними крайовими умовами. Розглянемо тепер задачу (1) – (3). Покажемо, що її можна звести до задачі (1), ($2'$), (3). Для цього підберемо гладку функцію w так, щоб вона задовольняла крайові умови (2), і шукатимемо розв'язок задачі (1) – (3) у вигляді $u = w + v$. Після підстановки цієї суми в рівняння (1), дістанемо рівняння для функції v

$$\rho(x)v_{tt}(x,t) = (p(x)v_x(x,t))_x - q(x)v(x,t) + f_1(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0,$$

де $f_1 := \overline{f} - \rho w_{tt} + (pw_x)_x - qw$. Оскільки w задовольняє неоднорідні крайові умови (2), то v задовольнятиме однорідні крайові умови ($2'$). Функція v, крім того, повинна задовольняти початкові умови

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = \varphi(x) - w(x,0) =: \varphi_1(x),$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,0) - w_t(x,0) = \psi(x) - w_t(x,0) =: \psi_1(x).$$

Отже, для функції v дістали задачу

$$\begin{gathered}
\rho(x)v_{tt}(x,t) = (p(x)v_x(x,t))_x - q(x)v(x,t) + f_1(x,t),\\
0 < x < l, \quad t > 0,\\
\alpha v(0,t) + \beta v_x(0,t) = 0,\\
\gamma v(l,t) + \delta v_x(l,t) = 0, \quad t \ge 0,\\
v(x,0) = \varphi_1(x), \quad v_t(x,0) = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le l.
\end{gathered} \tag{23}$$

Ця задача є задачею типу (1), ($2'$), (3) і вона розв'язується методом, описаним у першому пункті.

Зауваження 2. На практиці намагаються підібрати функцію w так, щоб вона задовольняла не лише крайові умови (2), але й рівняння (1). Якщо це вдається, то тоді $f_1 = 0$ і задача (23) є однорідною задачею, яка розв'язується методом відокремлення змінних (див. тему 4).

Зауваження 3. Функцію w, яка задовольняє лише крайові умови, можна шукати, наприклад, у вигляді $w(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$ або в деякому іншому вигляді.

Наведемо вигляд функції w для випадку крайових умов, які найчастіше зустрічаються у прикладних задачах.

Крайові умови	Функція w
$u(0,t)=\mu_1(t), \quad u(l,t)=\mu_2(t)$	$\mu_1+\frac{x}{l}(\mu_2-\mu_1)$
$u(0,t)=\mu_1(t), \quad u_x(l,t)=\mu_2(t)$	$\mu_1+x\mu_2$
$u(0,t)=\mu_1(t), \quad u_x(l,t)+hu(l,t)=\mu_2(t)$	$\mu_1+x\frac{\mu_2-h\mu_1}{1+lh}$
$u_x(0,t)-hu(0,t)=\mu_1(t)$, $u_x(l,t)+hu(l,t)=\mu_2(t)$	$x^2\frac{\mu_2-(1+lh)\mu_1}{(2+lh)l}+x\mu_1$
$u_x(0,t)=\mu_1(t), \quad u_x(l,t)=\mu_2(t)$	$x\mu_1+x^2\frac{\mu_2-\mu_1}{2l}$
$u_x(0,t)=\mu_1(t), \quad u(l,t)=\mu_2(t)$	$\mu_2+(x-l)\mu_1$
$\alpha u_x(0,t)+\beta u(0,t)=\mu_1(t)$, $\gamma u_x(l,t)+\delta u(l,t)=\mu_2(t)$	$x^2\frac{\alpha\mu_2-(\gamma+\delta l)\mu_1}{\alpha l(2\gamma+\delta l)}+x\frac{\mu_1}{\alpha}$

Приклад 2. Знайти розв'язок неоднорідної мішаної задачі

$$\begin{gathered} u_{tt}(x,t)+2u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)+4x+8e^t\cos x,\ 0<x<\tfrac{\pi}{2},\ t>0,\\ u_x(0,t)=2t, \quad u(\tfrac{\pi}{2},t)=\pi t, \quad t\geq 0,\\ u(x,0)=\cos x, \quad u_t(x,0)=2x, \quad 0\leq x\leq \tfrac{\pi}{2}. \end{gathered} \tag{24}$$

◁ Розв'язок задачі шукатимемо у вигляді

$$u(x,t)=w(x,t)+v(x,t), \quad 0<x<\frac{\pi}{2}, \quad t>0,$$

де функція w вибрана так, що вона задовольняє ненульові крайові умови, тобто

$$w(x,t)=\pi t+(x-\frac{\pi}{2})2t=2xt.$$

Тоді для функції v дістанемо задачу

$$\begin{gathered} v_{tt}(x,t)+2v_t(x,t)=v_{xx}(x,t)+8e^t\cos x, \quad 0<x<\tfrac{\pi}{2}, \quad t>0,\\ v_x(0,t)=0, \quad v(\tfrac{\pi}{2},t)=0, \quad t\geq 0,\\ v(x,0)=\cos x, \quad v_t(x,0)=0, \quad 0\leq x\leq \tfrac{\pi}{2}. \end{gathered} \tag{25}$$

Розв'язок задачі (25) шукатимемо як суму двох функцій

$$v(x,t)=v^1(x,t)+v^2(x,t), \quad 0<x<\frac{\pi}{2}, \quad t>0,$$

де v^2 і v^1 є розв'язками відповідно таких задач:

$$\begin{gathered} v^2_{tt}(x,t) + 2v^2_t(x,t) = v^2_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \tfrac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ v^2_x(0,t) = 0, \quad v^2(\tfrac{\pi}{2},t) = 0, \quad t \geq 0, \\ v^2(x,0) = \cos x, \quad v^2_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \tfrac{\pi}{2}; \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} v^1_{tt}(x,t) + 2v^1_t(x,t) = v^1_{xx}(x,t) + 8e^t \cos x, \quad 0 < x < \tfrac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ v^1_x(0,t) = 0, \quad v^1(\tfrac{\pi}{2},t) = 0, \quad t \geq 0, \\ v^1(x,0) = 0, \quad v^1_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \tfrac{\pi}{2}. \end{gathered} \tag{27}$$

Задачу (26) розв'язуватимемо методом відокремлення змінних. Підставляючи в рівняння і крайові умови $v^2(x,t) = X(x)T(t)$, після відокремлення змінних, дістанемо рівняння для T

$$T''(t) + 2T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{28}$$

і задачу Штурма–Ліувілля для X

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad X'(0) = 0, \quad X(\pi/2) = 0. \tag{29}$$

Задача (29) має власні числа $\lambda_k^2 = (2k+1)^2$ і власні функції $X_k(x) = \cos(2k+1)x$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Розв'язавши рівняння (28) при $\lambda = \lambda_k$, знайдемо $T_0(t) = A_0 e^{-t} + B_0 t e^{-t}$, $T_k(t) = A_k e^{-t} \cos 2\sqrt{k^2+k}t + B_k e^{-t} \sin 2\sqrt{k^2+k}t$, $k \in \mathbb{N}$, $t > 0$.

Утворимо ряд

$$v^2(x,t) = (A_0 + B_0 t)e^{-t} \cos x + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(A_k \cos 2\sqrt{k^2+k}t +$$

$$+ B_k \sin 2\sqrt{k^2+k}t \Big) e^{-t} \cos(2k+1)x, \ \ 0 \leq x \leq l, \ t \geq 0.$$

Цей ряд задовольнятиме початкові умови, якщо

$$A_0 \cos x + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2k+1)x = \cos x,$$

$$(-A_0 + B_0) \cos x + \sum_{k=1}^{\infty} B_k 2\sqrt{k^2+k} \cos(2k+1)x = 0.$$

Звідси дістанемо, що $A_0 = 1$, $B_0 = 1$, $A_k = 0$, $B_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Отже, розв'язком задачі (26) є функція

$$v^2(x,t) = (1+t)e^{-t}\cos x.$$

Розв'язок задачі (27) шукатимемо у вигляді ряду за власними функціями відповідної однорідної задачі (26):

$$v^1(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t)\cos(2k+1)x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad t \ge 0. \tag{30}$$

Підставивши (30) у рівняння, дістанемо

$$\sum_{k=0}^{\infty}(g_k''(t) + 2g_k'(t) + (2k+1)^2 g_k(t))\cos(2k+1)x = 8e^t\cos x.$$

Ця рівність буде виконуватися, якщо

$$\begin{gathered} g_0''(t) + 2g_0'(t) + g_0(t) = 8e^t, \\ g_k''(t) + 2g_k'(t) + (2k+1)^2 g_k(t) = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{31}$$

Крім того, з початкових умов для v^1 маємо

$$g_k(0) = 0, \quad g_k'(0) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{32}$$

Розв'язавши задачі (31), (32), знайдемо

$$g_0 = -2e^{-t} - 4te^{-t} + 2e^t, \quad g_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Якщо підставити знайдені значення g_k, $k \in \mathbb{N}$, у (30), то одержимо розв'язок задачі (27)

$$v^1(x,t) = (-2e^{-t} - 4te^{-t} + 2e^t)\cos x, \quad 0 \le x \le \pi/2, \quad t \ge 0.$$

Тоді розв'язок задачі (25) матиме вигляд

$$\begin{gathered} v(x,t) = v^1(x,t) + v^2(x,t) = (-e^{-t} - 3te^{-t} + 2e^t)\cos x, \\ 0 \le x \le \pi/2, \quad t \ge 0, \end{gathered}$$

а розв'язком задачі (24) є функція

$$u(x,t) = (2e^t - e^{-t} - 3te^{-t})\cos x + 2xt, \quad 0 \le x \le \pi/2, \quad t \ge 0. \ \triangleright$$

Зауваження 4. Розв'язок задачі (25) можна шукати у вигляді

$$v(x,t) = f(t)\cos x, \quad 0 \le x \le \tfrac{\pi}{2}, \quad t \ge 0.$$

Оскільки функція $g(x) = \cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, задовольняє крайові умови $v_x(0,t) = 0$, $v(\frac{\pi}{2},t) = 0$, $t \ge 0$, то підставляючи функцію v у рівняння і початкові умови з (25), одержуємо таку задачу для f :

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) = 8e^{-t}, \quad t \ge 0, \qquad f(0) = 1, \; f'(0) = 0.$$

Розв'язавши цю задачу, дістанемо, що

$$f(t) = -e^{-t} - 3te{-t} + 2e^{t}, \quad t \ge 0.$$

Тому $v(x,t) = (-e^{-t} - 3te^{-t} + 2e^{t})\cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \; t \ge 0.$

Зауваження 5. Якщо неоднорідності в рівнянні і крайових умовах задачі (1) – (3) не залежать від часу t, то функцію w можна також вважати незалежною від t і шукати її як розв'язок задачі:

$$(p(x)w_x(x))_x - q(x)w(x) + \overline{f}(x) = 0, \quad 0 \le x \le l,$$

$$\alpha w(0) + \beta w_x(0) = \mu_1, \quad \gamma w(l) + \delta w_x(l) = \mu_2, \quad t \ge 0.$$

Приклад 3. Знайти розв'язок неоднорідної мішаної задачі

$$\begin{gathered} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - 10u(x,t) = 2\sin 2x\,\cos x - 10 - 20x, \\ 0 < x < \tfrac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 1, \quad u_x(\tfrac{\pi}{2},t) = 2, \quad t \ge 0, \\ u(x,0) = 2x + 1, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \tfrac{\pi}{2}. \end{gathered} \tag{33}$$

$\triangleleft$ Оскільки неоднорідності в рівнянні і крайових умовах стаціонарні, то розв'язок задачі (33) шукатимемо у вигляді $u(x,t) = w(x) + v(x,t)$, де w і v є розв'язками відповідно таких задач:

$$\begin{gathered} w''(x) + 10w(x) = 10 + 20x - 2\sin 2x\,\cos x, \quad 0 \le x \le \tfrac{\pi}{2}, \\ w(0) = 1, \quad w'(\tfrac{\pi}{2}) = 2; \end{gathered} \tag{34}$$

$$\begin{gathered} v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) - 10v(x,t) = 0, \quad 0 < x < \tfrac{\pi}{2}, \quad t > 0, \\ v(0,t) = 0, \quad v_x(\tfrac{\pi}{2},t) = 0, \quad t \ge 0, \\ v(x,0) = 2x + 1 - w(x), \quad v_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \tfrac{\pi}{2}. \end{gathered} \tag{35}$$

Задача (34) є крайовою задачею для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальним розв'язком цього рівняння є $w(x) = C_1\cos\sqrt{10}x + C_2\sin\sqrt{10}x +$

$2x+1-\sin 3x-\frac{1}{9}\sin x$, $0<x<\frac{\pi}{2}$. Якщо задовольнити крайові умови, то дістанемо, що розв'язок задачі (34) має вигляд

$$w(x)=2x+1-\frac{1}{9}\sin x-\sin 3x, \quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}.$$

Задачу (35) розв'язуватимемо методом відокремлення змінних:

$$v(x,t)=X(x)T(t),$$

$$\frac{T''(t)-10T(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2,$$

$$T''(t)+(\lambda^2-10)T(t)=0, \tag{36}$$

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \quad X(0)=0, \quad X'(\pi/2)=0. \tag{37}$$

Задача Штурма–Ліувілля (37) має власні числа $\lambda_k=2k+1$ і відповідні власні функції $X_k(x)=\sin(2k+1)x$, $k\in\mathbb{Z}_+$.

Підставляючи значення $\lambda=\lambda_k$ у рівняння (36), одержимо рівняння

$$T_0''(t)-9T_0(t)=0, \quad T_1''(t)-T_1(t)=0,$$

$$T_k''(t)+((2k+1)^2-10)T_k(t)=0, \quad k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

З них одержуємо, що

$$T_0(t)=A_0e^{3t}+B_0e^{-3t}, \quad T_1(t)=A_1e^t+B_1e^{-t},$$

$$T_k(t)=A_k\cos\sqrt{(2k+1)^2-10}t+B_k\sin\sqrt{(2k+1)^2-10}t, \quad k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Складемо ряд

$$v(x,t)=(A_0e^{3t}+B_0e^{-3t})\sin x+(A_1e^t+B_1e^{-t})\sin 3x+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}(A_k\cos\sqrt{(2k+1)^2-10}t+B_k\sin\sqrt{(2k+1)^2-10}t)\sin(2k+1)x,$$

$$0\le x\le\frac{\pi}{2}, \quad t\ge 0.$$

Якщо задовольняти початкові умови, то дістанемо систему рівнянь

$$\left\{\begin{array}{c}(A_0+B_0)\sin x+(A_1+B_1)\sin 3x+\sum\limits_{k=2}^{\infty}A_k\sin(2k+1)x=\\ =\frac{1}{9}\sin x+\sin 3x,\\ (3A_0-3B_0)\sin x+(A_1-B_1)\sin 3x+\sum\limits_{k=2}^{\infty}B_k\sqrt{(2k+1)^2-10}\sin(2k+1)x=0,\\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}.\end{array}\right.$$

Звідси випливає, що $A_0 + B_0 = \frac{1}{9}$, $A_1 + B_1 = 1$, $A_k = 0$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $3A_0 - 3B_0 = 0$, $A_1 - B_1 = 0$, $B_k\sqrt{(2k+1)^2 - 10} = 0$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, тобто

$$A_0 = B_0 = \frac{1}{18}, \quad A_1 = B_1 = \frac{1}{2}, \quad A_k = B_k = 0, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Отже, розв'язком задачі (35) є функція

$$v(x,t) = \frac{1}{18}(e^{3t} + e^{-3t})\sin x + \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\sin 3x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ t \ge 0,$$

а розв'язком неоднорідної задачі (33) – функція

$$u(x,t) = 1 + 2x + \frac{1}{18}(e^{3t} + e^{-3t} - 2)\sin x + \frac{1}{2}(e^t + e^{-t} - 2)\sin 3x,$$

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ t \ge 0. \ \triangleright$$

Зауваження 6. Якщо неоднорідність у рівнянні має вигляд $\varphi(x)\sin\omega t$ або $\varphi(x)\cos\omega t$ чи в крайових умовах є неоднорідність вигляду $A\sin\omega t$ або $B\cos\omega t$, то функцію w зручно шукати у вигляді $\Phi(x)\sin\omega t$ або $\Psi(x)\cos\omega t$. Покажемо це на прикладі.

Приклад 4. Розв'язати мішану задачу

$$\begin{gathered} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = A\cos\omega t, \quad t \ge 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \end{gathered} \tag{38}$$

якщо A – стала, а ω – задане додатне число, яке не збігається із жодним з чисел $\frac{(2n+1)a\pi}{2l}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

$\triangleleft$ Шукатимемо розв'язок задачі (38) у вигляді $u = w + v$, де w і v є розв'язками таких задач:

$$\begin{gathered} w_{tt}(x,t) = a^2 w_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ w(0,t) = 0, \quad w_x(l,t) = A\cos\omega t, \quad t \ge 0, \end{gathered} \tag{39}$$

$$\begin{gathered} v_{tt}(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v(0,t) = 0, \quad v_x(l,t) = 0, \quad t \ge 0, \\ v(x,0) = -w(x,0), \quad v_t(x,0) = -w_t(x,0), \quad 0 \le x \le l. \end{gathered} \tag{40}$$

Розв'язок задачі (39) шукатимемо у вигляді

$$w(x,t) = \Phi(x)\cos\omega t, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0. \tag{41}$$

Після підстановки (41) у (39) матимемо крайову задачу

$$\Phi''(x) + \frac{\omega^2}{a^2}\Phi(x) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{42}$$

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi'(l) = A. \tag{43}$$

Загальним розв'язком рівняння (42) є

$$\Phi(x) = C_1 \cos\tfrac{\omega}{a}x + C_2 \sin\tfrac{\omega}{a}x.$$

З крайових умов (43) дістанемо

$$C_1 = 0, \quad \tfrac{\omega}{a}C_2 \cos\tfrac{\omega l}{a} = A, \quad C_2 = \tfrac{Aa}{\omega\cos\frac{\omega l}{a}}.$$

Отже,

$$\Phi(x) = A\frac{a\sin\frac{\omega}{a}x}{\omega\cos\frac{\omega l}{a}}, \quad 0 \le x \le l. \tag{44}$$

Підставивши (44) у (41), одержимо розв'язок задачі (39)

$$w(x,t) = A\frac{a\sin\frac{\omega}{a}x}{\omega\cos\frac{\omega}{a}l}\cos\omega t, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0.$$

Розв'язок задачі (40) шукається методом відокремлення змінних і він має вигляд (див. задачу 1, тема 4)

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0,$$

де

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l (-w(x,0))\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l \left(-A\frac{a\sin\frac{\omega}{a}x}{\omega\cos\frac{\omega}{a}l}\right) \times$$

$$\times \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx = -\frac{2Aa}{l\omega\cos\frac{\omega}{a}l}\int_0^l \sin\frac{\omega x}{a}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx. \tag{45}$$

Отже, розв'язок задачі (38) визначається формулою

$$u(x,t) = \frac{Aa}{\omega}\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega l}{a}}\cos\omega t + \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

$$0 \le x \le l, \quad t \ge 0,$$

де A_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, знаходяться за формулою (45). $\triangleright$

Вправи

О1. Стержень підвішено вертикально і закріплено так, що зміщення в усіх точках дорівнює нулю. У момент часу $t = 0$ стержень звільняється, залишаючись закріпленим у верхній точці. Вивчити вимушені коливання стержня.

О2. Вивчити вимушені поперечні коливання струни, кінець $x = 0$ якої закріплений, на кінці $x = l$ діє сила, яка викликає зміщення $A \sin \omega t$, $t > 0$, де ω – задане додатне число, що не дорівнює числам вигляду $\frac{a\pi n}{l}$, $n \in \mathbb{N}$, а початкові зміщення і початкові швидкості її точок дорівнюють нулю.

О3. Розв'язати неоднорідну мішану задачу:

1) $$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + Ae^{-t} \sin \tfrac{\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

2) $$u_{tt}(x,t) = 16 u_{xx}(x,t) + \sin \tfrac{7\pi x}{10}, \quad 0 < x < 5, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u_x(5,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 5;$$

3) $$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + bx(l - x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

4) $$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + \sin \omega t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

5) $$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = A, \quad u(l,t) = B, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

6) $$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = At, \quad A = \mathrm{const}, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

7) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + \sin 2t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = \frac{2}{a}\sin\frac{2l}{a}\sin 2t, \quad t \geq 0,$
$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = -2\cos\frac{2x}{a}, \quad 0 \leq x \leq l;$

8) $u_{tt}(x,t) - 7u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + 2u_x(x,t) -$
$-2t - 7x - e^{-x}\sin 3x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$
$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = \pi t, \quad t \geq 0,$
$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$

9) $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + 10u(x,t) + 2\sin 2x \cos x,$
$0 < x < \pi/2, \quad t > 0,$
$u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi/2,t) = 0, \quad t \geq 0,$
$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi/2;$

10) $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + 4u(x,t) + 2\sin^2 x,$
$0 < x < \pi, \quad t > 0,$
$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0,$
$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi;$

11) $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + 1, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0,$
$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(4,t) = 4, \quad t \geq 0,$
$u(x,0) = \frac{x^2}{2}, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 4;$

12) $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$
$u(0,t) = t, \quad u_x(\pi,t) = 1, \quad t \geq 0,$
$u(x,0) = \sin\frac{x}{2}, \quad u_t(x,0) = 1, \quad 0 \leq x \leq \pi.$

О4. Розв'язати мішану задачу

$$u_{tt}(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)) + \frac{1}{\rho}e^{-t}x\sin\frac{2\pi y}{p},$$
$$0 < x < s, \quad 0 < y < p, \quad t > 0,$$
$$u(0,y,t) = 0, \quad u(s,y,t) = 0, \quad 0 \leq y \leq p, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0,t) = 0, \quad u(x,p,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq s, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,y,0) = 0, \quad u_t(x,y,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq s, \quad 0 \leq y \leq p.$$

С1. Розв'язати рівняння $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + \frac{a^2}{l^2}\sin\frac{a\pi t}{l}$ для $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ при нульових крайових і початкових умовах $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, $t \geq 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq l$.

С2. До струни довжиною l із жорстко закріпленими кінцями з моменту часу $t = 0$ прикладено неперервно розподілену силу з густиною $g(x,t) = Ax\sin\omega t$, $A = \text{const}$, $0 < x < l$, $t > 0$. Знайти коливання струни в середовищі без опору, дослідити можливість резонансу і знайти розв'язок у випадку резонансу.

С3. Розв'язати мішану задачу:

1) $$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = t^2, \quad u(\pi,t) = t^3, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

2) $$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = Ae^{-t}, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = \frac{Aa\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}}{\mathrm{sh}\,\frac{l}{a}}, \quad u_t(x,0) = -\frac{Aa\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}}{\mathrm{sh}\,\frac{l}{a}}, \quad 0 \leq x \leq l;$$

3) $$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + x^2 - 2lx - \tfrac{2l}{h},$$
$$0 < x < l, \quad t > 0, \quad h > 0,$$
$$u_x(0,t) - hu(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

4) $$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = \tfrac{A}{ES}\sin\omega t, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

якщо $\omega \neq \frac{(2n+1)\pi a}{2l}$, $n \in \mathbb{Z}_+$;

5) $$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = \tfrac{A}{ES}t, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

С4. Розв'язати мішану задачу:

1) $$u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t) + \cos 2x \sin \pi y,$$
$$0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1, \quad t > 0,$$
$$u_x(0,y,t) = 0, \quad u_x(\pi,y,t) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0,t) = 1, \quad u(x,1,t) = 2, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,y,0) = y^2 + 1, \quad u_t(x,y,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

2) $u_{tt}(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t) + (l-x)\sin\frac{\pi y}{p}\sin t,$

$$0 < x < l, \quad 0 < y < p, \quad t > 0,$$
$$u_x(0,y,t) = 0, \quad u(l,y,t) = 0, \quad 0 \le y \le p, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0,t) = 0, \quad u(x,p,t) = 0, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,y,0) = 0, \quad u_t(x,y,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \quad 0 \le y \le p.$$

Домашнє завдання

Д1. Розв'язати мішану задачу:

1) $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + 2b, \quad b = \mathrm{const}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l;$$

2) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = A, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l;$$

3) $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + 1, \quad 0 < x < 1, \ t > 0,$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 1, \quad 0 \le x \le 1;$$

4) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + Axe^{-t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l;$$

5) $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - 2u_t(x,t) = 4t(\sin x - x),$

$$0 < x < \pi/2, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 3, \quad u_x(\pi/2,t) = t^2 + t, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 3, \quad u_t(x,0) = x + \sin x, \quad 0 \le x \le \pi/2;$$

6) $u_{tt}(x,t) - 3u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + u(x,t) - x(4+t) + \cos\frac{3x}{2},$

$$0 < x < \pi, t > 0,$$
$$u_x(0,t) = t + 1, \quad u(\pi,t) = \pi(t+1), \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = x, \quad 0 \le x \le \pi;$$

7) $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
$u(0,t) = t + 1, \quad u(1,t) = t^3 + 2, \quad t \geq 0,$
$u(x,0) = x + 1, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1;$

8) $u_{tt}(x,t) + u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

9) $u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + x^2,\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = \frac{l^2 t^2}{2}, \quad t \geq 0,$
$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$

10) $u_{tt}(x,t) = 25 u_{xx}(x,t) + x(3 - x) \sin \omega t, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0,$
$$u(0,t) = 0, \quad u(3,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Д2. Нехай стержень довжиною l, кінець $x = 0$ якого жорстко закріплений, перебуває у стані спокою. У момент часу $t = 0$ до його вільного кінця $x = l$ прикладена сила $Q =$const, яка діє вздовж стержня. Знайти зміщення стержня $u(x,t)$, $0<x<l$, $t>0$.

Д3. Знайти закон вільних коливань горизонтальної струни, правий кінець $x = l$ якої закріплений, а лівий $x = 0$ рухається за законом $u(0,t) = \frac{l}{10} \sin \frac{a\pi t}{l}$, $t \geq 0$. Початкові швидкості та відхилення точок струни нульові.

Д4. Розв'язати мішану задачу
$$u_{tt}(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)) + \frac{A}{\rho},$$
$$0 < x < p, \quad 0 < y < s, \quad t > 0,$$
$$u(0,y,t) = 0, \quad u(p,y,t) = 0, \quad 0 \leq y \leq s, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0,t) = 0, \quad u_y(x,s,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,y,0) = 0, \quad u_t(x,y,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq s,$$
A – стала, ρ – поверхнева густина маси мембрани.

Відповіді

О1.
$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + g, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$u(x,t)=\frac{gx(2l-x)}{2a^2}-\frac{16gl^2}{\pi^3a^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$

O2.
$$\begin{aligned}&u_{tt}(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,\\&u(0,t)=0,\quad u(l,t)=A\sin\omega t,\quad t\ge 0,\\&u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le l;\end{aligned}$$

$u(x,t)=\frac{2A\omega a}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\omega^2-(\frac{a\pi n}{l})^2}\sin\frac{a\pi nt}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}+\frac{A\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\omega t.$

O3. 1) $u(x,t)=\frac{A}{1+(\frac{a\pi}{l})^2}(e^{-t}-\cos\frac{a\pi t}{l}+\frac{l}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{l})\sin\frac{\pi x}{l};$

2) $u(x,t)=\left(\frac{5}{14\pi}\right)^2\left(1-\cos\frac{14\pi t}{5}\right)\sin\frac{7\pi x}{10};$

3)$u(x,t)=-\frac{bx}{12}(x^3-2x^2l+l^3)+\frac{8l^4}{\pi^5}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^5}\cos\frac{(2k+1)\pi t}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l};$

4) $u(x,t)=\frac{4\sin\omega t}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)((2n+1)^2\pi^2-\omega^2)}-$

$-\frac{4\omega}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi t\cdot\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2((2n+1)^2\pi^2-\omega^2)},\omega\ne(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}_+;$

5)$u(x,t)=A+\frac{x}{l}(B-A)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(A+(-1)^nB)}{n\pi}\cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l};$

6) $u(x,t)=Axt+\sum\limits_{n=0}^{\infty}B_n\sin\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l},$

$B_n=-\frac{4}{(2n+1)a\pi}\int\limits_0^l Ax\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx,\quad n\in\mathbb{Z}_+;$

7) $u(x,t)=\frac{t}{2}-(\frac{1}{4}+\cos\frac{2x}{a})\sin 2t;$

8) $u(x,t)=xt+(\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{15}e^{5t}-\frac{1}{10})e^{-x}\sin 3x;$

9) $u(x,t)=\frac{1}{9}(\text{ch}3t-1)\sin x+(\text{ch}t-1)\sin 3x;$

10) $u(x,t)=\frac{1}{8}\left(e^{2t}+e^{-2t}\right)-\frac{1}{4}-\frac{t^2}{2}\cos 2x;$

11) $u(x,t)=t^2+\frac{x^2}{2};$

12) $u(x,t)=x+t+\cos\frac{t}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)t}{2}\sin\frac{(2n-1)x}{2}.$

O4. $u(x,y,t)=\frac{\sin 2\pi y}{p}\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\left(e^{-t}-\cos a\pi\omega_k t+\frac{1}{a\pi\omega_k}\sin a\pi\omega_k t\right)\sin\frac{k\pi x}{s},$

де $a_k=\frac{(-1)^{k+1}2s}{\pi\rho k(1+(a\pi\omega_k)^2)}$, $\omega_k=\sqrt{\frac{k^2}{s^2}+\frac{4}{p^2}}$, $k\in\mathbb{N}$, ρ – поверхнева густина маси мембрани.

C1. $u(x,t)=\frac{2l}{\pi^2}(\frac{1}{\pi}\sin\frac{a\pi t}{l}-\frac{at}{l}\cos\frac{a\pi t}{l})\sin\frac{\pi x}{l}+$

$+\frac{1}{\pi^3}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}(-\frac{1}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)a\pi t}{l}+\frac{1}{2k-1}\sin\frac{a\pi t}{l})\sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x.$

При розв'язуванні системи рівнянь $T''_n(t)+(\frac{an\pi}{l})^2T_n(t)=A_n(t),$

$n = 2k-1$ – непарні числа, треба врахувати, що частота зовнішньої сили збігається з частотою першої гармоніки, тобто маємо резонанс, а тому частинний розв'язок при $n = 1$ треба шукати у вигляді $T_1(t) = t(C_1 \sin\frac{a\pi t}{l} + C_2 \sin\frac{a\pi t}{l})$, $t > 0$.

C2.
$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + \frac{Ax}{\rho}\sin\omega t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$u(x,t) = \frac{2Al}{\pi\rho}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}(\omega\sin\omega_n t - \omega_n\sin\omega t)\sin\frac{n\pi x}{l}$, якщо $\omega \neq \omega_n := \frac{an\pi}{l}$, $n \in \mathbb{N}$;
$u(x,t) = \frac{(-1)^{n_0+1}}{\pi n_0 \omega_{n_0}^2 \rho}(\sin\omega_{n_0}t - \omega_{n_0}t\cos\omega_{n_0}t)\sin\frac{\pi n x}{l} + \frac{2Al}{\pi\rho}\sum\limits_{\substack{n=1,\\ n\neq n_0}}^{\infty}(\omega\sin\omega_n t - \omega_n\sin\omega t)\sin\frac{\pi n x}{l}$, якщо $\omega = \omega_{n_0} := \frac{\pi n_0 a}{l}$ (резонанс).

C3. 1) $u(x,t) = (1-\frac{x}{\pi})t^2 + \frac{x}{\pi}t^3 + \sin x\cos t + \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}((-1)^k 3t - 1 -$
$- \cos kt - \frac{(-1)^k\cdot 3}{k}\sin kt)\sin kx$; 2) $u(x,t) = \frac{Aa}{\mathrm{sh}\frac{l}{a}}e^{-t}\mathrm{ch}\frac{x}{a}$.
Розв'язок треба шукати у вигляді $u(x,t) = v(x,t) + f(x)e^{-t}$;
3) $u(x,t) = \frac{4l^4}{a^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(\mu_k^2+h^2l^2)\sin\mu_k}{\mu_k^5(\mu_k^2+h^2l^2+hl)}(\cos\frac{a\mu_k t}{l} - 1)\cos\frac{\mu_k(l-x)}{\mu}$, де μ_k, $k \in \mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $\mathrm{tg}\mu = \frac{hl}{\mu}$;
4) $u(x,t) = \frac{aA}{ES\omega}\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\cos\frac{\omega l}{a}}\sin\omega t + \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \sin\frac{(2k+1)\pi a t}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$,
де $b_k = -\frac{4}{(2k+1)\pi a}\int\limits_0^l \frac{aA}{ES}\frac{\sin\frac{\omega z}{a}}{\cos\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2l}dz$, $k \in \mathbb{Z}_+$;
5) $u(x,t) = \frac{aA}{ES}xt + \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\sin\frac{(2k+1)\pi a t}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$,
де $b_k = -\frac{4}{(2k+1)\pi a}\int\limits_0^l \frac{Az}{ES}\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2l}dz$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

C4. 1) $u(x,y,t) = y + 1 + \frac{1-\cos\sqrt{4+\pi^2}}{4+\pi^2}\cos 2x\sin\pi y -$
$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi^3(2k-1)^3}\cos(2k-1)t\sin(2k-1)\pi y$;
2) $u(x,y,t) = \frac{8l}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2(1+\omega_k)}(\sin t - \frac{1}{\sqrt{\omega_k}}\sin\sqrt{\omega_k}t)\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}t\sin\frac{\pi y}{p}$,
де $\omega_k = \frac{(2k-1)^2\pi^2}{4l^2} + \frac{\pi^2}{p^2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Д1. 1) $u(x,t)=bx(l-x)-\frac{8l^2b}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{\pi(2n+1)}{l}t\sin\frac{\pi(2n+1)}{l}x.$
Розв'язок шукати у вигляді $u=v+w$, де $v=bx(l-x)$ задовольняє неоднорідне рівняння і нульові крайові умови, а функція w задовольняє однорідне рівняння, нульові крайові умови та початкові умови $w(x,0)=bx(x-l), w_t(x,0)=0, 0\le x\le l$;

2) $u(x,t)=Ax-\frac{8Al}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\frac{a(2n+1)t}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$;

3)$u(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)^3\pi^3}(\cos(2k+1)\pi t-(2k+1)\pi\sin(2k+1)\pi t-1)\sin(2k+1)\pi x$
або $u(x,t)=\frac{1}{2}x(1-x)+$
$+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)^3\pi^3}(\cos(2k+1)\pi t+(2k+1)\pi\sin(2k+1)\pi t)\sin(2k+1)\pi x$;

4) $u(x,t)=\frac{2Al}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(1+(\frac{ak\pi}{l})^2)k}(e^{-t}-\cos\frac{ak\pi t}{l}+\frac{l}{ak\pi}\sin\frac{ak\pi t}{l})\sin\frac{k\pi x}{l}$;

5) $u(x,t)=3+x(t+t^2)+(5te^t-8e^t+4t+8)\sin x$;

6) $u(x,t)=x(t+1)+(\frac{1}{5}e^{5t/2}-e^{t/2}+\frac{4}{5})\cos\frac{3x}{2}$;

7)$u(x,t)=t+1+x(t^3-t+1)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{(\pi k)^2}(\frac{6(-1)^{k+1}}{(\pi k)^2}-1)\sin\pi kt+\frac{(-1)^k12t}{\pi^3k^3})\sin\pi kx$;

8) $u(x,t)=-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)^3\pi^3}\big(-1+e^{-t/2}(\cos p_kt+\frac{1}{2p_k}\sin p_kt)\big)\sin(2k+1)x$,
$p_k=((2k+1)^2\pi^2-\frac{1}{4})^{1/2}$;

9) $u(x,t)=\frac{l^2t^2}{2}+\frac{128l^4}{a^2\pi^5}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^5}\big(\cos\frac{a(2k-1)\pi t}{2l}-1\big)\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}$;

10) $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{g_k}{(\frac{5k\pi}{3})^2-\omega^2}\big(\sin\omega t-\frac{3\omega}{5k\pi}\sin\frac{5k\pi t}{3}\big)\sin\frac{k\pi x}{3}$, якщо $\omega\ne\frac{5k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{N}$;
$u(x,t)=\sum\limits_{\substack{k=1,\\ k\ne m}}^{\infty}\frac{g_k}{(\frac{5k\pi}{3})^2-\omega^2}\big(\sin\omega t-\frac{3\omega}{5k\pi}\sin\frac{5k\pi t}{3}\big)\sin\frac{k\pi x}{3}+\big(\frac{3g_m}{10m\pi\omega}\sin\frac{5m\pi t}{3}-\frac{g_m}{2\omega}\cos\omega t\big)\sin\frac{m\pi x}{3}$, де $g_k=\frac{36}{(k\pi)^3}(1-(-1)^k)$, $k\in\mathbb{N}$, якщо $\omega=\frac{5m\pi}{3}$, m – деяке натуральне число.

Д2. $u(x,t)=\frac{Q}{E\sigma}x-\frac{8Ql}{\pi^2E\sigma}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)a\pi t}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$,
де E – модуль пружності, σ – площа поперечного перерізу стержня. Задача зводиться до розв'язування рівняння $u_{tt}=a^2u_{xx}$ при нульових початкових і таких крайових умовах: $u(0,t)=0, u_x(0,t)=\frac{Q}{E\sigma}$. Покласти $u=v+w$, де $v=Ax$, а A вибрати так, щоб функція v задовольняла задані крайові умови.

Д3.
$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = \tfrac{l}{10}\sin\tfrac{a\pi t}{l}, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l;$$

$$u(x,t) = \tfrac{l-x}{10}\sin\tfrac{a\pi t}{l} + \left(\tfrac{-3l}{10\pi}\sin\tfrac{a\pi t}{l} + \tfrac{at}{10}\cos\tfrac{a\pi t}{l}\right)\sin\tfrac{\pi x}{l} + \sum_{n=2}^{\infty}\tfrac{l}{\pi n(n^2-1)}\times$$
$$\times\left(\tfrac{1}{n}\sin\tfrac{an\pi t}{l} - \sin\tfrac{a\pi t}{l}\right)\sin\tfrac{n\pi x}{l}.$$

Цей розв'язок можна записати інакше, якщо скористатись тим, що $\frac{l-x}{10} = \frac{1}{5\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}$. Тоді $u(x,t) = \left(-\frac{l}{10\pi}\sin\frac{a\pi t}{l} + \frac{at}{10}\cos\frac{a\pi t}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l} +$ $+ \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{5\pi n(n^2-1)}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{an\pi t}{l} + (n^2-2)\sin\frac{a\pi t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$.

Д4. $u(x,y,t) = \frac{16A}{a^2\pi^2\rho}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)(2n-1)}\times$
$$\times\left(1 - \cos a\pi\sqrt{\tfrac{(2m-1)^2}{\rho^2} + \tfrac{(2n-1)^2}{4s^2}}\,t\right)\sin\tfrac{(2m-1)\pi x}{p}\sin\tfrac{(2n-1)\pi y}{2s}.$$

Тема 6. Розв'язування задачі Коші та мішаних задач для параболічних рівнянь

Класичною задачею Коші для рівняння теплопровідності називається задача про знаходження функції u, яка неперервна й обмежена в $\Pi_T^n := \{(x,t)|x \in \mathbb{R}^n, t \in (0,T]\}$ разом зі своїми похідними другого за x і першого за t порядків, неперервна в $\overline{\Pi_T^n}$, задовольняє рівняння

$$u_t(x,t) = a^2 \Delta u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Pi_T^n, \tag{1}$$

і початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де f і φ – задані функції.

Якщо функція f неперервна й обмежена в Π_T^n разом зі своєю похідною за x, а функція φ неперервна й обмежена в $\mathbb{R}^n$, то розв'язок задачі Коші (1), (2) існує, єдиний в класі обмежених функцій і зображується формулою Пуассона

$$u(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{R^n} \varphi(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{R^n} \frac{f(\xi,\tau)}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau, \quad x \in \Pi_T^n. \tag{3}$$

Якщо ж функція f неперервна в Π_T^n і є гармонічною (див. тему 8) за x при кожному фіксованому $t \geq 0$, то функція

$$u(x,t) = \int\limits_0^t f(x,\tau) d\tau, \quad (x,t) \in \Pi_T^n,$$

є розв'язком задачі Коші (1), (2) з $\varphi = 0$.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{gathered} u_t = \tfrac{1}{4} u_{xx} + xt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{4}$$

$\lhd$ Згідно з формулою (3) розв'язком задачі є функція

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{(x-z)^2}{t}} dz + \int\limits_0^t \frac{\tau d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{(x-z)^2}{t-\tau}} dz, \quad (5)$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Обчислимо кожний з інтегралів окремо:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{(x-z)^2}{t}} dz = \left| \begin{array}{c} \frac{z-x}{\sqrt{t}} = y, \\ dz = \sqrt{t} dy, \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} z & -\infty & +\infty \\ \hline y & -\infty & +\infty \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x + \sqrt{t} y) e^{-y^2} dy = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y e^{-y^2} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} x \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = x;$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\tau d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{(x-z)^2}{(t-\tau)}} dz = \left| \begin{array}{c} \frac{z-x}{\sqrt{t-\tau}} = y, \\ dz = \sqrt{t-\tau} dy, \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} z & -\infty & +\infty \\ \hline y & -\infty & +\infty \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x + \sqrt{t-\tau} y\right) e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \tau \left(x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy + \right.$$

$$\left. + \sqrt{t-\tau} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y e^{-y^2} dy \right) d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(x \sqrt{\pi} \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \int\limits_0^t \tau \sqrt{t-\tau} d\tau e^{-y^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right) = \frac{x t^2}{2}.$$

Якщо підставити одержані вирази для I_1 і I_2 у формулу (5), то одержимо розв'язок задачі (4)

$$u(x,t) = \frac{xt^2}{2} + x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad \rhd$$

Зауваження. Оскільки права частина рівняння $f(x,t) = xt$ є гармонічною функцією за $x \in \mathbb{R}$ при кожному фіксованому $t \geq 0$ і має однаковий з початковою умовою вигляд щодо x, то розв'язок задачі (4) можна шукати у вигляді $u(x,t) = g(t)x$. Тоді для g одержимо задачу

$$g'(t) = t, \quad t > 0; \quad g(0) = 1,$$

розв'язок якої $g(t) = \frac{t^2}{2} + 1$, $t \geq 0$. Тому $u(x,t) = \frac{xt^2}{2} + x$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Цей розв'язок збігається з одержаним вище, що випливає з єдиності розв'язку задачі Коші.

Розглянемо тепер мішану задачу для рівняння параболічного типу

$$\begin{gathered}\rho(x)u_t(x,t) = (p(x)u_x(x,t))_x - q(x)u(x,t) + f(x,t),\\ 0 < x < l, \quad t > 0,\\ \alpha u(0,t) + \beta u_x(0,t) = \mu_1(t),\\ \gamma u(l,t) + \delta u_x(l,t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0,\\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,\end{gathered} \tag{6}$$

де ρ, p, p', q – неперервні функції на $[0,l]$, причому $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $x \in [0,l]$, а f, μ_1, μ_2 і φ – задані достатньо гладкі функції, які узгоджені між собою, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$.

Якщо $\beta = 0$, $\delta = 0$, то задача (6) називається **першою мішаною задачею**, при $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ – **другою мішаною задачею**. У загальному випадку задача (6) називається **третьою мішаною задачею**. Методика розв'язування задачі (6) з допомогою методу Фур'є детально описана в темі 4.

Приклад 2. Розглянемо задачу про поширення тепла в тонкому однорідному стержні довжиною l, бічна поверхня якого теплоізольована, кінці $x = 0$ і $x = l$ підтримуються при нульовій температурі, а початкова температура

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ l - x, & \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases}$$

$\triangleleft$ Задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння теплопровідності

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{7}$$

який задовольняє крайові умови

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{8}$$

і початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ l - x, & \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases} \tag{9}$$

Застосовуючи метод відокремлення змінних, шукаємо ненульові частинні розв'язки рівняння (7) у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \tag{10}$$

Підставляючи (10) у (7), дістанемо два рівняння

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{11}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \tag{12}$$

Для знаходження ненульових розв'язків рівняння (7) вигляду (10), що задовольняють крайові умови (8), треба знайти ненульові розв'язки рівняння (12), які задовольняють умови

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{13}$$

Задача Штурма–Ліувілля (12), (13) має власні числа $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ і власні функції

$$X_n(x) = \sin\tfrac{n\pi}{l}x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Значенням $\lambda = \lambda_n$ відповідають такі розв'язки рівняння (11):

$$T_n(t) = A_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді функції

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\sin\tfrac{n\pi}{l}x, \quad n \in \mathbb{N},$$

задовольняють рівняння (7) і крайові умови (8) при довільних сталих A_n. Для того щоб задовольнити початкову умову (9), складемо ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \tag{14}$$

Підстановка (14) у (9) дає рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\tfrac{n\pi x}{l} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

яка справджується при

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\left(\int_0^{l/2} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right) =$$

$$= \frac{4l}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{(-1)^k 4l}{(2k+1)^2\pi^2}, & n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$$

Якщо підставити знайдені значення в (14), то одержимо розв'язок задачі (7) – (9):

$$u(x,t) = \frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2 a^2}{l^2}t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}, \; 0 \leq x \leq l, \; t \geq 0.$$

Цей розв'язок є нескінченно диференційовною функцією при $0 \leq x \leq l$, $t > 0$. $\triangleright$

Приклад 3. Знайти розв'язок неоднорідної мішаної задачі

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + u(x,t) + xt(2-t) + 2\cos t, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0, \tag{15}$$

$$u_x(0,t) = t^2, \quad u_x(\pi,t) = t^2, \quad t \geq 0, \tag{16}$$

$$u(x,0) = \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{17}$$

$\triangleleft$ Оскільки крайові умови неоднорідні, то зведемо задачу до задачі з однорідними крайовими умовами. Шукатимемо розв'язок задачі (15) – (17) у вигляді

$$u = w + v,$$

де w підберемо так, щоб вона задовольняла умови (16) (див. зауваження 3, тема 5): $w(x,t) = t^2 x$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$. Тоді v буде розв'язком задачі

$$\begin{gathered} v_t(x,t) = v_{xx}(x,t) + v(x,t) + 2\cos t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ v_x(0,t) = 0, \quad v_x(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ v(x,0) = \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{gathered} \tag{18}$$

Розв'язок задачі (18) у свою чергу шукатимемо у вигляді суми двох функцій $v = v^1 + v^2$, де v^1 і v^2 є розв'язками відповідно таких задач:

$$\begin{gathered} v^1_t(x,t) = v^1_{xx}(x,t) + v^1(x,t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ v^1_x(0,t) = 0, \quad v^1_x(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ v^1(x,0) = \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi; \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} v^2_t(x,t) = v^2_{xx}(x,t) + v^2(x,t) + 2\cos t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ v^2_x(0,t) = 0, \quad v^2_x(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ v^2(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{gathered} \tag{20}$$

Для знаходження v^1 застосовуємо метод Фур'є. Підставляючи $v^1(x,t) = X(x)T(t)$ у рівняння і крайові умови з (19), дістаємо

$$T'(t) + (\lambda^2 - 1)T(t) = 0, \tag{21}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0. \tag{22}$$

Розв'язавши задачу Штурма–Ліувілля (22), знайдемо власні числа $\lambda_k = k$ і власні функції $X_k(x) = \cos kx$, $k \in \mathbb{Z}_+$. З рівняння (21) при $\lambda = \lambda_k$ знайдемо $T_k(t) = A_k e^{-(k^2-1)t}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Утворимо ряд
$$v^1(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-(k^2-1)t} \cos kx$$
і задовольнимо початкову умову з (19)
$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos ks = \cos 2x, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{23}$$
З (23) дістанемо, що $A_2 = 1, \quad A_k = 0,\ k \neq 2$. Отже,
$$v^1(x,t) = e^{-3t} \cos 2x, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0.$$

Розв'язок задачі (20) шукаємо у вигляді ряду за власними функціями відповідної однорідної задачі (19)
$$v^2(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t) \cos kx, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0.$$
Сума цього ряду, якщо він збігається рівномірно, задовольняє крайові умови з (20). Задовольнивши рівняння і початкову умову, одержимо
$$\sum_{k=0}^{\infty} (g_k' + (k^2-1)g_k) \cos kx = 2\cos t, \quad g_k(0) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$
Звідси випливає, що
$$g_0' - g_0 = 2\cos t, \quad g_0(0) = 0,$$
$$g_k' - (k^2-1)g_k = 0, \quad g_k(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$
і тому
$$g_0(t) = e^t + \sin t - \cos t,$$
$$g_k(t) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$
Отже, розв'язком задачі (20) є функція
$$v^2(x,t) = (e^t + \sin t - \cos t)\cos 0x = e^t + \sin t - \cos t, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0.$$

Остаточно дістанемо, що розв'язок задачі (15) – (17) має вигляд
$$u(x,t) = e^{-3t}\cos 2x + (e^t + \sin t - \cos t) + t^2 x, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0. \quad \triangleright$$

Приклад 4. Початкова температура стержня ($0 \le x \le l$) з теплоізольованою бічною поверхнею дорівнює $U_0 = \text{const}$, а на його кінцях підтримується стала температура $u(0,t) = U_1$, $u(l,t) = U_2$, де U_1, U_2 – сталі. Знайти температуру u стержня при $t > 0$, а також стаціонарну температуру $\overline{u}(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$, $0 \le x \le l$.

$\triangleleft$ Задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{24}$$

який задовольняє умови

$$u(0,t) = U_1, \quad u(l,t) = U_2, \quad t \geq 0, \tag{25}$$

$$u(x,0) = U_0, \quad 0 \leq x \leq l. \tag{26}$$

Шукатимемо розв'язок задачі (24) – (26) у вигляді суми двох функцій

$$u(x,t) = w(x) + v(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

Оскільки крайові умови (25) не залежать від t, то вважатимемо, що w залежить тільки від x і є розв'язком задачі

$$\begin{gathered} w''(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ w(0) = U_1, \quad w(l) = U_2. \end{gathered} \tag{27}$$

Для v одержуємо задачу

$$\begin{gathered} v_t(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t), \ \ 0 < x < l, \ \ t > 0, \\ v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ v(x,0) = U_0 - w(x), \ \ 0 \leq x \leq l. \end{gathered} \tag{28}$$

Загальний розв'язок рівняння із задачі (27) $w(x) = C_1 x + C_2$. Якщо задовольнити крайові умови, то дістанемо, що $C_2 = U_1$, $C_1 l + C_2 = U_2$, $C_1 = \frac{U_2 - U_1}{l}$, $C_2 = U_1$. Отже, розв'язок задачі (27) має вигляд $w(x) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l} x$.

Задачу (28) розв'язуватимемо методом відокремлення змінних. Підставивши $v(x,t) = X(x)T(t)$ в рівняння і відокремивши змінні, дістанемо два звичайних диференціальних рівняння

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \ \ t \geq 0, \tag{29}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \ \ 0 \leq x \leq l. \tag{30}$$

Якщо задовольнити нульові крайові умови функцією v, то одержимо, що

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{31}$$

Задача Штурма–Ліувілля (30), (31) має власні числа $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ і власні функції $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n \in \mathbb{N}$. Підставивши $\lambda = \lambda_n$ у (29), знайдемо, що загальний розв'язок цього рівняння $T_n(t) = A_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}$, $n \in \mathbb{N}$. Складемо ряд $v(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2} \sin\frac{n\pi x}{l}$ і задовольнимо початкову умову, тоді одержимо рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} = U_0 - \frac{U_2 - U_1}{l}x - U_1, \quad 0 \le x \le l.$$

Звідси випливає, що

$$A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l (U_0 - \frac{U_2 - U_1}{l}x - U_1)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int\limits_0^l (U_0 - U_1)\sin\frac{n\pi x}{l}dx -$$

$$-\frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{U_2 - U_1}{l}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx = (-1)^n\frac{2}{n\pi}(U_2 - U_0) + \frac{2}{n\pi}(U_0 - U_1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже, розв'язок задачі (28) має вигляд

$$v(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}((-1)^n(U_2 - U_0) + (U_0 - U_1))e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$0 \le x \le l, \quad t \ge 0.$$

Остаточно розв'язок задачі (24) – (26) запишеться так:

$$u(x,t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l}x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left((-1)^n(U_2 - U_0) + \right.$$

$$\left. + (U_0 - U_1)\right)e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0. \tag{32}$$

Знайдемо тепер стаціонарну температуру, перейшовши до границі при $t \to +\infty$ під знаком рівномірно збіжного при $t \ge t_0 > 0$ ряду в (32):

$$\overline{u}(x) = \lim_{t\to+\infty} u(x,t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l}x, \quad 0 \le x \le l. \quad \triangleright$$

Вправи

О1. Розв'язати задачу Коші:

$$1)\quad u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0,$$
$$u(x,0)=Ae^{-x^2},\quad -\infty<x<+\infty;$$

$$2)\quad u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0,$$
$$u(x,0)=\begin{cases} u_0, & x\in[x_1,x_2],\\ 0, & x\notin[x_1,x_2].\end{cases}$$

О2. Розв'язати мішану задачу:

$$1)\quad u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t),\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$u_x(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\qquad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=A(l-x),\quad 0\le x\le l;$$

$$2)\quad u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)-4u(x,t),\quad 0<x<\pi,\quad t>0,$$
$$u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=x^2-\pi x,\quad 0\le x\le \pi;$$

$$3)\quad u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)-2u_x(x,t)+x+2t,\quad 0<x<1,\quad t>0,$$
$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=t,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=e^x\sin\pi x,\quad 0\le x\le 1;$$

$$4)\quad u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)+u(x,t)+2\sin 2x\sin x,\quad 0<x<\pi/2, t>0,$$
$$u_x(0,t)=0,\quad u(\pi/2,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=0,\quad 0\le x\le \pi/2;$$

$$5)\quad u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)+4u(x,t)+x^2-2t-4x^2t+2\cos^2 x,$$
$$0<x<\pi, t>0,$$
$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(\pi,t)=2\pi t,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=0,\quad 0\le x\le \pi;$$

$$6)\quad u_t(x,t)=3u_{xx}(x,t)-6u(x,t)+3x+6,\quad 0<x<2, t>0,$$
$$u(0,t)=1,\quad u(2,t)=2,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=x^2-\tfrac{3}{2}x+1,\quad 0\le x\le 2;$$

$$7)\quad u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)+u(x,t),\quad 0<x<\pi, t>0,$$
$$u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=3\sin 2x,\quad 0\le x\le \pi;$$

8) $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - 4u(x,t), \quad 0 < x < \pi, t > 0,$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x, \quad 0 \le x \le \pi;$$

9) $u_t(x,t) = 4u_{xx}(x,t) + t\sin\frac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi;$$

10) $u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, t > 0,$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + \frac{\pi}{4l}u(l,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = u_0\cos\frac{\pi x}{4l}, \quad 0 \le x \le l;$$

11) $u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, t > 0,$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 3\sin\frac{\pi x}{l} - 2\sin\frac{3\pi x}{l}, \quad 0 \le x \le l;$$

12) $u_t(x,t) = 25u_{xx}(x,t) + 3x^2, \quad 0 < x < 6, t > 0,$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(6,t) = 1, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = \sin x, \quad 0 \le x \le 6.$$
$$\text{Знайти}\; \bar{u}(x) = \lim_{t\to+\infty} u(x,t);$$

13) $u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, t > 0,$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = u_0, \quad 0 \le x \le l;$$

14) $u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, t > 0,$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = Ax, \quad 0 \le x \le l;$$

15) $u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, t > 0,$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = q, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l;$$

16) $u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, t > 0,$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = At, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l.$$

О3. Дано тонкий однорідний стержень довжиною l, початкова температура якого дорівнює $A\frac{x}{l}$, $0 \le x \le l$. На кінці $x = 0$ температура підтримується нульовою, а на кінці $x = l$ – змінюється за законом $u(l,t) = Ae^{-t}$, $t \geq 0$. Знайти розподіл температури в стержні при $t > 0$.

О4. Знайти закон охолодження однорідного стержня довжиною l, якщо на його лівому кінці $x = 0$ підтримується нульова температура, а правий кінець стержня $x = l$ теплоізольований. Початкова температура точок стержня

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, \ 0 \leq x \leq l/2, \\ u_0, \ \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases}$$

О5. Розв'язати задачу:

1) $$u_t(x,y,t) = u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t) - 4t\sin 6\pi x,$$
$$0 < x < 1, \ 0 < y < 2, \ t > 0,$$
$$u(0,y,t) = 0, \quad u(1,y,t) = u_0, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad t \geq 0,$$
$$u_y(x,0,t) = 0, \quad u_y(x,2,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,y,0) = u_0 x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

2) $$u_t(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)) + 3\sin\frac{\pi x}{2p}\sin\frac{\pi y}{2q},$$
$$0 < x < p, \ 0 < y < q, \ t > 0,$$
$$u(0,y,t) = 0, \quad u(p,y,t) = 0, \quad 0 \leq y \leq q, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0,t) = 0, \quad u(x,q,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,y,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq q.$$

С1. Розв'язати мішану задачу:

1) $$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u_x(0,t) = q, \quad u_x(l,t) = q, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = Ax, \quad 0 \leq x \leq l;$$

2) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - 2u_x(x,t) + u(x,t) + e^x \sin x - t,$$
$$0 < x < \pi, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 1 + t, \quad u(\pi,t) = 1 + t, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 1 + e^x \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

3) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + 6u(x,t) + x^2(1 - 6t) - 2(t + 3x) + \sin 2x,$$
$$0 < x < \pi, t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 1, \quad u_x(\pi,t) = 2\pi t + 1, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

4) $$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u_x(0,t) - hu(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad h > 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = u_0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

С2. Початкова температура стержня довжиною l є відомою функцією φ. Температури кінців стержня сталі, $u(0,t) = C_1$, $u(l,t) = C_2$, $t \geq 0$, а на бічній поверхні відбувається за законом Ньютона теплообмін із середовищем, температура якого $u_0 = \text{const}$. Знайти температуру точок стержня в довільний момент часу $t > 0$.

С3. Розв'язати задачу

$$u_t(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)) + A\sin\tfrac{3\pi x}{2p}\cos\tfrac{\pi y}{2s},$$
$$0 < x < p, 0 < y < s, t > 0,$$
$$u(0,y,t) = u_x(p,y,t) = 0, \quad 0 \leq y \leq s, \quad t \geq 0,$$
$$u_y(x,0,t) = u(x,s,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,y,0) = B\sin\tfrac{\pi x}{2p}\cos\tfrac{3\pi y}{2s}, \quad 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq s.$$

С4. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l при вільному теплообміні, якщо початкова температура цього стержня визначена рівністю $u(x,0) = A\frac{x^2}{l^2}$, A – стала. Лівий кінець стержня теплоізольований, а на правому кінці підтримується стала температура $u(l,t) = A$.

Домашнє завдання

Д1. Розв'язати задачу Коші:

1) $$u_t(x,t) = 4u_{xx}(x,t) + 5, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = 4, \quad -\infty < x < +\infty;$$

2) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + 2e^{-t}\cos t, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = 2, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Д2. Розв'язати мішану задачу:

1) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - u(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 1, \quad 0 \leq x \leq l;$$

2) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + u(x,t) - x + 2\sin 2x\cos x,$$
$$0 < x < \pi/2, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0,\ u_x(\pi/2,t) = 1, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = x, \quad 0 \le x \le \pi/2;$$

3) $$u_t(x,t) = 16u_{xx}(x,t) + 2, \quad 0 < x < 7, \quad t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 0,\ u(7,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 7;$$

4) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = \begin{cases} x \text{ при } x \in [0,l/2], \\ l - x \text{ при } x \in (l/2,l]; \end{cases}$$

5) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + 6u(x,t) + 2t(1-3t) - 6x + 2\cos x\cos 2x,$$
$$0 < x < \pi/2, \quad t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 1, \quad u(\pi/2,t) = t^2 + \tfrac{\pi}{2}, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = x, \quad 0 \le x \le \pi/2;$$

6) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + 4u_x(x,t) + x - 4t + 1 + e^{-2x}\cos^2 \pi x,$$
$$0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = t, \quad u(1,t) = 2t, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1;$$

7) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = e^{-\frac{t}{4l^2}}, \quad u_x(l,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 1, \quad 0 \le x \le l;$$

8) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - 2u_x(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = e^x \sin \pi x, \quad 0 \le x \le 1;$$

9) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - A(u(x,t) - u_0), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = u_1, \quad 0 \le x \le 1;$$

10) $u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + x(l-x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

11) $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + u_0 x^2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
$$u(0,t) = u_1, \quad u_x(1,t) = 2u_0 t, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = u_1, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

12) $u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 100, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{200x}{l}, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ 100, & \frac{l}{2} < x \leq l. \end{cases}$$

Д3. Дано тонкий однорідний стержень довжиною l, початкова температура якого дорівнює нулю. На кінці $x = l$ температура підтримується нульовою, а на кінці $x = 0$ вона зростає лінійно з часом, тобто $u(0,t) = At$, $t \geq 0$, де A – стала. Знайти розподіл температури в стержні при $t > 0$.

Д4. На кінцях однорідного ізотропного стержня довжиною l підтримується нульова температура. Припускаючи, що бічна поверхня стержня теплоізольована, знайти закон розподілу температури в стержні, якщо відомо, що в початковий момент розподіл температури $u(x,0) = u_0 \frac{x(l-x)}{l^2}$, $0 \leq x \leq l$, де $u_0 = \mathrm{const}$.

Д5. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності $u_t = a^2 u_{xx}$ при $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$, який задовольняє початкову умову
$$u(x,0) = \begin{cases} T_1 \text{ при } x > 0, \\ T_2 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Д6. Дано тонкий однорідний стержень довжиною l, початкова температура якого дорівнює нулю. На кінці $x = l$ температура підтримується нульовою, а на кінці $x = 0$ температура змінюється за законом $u(0,t) = A \sin \omega t$. Знайти розподіл температури в стержні при $t > 0$.

Д7. Розв'язати задачу

$$u_t(x,y,t) = a^2(u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t)) + A\sin\tfrac{\pi x}{p}\sin\tfrac{\pi y}{2s},$$
$$0 < x < p, \quad 0 < y < s, \quad t > 0,$$
$$u(0,y,t) = u(p,y,t) = 0, \quad 0 \le y \le s, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0,t) = u_y(x,s,t) = 0, \quad 0 \le x \le p, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,y,0) = 0, \quad 0 \le x \le p, \quad 0 \le y \le s.$$

Відповіді

O1. 1) $u(x,t) = \frac{A}{\sqrt{1+4a^2t}}e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}$.

2) $u(x,t) = \frac{u_0}{2}\left(\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right)\right)$, де $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\theta^2}d\theta$.

O2. 1) $u(x,t) = \frac{8Al}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-(\frac{(2k+1)a\pi}{2l})^2 t}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2l}x$;

2) $u(x,t) = \frac{-8}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-((2k+1)^2+4)t}\sin(2k+1)x$;

3) $u(x,t) = xt + \sin\pi x e^{x-\pi^2 t - t}$; 4) $u(x,t) = t\cos x + \frac{1}{8}(e^{-8t}-1)\cos 3x$;

5) $u(x,t) = tx^2 + \frac{1}{4}(e^{4t}-1) + t\cos 2x$;

6) $u(x,t) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{32}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{\frac{-3}{4}(8+(2k+1)^2\pi^2)t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}$;

7) $u(x,t) = 3e^{-3t}\sin 2x$; 8) $u(x,t) = 2e^{-13t}\sin 3x + 5e^{-53t}\sin 7x$;

9) $u(x,t) = (t-1+e^{-t})\sin\frac{x}{2}$; 10) $u(x,t) = u_0 e^{-(\frac{a\pi}{4l})^2 t}\cos\frac{\pi x}{4l}$;

11) $u(x,t) = 3e^{-(\frac{a\pi}{l})^2 t}\sin\frac{\pi x}{l} - 2e^{-(\frac{3a\pi}{l})^2 t}\sin\frac{3\pi x}{l}$;

12) $\bar{u}(x) = -\frac{x^4}{100} + \frac{241x}{25}$. Можна знайти $\bar{u}$ як роз'язок задачі

$$25\bar{u}''(x) + 3x^2 = 0, \quad 0 < x < 6, \quad \bar{u}(0) = 0, \quad \bar{u}'(6) = 1.$$

13) $u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}e^{-(\frac{(2k+1)a\pi}{l})^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x$;

14) $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{4Al}{(2k+1)^2\pi^2}e^{-(\frac{(2k+1)a\pi}{l})^2 t}\cos\frac{(2k+1)\pi}{l}x$;

15) $u(x,t) = q\left(\frac{a^2t}{l} + \frac{3x^2-l^2}{6l}\right) + \frac{2l}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}e^{-(\frac{ka\pi}{l})^2 t}\cos\frac{k\pi}{l}x$;

16) $u(x,t) = \frac{A}{l}xt + \frac{A}{6a^2l}x(x^2-l^2) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k e^{-(\frac{ka\pi}{l})^2 t}\sin\frac{k\pi}{l}x$,

де $a_k = -\frac{A}{3a^2l^2}\int\limits_0^l z(z^2-l^2)\sin\frac{k\pi}{l}z\,dz$.

О3. $u(x,t) = \frac{Ax}{l}e^{-t} + \frac{2Al^2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(e^{-(\frac{an\pi}{l})^2t}-e^{-t})}{n(n^2\pi^2-l^2)}\sin\frac{n\pi x}{l}$. Розв'язок треба шукати у вигляді $u(x,t) = \frac{Axe^{-t}}{l} + v(x,t)$.

О4. $u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi}{4}e^{-\left(\frac{a(2n+1)\pi}{2l}\right)^2t}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$.

О5. 1) $u(x,y,t) = u_0x + \frac{4}{(6\pi)^4}\left(1-(6\pi)^2t - e^{-(6\pi)^2t}\right)\sin 6\pi x$;
2) $u(x,y,t) = \frac{3}{a^2\pi^2(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2})}\left(1-e^{-a^2\pi^2(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2})t}\right)\sin\frac{\pi x}{2p}\sin\frac{\pi y}{2q}$.

С1. 1) $u(x,t)=qx+\frac{(A-q)l}{2}-\frac{4l(A-q)}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-(\frac{(2k+1)a\pi}{l})^2t}\cos\frac{(2k+1)\pi}{l}x$;
2) $u(x,t) = (-e^{x-t}\sin x + e^{x-4t}\sin 2x) + e^x\sin x + 1 + t$;
3) $u(x,t) = x^2t + x + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{C_{2k-1}}{(2k-1)^2-6}(1-e^{-6(2k-1)^2t})\cos(2k-1)x$,
$C_{2k-1} := \frac{2}{\pi}(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-3}), k\in\mathbb{N}$;
4) $u(x,t) = 2u_0\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2+h^2l^2-hl\sqrt{\mu_k^2+h^2l^2}}{\mu_k(\mu_k^2+h^2l^2+hl)}e^{-(\frac{a\mu_k}{l})^2t}\sin\frac{\mu_k(l-x)}{l}$, де μ_k, $k\in\mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $\operatorname{tg}\mu = -\frac{\mu}{hl}$.

С2.
$$\begin{gathered} u_t(x,t) = a^2u_{xx}(x,t) - \alpha(u(x,t)-u_0), \quad 0<x<l, \quad t>0, \\ \alpha := \frac{h}{c\rho}, \quad h \text{ – коефіцієнт теплообміну}, \\ u(0,t) = C_1, \quad u(l,t) = C_2, \quad t\ge 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0\le x\le l; \end{gathered}$$

$$u(x,t) = u_0 + \frac{(C_2-u_0)\mathrm{sh}bx+(C_1-u_0)\mathrm{sh}b(l-x)}{\mathrm{sh}bl} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}A_ne^{-((\frac{an\pi}{l})^2+\alpha)t}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$\text{де } A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l(\varphi(x) - u_0 - \frac{(C_2-u_0)\mathrm{sh}bx+(C_1-u_0)\mathrm{sh}b(l-x)}{\mathrm{sh}bl})\sin\frac{n\pi x}{l}dx, b = \frac{\sqrt{\alpha}}{a}.$$

С3.
$$u(x,y,t) = Be^{-\frac{a^2\pi^2}{4}(\frac{1}{p^2}+\frac{9}{s^2})t}\sin\frac{\pi x}{2p}\cos\frac{3\pi y}{2s} + \frac{4A}{a^2\pi^2(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2})}\times$$
$$\times\left(1-e^{-\frac{a^2\pi^2}{4}(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2})}\right)\sin\frac{3\pi x}{2p}\cos\frac{\pi y}{2s}.$$

С4. $u(x,t) = \frac{Ax^2}{l^2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{32A(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3\pi^3}(1-e^{-\frac{((2n-1)a\pi)^2t}{4l^2}})\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$. Розв'язок можна шукати у вигляді $u(x,t) = v(x,t) + \frac{Ax^2}{l^2}$.

Д1. 1) $u(x,t) = 5t+4$; 2) $u(x,t) = 3 + e^{-t}(\sin t - \cos t)$.

Д2. 1) $u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{-(\frac{\pi^2(2k+1)^2}{l^2}+1)t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$;
2) $u(x,t) = x + t\sin x + \frac{1}{8}(1-e^{-8t})\sin 3x$;

3) $u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 98}{(2n+1)^3\pi^3}\left(1-e^{-\left(\frac{2(2n+1)\pi}{7}\right)^2 t}\right)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{14}$;

4) $u(x,t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}$;

5) $u(x,t)=x+t^2+\frac{1}{5}(e^{5t}-1)\cos x+\frac{1}{3}(1-e^{-3t})\cos 3x$;

6) $u(x,t)=t(x+1)+e^{-2x}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{C_k}{k^2\pi^2+4}(1-e^{-(k^2\pi^2+4)t})\sin k\pi x$,

$$C_k:=\begin{cases} 0, \quad k=2m, \\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{2m-1}+\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m-3}\right), \quad k=2m-1, \quad m\in\mathbb{N}; \end{cases}$$

7) $u(x,t)=e^{-\frac{t}{4l^2}}+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)((2n+1)^2\pi^2-1)}\left(e^{-\frac{t}{4l^2}}-e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}t}\right)\times$
$\times\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$; 8) $u(x,t)=e^{-(\pi^2+1)t}e^x\sin\pi x$;

9) $u(x,t)=(u_1-u_0)e^{-At}+u_0$;

10) $u(x,t)=\frac{8l^4}{a^2\pi^5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^5}\left(1-e^{-\left(\frac{a(2n-1)\pi}{l}\right)^2 t}\right)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}$;

11) $u(x,t)=u_0+2u_0tx+\frac{256u_0}{\pi^5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^5}\left(1-e^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 t}\right)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$;

12) $u(x,t)=\frac{100x}{l}+\frac{400}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}e^{-\left(\frac{(2n-1)a\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}$.

Д3. $u(x,t)=At(1-\frac{x}{l})-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2Al^2}{n^3\pi^3a^2}(1-e^{-(\frac{an\pi}{l})^2t})\sin\frac{n\pi x}{l}$ або

$u(x,t)=At(1-\frac{x}{l})-\frac{Al^2}{6a^2}((\frac{x}{l})^3-3(\frac{x}{l})^2+2(\frac{x}{l}))+\frac{2Al^2}{\pi^3a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}e^{-(\frac{an\pi}{l})^2t}\sin\frac{n\pi x}{l}$.

Д4. $u(x,t)=\frac{8u_0}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\left(\frac{a(2k+1)\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$.

Д5. $u(x,t)=\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{T_1-T_2}{2}\Phi(\frac{x}{2a\sqrt{t}})$, де $\Phi(x):=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$.

Д6. $u(x,t)=A(1-\frac{x}{l})\sin\omega t-\frac{2\omega A}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-(\frac{an\pi}{l})^2t}\sin\frac{n\pi x}{l}\times$
$\times\int\limits_0^t e^{(\frac{an\pi}{l})^2\tau}\cos\omega\tau d\tau$.

Д7. $u(x,y,t)=\frac{A}{q-1}\left(e^{-t}-e^{-qt}\right)\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{2s}$, де $q:=a^2\pi^2(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4s^2})$.

Тема 7. Розв'язування мішаних задач для гіперболічних і параболічних рівнянь методом Фур'є із застосуванням спеціальних функцій

При розв'язуванні задач математичної фізики методом відокремлення змінних в областях з круговою, циліндричною або сферичною симетріями виникає необхідність використання функцій Бесселя, поліномів Лежандра, приєднаних поліномів Лежандра та сферичних функцій, які називаються спеціальними функціями.

Звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy(x)}{dx}) + (\lambda\rho(x) - q(x))y(x) = 0, \qquad (1)$$

де λ – стала; ρ, p', p, q – неперервні функції на $[a, b]$, причому $p(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, і ρ – обмежена на $[a, b]$, називається **загальним рівнянням теорії спеціальних функцій**.

Спеціальні функції – це розв'язки задачі Штурма–Ліувілля для деяких частинних випадків рівняння (1).

1^0. Якщо $p(x) = x$, $q(x) = \frac{\nu^2}{x}$, $\rho(x) = x$, $a = 0$, $b = l$, то задача Штурма–Ліувілля для рівняння (1) має вигляд

$$\frac{d}{dx}(x\frac{dy(x)}{dx}) + (\lambda x - \frac{\nu^2}{x})y(x) = 0, \quad 0 < x < l; \qquad (2)$$

$$|y(x)| < +\infty, \quad x \in [0, l], \quad y(l) = 0. \qquad (3)$$

Рівняння (2) за допомогою заміни $t = \sqrt{\lambda}x$ зводиться до **рівняння Бесселя**

$$\frac{d}{dt}(t\frac{dy(t)}{dt}) + (t - \frac{\nu^2}{t})y(t) = 0. \qquad (2')$$

Відомо [1, 11], що частинними розв'язками рівняння $(2')$ є **функції Бесселя першого роду** відповідно **порядку** ν або $-\nu$:

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k},$$

$$J_{-\nu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu+2k}.$$

Ці функції є лінійно незалежними при нецілих ν на всій числовій осі. Якщо ж ν – ціле число, то вони є лінійно залежними і тоді будують **функцію Бесселя другого роду ν-го порядку**

$$Y_\nu(t) = \frac{J_\nu(t)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(t)}{\sin\nu\pi},$$

яка є лінійно незалежною з J_ν на $\mathbb{R}$. Тому загальний розв'язок рівняння $(2')$ має вигляд

$$y(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 Y_\nu(t). \tag{4}$$

Доведено, що функція J_ν є обмеженою на $\mathbb{R}$ при цілих ν, а Y_ν – необмеженою при $t \to 0$.

Правильними є такі рекурентні співвідношення:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{J_\nu(t)}{t^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(t)}{t^\nu}, \quad J'_\nu(t) = -J_{\nu+1}(t) + \frac{\nu}{t}J_\nu(t), \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}(t^\nu J_\nu(t)) = t^\nu J_{\nu-1}, \quad J'_\nu(t) = J_{\nu-1}(t) - \frac{\nu}{t}J_\nu(t). \tag{6}$$

Звідси, зокрема, випливає, що

$$J'_0(t) = -J_1(t), \quad J''_0(t) = -J'_1(t) = \frac{1}{t}J_1(t) - J_0(t). \tag{7}$$

При інтегруванні функцій Бесселя зручно користуватися рівностями

$$\int_0^x t^{\nu+1} J_\nu(\alpha t)dt = \frac{x^{\nu+1}}{\alpha} J_{\nu+1}(\alpha x), \tag{8}$$

$$\int_0^x t^3 J_0(t)dt = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x)J_1(x); \tag{8'}$$

$$\int_0^z tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\beta t)dt = \frac{z}{\alpha^2-\beta^2}(J_\nu(\alpha z)\frac{d}{dz}J_\nu(\beta z)-$$

$$-J_\nu(\beta z)\frac{d}{dz}J_\nu(\alpha z)), \quad \alpha \neq \beta; \tag{9}$$

$$\int_0^z tJ_\nu(\alpha t)dt = \frac{\alpha^2 z^2-\nu^2}{2\alpha^2}J_\nu^2(\alpha z)+(z\frac{d}{dz}J_\nu(\alpha z))^2. \tag{10}$$

Опишемо основні властивості функцій Бесселя.

1. Нулі μ_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, функції Бесселя J_ν, тобто корені рівняння $J_\nu(t) = 0$, при $\nu > -1$ дійсні й прості (крім, можливо, $\mu_0 = 0$), і їх множина $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k, ...$ не має скінченних граничних точок ($|\mu_k| \to +\infty$ при $k \to +\infty$).

2. Якщо μ_k, μ_m – додатні нулі функції Бесселя, то

$$\int_0^l tJ_\nu(\frac{\mu_k t}{l})J_\nu(\frac{\mu_m t}{l})dt = \begin{cases} 0, & \mu_k \neq \mu_m, \\ \frac{l^2}{2}(J'_\nu(\mu_m))^2, & \mu_k = \mu_m. \end{cases} \tag{11}$$

3. За певних умов (див., наприклад, теорему Стеклова, тема 4), функція f розкладається у рівномірно збіжний ряд на $[0, l]$ за системою функцій $\{J_\nu(\frac{\mu_k t}{l}),\ k \in \mathbb{N}\}$, де μ_k – додатні корені рівняння $J_\nu(t) = 0$,

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_\nu(\mu_k \frac{t}{l}), \tag{12}$$

де коефіцієнти a_k обчислюються, згідно з (11), за формулою

$$a_k = \frac{2}{(lJ'_\nu(\mu_k))^2}\int_0^l tf(t)J_\nu(\frac{\mu_k t}{l})dt, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Якщо ж μ_k, $k \in \mathbb{N}$, – корені рівняння

$$\alpha J_\nu(t) + \beta t J'_\nu(t) = 0,$$

в якому $\frac{\alpha}{\beta}+\nu > 0$, $\nu > -1$, то коефіцієнти розкладу (12) визначаються за формулами

$$a_k = \frac{2}{(1+\frac{\alpha^2-\beta^2\nu^2}{\beta^2\mu_k^2})l^2 J_\nu^2(\mu_k)} \int\limits_0^l tf(t) J_\nu(\frac{\mu_k t}{l}) dt, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

У випадку, коли $\frac{\alpha}{\beta}+\nu = 0$, $\nu > -1$, розклад (12) треба замінити таким:

$$f(t) = a_0 t^\nu + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_\nu(\frac{\mu_k t}{l}), \tag{15}$$

де

$$a_0 = \frac{2(\nu+1)}{l^{2(\nu+1)}} \int\limits_0^l t^{\nu+1} f(t) dt,$$

а коефіцієнти a_k, $k \in \mathbb{N}$, обчислюються за формулами (14).

Розглянемо тепер задачу (2), (3). Загальний розв'язок рівняння (2), згідно з (4), має вигляд

$$y(x) = C_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}x) + C_2 Y_\nu(\sqrt{\lambda}x). \tag{16}$$

Задовольнивши функцією (16) умови (3), дістанемо, що $C_2 = 0$, оскільки функція Y_ν необмежена при $x \to 0$, і $C_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}l) = 0$. Коефіцієнт $C_1 \neq 0$, бо нас цікавить ненульовий розв'язок, а тому $J_\nu(\sqrt{\lambda}l) = 0$. Звідси випливає, що $\sqrt{\lambda}l = \mu_k$, $k \in \mathbb{N}$, де μ_k, $k \in \mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $J_\nu(t) = 0$.

Отже, власними числами задачі (2), (3) є $\lambda_k = (\frac{\mu_k}{l})^2$, а відповідними власними функціями – $y_k(x) = J_\nu(\frac{\mu_k}{l}x)$, $k \in \mathbb{N}$.

2^0. Якщо $p(x) = 1 - x^2$, $\rho = 1$, $q = 0$, $a = -1$, $b = 1$, то задача Штурма–Ліувілля для рівняння (1) набуде вигляду

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dy(x)}{dx}) + \lambda y(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \tag{17}$$

$$|y(x)| < +\infty, \quad x \in [-1, 1]. \tag{18}$$

Доведено, що ця задача має розв'язки тоді й тільки тоді, коли $\lambda_k = k(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, і цими розв'язками є **поліноми Лежандра**

$$y_k(x) = P_k(x) := \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Відомо, що поліноми Лежандра є ортогональними на $[-1,1]$, а саме:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_k(t)P_m(t)dt = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \frac{2}{2m+1}, & k = m. \end{cases}$$

Відзначимо, що всяка функція f, яка задовольняє умови теореми Стеклова (тема 4), розкладається в ряд Фур'є за поліномами Лежандра

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x), \quad x \in [-1,1],$$

де a_k обчислюються за формулою

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Наведемо вирази для P_k при $k \in \{0,1,...,6\}$:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x), \; P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5).$$

Якщо взяти $x = \cos\theta$, то дістанемо

$$P_0(\cos\theta) = 1, \quad P_1(\cos\theta) = \cos\theta, \quad P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1),$$

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos\theta), \quad P_4(\cos\theta) = \frac{1}{64}(35\cos 4\theta + 20\cos 2\theta + 9),$$

$$P_5(\cos\theta) = \frac{1}{128}(63\cos 5\theta + 35\cos 3\theta + 30\cos\theta),$$

$$P_6(\cos\theta) = \frac{1}{512}(231\cos 6\theta + 126\cos 4\theta + 105\cos 2\theta + 50).$$

Правильними є такі співвідношення:

1) $|P_n(x)| \le 1$, $x \in [-1;\ 1]$;

2) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, $x \in [-1;\ 1]$, $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$;

3) $P_{2n-1}(0) = 0$, $P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$;

4) $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$,
$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$, $x \in [-1;\ 1]$;

5) $\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)dx = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n = 2k, \\ (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!}, & n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N}; \end{cases}$

6) $\int\limits_{0}^{1} xP_n(x)dx = \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ (-1)^k \frac{(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!}, & n = 2k, \quad k \in \mathbb{N}; \end{cases}$

7) $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} P_{2n}(\cos\theta)d\theta = \left(\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\right)^2$;

8) $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} P_{2n+1}(\cos\theta)\cos\theta d\theta = \frac{C_{2n}^n C_{2n+2}^{n+1}}{2^{4n+2}}$.

3^0. Якщо $p(x) = 1-x^2$, $q(x) = m^2/(1-x^2)$, $m \ge 0$ – ціле, $\rho = 1$, $a = -1$, $b = 1$, то задача Штурма–Ліувілля для рівняння (1)

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dy(x)}{dx}) + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})y(x) = 0, \quad -1 < x < 1,$$

$$|y(x)| < +\infty, \quad x \in [-1, 1],$$

має відповідно такі власні числа і функції:

$$\lambda_k = k(k+1), \quad y_k = P_k^m(x), \quad k \in \{m, m+1, ...\},$$

де P_k^m – **приєднані поліноми Лежандра**, які визначаються за формулами

$$P_k^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_k(x)}{dx^m}, \quad m>0, \quad k\geq m;$$
$$P_k^0(x) = P_k(x), \qquad m=0, \quad k\geq 0.$$

Ряд Фур'є за власними функціями в цьому випадку має вигляд

$$f(x) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k P_k^m(x), \quad x\in(-1,1),$$

де

$$a_k = \frac{(2k+1)(k-m)!}{2(k+m)!}\int\limits_{-1}^{1} f(x)P_k^m(x)dx, \quad k\geq m,$$

і називається **рядом Фур'є–Лежандра** за приєднаними поліномами Лежандра.

Випишемо декілька приєднаних поліномів Лежандра в явному вигляді, коли $x=\cos\theta$:

$$P_1^1(\cos\theta) = \sin\theta, \quad P_2^1(\cos\theta) = 3\sin\theta\cos\theta,$$

$$P_3^1(\cos\theta) = \sin\theta\frac{15\cos^2\theta-3}{2}, \; P_3^2(\cos\theta) = 15\sin^2\theta\cos\theta,$$

$$P_3^3(\cos\theta) = 15\sin^3\theta, \;\; P_4^2(\cos\theta) = \sin^2\theta\left(\frac{105}{2}\cos^2\theta-\frac{15}{2}\right),$$

$$P_n^n(\cos\theta) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta, \quad 0\leq\theta\leq\pi.$$

Приклад 1. Знайти розв'язок рівняння

$$u_{tt}(r,t) = \frac{a^2}{r}(ru_r(r,t))_r, \quad 0<r<l, \quad t>0, \tag{19}$$

який задовольняє крайові

$$|u(0,t)|<+\infty, \quad u_r(l,t)=0, \quad t\geq 0, \tag{20}$$

і початкові умови

$$u(r,0) = 0, \quad u_t(r,0) = r^2, \quad 0 < r < l. \tag{21}$$

$\triangleleft$ Розв'язуватимемо задачу методом відокремлення змінних. Тоді, підставивши $u(r,t) = X(r)T(t)$ у рівняння (19) і крайові умови (20), дістанемо, що

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \tag{22}$$

$$\frac{1}{r}(rX'(r))_r + \lambda^2 X(r) = 0, \quad |X(0)| < +\infty, \quad X'(l) = 0. \tag{23}$$

Задача (23) є задачею Штурма–Ліувілля. Рівняння із задачі (23) є рівнянням вигляду (2) з $\nu = 0$, загальний розв'язок якого $X(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)$. При $r \to 0$ функція $Y_0(\lambda r) \to +\infty$, через те $C_2 = 0$, бо розв'язок повинен бути обмеженим. За умовою $X'(l) = 0$, а тому $C_1 \lambda J_0'(\lambda l) = 0$. Оскільки $C_1 \neq 0$, бо інакше X буде тривіальним розв'язком, то $J_0'(\lambda l) = 0$. За допомогою рівності $J_0'(x) = -J_1(x)$ дістанемо рівняння $J_1(\lambda l) = 0$. Це рівняння має безліч додатних дійсних коренів μ_k, $k \in \mathbb{N}$, тому власні числа задачі (23) $\lambda_k = \frac{\mu_k}{l}$, а власні функції $X_k(r) = J_0(\frac{\mu_k}{l} r)$, $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, що $\lambda_0 = 0$ є також власним числом задачі (23), а власна функція, яка йому відповідає, $X_0 = 1$. Якщо підставити замість λ його значення в рівняння (22), то, розв'язавши отримані рівняння, матимемо

$$T_0(t) = A_0 t + B_0, \qquad T_k(t) = A_k \cos\frac{a\mu_k t}{l} + B_k \sin\frac{a\mu_k t}{l}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Скориставшись принципом суперпозиції, розв'язок задачі (19) – (21) шукаємо у вигляді

$$u(r,t) = A_0 t + B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{a\mu_k t}{l} + B_k \sin\frac{a\mu_k t}{l} \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{l}\right),$$

$$0 \le r \le l, \quad t \ge 0. \tag{24}$$

Задовольнивши початкові умови (21), матимемо

$$\begin{cases} B_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k J_0(\frac{\mu_k r}{l}) = 0, \\ A_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \frac{a\mu_k}{l} J_0(\frac{\mu_k r}{l}) = r^2, \quad 0 \le r \le l. \end{cases}$$

Звідси, скориставшись формулою (13), одержимо що $B_0 = 0$, $A_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, а

$$A_0 = \frac{2}{l^2}\int\limits_0^l r^3 dr = \frac{l^2}{2},$$

$$B_k = \frac{l}{a\mu_k}\frac{2}{l^2 J_0^2(\mu_k)}\int\limits_0^l r^3 J_0(\frac{\mu_k r}{l})dr = \left| \begin{array}{l} \frac{\mu_k r}{l} = z, \\ \frac{\mu_k}{l}dr = dz, \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} r & 0 & l \\ \hline z & 0 & \mu_k \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2l^4}{a\mu_k l J_0^2(\mu_k)\mu_k^4}\int\limits_0^{\mu_k} z^3 J_0(z)dz = \frac{2l^3}{a\mu_k^5 J_0^2(\mu_k)}(2\mu_k^2 J_0(\mu_k)+$$

$$+(\mu_k^3 - 4\mu_k)J_1(\mu_k)) = \frac{4l^3}{a\mu_k^3 J_0(\mu_1)}, \text{ бо } J_1(\mu_k) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Підставивши A_0, B_0, A_k, B_k, $k \in \mathbb{N}$, у (24), дістанемо розв'язок задачі (19) – (21)

$$u(r,t) = \frac{l^2 t}{2} + \frac{4l^3}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{a\mu_k}{l}t}{\mu_k^3 J_0(\mu_k)}J_0(\frac{\mu_k}{l}r), \quad 0 \le r \le l, \quad t \ge 0. \quad \triangleright$$

Приклад 2. Знайти температуру необмеженого кругового циліндра $\{0 < r < R_0\}$, якщо його початкова температура дорівнює u_0, а на бічну поверхню подається зовні, починаючи з моменту $t = 0$, постійний тепловий потік з густиною q.

$\triangleleft$ Задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння

$$u_t(r,t) = a^2(u_{rr}(r,t) + \frac{1}{r}u_r(r,t)), \quad 0 < r < R_0, \quad t > 0, \tag{25}$$

який задовольняє умови

$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u_r(R_0,t) = \frac{q}{k}, \quad t \ge 0; \tag{26}$$

$$u(r,0) = u_0, \quad 0 \le r \le R_0. \tag{27}$$

Оскільки крайові умови неоднорідні, то розв'язок задачі (25) – (27) шукатимемо у вигляді $u = w + v$, де w – розв'язок рівняння (25), який задовольняє крайові умови (26). Вигляд крайових умов підказує, що

w зручно шукати у вигляді $w(r,t) = At + Cr^2$. Після підстановки w у рівняння і крайові умови, дістанемо

$$A = a^2(2C + \frac{1}{r}2Cr), \quad 2CR_0 = \frac{q}{k}$$

або

$$A = \frac{2a^2q}{kR_0}, \quad C = \frac{q}{2kR_0},$$

а це означає, що

$$w(r,t) = \frac{q}{kR_0}(2a^2t + \frac{r^2}{2}), \;\; 0 \le r \le R_0, \; t \ge 0. \tag{28}$$

Тоді для v матимемо задачу

$$v_t(r,t) = a^2(v_{rr}(r,t) + \frac{1}{r}v_r(r,t)), \;\; 0 < r < R_0, \; t > 0, \tag{29}$$

$$|v(0,t)| < +\infty, \quad v_r(R_0,t) = 0, \;\; t \ge 0, \tag{30}$$

$$v(r,0) = u_0 - w(r,0) = u_0 - \frac{qr^2}{2kR_0}, \;\; 0 \le r \le R_0. \tag{31}$$

Задачу розв'язуватимемо методом Фур'є, тобто шукатимемо нетривіальні розв'язки рівняння (29), які задовольняють крайові умови (30), у вигляді $v(r,t) = X(r)T(t)$. Після підстановки v у (29) і (30), одержимо

$$T'(t) + (a\lambda)^2T(t) = 0, \tag{32}$$

$$X''(r) + \frac{1}{r}X'(r) + \lambda^2X(r) = 0, \quad |X(0)| < +\infty, \quad X'(R_0) = 0. \tag{33}$$

У прикладі 1 показано, що власними числами задачі (33) є $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n = \frac{\mu_n}{R_0}$, $n \in \mathbb{N}$, а власними функціями – відповідно $X_0(r) = 1$, $X_n(r) = J_0(\frac{\mu_n}{R_0}r)$, $n \in \mathbb{N}$, де μ_n – дійсні додатні корені рівняння $J_1(\mu) = 0$. Розв'язками рівняння (32) при $\lambda = \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, є функції $T_0(t) = A_0$, $T_n(t) = A_n\exp\{-(\frac{a\mu_n}{R_0})^2t\}$, $n \in \mathbb{N}$. Складемо ряд

$$v(r,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\exp\{-(\frac{a\mu_n}{R_0})^2t\}J_0(\frac{\mu_n r}{R_0})$$

і задовольнимо початкову умову (31):

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_nJ_0(\frac{\mu_n}{R_0}r) = u_0 - \frac{q}{2R_0k}r^2, \;\; 0 \le r \le R_0.$$

Звідси одержуємо, що

$$A_0 = \frac{2}{R_0^2}\int\limits_0^{R_0} r(u_0 - \frac{q}{2R_0k}r^2)dr = u_0 - \frac{qR_0}{4k},$$

$$A_n = \frac{2}{R_0^2 J_0^2(\mu_n)}\int\limits_0^{R_0} r(u_0 - \frac{r^2 q}{2R_0k})J_0(\frac{\mu_n}{R_0}r)dr = \left| \begin{array}{c} \frac{\mu_n r}{R_0} = z,\ \frac{\mu_n}{R_0}dr = dz, \\ \begin{array}{c|cc} r & 0 & R_0 \\ \hline z & 0 & \mu_n \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{R_0^2 J_0^2(\mu_n)}\left(\frac{R_0}{\mu_n}\right)^2 \left(u_0 \int\limits_0^{\mu_n} zJ_0(z)dz - \frac{q}{2R_0k}\int\limits_0^{\mu_n} z^3 J_0(z)dz \right) =$$

$$= \frac{2}{R_0^2 J_0^2(\mu_n)}\left(u_0 \frac{R_0^2}{\mu_n}J_1(\mu_n) - \frac{q}{2R_0k}\frac{R_0^4}{\mu_n^4}(2\mu_n^2 J_0(\mu_n) + \right.$$

$$\left. +(\mu_n^3 - 4\mu_n)J_1(\mu_n))\right) = -\frac{2R_0q}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)k}\ , \quad \text{бо } J_1(\mu_n) = 0, n \in \mathbb{N}.$$

Тому

$$v(r,t) = u_0 - \frac{qR_0}{4k} - \frac{2R_0q}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2}\frac{J_0(\frac{\mu_n}{R_0}r)}{J_0(\mu_n)}\exp\{-(\frac{a\mu_n}{R_0})^2 t\},$$

$$0 \le r \le R_0, \quad t \ge 0. \tag{34}$$

Врахувавши (28) і (34), дістанемо, що розв'язок задачі (25) – (27) має вигляд

$$u(r,t) = \frac{q}{kR_0}(2a^2t + \frac{r^2}{2}) + u_0 - \frac{qR_0}{4k} - \frac{2R_0q}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2}\frac{J_0(\frac{\mu_n}{R_0}r)}{J_0(\mu_n)}\times$$

$$\times\exp\{-(\frac{a\mu_n}{R_0})^2 t\}, \quad 0 \le r \le R_0, \quad t \ge 0. \quad \triangleright$$

Приклад 3. Знайти розв'язок рівняння

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + \frac{1}{x}u_x(x,t) + (\sin t + \cos t)J_0(\mu_k x),$$

$$0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{35}$$

який задовольняє крайові

$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(1,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{36}$$

і початкові умови

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{37}$$

де μ_k – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$.

$\lhd$ Оскільки рівняння (35) неоднорідне, то розв'язок слід шукати у вигляді суми двох функцій $u = w + v$, де функцію w вибираємо так, щоб вона задовольняла рівняння (35) і крайові умови (36), тобто була розв'язком задачі

$$\begin{gathered} w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t) + \tfrac{1}{x} w_x(x,t) + (\sin t + \cos t) J_0(\mu_k x), \\ 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ |w(0,t)| < +\infty, \quad w(1,t) = 0, \quad t \geq 0. \end{gathered} \tag{38}$$

Тоді функція v буде розв'язком такої задачі:

$$\begin{gathered} v_{tt}(x,t) = v_{xx}(x,t) + \tfrac{1}{x} v_x(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ |v(0,t)| < +\infty, \quad v(1,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ v(x,0) = -w(x,0), \quad v_t(x,0) = -w_t(x,0), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{gathered} \tag{39}$$

Шукатимемо розв'язок задачі (38) у вигляді

$$w(x,t) = (C_1 \sin t + C_2 \cos t) J_0(\mu_k x). \tag{40}$$

Підставимо w у неоднорідне рівняння

$$\begin{aligned} (-C_1 \sin t - C_2 \cos t) J_0(\mu_k) = (C_1 \sin t + C_2 \cos t) \Bigg(\frac{d^2}{dx^2} (J_0(\mu_k x)) + \\ + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (J_0(\mu_k x)) \Bigg) + (\sin t + \cos t) J_0(\mu_k x). \end{aligned} \tag{41}$$

Оскільки $J_0(\mu_k x)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d^2}{dx^2}(J_0(\mu_k x)) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}(J_0(\mu_k x)) + \mu_k^2 J_0(\mu_k x) = 0,$$

то з (41) дістаємо

$$(\mu_k^2 - 1)(C_1 \sin t + C_2 \cos t) J_0(\mu_k x) = (\sin t + \cos t) J_0(\mu_k x).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin t$ і $\cos t$ у правій і лівій частинах рівності, одержуємо $(\mu_k^2-1)C_1 = 1$, $(\mu_k^2-1)C_2 = 1$, а тому $C_1 = C_2 = \frac{1}{\mu_k^2-1}$. Отже, $w(x,t) = \frac{1}{\mu_k^2-1}(\sin t + \cos t)J_0(\mu_k x)$.

Задачу (39) розв'язуватимемо методом відокремлення змінних. Підставивши $v(x,t) = X(x)T(t)$ у рівняння, дістанемо

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0, \tag{42}$$

$$X''(x) + \frac{1}{x}X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \tag{43}$$

Загальний розв'язок рівняння (43)

$$X(x) = AJ_0(\lambda x) + BY_0(\lambda x). \tag{44}$$

Задовольнивши функцією v крайові умови (39), матимемо

$$|X(0)| < +\infty, \quad X(1) = 0. \tag{45}$$

Тоді

$$B = 0, \quad AJ_0(\lambda) = 0.$$

Оскільки $A \neq 0$, то $J_0(\lambda) = 0$. Звідси випливає, що $\lambda_n = \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$, де μ_n – додатні корені рівняння $J_0(x) = 0$, є власними числами задачі Штурма–Ліувілля (43), (45), а відповідними власними функціями – $X_n(x) = J_0(\mu_n x)$, $n \in \mathbb{N}$. Підставивши $\lambda = \lambda_n$ в рівняння (42) і розв'язавши одержане рівняння, дістанемо $T_n(t) = A_n \cos\mu_n t + B_n \sin\mu_n t$, $n \in \mathbb{N}$. Утворимо ряд

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\mu_n t + B_n \sin\mu_n t)J_0(\mu_n x), \quad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0,$$

і задовольнимо початкові умови. Матимемо

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n x) = -\frac{1}{\mu_k^2-1}J_0(\mu_k x), \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \mu_n J_0(\mu_n x) = -\frac{1}{\mu_k^2-1}J_0(\mu_k x), \quad 0 \le x \le 1. \end{cases} \tag{46}$$

З (46) одержуємо, що $A_k = -\frac{1}{\mu_k^2-1}$, $A_n = 0$, $n \neq k$; $B_k = \frac{-1}{\mu_k(\mu_k^2-1)}$, $B_n = 0$, $n \neq k$. Отже,

$$v(x,t) = -\frac{1}{\mu_k^2-1}(\cos\mu_k t + \frac{1}{\mu_k}\sin\mu_k t)J_0(\mu_k x), \quad 0 \le x \le 1, \ t \ge 0.$$

Остаточно розв'язок задачі (35) – (37) запишеться так:

$$u(x,t)=\frac{1}{\mu_k^2-1}(\sin t+\cos t-\cos\mu_k t-\frac{1}{\mu_k}\sin\mu_k t)J_0(\mu_k x),\ \ 0\le x\le 1,\ t\ge 0. \triangleright$$

Вправи

О1. Розв'язати мішану задачу:

1)
$$u_{tt}=a^2(u_{rr}+\tfrac{1}{r}u_r),\quad 0<r<l,\quad t>0,$$
$$|u(0,t)|<+\infty,\quad u(l,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(r,0)=\tfrac{l}{100}J_0\left(\tfrac{\mu_1 r}{l}\right),\ \ u_t(r,0)=0,\quad 0\le r\le l,$$
де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_0(\mu)=0$;

2)
$$u_{tt}=a^2(u_{rr}+\tfrac{1}{r}u_r),\quad 0<r<b,\quad t>0,$$
$$|u(0,t)|<+\infty,\quad u(b,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(r,0)=0,\ \ u_t(r,0)=1-\tfrac{r^2}{b^2},\quad 0\le r\le b;$$

3)
$$u_{tt}=u_{xx}+\tfrac{1}{x}u_x+2\cos 2t,\quad 0<x<1,\quad t>0,$$
$$|u(0,t)|<+\infty,\quad u(1,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=\tfrac{1}{2}(\tfrac{J_0(2x)}{J_0(2)}-1)+J_0(\mu_1 x),$$
$$u_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le 1,$$
де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_0(\mu)=0$;

4)
$$u_{tt}=u_{xx}+\tfrac{1}{x}u_x-\tfrac{u}{x^2}+e^tJ_1(\mu_k x),\quad 0<x<1,\quad t>0,$$
$$|u(0,t)|<+\infty,\quad u(1,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le 1,$$
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_1(\mu)=0$;

5)
$$u_{tt}=u_{xx}+\tfrac{1}{x}u_x-\tfrac{u}{x_2},\quad 0<x<1,\quad t>0,$$
$$|u(0,t)|<+\infty,\quad u(1,t)=\sin 2t\cos t,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=\tfrac{J_1(x)}{2J_1(1)}+\tfrac{3}{2}\tfrac{J_1(3x)}{J_1(3)},\ \ 0\le x\le 1;$$

6)
$$u_{tt}=u_{xx}+\tfrac{1}{x}u_x-\tfrac{9u}{x^2},\quad 0<x<1,\quad t>0,$$
$$|u(0,t)|<+\infty,\quad u(1,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=J_3(\mu_1 x),\quad u_t(x,0)=J_3(\mu_1 x),\quad 0\le x\le 1,$$
де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_3(\mu)=0$;

7) $u_{tt}=u_{xx}+\frac{1}{x}u_x-\frac{9u}{x^2}+e^{-t}J_3(\mu_k x),\quad 0<x<1,\, t>0,$
$$|u(0,t)|<+\infty,\quad u(1,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0,\quad 0\le x\le 1,$$
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_3(\mu)=0$;

8) $u_t=xu_{xx}+u_x-\frac{1}{4x}u+tJ_1(\mu_k\sqrt{x}),\quad 0<x<1,\quad t>0,$
$$|u(0,t)|<+\infty,\quad u(1,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=0,\quad 0\le x\le 1,$$
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_1(\mu)=0$;

9) $u_t=u_{xx}+\frac{1}{x}u_x-\frac{1}{x^2}u+\sin tJ_1(\mu_k x),\quad 0<x<1, t>0,$
$$|u(0,t)|<+\infty,\qquad u(1,t)=0,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=0,\quad 0\le x\le 1,$$
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_1(\mu)=0$;

10) $u_t=a^2(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r),\quad 0<r<R_0,\quad t>0,$
$$u_r(R_0,t)=h(u_1-u(R_0,t)),\quad t\ge 0,$$
$$u(r,0)=u_0,\quad 0\le r\le R_0,$$
де $u_0,\ u_1$ – сталі;

11) $u_t=a^2(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r),\quad 0<r<R_0,\quad t>0,$
$$u_r(R_0,t)=h(u_1+\alpha t-u(R_0,t)),\quad t\ge 0,$$
$$u(r,0)=u_0,\quad 0\le r\le R_0,$$
де α – стала.

O2. Знайти вільні коливання закріпленої по контуру однорідної круглої мембрани радіуса R_0, якщо в початковий момент відхилення в кожній точці визначалось рівністю $u(r,\varphi,0)=AJ_0\left(\frac{\mu_1 r}{R_0}\right)$, $0\le r\le R_0$, $0<\varphi\le 2\pi$, де μ_1 – перший додатний корінь рівняння $J_0(\mu)=0$, а початкові швидкості точок мембрани дорівнювали Ba, де a – стала з рівняння коливань, A і B – сталі.

C1. Вивчити вільні коливання однорідної круглої мембрани радіуса R_0, яка закріплена по краю, якщо в початковий момент часу вона була поверхнею параболоїда обертання, а початкові швидкості дорівнювали нулю.

C2. Кругла однорідна мембрана радіуса R_0 закріплена по контуру і знаходиться у стані рівноваги при натягу T. У момент часу $t = 0$ до поверхні мембрани прикладено рівномірне навантаження $P_0 \sin \omega t$. Знайти радіальні коливання мембрани.

C3. Дано необмежений круговий циліндр радіуса R_0. Знайти розподіл температури всередині циліндра в момент часу $t > 0$, якщо:

1) на поверхні циліндра підтримується нульова температура, а температура всередині циліндра в початковий момент часу дорівнює $AJ_0(\frac{\mu_k r}{R_0})$, $0 \le r \le R_0$, де μ_k – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$;

2) через поверхню відбувається конвективний теплообмін із середовищем, температура якого дорівнює u_1, а початкова температура дорівнює u_0.

C4. Знайти температуру нескінченного кругового циліндра радіуса R_0, якщо його початкова температура дорівнює $u_0 = \mathrm{const}$, а на поверхню зовні подається з моменту часу $t = 0$ тепловий потік густини q.

C5. Однорідна кругла мембрана радіуса R_0 з центром у початку координат і закріпленою межею здійснює поперечні коливання в середовищі без опору. Вивчити коливання мембрани, які викликані початковою швидкістю u_0 точок мембрани.

C6. Вивчити осесиметричні коливання круглої мембрани радіуса R_0, які викликані ударним імпульсом P, що прикладений в момент $t = 0$ і розподілений по площі круга радіуса ε.

C7. Розв'язати мішану задачу:

1)
$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x + (t^2+1)J_0(\mu_k x), \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(1,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1,$$
де $\mu_k > 0$ – корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$;

2)
$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x, \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(1,t) = \cos 2t, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = \frac{J_0(2x)}{J_0(2)}, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1;$$

3) $$u_{tt} = a^2(u_{rr} + \tfrac{1}{r}u_r), \quad 0 < r < R_0, \quad t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u_r(R_0,t) = B\cos\omega t, \quad t \geq 0,$$
$$u(r,0) = 0, \quad u_t(r,0) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_0;$$

4) $$u_t = a^2(u_{rr} + \tfrac{1}{r}u_r), \quad 0 < r < R_0,\ t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u_r(R_0,t) + hu(R_0,t) = 0,\ t \geq 0,$$
$$u(r,0) = u_0 r^2, \quad 0 \leq r \leq R_0.$$

Домашнє завдання

Д1. Розв'язати мішану задачу:

1) $$u_{tt} = u_{xx} + \tfrac{1}{x}u_x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(1,t) = t - 1, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = J_0(\mu_1 x) - 1, \quad u_t(x,0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$
де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$;

2) $$u_{tt} = u_{xx} + \tfrac{1}{x}u_x - \cos t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(1,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 1 - \tfrac{J_0(x)}{J_0(1)}, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

3) $$u_{tt} = u_{xx} + \tfrac{1}{x}u_x - u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(1,t) = \cos 2t + \sin 3t, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = \tfrac{J_0(x\sqrt{3})}{J_0(\sqrt{3})}, \quad u_t(x,0) = \tfrac{3J_0(2x\sqrt{2})}{J_0(2\sqrt{2})}, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

4) $$u_{tt} = u_{xx} + \tfrac{1}{x}u_x - \tfrac{9u}{x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(1,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = J_3(\mu_1 x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$
де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_3(\mu) = 0$;

5) $$u_{tt} = u_{xx} + \tfrac{1}{x}u_x - \tfrac{9u}{x^2} + (t - t^2)J_3(\mu_k x), \quad 0 < x < 1, t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(1,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

6) $$u_t = u_{xx} + \tfrac{1}{x}u_x - \tfrac{1}{x^2}u + e^{-t}J_1(\mu_k x), \quad 0 < x < 1,\ t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(1,t) = 0, \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_1(\mu) = 0$;

7) $$u_t = xu_{xx} + u_x - \frac{9}{4x}u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(1,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = J_3(\mu_k\sqrt{x}), \quad 0 \le x \le 1,$$
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_3(\mu) = 0$;

8) $$u_{tt} = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) + P\sin\omega t, \quad 0 < r < R_0, \quad t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(R_0,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(r,0) = 0, \quad u_t(r,0) = 0, \quad 0 \le r \le R_0;$$

9) $$u_{tt} = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) + A\sin\omega t, \quad 0 < r < R_0, \quad t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u_r(R_0,t) + hu(R_0,t) = 0, \quad h > 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(r,0) = 0, \quad u_t(r,0) = 0, \quad 0 \le r \le R_0;$$

10) $$u_{tt} = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r) + \frac{p_0}{\rho}, \quad 0 < r < R_0, \quad t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(R_0,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(r,0) = 0, \quad u_t(r,0) = 0, \quad 0 \le r \le R_0.$$

Д2. Знайти розподіл температури всередині необмеженого кругового циліндра радіуса R_0 у момент часу $t > 0$, якщо поверхня циліндра підтримується при сталій температурі u_0, а початкова температура всередині циліндра дорівнює нулеві.

Відповіді

О1. 1) $u(r,t) = \frac{l}{100}\cos\frac{a\mu_1 t}{l}J_0\left(\frac{\mu_1 r}{l}\right)$;

2) $u(r,t) = \frac{8b}{a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^4 J_1(\mu_n)}\sin\frac{a\mu_n t}{b}J_0\left(\frac{\mu_n r}{b}\right)$;

3) $u(x,t) = \frac{1}{2}(\frac{J_0(2x)}{J_0(2)} - 1)\cos 2t + J_0(\mu_1 x)\cos\mu_1 t$;

4) $u(x,t) = \frac{1}{1+\mu_k^2}(e^t - \cos\mu_k t - \frac{1}{\mu_k}\sin\mu_k t)J_1(\mu_k x)$;

5) $u(x,t) = \frac{1}{2}\frac{J_1(3x)}{J_1(3)}\sin 3t + \frac{1}{2}\frac{J_1(x)}{J_1(1)}\sin t$;

6) $u(x,t) = (\cos\mu_1 t + \frac{1}{\mu_1}\sin\mu_1 t)J_3(\mu_1 x)$;

7) $u(x,t) = \frac{1}{\mu_k(1+\mu_k^2)}(\sin\mu_k t - \mu_k\cos\mu_k t + \mu_k e^{-t})J_3(\mu_k x)$;

8) $u(x,t) = (\frac{16}{\mu_k^2}e^{-\frac{\mu_k^2}{4}t} + \frac{4}{\mu_k^2}(t - \frac{4}{\mu_k^2}))J_1(\mu_k\sqrt{x})$;

9) $u(x,t) = \frac{1}{1+\mu_k^4}(e^{-\mu_k^2 t} + \mu_k^2\sin t - \cos t)J_1(\mu_k x)$;

10) $u(r,t) = u_1 + 2(u_1 - u_0)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\mu_n)e^{-\frac{a^2\mu_n^2 t}{R_0^2}}}{\mu_n(J_0^2(\mu_n)+J_1^2(\mu_n))}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R_0}\right)$,

де μ_n, $n \in \mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $\mu J_0'(\mu) + hR_0 J_0(\mu) = 0$. $(*)$ Оскільки, згідно з $(*)$, $\frac{J_1(\mu_n)}{\mu_n(J_0^2(\mu_n)+J_1^2(\mu_n))} = \frac{hR_0}{J_0(\mu_n)(\mu_n^2+h^2R_0^2)}$, то розв'язок можна подати у вигляді

$$u(r,t) = u_1 + 2(u_1 - u_0)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{a^2\mu_n^2 t}{R_0^2}}}{J_0(\mu_n)(\mu_n^2+h^2R_0^2)} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R_0}\right);$$

11) $u(r,t) = u_0 + \alpha\left(t + \frac{r^2 - R_0^2 - \frac{2R_0}{h}}{4a^2}\right) + \frac{2h\alpha R_0^3}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{a^2\mu_n^2 t}{R_0^2}} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R_0}\right)}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)(\mu_n^2+h^2R_0^2)}$,
де μ_n, $n \in \mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $(*)$.

O2.
$$u_{tt}(r,t) = a^2\left(u_{rr}(r,t) + \frac{1}{r}u_r(r,t)\right), \quad 0 < r < R_0,\ t > 0,$$
$$u(R_0,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(r,0) = AJ_0\left(\frac{\mu_1 r}{R_0}\right), \quad u_t(r,0) = Ba, \quad 0 \le r \le R_0;$$

$$u(r,t) = A\cos\frac{a\mu_1 t}{R_0} J_0\left(\frac{\mu_1 r}{R_0}\right) + 2RB\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 J_1(\mu_n)} \sin\frac{a\mu_n t}{R_0} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R_0}\right).$$

C1.
$$u_{rr}(r,t) + \frac{1}{r}u_r(r,t) = \frac{1}{a^2}u_{tt}(r,t), \quad 0 < r < R_0,\ t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(R_0,t) = 0, \quad t > 0,$$
$$u(r,0) = A(1 - \frac{r^2}{R_0}), \quad u_t(r,0) = 0, \quad A = \mathrm{const}, \quad 0 \le r \le R_0;$$

$$u(r,t) = 8A\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k \frac{r}{R})}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} \cos\frac{a\mu_k t}{R_0}.$$

C2. $u_{rr}(r,t) + \frac{1}{r}u_r(r,t) - \frac{1}{a^2}u_{tt}(r,t) = -\frac{P_0\sin\omega t}{T}, \quad 0 < r < R_0, t > 0,$
$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(R_0,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(r,0) = 0, \quad u_t(r,0) = 0, \quad 0 \le r \le R_0;$$

$$u(r,t) = \frac{a^2P_0}{T\omega^2}\left(\frac{J_0(\frac{\omega}{a}r)}{J_0(\frac{\omega}{a}R_0)} - 1\right)\sin\omega t - \frac{2aP_0R_0^3\omega}{t}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{a\mu_k t}{R_0} J_0(\frac{\mu_k}{R_0}r)}{\mu_k^2(\omega^2R_0^2 - a^2\mu_k^2)J_0'(\mu_k)}.$$

C3. 1)
$$u_t = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r), \quad 0 < r < R_0, \quad t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty, \ u(R_0,t) = 0, \quad t \ge 0,$$
$$u(r,0) = AJ_0\left(\frac{\mu_k r}{R_0}\right), \ 0 \le r \le R_0;$$

$$u(r,t) = Ae^{-(\frac{a\mu_k}{R_0})^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R_0}\right);$$

$$2)\qquad u_t = a^2(u_{rr} + \tfrac{1}{r}u_r),\quad 0 < r < R_0,\quad t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty,\ u_r(R_0,t) + hu(R_0,t) = u_1,\quad t \geq 0,$$
$$u(r,0) = u_0,\ 0 \leq r \leq R_0;$$

$u(r,t) = u_1 + 2(u_1 - u_0)hR_0 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-(\frac{a\mu_k}{R_0})^2 t}}{J_0(\mu_k)(\mu_k^2 + h^2R_0^2)} J_0(\frac{\mu_k r}{R_0})$, де $\mu_k,\ k \in \mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $\mu J_0'(\mu) + hR_0J_0(\mu) = 0$.

C4. $$u_t(r,t) = a^2(u_{rr}(r,t) + \tfrac{1}{r}u_r(r,t)),\quad 0 < r < R_0,\ t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty,\quad u_r(R_0,t) = \tfrac{q}{k},\quad t \geq 0,$$
$$u(r,0) = u_0,\quad 0 \leq r \leq R_0;$$

$u(r,t) = u_0 + \frac{qR_0}{h}\big(\frac{2a^2t}{R_0^2} - \frac{1}{4}(1 - \frac{2r^2}{R_0^2})\big) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} e^{-(\frac{a\mu_n}{R_0})^2 t} J_0(\frac{\mu_n}{R_0}r)$,
де $\mu_n,\ n \in \mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $J_1(\mu) = 0$.

C5. $$u_{tt}(r,t) = a^2\tfrac{1}{r}(ru_r(r,t))_r,\quad 0 < r < R_0,\ t > 0,$$
$$|u(0,t)| < +\infty,\quad u(R_0,t) = 0,\quad t \geq 0,$$
$$u(r,0) = 0,\quad u_t(r,0) = u_0,\quad 0 \leq r \leq R_0;$$

$u(r,t) = \frac{2R_0u_0}{a} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)} \sin\frac{a\mu_k t}{R_0} J_0(\frac{\mu_k r}{R_0})$,
де $\mu_k,\ k \in \mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $J_0(\mu) = 0$.

C6. $$\tfrac{1}{r}\left(ru_r(r,t)\right)_r - \tfrac{1}{a^2}u_{tt}(r,t) = 0,\quad 0 < r < R_0,\ t > 0,$$
$$|u(r,t)| < +\infty,\ 0 \leq r \leq R_0,\quad u(R_0,t) = 0,\ t \geq 0,$$
$$u(r,0) = 0,\ 0 \leq r \leq R_0,\quad u_t(r,0) = \begin{cases} \frac{P}{\pi\varepsilon^2\rho},\ 0 \leq r \leq \varepsilon, \\ 0,\quad \varepsilon < r \leq R_0; \end{cases}$$

$u(r,t) = \frac{2Pa}{\pi\varepsilon\rho} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} J_1\left(\frac{\mu_n\varepsilon}{R_0}\right) J_0\left(\mu_n\frac{r}{R_0}\right) \sin\frac{a\mu_n t}{R_0}$.

C7. 1) $u(x,t) = (\frac{2-\mu_k^2}{\mu_k^4}\cos\mu_k t + \frac{t^2}{\mu_k^2} + \frac{\mu_k^2 - 2}{\mu_k^4})J_0(\mu_k x)$;

2) $u(x,t) = \frac{J_0(2x)}{J_0(2)}\cos 2t$;

3) $u(r,t) = -\frac{aB}{\omega J_1(\frac{\omega R_0}{a})} J_0(\frac{\omega r}{a})\cos\omega t + \frac{2a^2B}{\omega^2 R_0} + 2a^2BR_0 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{a\mu_n t}{R_0} J_0(\frac{\mu_n r}{R_0})}{(\omega^2R_0 - a^2\mu_n^2)J_0(\mu_n)}$,

де μ_n – додатні корені рівняння $J_1(\mu)=0$, $\omega^2R_0^2\neq a^2\mu_n^2$, $n\in\mathbb{N}$;
4) $u(r,t)=2u_0R_0^2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2\mu_kJ_0(\mu_k)+(\mu_k^2-4)J_1(\mu_k)}{\mu_k(\mu_k^2+h^2R_0^2)J_0^2(\mu_k)}e^{-(\frac{a\mu_k}{R_0})^2t}J_0(\frac{\mu_kr}{R_0})$,
де $\mu_k,\ k\in\mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $\mu J_0'(\mu)+hR_0J_0(\mu)=0$.

Д1. 1) $u(x,t)=t-1+J_0(\mu_1x)\cos\mu_1t$; 2) $u(x,t)=(1-\frac{J_0(x)}{J_0(1)})\cos t$;
3) $u(x,t)=\frac{J_0(x\sqrt{3})}{J_0(\sqrt{3})}\cos 2t+\frac{J_0(2x\sqrt{2})}{J_0(2\sqrt{2})}\sin 3t$;
4) $u(x,t)=\frac{1}{\mu_1}J_3(\mu_1x)\sin\mu_1t$;
5) $u(x,t)=\frac{1}{\mu_k^2}(\frac{2}{\mu_k^2}+t-t^2-\frac{1}{\mu_k}\sin\mu_kt-\frac{2}{\mu_k^2}\cos\mu_kt)J_3(\mu_kt)$;
6) $u(x,t)=\frac{1}{\mu_k^2-1}(e^{-t}-e^{-\mu_k^2t})J_1(\mu_kx)$; 7) $u(x,t)=e^{-\frac{\mu_k^2t}{4}}J_3(\mu_k\sqrt{x})$;
8) $u(r,t)=\frac{P}{\omega}\Big(\frac{J_0(\frac{\omega}{a}r)}{J_0(\frac{\omega}{a}R_0)}-1\Big)\sin\omega t+\frac{2P\omega R_0^3}{a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\frac{\mu_k}{a}r)\sin\frac{a\mu_k}{R_0}t}{\mu_k^2(\omega^2R_0^2-\mu_k^2a^2)J_1(\mu_k)}$,
де $\mu_k,\ k\in\mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $J_0(\mu)=0$;
9) $u(r,t)=\frac{A}{\omega^2}\frac{ahJ_0(\frac{\omega r}{a})}{ahJ_0(\frac{\omega R_0}{a})-\omega J_1(\frac{\omega R_0}{a})}+\frac{2A}{\omega^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2J_1(\mu_k)}{(R_0^2h^2+\mu_k^2)J_0^2(\mu_k)}\Big(\frac{1}{\mu_k}-\frac{a^2hR_0}{a^2\mu_k^2-\omega^2R_0^2}\Big)\cos\frac{a\mu_kt}{R_0}J_0(\frac{\mu_kr}{R_0})$, де $\mu_k,\ k\in\mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $\mu J_0'(\mu)+R_0J_0(\mu)=0$;
10) $u(x,t)=\frac{p_0}{\rho a^2}\left(\frac{R_0^2-r^2}{4}-2R_0^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\frac{\mu_nr}{R_0})}{\mu_n^2J_1(\mu_n)}\cos\frac{a\mu_nt}{R_0}\right)$, де $\mu_n,\ n\in\mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $J_0(\mu)=0$, а ρ – поверхнева густина маси мембрани.

Д2. $u(x,t)=u_0(1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\frac{\mu_n}{R_0}r)}{\mu_nJ_0'(\mu_n)}e^{-(\frac{a\mu_n}{R_0})^2t})$, де $\mu_n,\ n\in\mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $J_0(\mu)=0$, є розв'язком задачі

$$\begin{gathered}u_{tt}=a^2(u_{rr}+\tfrac{1}{r}u_r),\quad 0<r<R_0,\quad t>0,\\ |u(0,t)|<+\infty,\quad u(R_0,t)=u_0,\quad t\geq 0,\\ u(r,0)=0,\quad 0\leq r\leq R_0.\end{gathered}$$

Тема 8. Розв'язування крайових задач для рівнянь еліптичного типу методом відокремлення змінних Фур'є

При дослідженні стаціонарних, тобто, незалежних від часу, процесів різноманітної природи, як правило, приходять до рівнянь еліптичного типу, з яких найпоширенішими є **рівняння Лапласа**

$$\Delta u(x) := u_{x_1x_1}(x) + u_{x_2x_2}(x) + u_{x_3x_3}(x) = 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^3,$$

і **рівняння Пуассона** (неоднорідне рівняння Лапласа)

$$\Delta u(x) := u_{x_1x_1}(x) + u_{x_2x_2}(x) + u_{x_3x_3}(x) = f(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^3.$$

У випадку двох незалежних змінних функція u не залежить від x_3 і доданок $u_{x_3x_3}$ у рівняннях відсутній.

Функція u називається **гармонічною** в області D, якщо вона в цій області двічі неперервно диференційовна і задовольняє рівняння Лапласа.

Задача Коші для рівняння Лапласа, взагалі кажучи, некоректна [9]. Тому розглядають для цього рівняння в основному крайові задачі. Сформулюємо постановку основних крайових задач для рівняння Лапласа в області D з межею S.

1. Задача Діріхле (перша крайова задача). Знайти функцію u, яка гармонічна в області D, неперервна в замиканні $\overline{D}$ області D і збігається на межі S із заданою неперервною функцією φ, тобто

$$u|_S = \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, z \in S: \lim_{D \ni x \to z} u(x) = \varphi(z).$$

2. Задача Неймана (друга крайова задача). Знайти функцію u, яка гармонічна в області D, неперервно диференційовна в замиканні $\overline{D}$, і така, що її похідна $\partial_{\vec{\nu}} u$ у напрямку зовнішньої нормалі до гладкої поверхні S збігається в точках цієї поверхні з заданою неперервною функцією φ, тобто

$$\partial_{\vec{\nu}} u|_S = \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, z \in S: \lim_{D \ni x \to z} \partial_{\vec{\nu}_z} u(x) = \varphi(z),$$

де $\overrightarrow{\nu_z}$ –зовнішня нормаль у точці z.

3. Третя крайова задача. Знайти функцію u, яка гармонічна в області D, неперервно диференційовна в замиканні $\overline{D}$, і така, що лінійна комбінація функції u і її нормальної похідної $\partial_{\vec{\nu}} u$ на гладкій межі збігається із заданою неперервною функцією φ, тобто

$$(\partial_{\vec{\nu}} u + au)|_S = \varphi,$$

(цю рівність розуміють так само, як у випадку задач Діріхле й Неймана).

Крайова задача для рівняння Лапласа називається **внутрішньою**, якщо вона ставиться в обмеженій області, і **зовнішньою**, якщо – зовні обмеженої області. При постановці зовнішніх задач накладається ще умова поведінки на нескінченності, а саме: для тривимірного випадку умова $\lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x) = 0$, а для двовимірного – умова обмеженості.

Такі самі задачі ставляться і для рівняння Пуассона.

Приклад 1. Знайти розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кільці, обмеженому концентричними колами радіусів a і b.

$\triangleleft$ Задачу зручно записати в полярних координатах

$$u_{rr}(r,\varphi) + \tfrac{1}{r} u_r(r,\varphi) + \tfrac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = 0,\ a < r < b, 0 < \varphi < 2\pi, \tag{1}$$
$$u(a,\varphi) = f(\varphi), \quad u(b,\varphi) = g(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \tag{2}$$
$$u(r,2\pi) = u(r,0), \quad a \le r \le b. \tag{3}$$

Остання умова ставиться для забезпечення неперервності розв'язку в кільці. Розв'язуватимемо задачу (1) – (3) методом відокремлення змінних:

$$u(r,\varphi) = X(r)\Phi(\varphi), \quad a < r < b,\ 0 < \varphi < 2\pi. \tag{4}$$

Підстановка (4) в (1) і відокремлення змінних дає два звичайні диференціальні рівняння

$$\frac{r^2 X''(r) + rX'(r)}{X(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda;$$

$$\begin{matrix} r^2 X''(r) + rX'(r) - \lambda X(r) = 0, \quad a \le r \le b, \\ \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{matrix} \tag{5}$$

Друге з цих рівнянь і умова (3) дають нам задачу Штурма–Ліувілля

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \tag{6}$$
$$\Phi(0) = \Phi(2\pi). \tag{7}$$

При $\lambda < 0$ задача (6),(7) не може мати ненульового розв'язку, бо розв'язки рівняння (6) є лінійними комбінаціями показникових функцій, а отже, не задовольняють умову (7). Тому $\lambda \ge 0$. При $\lambda > 0$ загальний розв'язок рівняння (6) має вигляд

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi.$$

Цей розв'язок буде періодичним з періодом 2π, тобто задовольнятиме умову (7), якщо $\sqrt{\lambda} = n$, $n \in \mathbb{N}$. Тому $\lambda_n = n^2$, а

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При $\lambda = 0$ загальний розв'язок рівняння (6) $\Phi_0 = A_0 + B_0\varphi$ задовольняє умову (7) лише при $B_0 = 0$. Отже, розв'язки задачі (6), (7) мають вигляд

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{8}$$

Для знаходження X з (5) при $\lambda_n = n^2$ дістанемо рівняння

$$r^2X''(r) + rX'(r) - n^2X(r) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Це рівняння Ейлера, розв'язок якого можна шукати у вигляді степеневої функції $X(r) = r^\alpha$. Після підстановки в рівняння і скорочення на r^α одержимо рівняння для $\alpha:\quad \alpha(\alpha-1)+\alpha-n^2 = 0$. Звідси знаходимо, що $\alpha = \pm n$ і, отже, загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд

$$X_n(r) = C_nr^n + D_nr^{-n}, \quad n \ne 0, \tag{10}$$

При $n = 0$ розв'язки r^n і r^{-n} збігаються, тобто лінійно залежні, і (10) не є загальним розв'язком. Але в цьому випадку рівняння (9) має вигляд $r(rX')' = 0$, звідки знаходимо, що

$$X_0(r) = C_0 + D_0\ln r. \tag{11}$$

Врахувавши (4), (8), (10) і (11), розв'язок задачі (1) – (3) шукатимемо у вигляді

$$u(r,\varphi) = (C_0 + D_0\ln r)A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_nr^n + D_nr^{-n})(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi),$$

$$a \le r \le b, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \tag{12}$$

Для зручності введемо позначення:

$$A_0C_0 =: a_0,\ A_0D_0 =: b_0,\ A_nC_n =: a_n,\ A_nD_n =: b_n,$$
$$B_nC_n =: c_n,\ B_nD_n =: d_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Тоді (12) набуде вигляду

$$u(r,\varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}((a_n r^n + b_n r^{-n})\cos n\varphi + (c_n r^n + d_n r^{-n})\sin n\varphi),$$

$$a \le r \le b, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \tag{12$'$}$$

Задовольнимо крайові умови (2):

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln a + \sum\limits_{n=1}^{\infty}((a_n a^n + b_n a^{-n})\cos n\varphi + (c_n a^n + d_n a^{-n})\sin n\varphi) = f(\varphi), \\ a_0 + b_0 \ln b + \sum\limits_{n=1}^{\infty}((a_n b^n + b_n b^{-n})\cos n\varphi + (c_n b^n + d_n b^{-n})\sin n\varphi) = g(\varphi), \end{cases}$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Звідси одержуємо, що

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln a = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi =: f_0, \\ a_0 + b_0 \ln b = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\varphi)d\varphi =: g_0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n a^n + b_n a^{-n} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi =: f_{1n}, \\ a_n b^n + b_n b^{-n} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\varphi)\cos n\varphi d\varphi =: g_{1n}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_n a^n + d_n a^{-n} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi =: f_{2n}, \\ c_n b^n + d_n b^{-n} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\varphi)\sin n\varphi d\varphi =: g_{2n}. \end{cases}$$

Розв'язавши ці системи, знайдемо значення коефіцієнтів

$$a_0 = \frac{f_0 \ln b - g_0 \ln a}{\ln b - \ln a}, \quad b_0 = \frac{g_0 - f_0}{\ln b - \ln a},$$

$$a_n = \frac{g_{1n}a^{-n} - f_{1n}b^{-n}}{(\frac{b}{a})^n - (\frac{a}{b})^n}, \quad b_n = \frac{f_{1n}b^n - g_{1n}a^n}{(\frac{b}{a})^n - (\frac{a}{b})^n}, \tag{12''}$$

$$c_n = \frac{g_{2n}a^{-n} - f_{2n}b^{-n}}{(\frac{b}{a})^n - (\frac{a}{b})^n}, \quad d_n = \frac{f_{2n}b^n - g_{2n}a^n}{(\frac{b}{a})^n - (\frac{a}{b})^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Підставивши їх у (12′), одержимо розв'язок задачі Діріхле для кільця:

$$u(r,\varphi) = \frac{f_0 \ln \frac{b}{r} + g_0 \ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{((\frac{b}{r})^n - (\frac{r}{b})^n) f_{1n}}{(\frac{b}{a})^n - (\frac{a}{b})^n} + \frac{((\frac{r}{a})^n - (\frac{a}{r})^n) g_{1n}}{(\frac{b}{a})^n - (\frac{a}{b})^n} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \cos n\varphi + \frac{((\frac{b}{r})^n - (\frac{r}{b})^n) f_{2n} + ((\frac{r}{a})^n - (\frac{a}{r})^n) g_{2n}}{(\frac{b}{a})^n - (\frac{a}{b})^n} \sin n\varphi \right],$$

$$a \le r \le b, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi. \qquad \triangleright$$

Вище розглянуто задачу Діріхле для рівняння Лапласа в кільці. Її розв'язок визначається формулою (12′), де коефіцієнти a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n, $n \in \mathbb{N}$, знаходяться за формулами (12″).

Якщо ж область не кільце, а круг $K_R(0) := \{(r,\varphi) |\ 0 < r < R,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$ або його зовнішність, то матимемо відповідно внутрішню або зовнішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа. Розв'язок кожної з цих задач легко одержується з формули (12′) і має вигляд

$$u(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + c_n \sin n\varphi) r^n,\ 0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

для внутрішньої задачі Діріхле і вигляд

$$u(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi) r^{-n},\ r \ge R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

для зовнішньої задачі Діріхле, де коефіцієнти a_0, a_n, b_n, c_n, d_n, $n \in \mathbb{N}$, знаходяться за формулами (12″).

Приклад 2. Розв'язати задачу Діріхле в секторі:

$$u_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r} u_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = 0, \quad 0 < r < 1,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{3}, \tag{13}$$

$$u(1,\varphi) = \frac{9}{8}\pi\varphi\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right), \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}, \tag{14}$$

$$u(r,0)=0,\quad u(r,\frac{\pi}{3})=0,\quad 0\le r\le 1. \tag{15}$$

$\triangleleft$ Як і в прикладі 1, розв'язок задачі (13) – (15) шукатимемо у вигляді (4). Задача Штурма–Ліувілля у цьому випадку має вигляд

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0,\quad \Phi(0)=0,\quad \Phi(\frac{\pi}{3})=0,$$

власними числами якої є (див. тему 4) $\lambda_k=9k^2$, а власними функціями – $\Phi_k(\varphi)=\sin 3k\varphi$, $k\in\mathbb{N}$.

З (5) дістанемо рівняння для визначення X_k

$$r^2X_k''(r)+rX_k'(r)-9k^2X_k(r)=0,\quad k\in\mathbb{N},$$

розв'язками якого є функції

$$X_k(r)=A_kr^{3k}+B_kr^{-3k}.$$

Оскільки функції $u_k=X_k\Phi_k$ повинні бути неперервними в замиканні сектора, зокрема, і в точці $r=0$, то $B_k=0$. Отже, розв'язок задачі (13) – (15) шукатимемо у вигляді ряду

$$u(r,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kr^{3k}\sin 3k\varphi,\quad 0\le r\le 1,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.$$

Задовольнивши крайову умову (14), одержимо співвідношення для визначення коефіцієнтів A_k, $k\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin 3k\varphi=\frac{9}{8}\pi\varphi(\frac{\pi}{3}-\varphi),\quad 0\le\varphi\le\pi/3.$$

Звідси випливає, що

$$A_k=\frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/3}\frac{9}{8}\pi\varphi(\frac{\pi}{3}-\varphi)\sin 3k\varphi d\varphi=\begin{cases}0, & k=2n,\\ \frac{1}{(2n+1)^3}, & k=2n+1, n\in\mathbb{Z}_+.\end{cases}$$

Остаточно дістанемо, що розв'язок задачі (13) – (15) має вигляд

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}r^{3(2n+1)}\sin 3(2n+1)\varphi,\quad 0\le r\le 1,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.\quad\triangleright$$

Приклад 3. Розв'язати задачу Неймана в крузі радіуса R_0 з центром у початку координат:

$$u_{rr}(r,\varphi)+\frac{1}{r}u_r(r,\varphi)+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi)=4a, \quad 0<r<R_0,\ 0<\varphi<2\pi, \tag{16}$$

$$u_r(R_0,\varphi)=2R_0(1+\cos 2\varphi), \quad 0\le\varphi\le 2\pi. \tag{17}$$

◁ Оскільки рівняння (16) неоднорідне, то розв'язок задачі (16), (17) треба шукати у вигляді суми двох функцій $u=w+v$, де функція w визначається так, щоб вона задовольняла неоднорідне рівняння (16). Очевидно, що w можна шукати у вигляді степеневої функції

$$w(r)=Cr^{\alpha}. \tag{18}$$

Підставивши (18) у (16), дістанемо рівняння $C\alpha^2 r^{\alpha-2}=4a$, звідки $\alpha=2$, $C=a$. Отже, $w(r)=ar^2$. Функція v, як легко бачити, є розв'язком задачі Неймана для однорідного рівняння:

$$v_{rr}(r,\varphi)+\frac{1}{r}v_r(r,\varphi)+\frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}(r,\varphi)=0, \tag{16$'$}$$

$$v_r(R_0,\varphi)=2R_0(1+\cos 2\varphi)-2aR_0. \tag{17$'$}$$

Крім того, v повинна бути обмеженою і задовольняти умову періодичності (3). Оскільки має виконуватись необхідна умова розв'язності внутрішньої задачі Неймана, тобто $\int\limits_0^{2\pi}(2R_0(1+\cos 2\varphi)-2aR_0)\,d\varphi=0$, то $a=1$.

Міркуючи аналогічно до того, як у прикладі 1, приходимо до формули (12$'$), але в ній треба взяти $b_0=b_n=d_n=0$, бо точка $r=0$ належить до області. Тому

$$v(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n(a_n\cos n\varphi+c_n\sin n\varphi), \quad 0\le r\le R_0, \quad 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Задовольнимо крайову умову (17$'$), де $a=1$, тобто умову $v_r(R_0,\varphi)=2R_0\cos 2\varphi$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}nR_0^{n-1}(a_n\cos n\varphi+c_n\sin n\varphi)=2R_0\cos 2\varphi, \quad 0\le\varphi\le 2\pi. \tag{20}$$

Із співвідношення (20) випливає, що коефіцієнти $a_2 = 1$, $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$, і $c_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тому $v = a_0 + r^2 \cos 2\varphi$, де a_0 – довільне дійсне число. Отже,

$$u(r, \varphi) = r^2 + a_0 + r^2 \cos 2\varphi, \quad 0 \le r \le R_0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

а це означає, що наша задача має безліч розв'язків. Якщо додатково задати значення функції хоча б в одній точці (r_1, φ_1) області, то задача матиме єдиний розв'язок, бо тоді стала $a_0 = u(r_1, \varphi_1) - 2r_1^2 \sin^2 \varphi_1$ визначається однозначно. $\triangleright$

Зауваження 1. Внутрішня задача Неймана $\Delta u = f$ у D, $\partial_{\vec{\nu}} u|_S = \psi$ має розв'язок лише за умови $\int\limits_D f(x)dx = \int\limits_S \psi(x)dS$. Цей розв'язок визначається з точністю до сталого доданка. Зокрема, для прикладу 3 ця умова виконується при $a = 1$. Справді, $f = 4a$, $\psi = 2R_0(1 + \cos 2\varphi)$, D – круг радіуса R_0, S – його межа (коло), $\int\limits_D f(x)dx = 4a\pi R_0^2$, $\int\limits_S \psi(x)dS = \int\limits_0^{2\pi} 2R_0(1 + \cos 2\varphi)R_0 d\varphi = 2R_0^2 2\pi$. Отже, при $R_0 \ne 0$ $\quad 4a\pi R_0^2 = 2R_0^2 \cdot 2\pi$ тоді й тільки тоді, коли $a = 1$.

Приклад 4. Розв'язати задачу

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \tag{21}$$

$$u(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = 0, \quad 0 \le y \le b, \tag{22}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 \le x \le a. \tag{23}$$

$\triangleleft$ Це третя крайова задача, оскільки на одній частині межі $\{x = a,$ $0 \le y \le b\}$ задана похідна в напрямку нормалі, а на решті межі – сама функція. Ненульовий розв'язок рівняння (21) при однорідних крайових умовах (22) шукаємо, як і раніше, у вигляді добутку $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Після відокремлення змінних маємо, враховуючи (22), задачу Штурма–Ліувілля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \le x \le a, \quad X(0) = X'(a) = 0, \tag{24}$$

власними числами якої є $\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2a}\right)^2$, а відповідними власними функціями – $X_k(x) = \sin \frac{(2k+1)\pi}{2a} x$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Для визначення Y маємо рівняння $Y_k'' - \lambda_k Y_k = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, розв'язками яких є функції $Y_k(y) = A_k e^{\sqrt{\lambda_k} y} + B_k e^{-\sqrt{\lambda_k} y}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тепер розв'язок задачі (21) –

(23) шукатимемо у вигляді

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k e^{\frac{(2k+1)\pi}{2a} y} + B_k e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2a} y}) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2a} x. \qquad (25)$$

Підставивши (25) у (23), одержимо співвідношення

$$\sum_{k=0}^{\infty} (A_k + B_k) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2a} x = f(x),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (A_k e^{\frac{(2k+1)\pi}{2a} b} + B_k e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2a} b}) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2a} x = g(x), \quad 0 \le x \le a.$$

Звідси випливає, що

$$\begin{cases} A_k + B_k = f_k, \\ A_k e^{\frac{(2k+1)\pi}{2a} b} + B_k e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2a} b} = g_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

де

$$f_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(z) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2a} z dz, \; g_k = \frac{2}{a} \int_0^a g(z) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2a} z dz, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

– коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є функцій f, g за власними функціями задачі (24). Легко бачити, що

$$A_k = \frac{g_k - f_k e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2a} b}}{2 \mathrm{sh} \frac{(2k+1)\pi}{2a} b}, \quad B_k = \frac{f_k e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2a} b} - g_k}{2 \mathrm{sh} \frac{(2k+1)\pi}{2a} b}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\mathrm{sh}\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$.

Якщо підставити знайдені коефіцієнти в (25), то одержимо розв'язок вихідної задачі у вигляді

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k \mathrm{sh} \frac{(2k+1)\pi}{2a} (b-y) + g_k \mathrm{sh} \frac{(2k+1)\pi}{2a} y}{\mathrm{sh} \frac{(2k+1)\pi}{2a} y} \sin \frac{(2k+1)\pi}{2a} x,$$

$$0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b. \quad \triangleright \qquad (26)$$

Зауваження 2. З формули (26) можна одержати розв'язок задачі у півсмузі $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < +\infty$, $u(0,y) = 0$, $u_x(a,y) = 0$; $u(x,0) = f(x)$, $\lim\limits_{y \to +\infty} u(x,y) = 0$.

$\triangleleft$ Справді,

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi}{2a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi}{2a}b}=e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2a}y}.$$

Тоді, враховуючи, що $g_k=0$, $k\in\mathbb{Z}_+$, з (26) одержимо

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2a}y}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2a}x=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{2}{a}\int\limits_0^a f(z)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2a}zdz)e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2a}y}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2a}x=$$

$$=\int\limits_0^a f(z)G(x,y,z)dz,$$

де

$$G(x,y,z):=\frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2a}y}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2a}x\,\sin\frac{(2k+1)\pi}{2a}z.\quad\triangleright$$

Зауваження 3. Якщо крайові умови (22) і (23) одночасно неоднорідні, то розв'язок задачі можна шукати у вигляді суми $u=w+v$, де w – розв'язок задачі типу (21) – (23) з однорідними крайовими умовами (22) за змінною x, а v – розв'язок аналогічної задачі з неоднорідними крайовими умовами (23) за змінною y.

Якщо ж рівняння неоднорідне і знаходження частинного розв'язку надто складне або порушує однорідність крайових умов, то можна шукати розв'язок задачі у вигляді ряду Фур'є за власними функціями відповідної однорідної задачі (див. тему 5).

Приклад 5. Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$u_{xx}(x,y)+y_{yy}(x,y)=f(x,y),\quad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi,\tag{27}$$

$$\begin{array}{lll} u(0,y)=0, & u(\pi,y)=0, & 0\le y\le\pi,\\ u(x,0)=0, & u(x,\pi)=0, & 0\le x\le\pi. \end{array}\tag{28}$$

$\triangleleft$ Для знаходження власних функцій відповідної задачі (див. попередній приклад) маємо задачу Штурма–Ліувілля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \quad X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0,$$

власними числами якої є $\lambda_k = k^2$, а власними функціями – $X_k(x) = \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$. Розв'язок задачі (27), (28) шукатимемо тепер у вигляді

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin kx, \quad 0 \le x \le \pi, \ \ 0 \le y \le \pi, \tag{29}$$

де Y_k – невідомі функції.

Підстановка (29) у (27) дає рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Y_k''(y) - k^2 Y_k(y) - f_k(y)) \sin kx = 0, \ \ 0 \le x \le \pi, \ \ 0 \le y \le \pi, \tag{30}$$

де $f_k(y) := \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(z,y) \sin kz dz$, $0 < y < \pi$, $k \in \mathbb{N}$, – коефіцієнти розкладу правої частини рівняння (27) у ряд Фур'є за власними функціями $\sin kx$, $k \in \mathbb{N}$, відповідної однорідної задачі. З (30) випливає, що

$$Y_k''(y) - k^2 Y_k(y) = f_k(y), \ \ 0 \le y \le \pi, \ \ k \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

Якщо ж задовольнити крайові умови (28), то дістанемо

$$Y_k(0) = 0, \quad Y_k(\pi) = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

Загальний розв'язок рівняння (31)

$$Y_k(y) = A_k \mathrm{sh} ky + B_k \mathrm{sh} k(\pi - y) + \frac{1}{k} \int\limits_0^y f_k(z) \mathrm{sh} k(y-z) dz, \ k \in \mathbb{N}, \tag{33}$$

де A_k, B_k, $k \in \mathbb{N}$, – довільні сталі. Підберемо їх так, щоб задовольнялись умови (32):

$$B_k \mathrm{sh} k\pi = 0, \quad A_k \mathrm{sh} k\pi + \frac{1}{k} \int\limits_0^{\pi} f_k(z) \mathrm{sh} k(\pi - z) dz = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Знайшовши звідси A_k і B_k, $k \in \mathbb{N}$, і підставивши їх у (33), одержимо, що

$$Y_k(y) = \frac{1}{k}\int\limits_0^y f_k(z)\mathrm{sh}k(y-z)dz - \frac{\mathrm{sh}ky}{k\,\mathrm{sh}k\pi}\int\limits_0^\pi f_k(z)\mathrm{sh}k(\pi-z)dz, k \in \mathbb{N}. \quad (34)$$

Із (29) і (34) отримуємо розв'язок поставленої задачі

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^\infty \left(\mathrm{sh}k\pi \int\limits_0^y f_k(z)\mathrm{sh}k(y-z)dz - \mathrm{sh}ky \int\limits_0^\pi f_k(z)\mathrm{sh}k(\pi-z)dz \right) \times$$
$$\times \frac{\sin kx}{k\,\mathrm{sh}k\pi}, \quad 0 \le x \le \pi, \;\; 0 \le y \le \pi. \;\; \triangleright$$

Вправи

О1. Знайти функцію u, гармонічну в $\Pi := \{(x,y)|\ 0 < x < l,$ $0 < y < l\}$, яка задовольняє крайові умови

$$u(x,0) = x(l-x), \quad u(x,l) = x(l-x), \quad 0 \le x \le l,$$
$$u(0,y) = 0, \quad u(l,y) = 0, \quad 0 \le y \le l.$$

О2. Знайти розв'язок u рівняння Лапласа в прямокутнику $\Pi := \{(x,y)|\ 0 < x < p,\ 0 < y < s\}$, який задовольняє крайові умови:

1) $$u_x(0,y) = 0, \;\; u_x(p,y) = 0, \quad 0 \le y \le s,$$
$$u(x,0) = A, \quad u(x,s) = Bx, \quad 0 \le x \le p;$$

2) $$u_x(0,y) = 0, \;\; u_x(p,y) = 0, \quad 0 \le y \le s,$$
$$u(x,0) = A, \quad u(x,s) = B, \quad 0 \le x \le p.$$

О3. Знайти розв'язок рівняння Пуассона $u_{xx} + u_{yy} = -2$ всередині прямокутника $\Pi := \{(x,y)|\ 0 \le x \le a,\ -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}\}$, який на межі цього прямокутника дорівнює нулю.

О4. Знайти гармонічну функцію u всередині прямокутника $\Pi := \{(x,y)|\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$, якщо на його межі задані значення u :

1) $$u(0,y) = Ay(b-y), \quad u(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b,$$
$$u(x,0) = B\sin\tfrac{\pi x}{a}, \quad u(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a,$$

де A і B – сталі;

$$2)\quad u(0,y)=0,\quad u(a,y)=0,\quad 0\le y\le b,$$
$$u(x,0)=2\sin\tfrac{\pi x}{a},\quad u(x,b)=0,\quad 0\le x\le a.$$

O5. Знайти функцію u, гармонічну всередині кільця $K_{1,2}(0):=\{(r,\varphi)|\ 1\le r\le 2,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$, яка задовольняє крайові умови:

1) $u(1,\varphi)=0,\quad u(2,\varphi)=2A\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi;$

2) $u_r(1,\varphi)=39\cos 3\varphi,\quad u(2,\varphi)=4\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi;$

3) $u(1,\varphi)=13\cos 3\varphi,\quad u_r(2,\varphi)=\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi.$

O6. Розв'язати задачу для рівняння Лапласа в кільці $K_{R_1,R_2}(0):=\{(r,\varphi)|\ R_1\le r\le R_2,\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$ за умови, що

$u_r(R_1,\varphi)=A\sin^2\varphi,\quad u(R_2,\varphi)=B\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi.$

O7. Знайти гармонічну в крузі $K_R(0):=\{(r,\varphi)|\ 0<r<R,\ 0<\varphi<2\pi\}$ функцію, яка задовольняє умову:

1) $u(R,\varphi)=A+B\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi;$

2) $u_r(R,\varphi)=A\sin\varphi+B\sin^3\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi;$

3) $u(R,\varphi)=A\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi;$

4) $u(R,\varphi)=A\sin^3\varphi+B,\quad 0\le\varphi\le 2\pi;$

5) $u(R,\varphi)=\begin{cases} A\sin\varphi, & 0\le\varphi\le\pi,\\ \frac{1}{3}A\sin^3\varphi, & \pi\le\varphi\le 2\pi.\end{cases}$

O8. Знайти гармонічну всередині круга радіуса R з центром у початку координат функцію, яка задовольняє умову $u_r|_{r=R}=A\cos\varphi$.

O9. Знайти функцію, гармонічну всередині одиничного круга з центром у початку координат і таку, що $u(r,\varphi)|_{r=1}=\cos^4\varphi$.

O10. Розв'язати задачу Неймана в кільці $K_{R_1,R_2}(0):=\{(r,\varphi)|\ R_1<r<R_2,\ 0<\varphi<2\pi\}$ для рівняння Лапласа за умови, що $u_r(r,\varphi)|_{r=R_1}=A\sin\varphi,\quad u_r(r,\varphi)|_{r=R_2}=B\sin 2\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi.$

O11. Розв'язати рівняння Пуассона $u_{xx}+u_{yy}=12(x^2-y^2)$ у кільці $K:=\{(x,y)|\ a^2<x^2+y^2<b^2\}$, якщо $u|_{x^2+y^2=a^2}=0$, $\partial_{\vec\nu}u|_{x^2+y^2=b^2}=0$.

O12. У круговому секторі $D:=\{(r,\varphi)|\ 0<r<R,\ 0<\varphi<\alpha\}$ знайти гармонічну функцію, яка задовольняє крайові умови $u_\varphi(r,0)=0,\ u_\varphi(r,\alpha)=0,\ 0\le r\le R,\ u(R,\varphi)=u_0\varphi,\ 0\le\varphi\le\alpha.$

О13. Знайти у півсмузі $D := \{(x, y)|\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < +\infty\}$ розв'язок рівняння Лапласа, який задовольняє крайові умови

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad 0 \le y < +\infty,$$
$$u(x, 0) = A(1 - \tfrac{x}{\pi}), \quad \lim_{y \to +\infty} u(x, y) = 0, \quad 0 \le x \le \pi.$$

О14. Знайти розв'язок рівняння $\Delta u = -y \cos x$ у півкрузі $K_+ := \{(x, y)|\ x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}$, який задовольняє на межі півкруга умови

$$u = 0 \text{ при } y = 0,$$
$$u = \sqrt{1 - x^2}(\cos x - \tfrac{1}{2}) \text{ при } y > 0.$$

О15. Зовні круга $K_R(0) := \{(r, \varphi)|\ 0 < r < R,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$ знайти розв'язок рівняння Лапласа, який задовольняє крайову умову $u(R, \varphi) = u_0 \sin \frac{\varphi}{2}$.

О16. Розв'язати задачу:

1) $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$
$$u_x(0, y) = y - 1, \quad u_x(1, y) = y + 1, \quad 0 \le y \le 1,$$
$$u_y(x, 0) = x, \quad u_y(x, 1) = x, \quad 0 \le x \le 1;$$

2) $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 6x + 12y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < \frac{1}{2},$
$$u_x(0, y) = 1 + 3y^2, \quad u_x(2, y) = 1 + 3y^2, \quad 0 \le y \le \tfrac{1}{2},$$
$$u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, \tfrac{1}{2}) = 3x + \tfrac{3}{2} + 2 \cos \pi x, \quad 0 \le x \le 2.$$

С1. Знайти розв'язок u рівняння Лапласа в прямокутнику $\Pi := \{(x, y)|\ 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$, який задовольняє такі крайові умови:

$$u(0, y) = y(b - y), \quad u(a, y) = 0, \quad 0 \le y \le b,$$
$$u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, b) = 0, \quad 0 \le x \le a.$$

С2. Знайти електростатичне поле всередині області, яка обмежена електропровідними пластинами $y = 0$, $y = b$ і $x = 0$, якщо пластина $x = 0$ заряджена до потенціалу $v_0 = \text{const}$, пластини $y = 0$, $y = b$ заземлені, а заряди всередині заданої області відсутні.

С3. Знайти розподіл потенціалу електростатичного поля всередині прямокутника $\Pi := \{(x, y)|\ 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$, в якого вздовж сторони $\{x = 0,\ 0 < y < b\}$ потенціал дорівнює u_0, а три інші сторони заземлено. Електричні заряди всередині прямокутника відсутні.

С4. Знайти функцію, гармонічну всередині круга $K_1(0)$ і таку, що $u(1,\varphi) = \sin^6\varphi + \cos^6\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

С5. Розв'язати задачу про рівновагу напівкруглої мембрани радіуса R під рівномірним навантаженням q.

С6. Знайти закон стаціонарного розподілу температури всередині необмеженого кругового циліндра радіуса R, якщо на його поверхні підтримується температура $u(R,\varphi) = u_0 \sin\varphi$.

С7. Знайти розв'язок рівняння Пуассона $\Delta u = A$ в кільці $K_{R_1,R_2}(0)$ за умови, що

$$u(R_1,\varphi) = u_1, \quad u(R_2,\varphi) = u_2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

де A, u_1, u_2 – задані числа.

С8. Розв'язати задачу:

$$1) \quad u_{rr}(r,\varphi) + \tfrac{1}{r}u_r(r,\varphi) + \tfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = 2,$$
$$1 < r < 2, \quad 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{2},$$
$$u_r(1,\varphi) = 1, \quad u_r(2,\varphi) = 2\cos\varphi + 2, \quad 0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2},$$
$$u_\varphi(r,0) = 0, \quad u_\varphi(r,\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad 1 \le r \le 2;$$

$$2) \quad u_{rr}(r,\varphi) + \tfrac{1}{r}u_r(r,\varphi) + \tfrac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = -10\cos 3\varphi,$$
$$1 < r < 2, \quad 0 < \varphi < \tfrac{\pi}{6},$$
$$u(1,\varphi) = 2(\cos 3\varphi + 2\cos 6\varphi),\ u_r(2,\varphi) = 8\cos 3\varphi,\ 0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{6},$$
$$u_\varphi(r,0) = 0, \quad u_\varphi(r,\tfrac{\pi}{6}) = -6r^2, \quad 1 \le r \le 2.$$

С9. Знайти функцію u, яка гармонічна в кільці $K_{R_1,R_2}(0) := \{(r,\varphi)|\ R_1 < r < R_2,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$ і задовольняє умови:

1) $u_r(R_1,\varphi) = A\sin\varphi, \quad u_r(R_2,\varphi) = B\sin 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$

2) $u_r(R_1,\varphi) = A\sin^2\varphi, \quad u(R_2,\varphi) = B\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

Домашнє завдання

Д1. Знайти розв'язок u рівняння Лапласа в прямокутнику $\Pi := \{(x,y)|\ 0 < x < p,\ 0 < y < s\}$, який задовольняє крайові умови:

$$1) \quad u_x(0,y) = 0, \quad u(p,y) = 0, \quad 0 \le y \le s,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_y(x,s) = Bx, \quad 0 \le x \le p;$$

$$2) \quad u_x(0,y) = 0, \quad u_x(p,y) = 0, \quad 0 \le y \le s,$$
$$u(x,0) = A, \quad u(x,s) = B\cos\tfrac{3\pi x}{p}, \quad 0 \le x \le p.$$

Д2. Знайти форму рівноваги однорідної прямокутної мембрани $\Pi := \{(x,y)|\ 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$, яка закріплена по краях, якщо до мембрани прикладено нормальний тиск P на одиницю площі.

Д3. Знайти функцію, яка гармонічна в кільці $K_{1,2}(0) := \{(r,\varphi)|1 < r < 2, 0 < \varphi < 2\pi\}$ і така, що $u(1,\varphi) = 1 + \cos^2\varphi$, $u(2,\varphi) = \sin^2\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Д4. Знайти гармонічну в крузі $K_R(0) := \{(r,\varphi)|\ 0 < r < R,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$ функцію, яка задовольняє крайову умову $u(R,\varphi) = A\cos\varphi$.

Д5. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в крузі $K_2(0) := \{(x,y)|\ x^2 + y^2 < 4\}$:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad u(x,y)|_{x^2+y^2=4} = x^2.$$

Д6. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в кільці $K_{2,3}(0) := \{(x,y)|\ 4 < x^2 + y^2 < 9\}$:

$$\begin{gathered} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \\ u(x,y)|_{x^2+y^2=4} = x, \quad u(x,y)|_{x^2+y^2=9} = y. \end{gathered}$$

Д7. Знайти функцію, яка гармонічна всередині круга радіуса R з центром у початку координат і така, що $u_r(R,\varphi) = \sin^3\varphi$.

Д8. Знайти розв'язок рівняння Пуассона

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = -Axy$$

в крузі радіуса R з центром у початку координат, який задовольняє крайову умову $u(x,y)|_{x^2+y^2=R^2} = 0$.

Д9. У круговому секторі $D := \{(r,\varphi)|\ 0 < r < R,\ 0 < \varphi < \alpha\}$ знайти гармонічну функцію, яка задовольняє крайові умови:

$$\begin{gathered} 1)\, u(r,0) = 0, \quad u(r,\alpha) = 0, \quad 0 \le r \le R, \\ u(R,\varphi) = A\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \alpha; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 2)\, u(r,0) = 0, \quad u(r,\alpha) = 0, \quad 0 \le r \le R, \\ u_r(R,\varphi) = Q, \quad 0 \le \varphi \le \alpha. \end{gathered}$$

Д10. Знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$$

у прямокутнику $\Pi := \{(x,y)|\ 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$, якщо на межі цього прямокутника він набуває значень:

$$\begin{array}{ll} u(0,y) = A\sin\frac{\pi y}{b}, \quad u(a,y) = 0, \quad 0 \le y \le b, \\ u(x,0) = B\sin\frac{\pi x}{a}, \quad u(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a. \end{array}$$

Д11. Зовні круга $K_R(0) := \{(r,\varphi)|\ 0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ знайти розв'язок рівняння Лапласа, який задовольняє умову:

1) $u_r(R,\varphi) = \frac{3}{2}R^2\cos 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$

2) $u_r(R,\varphi) = A\sin\varphi + B\sin^3\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

Д12. Знайти розв'язок задачі:

1) $$u_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}u_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = 3 + \sin\varphi,$$
$$1 < r < 2, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$
$$u(1,\varphi) = 1 + \cos^2\varphi, \quad u(2,\varphi) = \sin^2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$$

2) $$u_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}u_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = 18r,$$
$$1 < r < 4, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$
$$u_r(1,\varphi) - u(1,\varphi) = 1, \quad u(4,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$$

3) $$u_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}u_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = A\sin\varphi,$$
$$1 < r < 2, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$
$$u(1,\varphi) = 0, \quad u_r(2,\varphi) = A, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$$

4) $$u_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}u_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = 9r,$$
$$0 < r < 2, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$
$$u(2,\varphi) = 12\sin 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Відповіді

О1. $u(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{8l^2}{(2k+1)^3\pi^3}\frac{1}{\operatorname{sh}(2k+1)\pi}\Big(\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi(l-y)}{l} +$
$+\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi y}{l}\Big)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}.$

О2. 1) $u(x,y) = A + \frac{Bp-2A}{2s}y - \frac{4Bp}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi}{p}y}{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi s}{p}}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{p};$
2) $u(x,y) = A + \frac{B-A}{s}y.$

О3. $u(x,y) = x(a-x) - \frac{8a^2}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\frac{\operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi b}{2a}}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a}.$

О4. 1) $u(x,y)=B\frac{\sin\frac{\pi}{a}(b-y)}{\sin\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi a}{b}}\times$
$\times\sin\frac{(2k+1)\pi y}{b}$; 2) $u(x,y)=2\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}$.

О5. 1) $u(r,\varphi)=\frac{8}{3}A\operatorname{sh}(\ln r)\sin\varphi$;
2) $u(r,\varphi)=\frac{8}{5}(r+\frac{1}{r})\sin\varphi-\frac{13}{63}(r^3-\frac{64}{r^3})\cos 3\varphi$;
3) $u(r,\varphi)=\frac{4}{5}(r-\frac{1}{r})\sin\varphi+\frac{1}{5}(r^3+\frac{64}{r^3})\cos 3\varphi$.

О6. $u(r,\varphi)=\frac{1}{2}AR_1(\ln\, r-\ln\, R_2)+\frac{R_2B}{R_2^2+R_1^2}\left(r+\frac{R_1^2}{r}\right)\cos\varphi+\frac{AR_1^3}{4(R_2^4+R_1^4)}\times$
$\times\left(-r^2+\frac{R_2^4}{r^2}\right)\cos 2\varphi$.

О7. 1) $u(r,\varphi)=A+\frac{B}{R}r\,\sin\varphi$;
2) $u(r,\varphi)=A_0+(A+\frac{3}{4}B)r\,\sin\varphi-\frac{B}{12R^2}r^3\sin 3\varphi$, де A_0 – довільна стала;
3) $u(r,\varphi)=A\frac{r}{R}\,\sin\varphi$;
4) $u(r,\varphi)=B+\frac{3A}{R}r\,\sin\varphi-4A\frac{r^3}{R^3}\sin 3\varphi$;
5) $u(r,\varphi)=A\frac{r}{R}\,\sin\varphi-\frac{8A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{2k}\frac{\cos 2k\varphi}{4k^2-9}$.
У випадках 4) і 5) скористатися формулою $\sin^3\varphi=3\sin\varphi-4\sin 3\varphi$.

О8. $u(r,\varphi)=Ar\cos\varphi+A_0$, де A_0 – стала.

О9. $u(r,\varphi)=\frac{3}{8}+\frac{r^2}{2}\cos 2\varphi+\frac{r^4}{8}\cos 4\varphi$.

О10. $u(r,\varphi)=B_0+\frac{AR_1^2}{R_1^2-R_2^2}\left(r+\frac{R_2^2}{r}\right)\sin\varphi+\frac{BR_2^3}{2(R_2^4-R_1^4)}\left(r^2-\frac{R_1^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi$,
$B_0\in\mathbb{R}$.

О11. $u(r,\varphi)=((a^4+b^4)r^4-(a^6+2b^6)r^2-(a^2-2b^2)\frac{a^4b^4}{r^2})\frac{\cos 2\varphi}{a^4+b^4}$.

О12. $u(r,\varphi)=\frac{u_0\alpha}{2}-\frac{4u_0\alpha}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}(\frac{r}{R})^{(2k+1)\pi/\alpha}\cos\frac{(2k+1)\pi\varphi}{\alpha}$.

О13. $u(x,y)=\frac{2A}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-ny}\sin nx$.

О14. $u(x,y)=y(\cos x-\frac{1}{2})$.

О15. $u(r,\varphi)=\frac{2u_0}{\pi}+\frac{4u_o}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-4k^2}(\frac{R}{r})^k\cos k\varphi$.

О16. 1) $u(x,y)=xy+x^2-x+C$, C – стала; 2) $u(x,y)=x(1+3y^2)+$
$2y^3+2\frac{\operatorname{ch}\pi y}{\pi\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}}\cos\pi x+C$, C – стала, $\operatorname{sh}\theta=\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}$, $\operatorname{ch}\theta=\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}$.

С1. $u(x,y)=-\frac{b^2x}{6a}+\frac{b^2}{6}+\frac{b^2}{\pi^2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{2m\pi(x-a)}{b}}{m^2\operatorname{sh}\frac{2m\pi a}{b}}\cos\frac{2m\pi y}{b}$.

С2.
$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0,\quad 0<x<+\infty,\quad 0<y<b,$$
$$u|_{x=0}=v_0,\qquad \lim_{x\to+\infty}u(x,y)=0,\quad 0\le y\le b,$$
$$u|_{y=0}=0,\quad u|_{y=b}=0,\quad 0\le x<+\infty;$$

$u(x,y)=\frac{4v_0}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{2n+1}{b}\pi x}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi y}{b}.$

C3. $u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b,$
$$u(0,y)=u_0,\quad u(a,y)=0,\quad 0\le y\le b,$$
$$u(x,0)=0,\quad u(x,b)=0,\quad 0\le x\le a;$$

$u(x,y)=\frac{4u_0}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}\,\frac{(2k+1)\pi(a-x)}{b}}{(2k+1)\mathrm{sh}\,\frac{(2k+1)a\pi}{b}}\sin\frac{(2k+1)\pi y}{b}.$

C4. $u(r,\varphi)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}r^4\cos 4\varphi$. Використати тотожність $\sin^6\varphi+\cos^6\varphi=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\varphi$.

C5. $\frac{1}{r}\left(ru_r(r,\varphi)\right)_r+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi)=-\frac{q}{T},\quad 0<r<R,\ 0<\varphi<\pi,$
$$|u(0,\varphi)|<+\infty,\quad u(R,\varphi)=0,\quad 0\le\varphi\le\pi,$$
$$u(r,0)=0,\quad u(r,\pi)=0,\quad 0\le r\le R;$$

$u(r,\varphi)=-\frac{qr^2\sin^2\varphi}{2T}+\frac{4qR^2}{\pi T}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1}\frac{1}{(2k+1)(4-(2k+1)^2)}\sin(2k+1)\varphi.$

C6. $u_{rr}(r,\varphi)+\frac{1}{r}u_r(r,\varphi)+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi)=0,\quad 0<r<R,\ 0<\varphi<2\pi,$
$$|u(r,\varphi)|<+\infty,\ 0\le r\le R,\quad u(R,\varphi)=u_0\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi,$$
$$u(r,2\pi)=u(r,0),\quad 0\le r\le R;$$

$u(r,\varphi)=u_0\frac{r}{R}\sin\varphi.$

C7. $u(r,\varphi)=u_2+\frac{A}{4}(r^2-R_2^2)+\frac{u_1-u_2+\frac{A}{4}(R_2^2-R_1^2)}{\ln R_2-\ln R_1}\ln\frac{R_2}{r}.$

C8. 1) $u(r,\varphi)=\frac{r^2}{2}+\frac{8(r^4+1)}{15r^2}\cos 2\varphi+C$, C – стала;
2) $u(r,\varphi)=2r^2\cos 3\varphi+\frac{4}{1+2^{12}}\left(r^6+\frac{2^{12}}{r^6}\right)\cos 6\varphi.$

C9. 1) $u(r,\varphi)=\frac{AR_1^2}{R_1^2-R_2^2}\left(r+\frac{R_2^2}{r}\right)\sin\varphi+\frac{BR_2^3}{2(R_1^4-R_2^4)}\left(r^2+\frac{R_1^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi;$
2) $u(r,\varphi)=\frac{AR_1}{2}(\ln r-\ln R_2)+\frac{BR_2\cos\varphi}{R_1^2+R_2^2}\left(r+\frac{R_1^2}{r}\right)+\frac{AR_1^3\cos 2\varphi}{4(R_1^4+R_2^4)}\left(-r^2+\frac{R_2^4}{r^2}\right).$

Д1. 1) $u(x,y)=\frac{8Bp^2}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\pi^2(2k+1)^2-2}{(2k+1)^3\mathrm{ch}\,\frac{(2k+1)\pi s}{2p}}\mathrm{sh}\,\frac{(2k+1)\pi y}{2p}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2p};$
2) $u(x,y)=A-\frac{A}{s}y+B\frac{\mathrm{sh}\,\frac{3\pi y}{p}}{\mathrm{sh}\,\frac{3\pi s}{p}}\cos\frac{3\pi x}{p}.$

Д2. $u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=-\frac{P}{T},\quad 0<x<a,\ 0<y<b,$
$$u(0,y)=0,\quad u(a,y)=0,\quad 0\le y\le b,$$
$$u(x,0)=0,\quad u(x,b)=0,\quad 0\le x\le a;$$

$u(x,y)=\frac{P}{2T}(x(a-x)-\frac{8a^3}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}}{(2n+1)^3}\frac{\mathrm{ch}\,\frac{(2n+1)\pi(b-2y)}{2a}}{\mathrm{ch}\,\frac{(2n+1)\pi b}{2a}}$, T – сила натягу мембрани.

Д3. $u(r,\varphi) = \frac{3}{2} - \frac{\ln r}{\ln 2} + (\frac{2}{3r^2} - \frac{1}{6}r^2)\cos 2\varphi$.

Д4. $u(r,\varphi) = \frac{A}{R} r\cos\varphi$.

Д5. $$u_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}u_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = 0, \quad 0 < r < 2,\ 0 < \varphi < 2\pi,$$
$$|u(r,\varphi)| < +\infty, \quad 0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$
$$u(2,\varphi) = 4\cos^2\varphi = 2 + 2\cos 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$
$$u(r,2\pi) = u(r,0), \quad 0 \le r \le 2;$$

$u(r,\varphi) = 2 + \frac{1}{2}r^2\cos 2\varphi$ або $u(x,y) = 2 + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$.

Д6. $$u_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}u_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = 0, \quad 2 < r < 3,\ 0 < \varphi < 2\pi,$$
$$u(2,\varphi) = 2\cos\varphi, \quad u(3,\varphi) = 3\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$
$$u(r,2\pi) = u(r,0), \quad 2 \le r \le 3;$$

$u(r,\varphi) = \left(-\frac{4}{5}r + \frac{36}{5}r^{-1}\right)\cos\varphi + \left(\frac{9}{5}r - \frac{36}{5}r^{-1}\right)\sin\varphi$.

Д7. $u(r,\varphi) = \frac{1}{4}(3r\sin\varphi - \frac{r^3}{3R^2}\sin 3\varphi) + C$, C – стала.

Д8. $u(r,\varphi) = \frac{Ar^2}{24}(R^2 - r^2)\sin 2\varphi$. Розв'язок шукати у вигляді $u = w+v$, де $w = -\frac{Axy}{12}(x^2+y^2) = -\frac{Ar^4\sin 2\varphi}{24}$ – частинний розв'язок рівняння Пуассона, а v – розв'язок рівняння Лапласа, який задовольняє умову $v(R,\varphi) = \frac{A}{24}R^4\sin 2\varphi$.

Д9. 1) $u(r,\varphi) = \frac{2A\alpha}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(\frac{r}{R})^{\frac{k\pi}{\alpha}}\sin\frac{k\pi\varphi}{\alpha}$;

2) $u(r,\varphi) = \frac{4\alpha QR}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}(\frac{r}{R})^{\frac{(2k+1)\pi}{\alpha}}\sin\frac{(2k+1)\pi\varphi}{\alpha}$.

Д10. $u(x,y) = A\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\pi a}{b}}\sin\frac{\pi y}{b} + B\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}$.

Д11. 1) $u(r,\varphi) = -\frac{3R^5}{2r^2}\cos 2\varphi + A_0$, $A_0 \in \mathbb{R}$;

2) $u(r,\varphi) = -(A + \frac{3}{4}B)\frac{R^2}{r}\sin\varphi + \frac{BR^4}{12r^3}\sin 3\varphi + A_0$, $A_0 \in \mathbb{R}$.

Д12. 1) $u(r,\varphi) = \frac{3}{4}(r^2+1) - \frac{13\ln r}{4\ln 2} + \frac{1}{9}(\frac{4}{r} - 7r + 3r^2)\sin\varphi +$
$\frac{1}{6}(\frac{4}{r^2} - r^2)\cos 2\varphi$;

2) $u(r,\varphi) = 2r^3 + \frac{6\ln 2 - 128 - 131\ln r}{2\ln 2 + 1}$;

3) $u(r,\varphi) = 2A\ln r - \frac{2}{17}A(1 + 2\ln 2)(r^2 - \frac{1}{r^2})\sin 2\varphi$;

4) $u(r,\varphi) = r^3 - 8 + 3r^2\sin 2\varphi$.

Тема 9. Метод Фур'є розв'язування крайових задач для рівнянь еліптичного типу. Задачі, що вимагають застосування спеціальних функцій

Розв'язуючи крайову задачу для диференціального рівняння із частинними похідними методом відокремлення змінних Фур'є, одержуємо задачу Штурма–Ліувілля для звичайного диференціального рівняння вигляду

$$(p(x)y'(x))' - q(x)y(x) = \lambda\rho(x)y(x), \quad a < x < b. \tag{1}$$

Якщо коефіцієнти рівняння (1) мають особливості на кінцях інтервалу (наприклад, $p(a) = 0$ або $q(b) = \pm\infty$), то власними функціями задачі Штурма–Ліувілля є спеціальні функції математичної фізики (див. тему 7). Зокрема, у випадку крайових задач для рівняння Лапласа в областях циліндричної форми ми маємо циліндричні функції (функції Бесселя), а в областях сферичної форми – сферичні функції (поліноми Лежандра, приєднані поліноми Лежандра).

Крім того, якщо коефіцієнт p має в точці a нуль першого порядку, тобто $p(x) = (x-a)p_0(x)$, де $p_0(a) \neq 0$, y_1 і y_2 – два лінійно незалежні розв'язки рівняння (1), причому один з цих розв'язків має скінченну границю при $x \to a$ ($|y_1(a)| \neq +\infty$), то другий розв'язок поблизу точки a необмежений ($|y_2(a)| = +\infty$). Іншими словами, загальний розв'язок рівняння (1) у класі функцій, обмежених на відрізку $[a, b]$ (а саме такими повинні бути гармонічні функції), містить лише одну довільну сталу, хоча рівняння (1) є рівнянням другого порядку. У цьому випадку умова $|y(a)| < +\infty$, яка є, очевидно, однорідною, відіграє роль крайової умови.

Приклад 1. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині твердого тіла, яке має форму обмеженого циліндра, якщо до нижньої основи $z = 0$ підведено сталий тепловий потік q, а бічна поверхня $r = R_0$ і верхня основа $z = l$ підтримуються при нульовій температурі. Розглянути випадок напівобмеженого циліндра.

$\triangleleft$ Задача зводиться до розв'язування рівняння Лапласа в циліндричних координатах r, φ, z

$$\Delta u(r,\varphi,z) := \frac{1}{r}(ru_r(r,\varphi,z))_r + u_{zz}(r,\varphi,z) + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi,z) = 0,$$

$$0 < r < R_0, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < z < l,$$

при крайових умовах (див. приклад 3 теми 1)

$$u(R_0,\varphi,z) = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le l,$$

$$-ku_z(r,\varphi,0) = q, \quad u(r,\varphi,l) = 0,$$
$$0 \le r \le R_0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Згідно з симетрією розподіл температури не залежить від φ, тому $u = u(r,z)$. Будемо шукати розв'язок задачі у вигляді $u(r,z) = X(r)Z(z)$. Після підстановки цієї функції в рівняння і відокремлення змінних дістанемо такі два рівняння:

$$rX''(r) + X'(r) + \lambda r X(r) = 0, \quad 0 \le r \le R_0, \tag{2}$$

$$Z''(z) - \lambda Z(z) = 0, \quad 0 \le z \le l. \tag{3}$$

Якщо в рівнянні (2) зробити заміну $\xi = \sqrt{\lambda}r$ $\;(r = \frac{\xi}{\sqrt{\lambda}},\ \frac{dX}{dr} = \frac{d\tilde{X}}{d\xi}\sqrt{\lambda}$, $\frac{d^2X}{dr^2} = \lambda\frac{d^2\tilde{X}}{d\xi^2})$, то одержимо рівняння Бесселя $\frac{d^2\tilde{X}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\tilde{X}}{d\xi} + \tilde{X} = 0$ або $(\xi\tilde{X}')' + \xi\tilde{X} = 0$, тобто $p(\xi) = \xi$. Загальним розв'язком цього рівняння (див. тему 7) є $\tilde{X}(\xi) = AJ_0(\xi) + BY_0(\xi)$. Оскільки нас цікавлять обмежені розв'язки, то покладемо $B = 0$, бо $Y_0(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to 0$. Отже, $\tilde{X}(\xi) = AJ_0(\xi)$ або $X(r) = AJ_0(\sqrt{\lambda}r)$. Використавши крайову умову $u(R_0,\varphi,z) = 0$, дістанемо $J_0(\sqrt{\lambda}R_0) = 0$. Корені останнього рівняння позначимо через μ_n, тоді $\sqrt{\lambda}R_0 = \mu_n$, $\lambda_n = (\frac{\mu_n}{R_0})^2$ і $X_n(r) = J_0(\frac{\mu_n r}{R_0})$, $n \in \mathbb{N}$. Ці функції ортогональні з вагою $\rho(r) = r$ на $[0, R_0]$. Тепер розглянемо рівняння

$$Z_n''(z) - \lambda_n Z_n(z) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le z \le l.$$

Розв'язком цього рівняння є

$$Z_n(z) = A_n e^{\frac{\mu_n}{R_0}z} + B_n e^{-\frac{\mu_n}{R_0}z}, \quad 0 \le z \le l, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже, розв'язок вихідної задачі шукатимемо у вигляді

$$u(r,z) = \sum_{n+1}^{\infty}(A_n e^{\frac{\mu_n}{R_0}z} + B_n e^{-\frac{\mu_n}{R_0}z})J_0(\frac{\mu_n}{R_0}r), \quad 0 \le r \le R_0,\ 0 \le z \le l.$$

Для знаходження A_n і B_n, $n \in \mathbb{N}$, використаємо інші дві крайові умови:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n - B_n)\frac{\mu_n}{R_0}J_0(\frac{\mu_n}{R_0}r) = -\frac{q}{k},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{\frac{\mu_n}{R_0}l} + B_n e^{-\frac{\mu_n}{R_0}l})J_0(\frac{\mu_n}{R_0}r) = 0, \quad 0 \le r \le R_0.$$

Ці рівності справджуються, якщо

$$A_n - B_n = -\frac{R_0}{\mu_n}\frac{2}{R_0^2 J_1^2(\mu_n)}\int_0^{R_0} r\frac{q}{k}J_0(\frac{\mu_n}{R_0}r)dr,$$

$$A_n e^{\frac{\mu_n}{R_0}l} + B_n e^{-\frac{\mu_n}{R_0}l} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обчислимо інтеграл $\int\limits_0^{R_0} rJ_0(\frac{\mu_n}{R_0}r)dr$, скориставшись формулою (8) з теми 7 при $\nu = 0$, $\alpha = 1$: $\int\limits_0^{x} \xi J_0(\xi)d\xi = xJ_1(x)$. Маємо

$$\int_0^{R_0} rJ_0(\frac{\mu_n}{R_0}r)dr = \frac{R_0^2}{\mu_n^2}\int_0^{\mu_n} yJ_0(y)dy = \frac{R_0^2}{\mu_n}J_1(\mu_n).$$

Тоді для визначення коефіцієнтів A_n і B_n, $n \in \mathbb{N}$, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} A_n - B_n = -\frac{2R_0 q}{k\mu_n^2 J_1(\mu_n)}, \\[2ex] A_n e^{\frac{\mu_n}{R_0}l} + B_n e^{-\frac{\mu_n}{R_0}l} = 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$A_n = Ce^{-\frac{\mu_n}{R_0}l}, \quad B_n = -Ce^{-\frac{\mu_n}{R_0}l}, \text{ де } C = \frac{R_0 q}{k\mu_n^2 J_1(\mu_n)\mathrm{ch}\frac{\mu_n}{R_0}l}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Остаточно маємо

$$u(r,z) = \frac{2R_0 q}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\frac{\mu_n}{R_0}r)}{\mu_n^2 J_1(\mu_n)\mathrm{ch}\frac{\mu_n}{R_0}l}\mathrm{sh}\frac{\mu_n}{R_0}(l-z), \quad 0 \le r \le R_0, \quad 0 \le z \le l.$$

При $l \to +\infty$ з останньої формули дістаємо

$$u(r,z) = \frac{2R_0 q}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\frac{\mu_n}{R_0} r)}{\mu_n^2 J_1(\mu_n)} e^{-\frac{\mu_n}{R_0} z}, \quad 0 \le r \le R_0, \quad z \ge 0. \quad \triangleright$$

Приклад 2. Знайти стаціонарний розподіл температури в кулі радіуса R, частина поверхні якої $S_1 (0 \le \theta \le \alpha)$ має сталу температуру $u_0 \neq 0$, а решта поверхні $S_2(\alpha < \theta \le \pi)$ має нульову температуру.

$\triangleleft$ Задача зводиться до розв'язування рівняння Лапласа в сферичних координатах

$$\Delta u(r,\varphi,\theta) := \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r(r,\varphi,\theta)\right)_r + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\sin\theta u_\theta(r,\varphi,\theta)\right)_\theta +$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta} u_{\varphi\varphi}(r,\varphi,\theta) = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi,$$

при крайових умовах

$$|u(0,\varphi,\theta)| < +\infty, \quad u(R,\varphi,\theta) = f(\theta) := \begin{cases} u_0, & 0 \le \theta \le \alpha, \\ 0, & \alpha < \theta \le \pi, \end{cases}$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Оскільки $u = u(r,\theta)$, то рівняння має вигляд

$$\left(r^2 u_r(r,\theta)\right)_r + \frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta u_\theta(r,\theta)\right)_\theta = 0.$$

Будемо шукати обмежений розв'язок цього рівняння методом відокремлення змінних, тобто $u(r,\theta) = Z(r)W(\theta)$. Тоді

$$\frac{d}{dr}(r^2 Z'(r))W(\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta W'(\theta)\right) Z(r) = 0.$$

Звідси, відокремивши змінні, дістанемо такі дві крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d}{dr}(r^2 Z'(r)) - \lambda Z(r) = 0, \quad 0 < r < R, \quad |Z(r)| < +\infty, \quad r \in [0,R];$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(W'(\theta)\sin\theta\right) + \lambda \sin\theta W(\theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad |W(\theta)| < +\infty, \quad \theta \in [0,\pi].$$

Розглянемо задачу для W. Якщо зробити заміну $\cos\theta = t$, то тоді $\frac{dW}{d\theta} = -\sin\theta \frac{d\tilde{W}}{dt}$ і, отже, задача запишеться у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{d\tilde{W}(t)}{dt}\right)+\lambda\tilde{W}(t) = 0,\ \ -1 < t < 1,\ \ |W(\theta)| < +\infty,\ \ t \in [-1,1].$$

Це є крайова задача для рівняння Лежандра, яка має обмежені розв'язки на $[-1,1]$ тоді й тільки тоді, коли $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ [1]. Такими розв'язками є поліноми Лежандра $\tilde{W}_n(t) = P_n(t)$, $t \in [-1,1]$. Тоді $W_n(\theta) = P_n(\cos\theta)$, $\theta \in [0,\pi]$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Тепер повернемося до задачі для Z:

$$r^2 Z_n''(r) + 2rZ'(r) - n(n+1)Z_n(r) = 0,\ |Z_n(0)| < +\infty.$$

Обмеженими розв'язками цієї задачі на $[0,R]$ є функції $Z_n(r) = A_n r^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Отже,

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), \quad 0 < r < R,\ \ 0 < \theta < \pi.$$

Для знаходження сталих A_n, $n \in \mathbb{N}$, скористаємося крайовою умовою

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\theta) = f(\theta) := \begin{cases} u_0, & 0 \le \theta \le \alpha, \\ 0, & \alpha < \theta \le \pi. \end{cases}$$

Звідси

$$A_n R^n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\alpha} u_0 P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta =$$

$$= u_0\frac{2n+1}{2}\int_{\cos\alpha}^{1} P_n(y)dy, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Якщо $n = 0$, то $P_0(y) = 1$, $-1 \le y \le 1$, і $\int_{\cos\alpha}^{1} P_0(y)dy = 1 - \cos\alpha$. Для $n \in \mathbb{N}$ скористаємося тотожністю $(2n+1)P_n(y) = P_{n+1}'(y) - P_{n-1}'(y)$, $-1 \le y \le 1$. Тоді одержимо

$$\int_{\cos\alpha}^{1} P_n(y)dy = \frac{1}{2n+1}\big(P_{n-1}(\cos\alpha) - P_{n+1}(\cos\alpha)\big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Остаточно маємо

$$u(r,\theta)=\frac{u_0}{2}\left(1-\cos\alpha-\sum_{n=1}^{\infty}\big(P_{n-1}(\cos\alpha)-P_{n+1}(\cos\alpha)\big)\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta)\right),$$

$$0\le r\le R,\quad 0\le\theta\le\pi. \qquad \triangleright$$

Зауваження 1. Якщо розглядати зовнішню задачу Діріхле, коли крайові умови задані на сфері $\{r=R_0\}$, то її розв'язок слід шукати у вигляді

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n r^{-(n+1)}P_n(\cos\theta),\quad r>R_0,\ 0<\theta<\pi.$$

У випадку крайової задачі в кульовому шарі $K:=\{(r,\varphi,\theta)|\ R_1<r<R_2,\ 0<\varphi<2\pi,\ 0<\theta<\pi\}$, коли крайові умови залежать лише від θ, розв'язок задачі Діріхле матиме вигляд

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+B_n r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta).$$

Коефіцієнти A_n і B_n, $n\in\mathbb{N}$, визначають із крайових умов.

У багатьох випадках при знаходженні власних функцій крайової задачі для рівняння Лапласа в сферичних координатах ми одержуємо задачу про існування обмежених розв'язків рівняння

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy}{dx}\right)+(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2})y=0,\quad |x|\le 1. \tag{4}$$

Як описано в темі 7, такі розв'язки існують лише при $\lambda=n(n+1)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, і є приєднаними поліномами Лежандра

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m},\quad |x|\le 1,\ \{n,m\}\subset\mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

де P_n – поліном Лежандра, а $P_n^0=P_n$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

Приєднані поліноми Лежандра ортогональні на відрізку $[-1,1]$ з вагою $\rho(x)=1$ (див. тему 7), тобто

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_k^m(x)dx = \begin{cases} 0, & k\neq n, \\ \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}, & k=n. \end{cases} \tag{6}$$

Довільна гладка функція, яка задовольняє умови теореми Стеклова (див. тему 4), розкладається в ряд Фур'є на $[0,l]$ за приєднаними поліномами Лежандра. Оскільки P_n є многочленом степеня n, то з (5) випливає, що при $m>n \quad P_n^m(x)=0$, $x\in[0,l]$.

Приклад 3. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в кульовому шарі $K:=\{(r,\varphi,\theta)|\ 1<r<2,\ 0<\varphi<2\pi,\ 0<\theta<\pi\}$.

$\triangleleft$ Задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2u_r\right)_r+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\left(\sin\theta u_\theta\right)_\theta+\frac{1}{\sin\theta}u_{\varphi\varphi}\right)=0, \tag{7}$$

$$1<r<2,\quad 0<\varphi<2\pi,\quad 0<\theta<\pi,$$

який задовольняє крайові умови

$$\begin{gathered} u(1,\varphi,\theta)=f(\varphi,\theta), u(2,\varphi,\theta)=g(\varphi,\theta), \\ 0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\theta\le\pi, \\ |u(r,\varphi,\theta)|<+\infty,\quad u(r,2\pi,\theta)=u(r,0,\theta),\quad 1\le r\le 2, \\ 0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le\theta\le\pi. \end{gathered} \tag{8}$$

Будемо шукати обмежений розв'язок рівняння (7) у вигляді

$$u(r,\varphi,\theta)=X(r)Y(\varphi,\theta). \tag{9}$$

Після підстановки (9) у (7), відокремлення змінних і врахування обмеженості та неперервності розв'язку дістанемо такі дві задачі:

$$r^2X''(r)+2rX'(r)-\lambda^2X(r)=0,\quad |X(r)|<+\infty,\quad 1\le r\le 2, \tag{10}$$

$$\begin{gathered} Y_{\varphi\varphi}(\varphi,\theta)+\sin\theta\big(\sin\theta Y_\theta(\varphi,\theta)\big)_\theta+\lambda^2\sin^2\theta Y(\varphi,\theta)=0, \\ |Y(\varphi,\theta)|<+\infty,\quad Y(2\pi,\theta)=Y(0,\theta),\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\pi. \end{gathered} \tag{11}$$

Задачу (11) розв'язуватимемо методом відокремлення змінних:

$$Y(\varphi, \theta) = \Phi(\varphi)T(\theta). \tag{12}$$

Як результат одержимо дві задачі для звичайних диференціальних рівнянь:

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi); \tag{13}$$

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta T'(\theta))' + (\lambda^2 - \tfrac{\mu^2}{\sin^2\theta})T(\theta) = 0, \quad 0 \le \theta \le \pi, \\ |T(\theta)| < +\infty, \quad 0 \le \theta \le \pi. \end{gathered} \tag{14}$$

Розв'язки задачі (13) існують при $\mu = m$ і ними є функції

$$\Phi_m(\varphi) = C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{15}$$

У рівнянні із задачі (14) введемо нову незалежну змінну $t = \cos\theta$. Тоді $\frac{dT}{d\theta} = -\sin\theta \frac{d\tilde{T}}{dt}$ і тому $\sin\theta \frac{dT}{d\theta} = (t^2 - 1)\frac{d\tilde{T}}{dt}$. Звідки дістаємо, що задача (14) набуде вигляду

$$\begin{gathered} \tfrac{d}{dt}\big((1-t^2)\tfrac{d\tilde{T}(t)}{dt}\big) + \Big(\lambda^2 - \tfrac{m^2}{1-t^2}\Big)\tilde{T}(t) = 0, \\ |\tilde{T}(t)| < +\infty, \quad t \in [-1, 1]. \end{gathered}$$

Ця задача збігається із задачею (4), тому вона має обмежені розв'язки лише при $\lambda = n(n+1)$, і цими розв'язками є приєднані поліноми Лежандра, тобто $\tilde{T}_{nm}(t) = P_n^m(t)$, $t \in [-1, 1]$, тому

$$T_{nm}(\theta) = P_n^m(\cos\theta), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad m \in \{0, ..., n\}. \tag{16}$$

Підставивши (15) і (16) у (12), матимемо

$$Y_{nm}(\varphi, \theta) = (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 \le \theta \le \pi. \tag{17}$$

Рівняння (10) є рівнянням Ейлера. Враховуючи, що $\lambda = n(n+1)$, знаходимо його загальний розв'язок

$$X_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{18}$$

Підставимо (17) і (18) у (9):

$$u_{mn}(r, \varphi, \theta) = (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)})(C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta),$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, \quad m \in \{0, ..., n\}.$$

Позначивши $A_nC_m =: a_{nm}$, $B_nC_m =: \alpha_{nm}$, $A_nD_m =: b_{nm}$, $B_nD_m =: \beta_{nm}$, шукатимемо розв'язок задачі (7), (8) у вигляді

$$u(r,\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{nm}(r,\varphi,\theta) := \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \big(r^n(a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi) +$$

$$+r^{-(n+1)}(\alpha_{nm}\cos m\varphi + \beta_{nm}\sin m\varphi)\big)P_n^m(\cos\theta),$$

$$1 \le r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \ 0 \le \theta \le \pi. \tag{19}$$

Цей ряд іноді називають **рядом Лапласа**. Для знаходження коефіцієнтів ряду (19) розкладаємо, користуючись (6), праві частини (8) у ряди за функціями $P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ і $P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$:

$$\begin{aligned} f(\varphi,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(f_{nm}^{(1)}\cos m\varphi + f_{nm}^{(2)}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta), \\ g(\varphi,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(g_{nm}^{(1)}\cos m\varphi + g_{nm}^{(2)}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta). \end{aligned} \tag{20}$$

Якщо підставити (19) і (20) у крайові умови (8), то дістанемо тотожності

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}((a_{nm}+\alpha_{nm})\cos m\varphi + (b_{nm}+\beta_{nm})\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta) := \\ &\qquad := \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(f_{nm}^{(1)}\cos m\varphi + f_{nm}^{(2)}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta), \\ &\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}((a_{nm}+\tfrac{\alpha_{nm}}{2^{n+1}})\cos m\varphi + (b_{nm}+\tfrac{\beta_{nm}}{2^{n+1}})\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta) := \\ &\qquad := \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(g_{nm}^{(1)}\cos m\varphi + g_{nm}^{(2)}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta). \end{aligned} \tag{21}$$

Звідси знаходимо, що

$$\begin{aligned} a_{nm} + \alpha_{nm} &= f_{nm}^{(1)}, & b_{nm} + \beta_{nm} &= f_{nm}^{(2)}, \\ a_{nm} + 2^{-(n+1)}\alpha_{nm} &= g_{nm}^{(1)}, & b_{nm} + 2^{-(n+1)}\beta_{nm} &= g_{nm}^{(2)} \end{aligned}$$

або

$$a_{nm} = \frac{(2^{n+1}g_{nm}^{(1)} - f_{nm}^{(1)})}{(2^{n+1}-1)}, \quad \alpha_{nm} = \frac{(f_{nm}^{(1)} - g_{nm}^{(1)})}{(1-2^{-(n+1)})},$$

$$b_{nm} = \frac{(2^{n+1}g_{nm}^{(2)} - f_{nm}^{(2)})}{(2^{n+1}-1)}, \quad \beta_{nm} = \frac{(f_{nm}^{(2)} - g_{nm}^{(2)})}{(1-2^{-(n+1)})}, \quad \{n,m\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в (19), дістанемо розв'язок вихідної задачі, якщо сам ряд і ряди, одержані з нього диференціюванням двічі за r, φ і θ, збігаються рівномірно. $\triangleright$

Зауваження 2. Якщо область, у якій шукається розв'язок задачі, містить початок координат (наприклад, є півкулею), то з обмеженості розв'язку випливає, що в (18) $B_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Приклад 4. Знайти функцію, гармонічну зовні одиничної сфери і таку, що $u(1, \varphi, \theta) - u_r(1, \varphi, \theta) = 24 \sin\theta \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{6})$.

$\triangleleft$ Як і в прикладі 3, шукаючи обмежений розв'язок у вигляді (9), дістаємо ряд Лапласа (19), але, враховуючи, що $\lim\limits_{r\to+\infty} u(r, \varphi, \theta) = 0$, одержуємо $a_{nm} = b_{nm} = 0$, $\{n, m\} \subset \mathbb{Z}_+$, тобто ряд Лапласа в нашому випадку має вигляд

$$u(r, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r^{-(n+1)} (\alpha_{nm} \cos m\varphi + \beta_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta).$$

Враховуючи рівності $\sin\theta = P_1^1(\cos\theta)$, $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{3} P_2^1(\cos\theta)$, одержуємо, що $24 \sin\theta \cos^2 \frac{\theta}{2} = 12(\sin\theta + \sin\theta\cos\theta) = 4(3P_1^1(\cos\theta) + P_2^1(\cos\theta))$, а оскільки $\sin(\varphi + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi$, то співвідношення типу (21) для знаходження коефіцієнтів α_{nm}, β_{nm}, $\{n, m\} \subset \mathbb{Z}_+$, набувають вигляду

$$u(1, \varphi, \theta) - u_r(1, \varphi, \theta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (1 + (n+1))(\alpha_{nm} \cos m\varphi + \beta_{nm} \sin m\varphi) \times$$

$$\times P_n^m(\cos\theta) = 2(\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi)(3P_1^1(\cos\theta) + P_2^1(\cos\theta)).$$

Звідси випливає, що

$$(1+2)(\alpha_{11} \cos\varphi + \beta_{11} \sin\varphi) = 2(\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi)3,$$

$$(1+3)(\alpha_{21} \cos\varphi + \beta_{21} \sin\varphi) = 2(\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi),$$

тобто

$$\alpha_{11} = 2, \quad \beta_{11} = 2\sqrt{3}, \quad \alpha_{21} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{21} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

а всі інші коефіцієнти $\alpha_{nm} = \beta_{nm} = 0$.

Отже, розв'язком поставленої задачі є

$$u(r, \varphi, \theta) = r^{-2}(2\cos\varphi + 2\sqrt{3}\sin\varphi) P_1^1(\cos\theta) + r^{-3}(\frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi) \times$$

$$\times P_2^1(\cos\theta) = (\frac{4}{r^2}P_1^1(\cos\theta) + \frac{1}{r^3}P_2^1(\cos\theta))\sin(\varphi + \frac{\pi}{6}) =$$

$$= (\frac{4}{r^2} + \frac{3}{r^3}\cos\theta)\sin\theta\sin(\varphi + \frac{\pi}{6}), \quad r \geq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi. \triangleright$$

Вправи

О1. Знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок циліндра з радіусом основи R і висотою h, якщо температура нижньої основи дорівнює нулю, бічна поверхня циліндра вільно охолоджується в середовищі з нульовою температурою, а температура верхньої основи є функцією від r.

О2. Знайти функцію u, гармонічну всередині $K_R(0)$ (кулі радіуса R з центром у початку координат) і таку, що: 1) $u(r,\theta)|_{r=R} = \cos^2\theta$; 2) $u(r,\theta)|_{r=R} = \begin{cases} u_0, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases}$

О3. Знайти функцію, гармонічну зовні кулі $K_R(0)$ і таку, що $(u(r,\theta) - u_r(r,\theta))|_{r=R} = \sin^2\theta$.

О4. З'ясувати, чи розв'язна внутрішня задача Неймана для рівняння Лапласа в кулі $K_R(0)$, якщо $u_r(r,\theta)|_{r=R} = A\cos\theta$. Знайти розв'язок у разі розв'язності задачі.

О5. Знайти функцію, яка гармонічна всередині кругового шару $K := \{(r,\varphi,\theta)|\ 1 < r < 2,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta < \pi\}$ і задовольняє умови $u(r,\theta)|_{r=1} = \cos^2\theta, \quad u(r,\theta)|_{r=2} = 4\cos^2\theta - \frac{4}{3}$.

О6. Знайти функцію, гармонічну всередині одиничної кулі з центром у початку координат і таку, що $u(r,\varphi,\theta)|_{r=1} = \cos(2\varphi + \frac{\pi}{3})\sin^2\theta$.

О7. Знайти функцію, яка гармонічна зовні кулі $K_R(0)$ і задовольняє умову $(u(r,\varphi,\theta) - u_r(r,\varphi,\theta))|_{r=R} = \sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2}\sin(\varphi + \frac{\pi}{6})$.

О8. Знайти функцію, гармонічну всередині кульового шару $K := \{(r,\varphi,\theta)|1 < r < 2, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi\}$ і таку, що $u(r,\varphi,\theta)|_{r=1} = 3\sin 2\varphi\sin^2\theta, \quad u(r,\varphi,\theta)|_{r=2} = 3\cos\theta$.

О9. Знайти функцію, яка гармонічна зовні одиничної кулі з центром у початку координат і задовольняє умову:

1) $u(r,\varphi,\theta)|_{r=1} = \cos^2\theta\sin\theta\sin(\varphi + \frac{\pi}{3})$;

2) $u_r(r,\varphi,\theta)|_{r=1} = \sin(\frac{\pi}{4} - \varphi)\sin\theta$.

О10. Знайти функцію $u(r,\varphi,\theta)$, гармонічну всередині кулі $K_R(0)$ і таку, що:
1) $u(r,\varphi,\theta)|_{r=R} = \cos\varphi \sin 3\theta$; 2) $u(r,\varphi,\theta)|_{r=R} = \sin(3\varphi + \frac{\pi}{4})\sin^3\theta$.

С1. Куля радіуса R нагрівається плоско-паралельним потоком тепла густини q, що падає на її поверхню, і віддає тепло в оточуюче середовище за законом Ньютона. Знайти стаціонарний розподіл температури в кулі.

С2. Знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок циліндра з радіусом основи R і висотою h, якщо температура нижньої основи дорівнює нулю, бічна поверхня циліндра покрита непроникним для тепла чохлом, а температура верхньої основи є функцією від r.

С3. Знайти функцію $u = u(r,\theta)$, гармонічну в кулі $K_R(0)$ і таку, що: 1) $u(r,\theta)|_{r=R} = 2\cos\theta - 3\sin^2\theta$;
2) $u(r,\theta)|_{r=R} = 3\sin^2 2\theta - 2\sin^2\theta$.

С4. Знайти функцію $u = u(r,\theta)$, яка гармонічна зовні кулі $K_R(0)$ і задовольняє умови:
1) $u(r,\theta)|_{r=R} = \cos^3\theta$; 2) $u(r,\theta)|_{r=R} = 3 + 2\cos^2\theta$.

С5. Знайти функцію, гармонічну всередині кульового шару $K := \{(r,\varphi,\theta)|\ 1 < r < 2,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta < \pi\}$ і таку, що:
1) $u(r,\varphi,\theta)|_{r=1} = \sin 2\varphi \sin^2\theta$, $u(r,\varphi,\theta)|_{r=2} = \cos 2\varphi \sin^2\theta$;
2) $u(r,\varphi,\theta)|_{r=1} = \cos\varphi \sin 2\theta$, $u(r,\varphi,\theta)|_{r=2} = \sin\varphi \sin 2\theta$.

Домашнє завдання

Д1. Знайти функцію, гармонічну всередині кулі $K_R(0)$ і таку, що $(u(r,\theta) + u_r(r,\theta))|_{r=R} = 1 + \cos^2\theta$.

Д2. Знайти функцію, яка гармонічна зовні кулі $K_R(0)$ і задовольняє умову $u_r(r,\theta)|_{r=R} = A\cos\theta$.

Д3. Бічна поверхня циліндра, радіус основи якого R і висота l, охолоджується в повітрі з температурою u_0. Температура нижньої основи дорівнює нулю, а на верхню основу подається нормальний потік тепла з густиною q. Знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок циліндра.

Д4. Знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок півкулі, якщо її межа (півсфера) підтримується при температурі u_0, а основа півкулі – при нульовій температурі.

Д5. Знайти функцію, яка гармонічна всередині кулі $K_R(0)$ і задовольняє умову $u(r,\varphi,\theta)|_{r=R} = \sin(2\varphi + \frac{\pi}{6})\sin^2\theta\cos\theta$.

Д6. Знайти функцію, гармонічну зовні кулі $K_R(0)$ і таку, що $u(r,\varphi,\theta)|_{r=R} = \sin^3\theta\cos\theta\cos(3\varphi + \frac{\pi}{4})$.

Д7. Знайти функцію, яка гармонічна всередині кульового шару $K := \{(r,\varphi,\theta)|\ 1 < r < 2,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta < \pi\}$ і задовольняє умови:

1) $u(r,\varphi,\theta)|_{r=1} = 7\sin\theta\cos\varphi, \quad u(r,\varphi,\theta)|_{r=2} = 7\cos\theta$;
2) $u(r,\varphi,\theta)|_{r=1} = \cos\theta,\ u(r,\varphi,\theta)|_{r=2} = \cos\varphi(12\sin\theta - 15\sin^3\theta)$;
3) $u(r,\varphi,\theta)|_{r=1} = 12\sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2}\cos\varphi, \quad u(r,\varphi,\theta)|_{r=2} = 0$.

Д8. Знайти функцію, гармонічну всередині кульового шару $K := \{(r,\varphi,\theta)|\ 1/2 < r < 1,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta < \pi\}$ і таку, що $u(r,\varphi,\theta)|_{r=1/2} = 30\cos^2\varphi\sin^2\theta\cos\theta, \quad u(r,\varphi,\theta)|_{r=1} = 0$.

Д9. Сфера розділена шаром ізоляційної речовини на дві півсфери: верхню, заряджену до потенціалу u_1, і нижню, яка має потенціал u_2. Знайти потенціал сфери в будь-якій точці електростатичного поля.

Д10. Визначити стаціонарну температуру внутрішніх точок кульового шару $K := \{(r,\varphi,\theta)|\ 1 < r < 2,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta < \pi\}$, якщо на внутрішній сфері S_1 температура дорівнює $\frac{1}{2}\cos\theta$, а на зовнішній S_2 – $1 + \cos 2\theta$.

Відповіді

О1. Розв'язком задачі

$$\begin{gathered} u_{rr}(r,z) + \tfrac{1}{r}u_r(r,z) + u_{zz}(r,z) = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 < z < h, \\ |u(0,z)| < +\infty,\ u_r(R,z) + h_1 u(R,z) = 0, \quad 0 \le z \le h, \\ u(r,0) = 0,\ u(r,h) = f(r), 0 \le r \le R, \end{gathered}$$

є функція $u(r,z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_n h}{R}} J_0(\frac{\mu_n r}{R})$, де $\mu_n, n \in \mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $\mu J_1(\mu) - h_1 R J_0(\mu) = 0$, $a_n = \frac{2}{R^2}(1 + \frac{h_1^2 R^2}{\mu_n^2})(J_0(\mu_n))^{-2}\int\limits_0^R r f(r) J_0(\frac{\mu_n r}{R})dr$.

O2. 1) $u(r,\theta)=\frac{r^2}{R^2}\cos^2\theta+\frac{1}{3}(1-\frac{r^2}{R^2})$;
2) $u(r,\theta)=\frac{u_0}{2}\Big(1+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n+3}{2(n+1)}P_{2n}(0)(\frac{r}{R})^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta)\Big)$.

O3. $u(r,\theta)=(\frac{2}{3}-C)\frac{R^2}{r(R+1)}+C-\frac{R^4}{(R+3)r^3}(\cos^2\theta-\frac{1}{3}),\ \ C\in\mathbb{R}$.

O4. Задача розв'язна; $u(r,\theta)=Ar\cos\theta+C$, де C – довільна стала.

O5. $u(r,\theta)=\frac{1}{3}(\frac{2}{r}-1+r^2(3\cos^2\theta-1))$.

O6. $u(r,\varphi,\theta)=r^2\cos(2\varphi+\frac{\pi}{3})\sin^2\theta$.

O7. $u(r,\varphi,\theta)=(\frac{1}{2}(\frac{R}{r})^2\frac{R}{R+2}\sin\theta+\frac{1}{2}(\frac{R}{r})^3\frac{R}{R+3}\sin\theta\cos\theta)\sin(\varphi+\frac{\pi}{6})$.

O8. $u(r,\varphi,\theta)=\frac{12}{7}(r-\frac{1}{r^2})\cos\theta+(\frac{96}{31}\frac{1}{r^3}-\frac{3r^2}{31})\sin 2\varphi\sin^2\theta$.

O9. 1) $u(r,\varphi,\theta)=(\frac{1}{5r^2}P_1^1(\cos\theta)+\frac{2}{15r^4}P_3^1(\cos\theta))\sin(\varphi+\frac{\pi}{3})$;
2) $u(r,\varphi,\theta)=C-\frac{1}{2r^2}\sin\theta\sin(\frac{\pi}{4}-\varphi)$, де C – довільна стала.

O10. 1) $u(r,\varphi,\theta)=\frac{8}{15}(\frac{r}{R})^3P_3^1(\cos\theta)-\frac{1}{5}\frac{r}{R}P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi$;
2) $u(r,\varphi,\theta)=(\frac{r}{R})^3\sin(3\varphi+\frac{\pi}{4})\sin^3\theta$.

C1. Задача зводиться до розв'язування рівняння

$$(r^2u_r)_r+\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta u_\theta)_\theta=0$$

за умови, що

$$(u_r+\gamma u)|_{r=R}=\begin{cases}\frac{q}{k}\cos\theta, 0\le\theta\le\pi/2,\\ 0,\quad \pi/2<\theta\le\pi;\end{cases}$$

$u(r,\theta)=\frac{qR}{2k}\left(\frac{1}{2R\gamma}+\frac{r}{R}\frac{\cos\theta}{1+k\gamma}-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m+1}(m!)^2}\,\frac{4m+1}{(2m+R\gamma)(2m-1)(m+1)}\times\right.$
$\left.\times\left(\frac{r}{R}\right)^{2m}P_{2m}(\cos\theta)\right)$.

C2. Розв'язком задачі

$$u_{rr}(r,z)+\frac{1}{r}u_r(r,z)+u_{zz}(r,z)=0,\quad 0<r<R,\quad 0<z<h,$$
$$|u(0,z)|<+\infty,\ u_r(R,z)=0,\quad 0\le z\le h,$$
$$u(r,0)=0,\ u(r,h)=f(r), 0\le r\le R,$$

є функція $u(r,z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\frac{\operatorname{sh}\frac{\mu_n z}{R}}{\operatorname{sh}\frac{\mu_n h}{R}}J_0(\frac{\mu_n r}{R})$, де $\mu_n, n\in\mathbb{N}$,– додатні корені рівняння $J_1(\mu)=0$, $a_n=\frac{2}{R^2J_0^2(\mu_n)}\int\limits_0^R rf(r)J_0(\frac{\mu_n r}{R})dr$.

C3. 1) $u(r,\theta)=-2+\frac{2r}{R}P_1(\cos\theta)+\frac{2r^2}{R^2}P_2(\cos\theta)$;
2) $u(r,\theta)=-\frac{8}{15}+\frac{40r^2}{21R^2}P_2(\cos\theta)-\frac{48r^4}{35R^4}P_4(\cos\theta)$.

C4. 1) $u(r,\theta)=\frac{3R^2}{5r^2}P_1(\cos\theta)+\frac{2R^4}{5r^4}P_3(\cos\theta)$;
2) $u(r,\theta)=\frac{7R}{3r}+\frac{4R^3}{3r^3}P_2(\cos\theta)$.

C5. 1) $u(r,\varphi,\theta)=\big(r^2(\frac{8}{31}\cos 2\varphi-\frac{1}{31}\sin 2\varphi)+\frac{1}{r^3}(-\frac{8}{31}\cos 2\varphi+\frac{32}{31}\sin 2\varphi)\sin^2\theta\big)$; 2) $u(r,\varphi,\theta)=\big(r^2(-\frac{1}{31}\cos\varphi+\frac{8}{31}\sin\varphi)+\frac{1}{r^3}(\frac{32}{31}\cos\varphi-$

$\frac{8}{31}\sin\varphi)\sin 2\theta\big)$.

Д1. $u(r,\theta)=\frac{4}{3}+\frac{2r^2}{3R(R+2)}P_2(\cos\theta)$.

Д2. $u(r,\theta)=C-\frac{A}{2}\frac{R^3}{r^2}\cos\theta$, де C – довільна стала.

Д3. Розв'язком задачі

$$\begin{gathered}u_{rr}(r,z)+\tfrac{1}{r}u_r(r,z)+u_{zz}(r,z)=0,\quad 0<r<R,\ \ 0<z<l,\\ |u(0,z)|<+\infty,\ u_r(R,z)+hu(R,z)=hu_0,\quad 0\le z\le l,\\ u(r,0)=0,\quad u_z(r,l)=\tfrac{q}{k},\quad k\text{ – стала},\quad 0\le r\le R,\end{gathered}$$

є

$$u(r,z)=u_0+2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_0(\frac{\mu_i}{R}r)}{\mu_i(J_1^2(\mu_i)+J_0^2(\mu_i))}\left(\frac{qR\mathrm{sh}\frac{\mu_i}{R}z}{k\mu_i\mathrm{ch}\frac{\mu_i}{R}l}-u_0\frac{\mathrm{ch}\frac{\mu_i}{R}(z-l)}{\mathrm{ch}\frac{\mu_i}{R}l}\right),$$

де μ_i, $i\in\mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $\mu J_0'(\mu)+hRJ_0(\mu)=0$.

Д4. Розв'язком задачі

$$\begin{gathered}(r^2u_r(r,\theta))_r+\tfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta u_\theta(r,\theta))_\theta=0,\quad 0<r<R,\quad 0<\theta<\pi/2,\\ u(R,0)=\begin{cases}u_0, & 0\le\theta<\pi/2,\\ 0, & \theta=\pi/2\end{cases}\end{gathered}$$

є $u(r,\theta)=u_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(4n+3)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n+2)}(\frac{r}{R})^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta)$.

Д5. $u(r,\varphi,\theta)=(\frac{r}{R})^3\sin(2\varphi+\frac{\pi}{6})\sin^2\theta\cos\theta$.

Д6. $u(r,\varphi,\theta)=(\frac{R}{r})^5\sin^3\theta\cos\theta\cos(3\varphi+\frac{\pi}{4})$.

Д7. 1) $u(r,\varphi,\theta)=4(r-\frac{1}{r^2})\cos\theta+(\frac{8}{r^2}-r)\sin\theta\cos\varphi$;
2) $u(r,\varphi,\theta)=\frac{1}{7}\big(\frac{8}{r^2}-r\big)\cos\theta+\frac{32}{127}\big(r^3-\frac{1}{r^4}\big)\frac{12\sin\theta-15\sin^3\theta}{2}\cos\varphi$;
3) $u(r,\varphi,\theta)=\frac{12}{7}\big(\frac{4}{r^2}-\frac{r}{2}\big)\cos\varphi\sin\theta+\frac{12}{31}\big(\frac{8}{r^3}-\frac{r^2}{4}\big)\cos\varphi\sin 2\theta$.

Д8. $u(r,\varphi,\theta)=\frac{12}{7}(\frac{1}{r^2}-r)\cos\theta+\frac{8}{127}(\frac{1}{r^4}-r^3)P_3^2(\cos\theta)\cos 2\varphi+\frac{48}{127}(r^3-$ $-\frac{1}{r^4})P_3(\cos\theta)$. Крайову умову записати через поліноми Лежандра $u(r,\varphi,\theta)|_{r=1/2}=-6P_3(\cos\theta)+6P_1(\cos\theta)+P_3^2(\cos\theta)\cos2\varphi$ і розв'язок шукати у вигляді $u(r,\theta)=(ar+\frac{b}{r^2})P_1(\cos\theta)+(cr^3+\frac{d}{r^4})P_3^2(\cos\theta)\cos2\varphi+$ $(gr^3+\frac{h}{r^4})P_3(\cos\theta))$ (див. зауваження 1).

Д9. $u(r,\theta)=\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{u_1-u_2}{2}(\frac{3}{2}\frac{r}{R}P_1(\cos\theta)-\frac{7}{8}(\frac{r}{R})^3P_3(\cos\theta)+...)$ при $r\le R$; $u(r,\theta)=\frac{u_1+u_2}{2}\frac{R}{r}+\frac{u_1-u_2}{2}(\frac{3}{2}(\frac{R}{r})^2P_1(\cos\theta)-\frac{7}{8}(\frac{R}{r})^4P_3(\cos\theta)+...)$ при $r>R$. Згідно з симетричністю задачі потенціал u не залежить від координати φ і є функцією лише координат r і θ: $u=u(r,\theta)$. Задача зводиться до розв'язування рівняння

$$(r^2 u_r(r,\theta))_r + \frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta u_\theta(r,\theta))_\theta = 0, \quad 0 < r < R, \quad 0 < \theta < \pi,$$

за умови $u(r,\theta)|_{r=R} = \begin{cases} u_1 \text{ при } 0 \le \theta \le \pi/2, \\ u_2 \text{ при } \pi/2 < \theta \le \pi. \end{cases}$

Д10. Математична модель задачі така:

$$(r^2 u_r(r,\theta))_r + \frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta u_\theta(r,\theta))_\theta = 0, \quad 1 < r < 2,\ 0 < \theta < \pi;$$
$$u(1,\theta) = \frac{1}{2}\cos\theta, \quad u(2,\theta) = 1 + \cos 2\theta,\ 0 \le \theta \le \pi;$$
$$|u(r,\theta)| < +\infty, \quad 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi.$$

Її розв'язок

$$u(r,\theta) = \frac{4}{3}(1 - \frac{1}{r}) + \frac{1}{14}(\frac{8}{r^2} - r)P_1(\cos\theta) + \frac{32}{93}(r^2 - \frac{1}{r^2})P_2(\cos\theta),$$

$$1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi.$$

Тема 10. Розв'язування крайових задач для еліптичних рівнянь методом функції Гріна

Крайові задачі для еліптичних рівнянь у деяких областях зручно розв'язувати методом функцій Гріна. Цей метод дає змогу виразити розв'язок задачі у вигляді інтегралів.

Розглянемо задачу

$$\begin{gathered} \Delta u(x) = f(x), \quad x \in D, \\ \Big(\alpha u(x) + \beta \partial_{\vec{\nu}_z} u(x)\Big)\Big|_{x \in S} = \varphi(z),\ z \in S, \end{gathered} \tag{1}$$

де D – двовимірна або тривимірна область з межею S; $\vec{\nu_z}$ – зовнішня нормаль до S у точці z. При $\alpha = 1$, $\beta = 0$ маємо першу крайову задачу або задачу Діріхле, при $\alpha = 0$, $\beta = 1$ – другу крайову задачу або задачу Неймана, а при $\alpha\beta > 0$ – третю крайову задачу.

Функцією Гріна (функцією джерела, впливу) задачі (1) називається функція $G(x, \xi)$, $\{x, \xi\} \subset \overline{D}$, $x \neq \xi$, яка задовольняє такі умови:

1) G як функція ξ є гармонічною в $D \setminus \{x\}$ і $G(x, \xi) \to +\infty$ при $\xi \to x$;

2) G задовольняє крайову умову

$$\big(\alpha G(x, \xi) + \beta \partial_{\vec{\nu}_\xi} G(x, \xi)\big)\big|_{\xi \in S} = 0,\ x \in D; \tag{2}$$

3) в області D функція G допускає зображення:

а) для $D \subset \mathbb{R}^3$

$$G(x, \xi) = \frac{1}{4\pi r_{x\xi}} + g(x, \xi),\ x \in \overline{D},\ \xi \in \overline{D} \setminus \{x\}, \tag{3}$$

б) для $D \subset \mathbb{R}^2$

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{x\xi}} + g(x, \xi),\ x \in \overline{D},\ \xi \in \overline{D} \setminus \{x\}, \tag{4}$$

де $r_{x\xi} := |x-\xi|$ – відстань між точками x і ξ, а g як функція ξ є гармонічною в D і $g(x,\cdot) \in C^1(\overline{D})$.

Функція Гріна задачі (1) симетрична, тобто $G(x,\xi) = G(\xi,x)$.

При відповідній гладкості поверхні S та функцій f і φ розв'язок першої, другої і третьої крайових задач для тривимірного випадку записується відповідно у вигляді

$$u(x) = -\int\limits_S \partial_{\vec{\nu}_\xi} G(x,\xi)\varphi(\xi) d_\xi S - \int\limits_D G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \;\; x \in D, \qquad (5)$$

$$u(x) = \int\limits_S G(x,\xi)\varphi(\xi) d_\xi S - \int\limits_D G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \;\; x \in D, \qquad (6)$$

і

$$u(x) = \int\limits_S G(x,\xi)\frac{\varphi(\xi)}{\beta} d_\xi S - \int\limits_D G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in D. \qquad (7)$$

Аналогічні формули правильні й у випадку площини.

Зауваження. Щодо функції Гріна задачі Неймана і розв'язку цієї задачі, вираженого формулою (6), зробимо таке застереження. Річ у тому, що для випадку обмежених областей функція Гріна другої крайової задачі, в зазначеному вище розумінні, не існує (не виконується, взагалі кажучи, умова $\int\limits_S \partial_{\vec{\nu}_\xi} G(x,\xi) d_\xi S = 0$). Існування такої функції можливе лише для областей, межа яких містить нескінченно віддалену точку. Тому, щоб формула (6) давала розв'язок задачі Неймана і для випадку обмежених областей, ми трохи узагальнимо поняття функції Гріна другої крайової задачі. Під **узагальненою функцією Гріна** G задачі Неймана для обмеженої просторової області D розумітимемо функцію (3) з g, яка при кожному фіксованому $x \in D$ є розв'язком задачі

$$\Delta_\xi g(x,\xi) = 0, \quad \xi \in D, \qquad \partial_{\vec{\nu}_\xi} g(x,\xi)\big|_{\xi\in S} = -\frac{1}{P} - \partial_{\vec{\nu}_\xi}\left(\frac{1}{4\pi r_{x\xi}}\right)\Bigg|_{\xi\in S},$$

де P – площа поверхні S [9].

Якщо $D \subset \mathbb{R}^2$, то g повинна бути розв'язком задачі

$$\Delta_\xi g(x,\xi) = 0, \quad \xi \in D, \qquad \partial_{\vec{\nu}_\xi} g(x,\xi)\big|_{\xi\in\Gamma} = -\frac{1}{l} - \partial_{\nu_\xi}\left(\frac{1}{2\pi r_{x\xi}}\right)\Bigg|_{\xi\in\Gamma},$$

де l – довжина межі Γ області D.

Приклад 1. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в півпросторі $Q := \{x := (x_1, x_2, x_3) | \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_3 > 0\}$.

$\triangleleft$ Нам треба знайти розв'язок задачі

$$\begin{gathered} \Delta u(x) = 0, \quad x \in Q, \\ u(x)|_{x_3=0} = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \end{gathered} \tag{8}$$

Побудуємо спочатку функцію Гріна цієї задачі. Будемо її шукати у вигляді (3), а це означає, що треба підібрати g так, щоб вона як функція ξ була гармонічною в області Q і набувала при $\xi_3 = 0$ значення $-\frac{1}{4\pi r_{x\xi}}|_{\xi_3=0}$. Будуватимемо функцію g методом дзеркальних відображень (електростатичних відображень). Нехай $\overline{x}$ – точка, яка симетрична точці x відносно площини $\{\xi_3 = 0\}$ (рис. 1). Якщо точка x має координати (x_1, x_2, x_3), то координатами точки $\overline{x}$ є числа $(x_1, x_2, -x_3.)$ Розглянемо функцію $g(x,\xi) := \frac{-1}{4\pi r_{\overline{x}\xi}}$, $\{x, \xi\} \subset \overline{Q}$, $x_3 \neq \xi_3$. Вона гармонічна при $\xi_3 > 0$ і дорівнює $-\frac{1}{4\pi r_{x\xi}}$ при $\xi_3 = 0$, оскільки $r_{\overline{x}\xi} = r_{x\xi}$ при $\xi_3 = 0$.

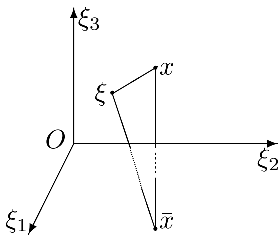


Рис. 1

Отже, для півпростору Q функція Гріна задачі (8) має вигляд

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi r_{x\xi}} - \frac{1}{4\pi r_{\overline{x}\xi}}, \ x \in \overline{Q}, \ \xi \in \overline{Q} \setminus \{x\}. \tag{9}$$

Тепер запишемо розв'язок задачі (8), використовуючи формулу (5) і функцію Гріна (9). Маємо

$$u(x) = -\int\limits_{\{x_3=0\}} \partial_{\vec{\nu}_\xi} G(x,\xi) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \partial_{\xi_3} G(x,\xi)\big|_{\xi_3=0} f(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2, \; x \in Q. \tag{10}$$

Перед останнім інтегралом взято знак плюс, бо напрямок зовнішньої нормалі до площини $\{\xi_3 = 0\}$ протилежний напрямку осі $O\xi_3$. Обчислимо $\partial_{\xi_3} G$ при $\xi_3 = 0$

$$\partial_{\xi_3} G(x,\xi)\big|_{\xi_3=0} = \frac{1}{4\pi}\partial_{\xi_3}\left(\frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3+\xi_3)^2}}\right)\Bigg|_{\xi_3=0} =$$

$$= \frac{x_3}{2\pi((x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2)^{3/2}}. \tag{11}$$

Підставивши (11) у (10), дістанемо розв'язок задачі (8)

$$u(x) = \frac{x_3}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{((x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2)^3}}. \tag{12}$$

Формула (12) називається **формулою Пуассона** задачі Діріхле для півпростору. Якщо ввести у просторі циліндричні координати r, φ, z, поклавши $\xi_1 = r\cos\varphi$, $\xi_2 = r\sin\varphi$, $\xi_3 = z$, то формулу (12) можна записати у вигляді

$$u(\rho,\psi,z) = \frac{z}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} \frac{\overline{f}(r,\varphi) r dr}{\sqrt{(\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\varphi-\psi)+z^2)^3}}, \tag{13}$$

де ρ, ψ, z – циліндричні координати точки x, а $\overline{f}(r,\varphi) = f(\xi_1,\xi_2)$, коли $\xi_1 = r\cos\varphi$, $\xi_2 = r\sin\varphi$. $\triangleright$

Приклад 2. На межі $S := \{x := (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$ однорідного півпростору $Q := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$ підтримується нульова температура зовні круга радіуса R з центром у початку координат, а всередині цього круга підтримується температура, що дорівнює одиниці. Знайти стаціонарний розподіл температури в точках півосі $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0, \; x_2 = 0, \; x_3 > 0\}$.

$\triangleleft$ Математична модель задачі має вигляд

$$\Delta u(x) = 0, \qquad x \in Q,$$

$$u(x)|_{x_3=0} = f(x_1,x_2) := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x_1^2+x_2^2 \le R, \\ 0, & x_1^2+x_2^2 > R. \end{array} \right.$$

Зручно перейти до циліндричних координат і скористатись формулою (13). Оскільки має місце осьова симетрія, то шукана температура u не буде залежати від ψ, тому

$$u(\rho,z) = \frac{z}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{rdr}{\sqrt{(\rho^2+r^2-2r\rho\cos\varphi+z^2)^3}}.$$

На осі Ox_3 $\rho=0$, а тому підінтегральний вираз значно спрощується. Інтегруючи, дістаємо

$$u(0,z) = \frac{z}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{rdr}{\sqrt{(r^2+z^2)^3}} = z\int\limits_0^R \frac{d(r^2+z^2)}{2\sqrt{(r^2+z^2)^3}} =$$

$$= -z\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\bigg|_0^R = 1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}.$$

Отже, температура $u(0,z)$ спадає монотонно від 1 до 0 при зростанні z від 0 до $+\infty$.

Для точок, що не лежать на осі Ox_3, тобто при $\rho>0$, внутрішній інтеграл за r можна обчислити точно, однак інтегрування за φ приводить до інтегралів, які не виражаються в елементарних функціях, а саме до еліптичних інтегралів. $\triangleright$

Приклад 3. Розв'язати третю крайову задачу для рівняння Лапласа в півпросторі $Q := \{x := (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$.

$\triangleleft$ Треба розв'язати таку задачу:

$$\begin{array}{c} \Delta u(x) = 0, \qquad x \in Q, \\ (\partial_{\vec{\nu}} u(x) + hu(x))|_{x_3=0} = \varphi(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2. \end{array} \tag{14}$$

Побудуємо спочатку функцію Гріна для півпростору Q при крайовій умові третього роду. Використовуючи означення функції Гріна і результат задачі 1, шукаємо G у вигляді

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi r_{x\xi}} + \frac{1}{4\pi r_{\overline{x}\xi}} + g(x,\xi),\ x\in\overline{Q},\ \xi\in\overline{Q}\setminus\{x\}, \tag{15}$$

де g – гармонічна функція, яку треба знайти з умови

$$(\partial_{\vec{\nu}} G(x,\xi) + hG(x,\xi))|_{\xi_3=0} = 0. \tag{16}$$

Підставимо (15) у (16). Оскільки

$$\partial_{\vec{\nu}} G(x,\xi)|_{\xi_3=0} = -\partial_{\xi_3} G(x,\xi)|_{\xi_3=0} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{x_3-\xi_3}{\sqrt{((x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2)^3}} - \right.$$

$$\left. - \frac{x_3+\xi_3}{\sqrt{((x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3+\xi_3)^2)^3}}\right)\Bigg|_{\xi_3=0} - \partial_{\xi_3} g|_{\xi_3=0} = -\partial_{\xi_3} g|_{\xi_3=0},$$

то

$$0=(\partial_{\vec{\nu}} G(x,\xi)+hG(x,\xi))|_{\xi_3=0} = \left(-\partial_{\xi_3} g + \frac{h}{4\pi r_{x\xi}} + \frac{h}{4\pi r_{\overline{x}\xi}} + hg\right)\Bigg|_{\xi_3=0} =$$

$$= -\partial_{\xi_3} g|_{\xi_3=0} + \frac{h}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2}} + hg\Bigg|_{\xi_3=0}.$$

Отже, g треба визначити з рівняння

$$\partial_{\xi_3} g|_{\xi_3=0} - hg|_{\xi_3=0} = \frac{h}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2}}.$$

Оскільки $\partial_{\xi_3} g = \partial_{x_3} g$, то, ввівши позначення $v := g|_{\xi_3=0}$, одержуємо для функції v як функції x_3 таке звичайне диференціальне рівняння:

$$\frac{dv}{dx_3} - hv = \frac{h}{2\pi\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2}}. \tag{17}$$

Розв'язуватимемо рівняння (17) методом варіації сталої. Загальним розв'язком відповідного лінійного однорідного рівняння $\frac{dv}{dx_3} - hv = 0$ є $v = Ce^{hx_3}$. Розв'язок рівняння (17) шукатимемо у вигляді

$$v = C(x_3)e^{hx_3}. \tag{18}$$

Підставивши (18) у (17), дістанемо

$$C'(x_3)e^{hx_3} = \frac{h}{2\pi\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2}}.$$

Звідси
$$C(x_3) = \frac{h}{2\pi} \int\limits_{x_3}^{+\infty} e^{-ht} \frac{dt}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + t^2}}.$$
Тому
$$v = \frac{h}{2\pi} \int\limits_{x_3}^{+\infty} e^{h(x_3-t)} \frac{dt}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + t^2}},$$
а
$$g(x,\xi) = \frac{h}{2\pi} \int\limits_{x_3}^{+\infty} e^{h(x_3-(\xi_3+t))} \frac{dt}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (\xi_3+t)^2}}.$$

Отже, функція Гріна задачі (14) має вигляд
$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2}} +$$
$$+\frac{1}{4\pi\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3+\xi_3)^2}} +$$
$$+\frac{h}{2\pi} \int\limits_{x_3}^{+\infty} \frac{e^{h(x_3-\xi_3-t)}dt}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (\xi_3+t)^2}}, \quad \{x,\xi\} \subset Q, \ x \neq \xi.$$

Якщо скористатися формулою (7), то розв'язок задачі (14) можна записати так:
$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi_1,\xi_2)\ G(x,\xi)|_{\xi_3=0}\, d\xi_1 d\xi_2, \quad x \in Q. \quad \triangleright$$

Приклад 4. Розв'язати першу внутрішню крайову задачу для рівняння Лапласа в крузі $K_R := \{x := (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, |x| < R\}$.

$\triangleleft$ Маємо задачу
$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \text{ в } K_R, \\ u|_{C_R} = \varphi, \end{aligned} \tag{19}$$
де C_R – межа K_R, тобто коло радіуса R.

Побудуємо функцію Гріна цієї задачі, а потім скористаємося формулою (5) для випадку площини. Функція Гріна має вигляд

$$G(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{x\xi}} + g(x,\xi), \quad x \in K_R, \quad \xi \in K_R \setminus \{x\}.$$

де g – гармонічна функція від ξ така, що $g(x,\xi)|_{\xi\in C_R} = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{x\xi}}|_{\xi\in C_R}$. Знайдемо функцію g. Нехай x – особлива точка функції Гріна, а $\overline{x}$ – точка, симетрична точці x відносно C_R, тобто. точки x і $\bar{x}$ лежать на одному промені, який виходить з центра круга, і добуток їх відстаней $\rho_1 = |\overline{x}|$ і $\rho = |x|$ від центра дорівнює квадрату радіуса, тобто $\rho\rho_1 = R^2$.

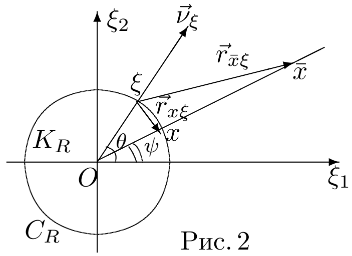


Рис. 2

Якщо точка ξ лежить на колі C_R, то, як видно з рис. 2,
.

$$r_{\overline{x}\xi} = \frac{R}{\rho} r_{x\xi}, \tag{20}$$

оскільки трикутники $O\overline{x}\xi$ і $Ox\xi$ подібні. Тому функція $g(x,\xi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho r_{\overline{x}\xi}}$ є шуканою, бо вона гармонічна в крузі як функція ξ і дорівнює $-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{x\xi}}$ на колі C_R. Отже, функція Гріна задачі (19) має вигляд

$$G(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{x\xi}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho r_{\overline{x}\xi}}, \ x \in K_R, \ \xi \in K_R \setminus \{x\}. \tag{21}$$

Розв'язок задачі (19) дається формулою

$$u(x) = -\int\limits_{C_R} \varphi(\xi)\partial_{\vec{\nu}_\xi} G(x,\xi) d_\xi C_R, \quad x \in K_R.$$

Обчислимо $\partial_{\vec{\nu}_\xi} G$ на колі C_R. Маємо

$$-\partial_{\vec{\nu}_\xi} G\Big|_{C_R} = -\frac{1}{2\pi}\left(\partial_{r_{x\xi}}\left(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\right)\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \vec{r}_{x\xi}}) - \partial_{r_{\bar{x}\xi}}\left(\ln\frac{R}{\rho r_{\bar{x}\xi}}\right)\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \vec{r}_{\bar{x}\xi}})\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \vec{r}_{x\xi}}) - \frac{R}{\rho r_{\bar{x}\xi}}\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \vec{r}_{\bar{x}\xi}})\right),$$

де $\vec{r}_{y\xi}$ – вектор, початок якого в точці ξ, а кінець у точці y. З трикутників $Ox\xi$ і $O\overline{x}\xi$ за допомогою теореми косинусів знаходимо

$$\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \vec{r}_{x\xi}}) = \frac{R^2 + r_{x\xi}^2 - \rho^2}{2Rr_{x\xi}}, \ \cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \vec{r}_{\overline{x}\xi}}) = \frac{R^2 + r_{\overline{x}\xi}^2 - \rho_1^2}{2Rr_{\overline{x}\xi}},$$

тому

$$-\partial_{\vec{\nu}_\xi} G\big|_{C_R} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{R^2 + r_{x\xi}^2 - \rho^2}{2Rr_{x\xi}^2} - \frac{R(R^2 + r_{\overline{x}\xi}^2 - \rho_1^2)}{2R\rho r_{\overline{x}\xi}^2}\right).$$

Замінивши $r_{\overline{x}\xi}$ за формулою (20), а ρ_1 за формулою $\rho_1 = \frac{R^2}{\rho}$, дістанемо

$$-\partial_{\vec{\nu}_\xi} G\big|_{C_R} = \frac{1}{2\pi R}\frac{R^2 - \rho^2}{r_{x\xi}^2}.$$

Отже, розв'язок задачі (19) зображується у вигляді

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_{C_R} \varphi(\xi)\frac{R^2 - \rho^2}{r_{x\xi}^2} d_\xi C_R, \quad x \in K_R. \tag{22}$$

Оскільки, як видно з рис. 2, $r_{x\xi}^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \psi)$, то формулу (22) можна переписати так:

$$u(\rho, \psi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho^2)\varphi(\theta)d\theta}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \psi)}, \tag{23}$$

де (ρ, ψ) – полярні координати точки x, (R, θ) – полярні координати точки ξ на C_R. Формули (22) і (23) називаються **формулами Пуассона** задачі Діріхле для круга. $\triangleright$

Зауваження. Аналогічно можна розв'язати і зовнішню задачу Діріхле для круга. У цьому випадку точки x і ξ поміняються місцями, що приведе до заміни у формулах (22) і (23) різниці $R^2 - \rho^2$ на $\rho^2 - R^2$.

Приклад 5. Побудувати функцію Гріна першої внутрішньої крайової задачі для півкруга K_R^+ радуіса R.

$\triangleleft$ У прикладі 4 ми побудували функцію Гріна внутрішньої задачі Діріхле для круга

$$G_K(x,\xi) = \tfrac{1}{2\pi}\ln\tfrac{1}{r_{x\xi}} - \tfrac{1}{2\pi}\ln\tfrac{R}{\rho r_{\overline{x}\xi}}.$$

Позначимо верхню межу півкруга, тобто верхнє півколо, через C_R^+, а прямолінійну частину (відрізок $[-R,R]$) – через l. Ми знаємо, що $G_K(x,\xi) = 0$, $\xi \in C_R^+ \cup C_R^-$, де C_R^- – нижнє півколо. Введемо позначення $G_K(x,\xi)|_{\xi\in l} =: G_l$. Шукана функція Гріна G повинна задовольняти умови

$$\begin{cases} G(x,\xi)|_{\xi\in C_R^+} = 0, \\ G(x,\xi)|_{\xi\in l} = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Нехай x^* – точка, симетрична x відносно l, а $\overline{x}^*$ – симетрична x^* відносно C_R^- (рис. 3). Розглянемо $G_K(x^*,\xi)$. Оскільки $|x-\xi| = |x^*-$ $-\xi|$ для всіх $\xi\in l$, то $G_K(x^*,\xi)|_{\xi\in l} =$ $= G_l$. Через те, що $G_K(x,\xi)|_{\xi\in C_R} = 0$ для всіх $\xi \in C_R$, то $G_K(x^*,\xi)|_{\xi\in C_R^+} =$ $= 0$.

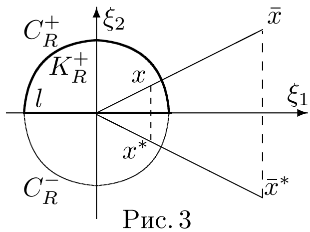


Рис. 3

Тепер переконаємося, що різниця

$$G(x,\xi) = G_K(x,\xi) - G_K(x^*,\xi) \tag{25}$$

.

і є шуканою функцією Гріна. Справді, $G(x,\xi)|_{\xi\in l} = G_l - G_l = 0$;

$$G(x,\xi)|_{\xi\in C_R^+} = G_K(x,\xi)|_{\xi\in C_R^+} - G_K(x^*,\xi)|_{\xi\in C_R^+} = 0,$$

а це означає, що умови (24) виконуються. Очевидно, що (25) є гармонічною функцією скрізь у півкрузі, крім точки x.

Отже, функцією Гріна задачі Діріхле для півкруга радіуса R є

$$G(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{x\xi}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho r_{\overline{x}\xi}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{x^*\xi}} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho r_{\overline{x}^*\xi}},$$

$$x \in \overline{K_R^+},\ \xi \in \overline{K_R^+} \setminus \{x\}. \quad \triangleright$$

Вправи

О1. За допомогою функції Гріна розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в півплощині $D := \{(x_1,x_2)|x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\}$.

О2. Знайти стаціонарний розподіл температури в півплощині $D := \{(x_1,x_2)|x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\}$, межа якої, вісь Ox_1, підтримується при нульовій температурі, коли $|x_1| > R$, і при температурі, що дорівнює одиниці, при $|x_1| \leq R$.

O3. Побудувати функцію Гріна першої внутрішньої крайової задачі для рівняння Лапласа для прямого кута на площині, обмеженого променями $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

O4. Побудувати функцію Гріна першої внутрішньої крайової задачі для чверті круга.

O5. На межі $S := \{(x_1, x_2, x_3)|\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_3 = 0\}$ однорідного півпростору $Q = \{(x_1, x_2, x_3)|\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_3 > 0\}$ температура дорівнює нулю для $x_1 < 0$ і дорівнює одиниці для $x_1 \geq 0$. Знайти стаціонарний розподіл температури у півпросторі.

O6. Розв'язати за допомогою функції Гріна крайову задачу для рівняння Лапласа в півплощині $D := \{(x_1, x_2)|x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\}$, якщо $u(x_1, x_2)|_{x_2=0} = \begin{cases} 0, & x_1 < 0, \\ v, & x_1 \geq 0. \end{cases}$

O7. Знайти функцію Гріна другої внутрішньої крайової задачі для рівняння Лапласа в кулі $K_R(0)$ радіуса R з центром у початку координат і записати розв'язок цієї задачі в інтегральній формі.

O8. За допомогою функції Гріна розв'язати задачу:

$$\begin{gathered} 1)\ \ \Delta u(x) = -\tfrac{2}{x_1^2 + x_2^2 + (x_3+1)^2}, \\ x \in Q := \{(x_1, x_2, x_3)|\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_3 > 0\}, \\ u(x)|_{x_3=0} = \tfrac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1},\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 2)\ \ \Delta u(x) = 0,\ x \in D^+ := \{x := (x_1, x_2)|\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0\}, \\ u(x)|_{x_2=0} = \tfrac{x_1}{x_1^2 + 1},\ x_1 \in \mathbb{R}. \end{gathered}$$

C1. Розв'язати за допомогою функції Гріна першу крайову задачу всередині двогранного кута величини $\alpha = \frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, якщо на його сторонах задано такі крайові умови: $u|_{\varphi=0} = A$, $u|_{\varphi=\alpha} = 0$.

C2. Знайти розв'язок рівняння Лапласа всередині кулі радіуса R у точках діаметра, який з'єднує його північний $(\theta = 0)$ і південний $(\theta = \pi)$ полюси при заданих крайових умовах

$$u(r, \varphi, \theta)|_{r=R} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ 0, & \text{якщо } \pi/2 < \theta \leq \pi, \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

С3. Застосовуючи метод відокремлення змінних для розв'язування крайової задачі

$$u_{x_1x_1}(x_1, x_2) + u_{x_2x_2}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2), \quad 0 < x_1 < a, \ 0 < x_2 < b,$$

$$u(0, x_2) = u(a, x_2) = 0, \quad 0 \le x_2 \le b,$$
$$u(x_1, 0) = u(x_1, b) = 0, \quad 0 \le x_1 \le a,$$

знайти функцію Гріна цієї задачі та дослідити збіжність одержаного для неї ряду.

Домашнє завдання

Д1. Знайти розв'язок рівняння Лапласа всередині круга радіуса R з центром у початку координат, якщо на верхньому півколі $u = 1$, а на нижньому $u = 0$.

Д2. Побудувати функцію Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа для таких областей в $\mathbb{R}^3$:

1) двогранний кут $Q := \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0, x_3 > 0\}$;

2) октант $\Omega := \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$.

Д3. Знайти функцію Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа для таких областей в $\mathbb{R}^3$:

1) півкуля $K := \{x := (x_1, x_2, x_3) | |x| < R, x_3 > 0\}$;

2) чверть кулі $K_+ := \{x := (x_1, x_2, x_3) | |x| < R, x_2 > 0, x_3 > 0\}$.

Д4. За допомогою функції Гріна знайти розв'язок другої крайової задачі для рівняння Лапласа зовні кулі $K_R(0)$.

Д5. Знайти розв'язок рівняння $\Delta u(x_1, x_2) = 0$ у першому квадранті $D = \{(x_1, x_2) | x_1 > 0, x_2 > 0\}$ з такими крайовими умовами:

1) $u|_{(x_1,x_2)\in S} = u_0(x_1, x_2)$ – кусково-неперервна, обмежена функція, де S складається з напівпрямих $\{x_1 = 0, x_2 \ge 0\}$ і $\{x_2 = 0, x_1 \ge 0\}$;

2) $u(x_1, x_2)|_{x_1=0} = 0, \quad u(x_1, x_2)|_{x_2=0} = 1$;

3) $u(x_1, x_2)|_{x_1=0} = a, \quad u(x_1, x_2)|_{x_2=0} = b$.

Д6. Використовуючи функцію Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа в крузі $K_R(0)$, розв'язати задачу:

1) $\Delta u(x) = -4, \quad x \in K_R(0), \quad u(x)|_{|x|=R} = 2$;

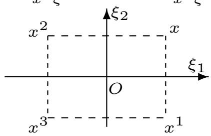
2) $\Delta u(x) = e^{|x|}, \quad x \in K_R(0), \quad u(x)|_{|x|=R} = 0.$

Відповіді

О1. $u(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi_1)}{(x_1-\xi_1)^2+x_2^2} d\xi_1.$

О2. $u(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg}\frac{R-x_1}{x_2} + \operatorname{arctg}\frac{R+x_1}{x_2})$. Скористатись формулою із задачі О1.

О3. $G(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{x\xi}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{x^1\xi}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{x^2\xi}} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{x^3\xi}}$, де x^1 і x^2 – точки, відповідно симетричні точці x відносно межі прямого кута, точка x^3 симетрична з точками x^1 і x^2 відносно продовження сторін заданого прямого кута, $r_{x^i\xi} = |x^i - \xi|$.

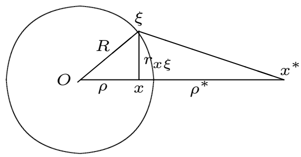


О4. $G(x,\xi) = G_K(x,\xi) - G_K(x^1,\xi) - G_K(x^2,\xi) + G_K(x^3,\xi)$, де x^1 – точка, симетрична x відносно горизонтальної частини межі чверті круга, а x^2 і x^3 – симетричні відповідно з точками x і x^1 відносно вертикальної частини чверті круга (див. приклад 5).

О5. $u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_3}$. Скористатись формулою (12).

О6. $u(x_1, x_2) = \frac{v}{2} + \frac{v}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}$. Скористатись формулою із задачі О1.

О7. $G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}(\frac{1}{r_{x\xi}} + \frac{R}{\rho r_{x^*\xi}} - \frac{1}{R}\ln\frac{R^2-\rho\rho^*\cos\gamma+\rho r_{x^*\xi}}{2R^2})$, де x^* – точка, інверсна з точкою x відносно поверхні S заданої кулі, $\gamma = (\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{O\xi}})$, $\rho = |x|$, $\rho^* = |x^*|$.
$G(x,\xi)|_{\xi\in S} =$
$= \frac{1}{4\pi}(\frac{2}{r_{x\xi}} - \frac{1}{R}\ln\frac{R-\rho\cos\gamma+r_{x\xi}}{2R})$.



Шуканий розв'язок

$$u = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \left(\frac{2}{r_{x\xi}} - \frac{1}{R}\ln\frac{R-\rho\cos\gamma+r_{x\xi}}{2R}\right)\varphi(\xi)d_\xi S \qquad (\partial_{\vec{\nu}} u|_S = \varphi).$$

О8. 1) $u(x) = \frac{1}{x_1^2+x_2^2+(x_3+1)^2}$; 2) $u(x) = \frac{x_1}{x_1^2+(x_2+1)^2}$.

С1. $G = \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln\frac{\overline{r}_k}{r_k}, \quad u(r,\psi) = A\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\rho}\partial_\varphi G(\rho,\varphi)|_{\varphi=0}d\rho,$

де $r_k = \sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi-(\psi+2k\alpha))}$, $\overline{r}_k = \sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi+(\psi+2k\alpha))}$. Після обчислення похідної $\partial_\varphi G|_{\varphi=0}$ і знаходження суми ряду одержимо $u(r,\psi) = A(1-\frac{\psi}{\alpha})$. Перейти до циліндричної системи координат і скористатися методом дзеркальних відображень. Точка x повинна відображатися від сторін кута $2n-1$ раз, причому всі ці відображення лежать на колі радіуса R, яке міститься в площині $\{\xi_3=\xi_3^0\}$.

С2. $u(r,\theta) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\rho}(R - \frac{R^2-\rho^2}{\sqrt{R^2+\rho^2}})$, що випливає з формули Пуассона для кулі

$$u(\rho,\varphi,\theta) = \frac{R}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{R^2-\rho^2}{(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\gamma)^{3/2}}\rho(\varphi',\theta')\sin\theta' d\varphi' d\theta'.$$

С3. $G(x,\xi) = -\frac{4}{\pi^2 ab}\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi m x_1}{a}\sin\frac{\pi n x_2}{b}\sin\frac{\pi m\xi_1}{a}\sin\frac{\pi n\xi_2}{b}}{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$. Ряд збігається за винятком випадку $\xi_1=x_1, \xi_2=x_2$, коли функція G має логарифмічну особливість.

Д1. $u(\rho,\psi) = \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{arctg}(\frac{R+\rho}{R-\rho}\mathrm{ctg}\frac{\psi}{2}) + \mathrm{arctg}(\frac{R-\rho}{R+\rho}\mathrm{tg}\frac{\psi}{2})\right)$
у верхньому півкрузі $\{0<\psi<\pi\}$;
$u(\rho,\psi) = -\frac{1}{\pi}\left(\mathrm{arctg}(\frac{R-\rho}{R+\rho}\mathrm{tg}\frac{\psi}{2}) + \mathrm{arctg}(\frac{R-\rho}{R+\rho}\mathrm{ctg}\frac{\psi}{2})\right)$
у нижньому півкрузі $\{\pi<\psi<2\pi\}$. Для знаходження розв'язку слід скористатися формулою Пуассона (23) для круга, здійснивши в ньому підстановку $t=\mathrm{tg}\frac{\theta-\psi}{2}$.

Д2. 1) $G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\sum\limits_{n,k=0}^{1}\frac{(-1)^{n+k}}{|x_{0nk}-\xi|}$; 2) $G = \frac{1}{4\pi}\sum\limits_{m,n,k=0}^{1}\frac{(-1)^{m+n+k}}{|x_{mnk}-\xi|}$,
де $x_{mnk} = ((-1)^m x_1,\ (-1)^n x_2,\ (-1)^k x_3)$.

Д3. 1) $\quad G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\sum\limits_{k=0}^{1}(-1)^k(\frac{1}{|x_{00k}-\xi|} - \frac{R}{|\xi|\,|x^*_{00k}-\xi|})$;

2) $\quad G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}\sum\limits_{n,k=0}^{1}(-1)^{n+k}(\frac{1}{|x_{0nk}-\xi|} - \frac{R}{|\xi|\,|x^*_{0nk}-\xi|})$;

де $x^*_{mnk} = \frac{R^2}{|x|^2}x_{mnk}$, $|x_{mnk}|\,|x^*_{mnk}| = R^2$.

Д4. $G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi}(\frac{1}{r_{x\xi}} + \frac{R}{r_{x^*\xi}|\xi|} - \frac{1}{R}\ln\frac{R^2-|x|\rho\cos\gamma+r_{x^*\xi}\rho}{(1-\cos\gamma)|\xi|\rho})$,
$G(x,\xi)|_{\xi\in S} = \frac{1}{4\pi}(\frac{2}{r_{x\xi}} - \frac{1}{R}\ln\frac{R^2-\rho\cos\gamma+r_{x\xi}}{(1-\cos\gamma)\rho})$.

Шуканий розв'язок $u(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_S (\frac{2}{r_{x\xi}} - \frac{1}{R}\ln\frac{R^2 + r_{x\xi} - \rho\cos\gamma}{(1-\cos\gamma)\rho})\varphi(\xi)d_\xi S$, $r_{x\xi} = |x-\xi|$, $\rho = |x|$, $\partial_{\vec{\nu}} u|_S = \varphi$, $\gamma = (\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{O\xi}})$.

Д5. 1) $u(x) = \frac{x_2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} u_0(\xi_1, 0)(\frac{1}{(x_1-\xi_1)^2+x_2^2} - \frac{1}{(x_1+\xi_1)^2+x_2^2})d\xi_1 + \frac{x_1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} u_0(0,\xi_2)(\frac{1}{x_1^2+(x_2-\xi_2)^2} - \frac{1}{x_1^2+(x_2+\xi_2)^2})d\xi_2$;
2) $u(x) = \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_2}$; 3) $u(x) = \frac{2}{\pi}(a\,\mathrm{arctg}\frac{x_2}{x_1} + b\,\mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_2})$.

Д6. 1) $u(x) = R^2 - |x|^2 + 2$; 2) $u(x) = e^R - e^{|x|} - \frac{2}{R}(e^R - 1) + \frac{2}{|x|}(e^{|x|} - 1)$.

Тема 11. Потенціали. Зведення крайових задач для рівнянь еліптичного типу до інтегральних рівнянь

У багатьох випадках крайову задачу для еліптичного рівняння можна звести до еквівалентного їй інтегрального рівняння. Цей факт використовується як при дослідженні питання існування і єдиності розв'язку крайової задачі, так і при знаходженні наближеного розв'язку задачі.

Ідея зведення крайової задачі до інтегрального рівняння полягає в тому, що розв'язок задачі шукають у вигляді деякого інтеграла спеціального вигляду (потенціалу) з невідомою густиною. Підстановка цього інтеграла в рівняння і крайові умови дає нам інтегральне рівняння відносно невідомої густини.

Наведемо основні властивості потенціалів і покажемо, як вони використовуються при розв'язуванні крайових задач.

1. Потенціал об'єму. Потенціал поля, створюваного зарядами (масами), які розподілені в області $D \subset \mathbb{R}^3$ з густиною ρ, дорівнює

$$u(x) = \int\limits_D \rho(\xi) \frac{1}{r_{x\xi}} d\xi, \quad r_{x\xi} := |x - \xi|, \quad x \in D. \tag{1}$$

Інтеграл (1) називається **потенціалом об'єму** або **об'ємним потенціалом**.

Для двовимірного простору $\mathbb{R}^2$ (площини) об'ємний потенціал має вигляд

$$u(x) = \int\limits_D \rho(\xi) \ln \frac{1}{r_{x\xi}} d\xi, \quad x \in D, \tag{2}$$

і його називають **логарифмічним потенціалом площі**.

Якщо ρ – обмежена й інтегровна функція в D, то потенціал об'єму u і його частинні похідні першого порядку неперервні в усьому просторі й ці похідні одержуються диференціюванням під знаком інтеграла. Очевидно, що u є розв'язком рівняння Лапласа зовні області D. Якщо ж ρ неперервна в $\overline{D}$ і має неперервні перші похідні в D, то потенціал об'єму u має неперервні другі похідні в D і є там розв'язком рівняння Пуассона

$$\Delta u(x) = -4\pi\rho(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^3. \tag{3}$$

У двовимірному випадку аналогом формули (3) є

$$\Delta u(x) = -2\pi\rho(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^2. \tag{4}$$

Якщо $|x| \to +\infty$, то $u(x) \to 0$ як $|x|^{-1}$ у випадку простору і $u(x) \to +\infty$ як $\ln|x|$ у випадку площини.

Приклад 1. Знайти об'ємний потенціал u кулі $K := \{x := (x_1, x_2, x_3) \mid |x| < R\}$ при сталій густині зарядів $\rho = \rho_0$, розв'язавши крайову задачу для u.

$\triangleleft$ Оскільки $\rho_0 = \text{const}$, то потенціал має сферичну симетрію. Зовні кулі потенціал об'єму є гармонічною функцією, тобто $\Delta u(x) = 0$ при $|x| > R$, і $u(r)$ прямує до нуля при $r = |x| \to +\infty$ як r^{-1}. Всередині кулі потенціал об'єму задовольняє рівняння Пуассона $\Delta u = -4\pi\rho_0$.

Отже, зовні кулі маємо таку крайову задачу для u:

$$\Delta u(r) := \tfrac{1}{r^2}\tfrac{d}{dr}\left(r^2 \tfrac{du(r)}{dr}\right) = 0, \qquad u(r) \to 0 \text{ при } r \to +\infty.$$

Розв'язавши рівняння, дістанемо $u(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$. З крайової умови випливає, що $C_2 = 0$. Тому $u(r) = -C_1 r^{-1}$ для $r > R$.

Для $r \le R$ маємо рівняння

$$\Delta u(r) := \tfrac{1}{r^2}\tfrac{d}{dr}\left(r^2 \tfrac{du(r)}{dr}\right) = -4\pi\rho_0$$

або

$$\tfrac{d}{dr}\left(r^2 \tfrac{du(r)}{dr}\right) = -4\pi\rho_0 r^2,$$

звідки знаходимо, що $u(r) = -\frac{2}{3}\pi r^2\rho_0 + C_3 r^{-1} + C_4$ для $r \le R$. Через те, що потенціал об'єму обмежений, то $C_3 = 0$. Тому $u(r) = -\frac{2}{3}\pi r^2\rho_0 + C_4$ для $r \le R$. Враховуючи умову неперервності потенціалу об'єму і його похідних першого порядку, одержуємо, що при $r = R$

$$-\tfrac{2}{3}\pi R^2\rho_0 + C_4 = -C_1 R^{-1}, \quad -\tfrac{4}{3}\pi R\rho_0 = C_1 R^{-2},$$

звідки випливає, що $C_1 = -\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0, \quad C_4 = 2\pi R^2\rho_0$.

Отже, шуканий потенціал об'єму має вигляд

$$u(r) = \begin{cases} \tfrac{2}{3}\pi(3R^2 - r^2)\rho_0, & r \le R, \\ \tfrac{4}{3}\pi R^3\rho_0 r^{-1}, & r > R. \end{cases} \quad \triangleright$$

2. Потенціал простого шару. Нехай заряди (маси) розподілені по поверхні S з густиною η. Потенціал поля, утвореного цими зарядами, дорівнює

$$v(x) = \int\limits_S \frac{\eta(\xi)}{r_{x\xi}} d_\xi S, \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{5}$$

Тут і далі $r_{x\xi} := |x - \xi|$ – довжина вектора $\vec{r}_{x\xi}$, напрямленого від точки ξ до точки x. Інтеграл (5) називається **потенціалом простого шару**. Ми вважатимемо, що η – неперервна функція, а S – поверхня Ляпунова [9]. Тоді v є функцією, яка неперервна в усьому просторі $\mathbb{R}^3$. Якщо $x \notin S$, то v має похідні довільного порядку і задовольняє рівняння Лапласа. При $|x| \to +\infty \quad v(x)$ прямує до нуля як $|x|^{-1}$.

Нехай $\vec{\nu}_{x^0}$ – напрямок зовнішньої нормалі в деякій точці $x^0 \in S$. Вважаючи, що $x \notin S$, обчислимо похідну від потенціалу простого шару в напрямку $\vec{\nu}_{x^0}$:

$$\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v(x) = \int\limits_S \eta(\xi) \partial_{\vec{\nu}_{x^0}} \left(\frac{1}{r_{\xi x}} \right) d_\xi S = \int\limits_S \eta(\xi) \frac{\cos\psi}{r^2_{\xi x}} d_\xi S,$$

де ψ – кут між векторами $\vec{r}_{\xi x}$ і $\vec{\nu}_{x^0}$. Можна довести, що нормальна похідна потенціалу простого шару має певні границі при $x \to x^0$ ззовні чи зсередини поверхні S. При цьому правильні співвідношення

$$\left(\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v(x^0) \right)_{\text{з}} = \int\limits_S \eta(\xi) \frac{\cos\psi_0}{r^2_{\xi x^0}} d_\xi S - 2\pi\eta(x^0),$$

$$\left(\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v(x^0) \right)_{\text{в}} = \int\limits_S \eta(\xi) \frac{\cos\psi_0}{r^2_{\xi x^0}} d_\xi S + 2\pi\eta(x^0),$$

де ψ_0 – кут між векторами $\vec{r}_{\xi x^0}$ і $\vec{\nu}_{x^0}$. З цих формул випливає величина стрибка нормальної похідної потенціалу простого шару:

$$\left(\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v(x^0) \right)_{\text{в}} - \left(\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v(x^0) \right)_{\text{з}} = 4\pi\eta(x^0).$$

Для випадку площини $\mathbb{R}^2$ потенціал простого шару має вигляд

$$v(x) = \int\limits_C \eta(\xi) \ln \frac{1}{r_{x\xi}} d_\xi C, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{6}$$

і він називається **логарифмічним потенціалом простого шару**. Властивості інтеграла (6) аналогічні до властивостей інтеграла (5), але при $|x| \to +\infty$ він прямує до $+\infty$ як $\ln|x|$ і величина стрибка нормальної похідної в точках кривої C дорівнює $2\pi\eta(x^0)$.

Приклад 2. Знайти потенціал простого шару, розподіленого зі сталою густиною $\eta = \eta_0$ по сфері радіуса R.

$\lhd$ *Перший спосіб.* Оскільки за умовою задачі має місце сферична симетрія, то потенціал простого шару залежить лише від $\rho = |x|$, тобто $v = v(\rho)$. Обчислимо v, користуючись формулою (5). Маємо

$$v(\rho) = \int\limits_{S_R} \eta_0 \frac{d_\xi S}{r_{x\xi}}. \tag{7}$$

Введемо сферичну систему координат. Тоді, як видно з рис.1, $r_{x\xi} = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\theta}$. Крім того, відомо, що $d_\xi S = = R^2 \sin\theta d\varphi d\theta$. Тому інтеграл (7) легко обчислюється:

$$v(\rho) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{\eta_0 R^2 \sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\theta}} = 2\pi R^2 \eta_0 \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho t}} = \begin{cases} 4\pi R\eta_0, & \rho \le R, \\ 4\pi R^2\rho^{-1}\eta_0, & \rho > R. \end{cases}$$

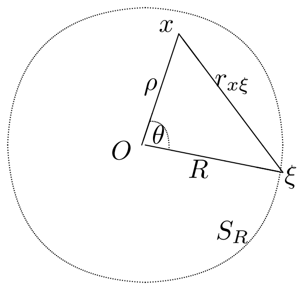


Рис. 1

Отже, потенціал простого шару має вигляд

$$v(\rho) = \begin{cases} 4\pi R\eta_0, & \rho \le R, \\ 4\pi R^2\rho^{-1}\eta_0, & \rho > R. \end{cases}$$

Другий спосіб. Шукатимемо потенціал v як розв'язок рівняння

$$\Delta v(\rho) = 0, \quad \rho \ne R,$$

який неперервний скрізь і, зокрема, при $\rho = R$:

$$v_1(\rho)|_{\rho=R} = v_2(\rho)|_{\rho=R}, \tag{8}$$

а його нормальні похідні при $\rho = R$ мають розрив

$$\left.\frac{dv_2(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=R} - \left.\frac{dv_1(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=R} = 4\pi\eta_0, \tag{9}$$

де v_1 – розв'язок рівняння $\Delta v = 0$ зовні сфери ($\rho > R$), v_2 – розв'язок цього самого рівняння всередині сфери ($\rho < R$).

Маємо

$$\Delta v(\rho) := \frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}(\rho^2\frac{dv(\rho)}{d\rho}) = 0$$

і, отже, $v_1 = -C_1\rho^{-1} + C_2$,$v_2 = -C_3\rho^{-1} + C_4$. З обмеженості v_2 при $\rho = 0$ випливає, що $C_3 = 0$, а з умови $v_1(\rho) \to 0$ при $\rho \to +\infty$, дістаємо, що $C_2 = 0$. Згідно з умовами (8) і (9) маємо рівності $-C_1R^{-1} = C_4$, $-C_1R^{-2} = 4\pi\eta_0$, тобто $C_1 = -4\pi\eta_0R^2$, $C_4 = 4\pi\eta_0R$.

Отже,

$$v(\rho) = \begin{cases} 4\pi\eta_0R, & \rho \le R, \\ 4\pi\eta_0R^2\rho^{-1}, & \rho > R. \end{cases} \triangleright$$

3. Потенціал подвійного шару. Якщо на двосторонній поверхні S розподілені диполі з густиною моментів μ так, що їхні осі в кожній точці ξ збігаються з додатним напрямком нормалі $\vec{\nu}_\xi$ до поверхні S в цій точці, то потенціалом поля, утвореного цими диполями, є

$$w(x) = \int\limits_S \mu(\xi)\partial_{\vec{\nu}_\xi}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right)d_\xi S, \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{10}$$

Інтеграл (10) називають **потенціалом подвійного шару**.

Оскільки

$$\partial_{\vec{\nu}_\xi}\left(\frac{1}{r_{x\xi}}\right) = \frac{\cos\varphi}{r^2_{x\xi}},$$

де φ – кут між векторами $\vec{r}_{x\xi}$ і $\overrightarrow{\nu}_\xi$, то (10) можна записати у вигляді

$$w(x) = \int\limits_S \mu(\xi)\frac{\cos\varphi}{r^2_{x\xi}}d_\xi S, \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{11}$$

Як і раніше, ми вважатимемо, що S – поверхня Ляпунова, а μ – неперервна функція на S.

Потенціал подвійного шару визначений скрізь в $\mathbb{R}^3$ і є розв'язком рівняння Лапласа в точках $x \notin S$. При прямуванні x до нескінченності w прямує до нуля як $|x|^{-2}$. Існують граничні значення w при $x \to x^0 \in S$ іззовні та зсередини поверхні S, причому

$$w_З(x^0) = \int\limits_S \mu(\xi) \frac{\cos\varphi_0}{r^2_{x^0\xi}} d_\xi S + 2\pi\mu(x^0),$$

$$w_В(x^0) = \int\limits_S \mu(\xi) \frac{\cos\varphi_0}{r^2_{x^0\xi}} d_\xi S - 2\pi\mu(x^0), \quad x^0 \in S, \tag{12}$$

де φ_0 – кут між векторами $\vec{r}_{x^0\xi}$ і $\vec{\nu}_\xi$. Звідси випливає, що

$$w_З(x^0) - w_В(x^0) = 4\pi\mu(x^0), \quad x^0 \in S. \tag{13}$$

У двовимірному випадку потенціал подвійного шару визначається формулою

$$w(x) = \int\limits_C \mu(\xi) \partial_{\vec{\nu}_\xi} \left(\ln \frac{1}{r_{x\xi}} \right) d_\xi C = \int\limits_C \mu(\xi) \frac{\cos\varphi}{r_{x\xi}} d_\xi C, \tag{14}$$

де C – контур, на якому розміщені диполі, і називається **логарифмічним потенціалом подвійного шару**. Можна довести, що властивості логарифмічного потенціалу подвійного шару (14) аналогічні до властивостей потенціалу подвійного шару (10), а рівність (13) має вигляд

$$w_З(x^0) - w_В(x^0) = 2\pi\mu(x^0), \quad x^0 \in C. \tag{15}$$

Приклад 3. Знайти логарифмічний потенціал подвійного шару для відрізка $I := \{x := (x_1, x_2) | -a \le x_1 \le a, x_2 = 0\}$ з густиною $\mu(x) = x_1$.

$\triangleleft$ Скористаємося формулою (14), яка в заданому випадку набуває вигляду

$$w(x) = \int\limits_{-a}^{a} \mu(\xi_1, 0) \frac{\cos\varphi}{r_{x\xi}} d\xi_1.$$

Обчислимо $\cos\varphi$, коли точка ξ належить прямій $\{\xi_2 = 0\}$. З рис. 2 видно, що $\cos\varphi = -\frac{x_2}{r_{x\xi}} = -\frac{x_2}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+x_2^2}}$. Оскільки $\mu(\xi) = \xi_1$, то

$$w(x) = -x_2 \int\limits_{-a}^{a} \frac{\xi_1 d\xi_1}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} =$$

$$= -x_2 \left(\int\limits_{-a}^{a} \frac{x_1 d\xi_1}{(x_1-\xi_1)^2 + x_2^2} - \int\limits_{-a}^{a} \frac{(x_1-\xi_1) d\xi_1}{(x_1-\xi_1)^2 + x_2^2} \right) =$$

$$= x_2 \left(\frac{x_1}{x_2} \operatorname{arctg} \frac{x_1-\xi_1}{x_2} \Big|_{-a}^{a} - \frac{1}{2} \ln((x_1-\xi_1)^2 + x_2^2) \Big|_{-a}^{a} \right) =$$

$$= -x_1 \left(\operatorname{arctg} \frac{x_1+a}{x_2} - \operatorname{arctg} \frac{x_1-a}{x_2} \right) - \frac{x_2}{2} \ln \frac{(x_1-a)^2 + x_2^2}{(x_1+a)^2 + x_2^2}$$

для всіх $x_2 \neq 0$.

Якщо ж $x_2 = 0$, то тоді точка (x_1, x_2) лежить на осі $O\xi_1$ і, як видно з рис. 2, $\cos\varphi = 0$. Звідси одержуємо, що $w(x) = 0$ для $x_2 = 0$.

Вивчимо поведінку w при $x_2 \to 0 \pm 0$. Формули (12) у випадку логарифмічного потенціалу подвійного шару при $x \in C$ мають такий вигляд:

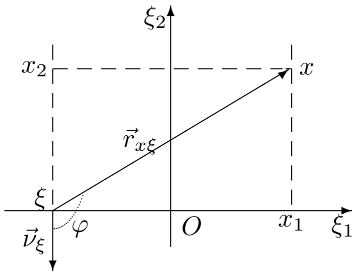


Рис. 2

$$w_{\text{В}}(x) = \int\limits_C \mu(\xi) \frac{\cos\varphi}{r_{x\xi}} d_\xi C - \pi\mu(x), \quad w_{\text{З}}(x) = \int\limits_C \mu(\xi) \frac{\cos\varphi}{r_{x\xi}} d_\xi C + \pi\mu(x). \quad (16)$$

У нашому випадку контур C збігається з відрізком I і $\cos\varphi = 0$ для $x \in C$. Тому $w_{\text{З}}(x) = \pi x_1$, $w_{\text{В}}(x) = -\pi x_1$.

Отже, шуканий логарифмічний потенціал подвійного шару такий:

$$w(x) = -x_1 \left(\operatorname{arctg} \frac{x_1+a}{x_2} - \operatorname{arctg} \frac{x_1-a}{x_2} \right) - \frac{x_2}{2} \ln \frac{(x_1-a)^2 + x_2^2}{(x_1+a)^2 + x_2^2}$$

для $x_1 \neq 0$; $w(x) = 0$ при $x_1 = 0$; $w(x) \to \mp\pi x_1$ при $x_2 \to 0 \pm 0$. ▷

Тепер покажемо, як крайові задачі для еліптичних рівнянь зводяться до інтегральних рівнянь. Розглянемо, наприклад, внутрішню задачу Діріхле

$$\Delta u = f \text{ у } D, \quad (17)$$

$$u|_S = \psi. \quad (18)$$

Частинним розв'язком рівняння (17), очевидно (згідно з (3)), є функція

$$v(x) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_D \frac{f(\xi)}{r_{x\xi}}d\xi, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^3. \tag{19}$$

Тому природно шукати розв'язок задачі (17), (18) у вигляді суми

$$u = w + v, \tag{20}$$

де w є розв'язком задачі

$$\Delta w = 0 \text{ у } D, \tag{21}$$

$$w|_S = \psi - v|_S =: g. \tag{22}$$

Шукаємо розв'язок цієї задачі у вигляді потенціалу подвійного шару

$$w(x) = \int\limits_S \mu(\xi)\frac{\cos\varphi}{r_{x\xi}^2}d_\xi S \tag{23}$$

з відповідним способом підібраною функцією μ. При довільному виборі неперервної функції μ цей потенціал гармонічний у D. Задовольняючи крайову умову (22), одержуємо, що в точках $z \in S$ має виконуватись співвідношення $w_{\text{B}}(z) = g(z)$. Користуючись другою формулою з (12), це співвідношення можна записати у вигляді

$$\int\limits_S \mu(\xi)\frac{\cos\varphi}{r_{z\xi}^2}d_\xi S - 2\pi\mu(z) = g(z), \quad z \in S. \tag{24}$$

Отже, задача (21), (22) звелась до інтегрального рівняння (24). Знайшовши μ з рівняння (24) і підставивши його в (23), дістанемо розв'язок задачі (21), (22).

Приклад 4. Розв'язати першу крайову задачу для рівняння Лапласа в крузі $K_R := \{x := (x_1, x_2) | \, |x| < R\}$ з межею C_R (рис.3).

$\triangleleft$ Шукатимемо розв'язок задачі

$$\Delta u = 0 \text{ у } K_R, \quad u|_{C_R} = g$$

у вигляді логарифмічного потенціалу подвійного шару

$$u(x) = \int\limits_{C_R} \mu(\xi)\partial_{\vec{\nu}_\xi}\left(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\right)d_\xi C_R = \int\limits_{C_R}\mu(\xi)\frac{\cos\varphi}{r_{x\xi}}d_\xi C_R. \qquad (25)$$

Для точок x і ξ кола C_R $\cos\varphi = \cos(\pi-\psi) = -\cos\psi$, а згідно з теоремою косинусів $2R\cos\psi = r_{x\xi}$, тому

$$\frac{\cos\varphi}{r_{x\xi}} = -\frac{1}{2R}. \qquad (26)$$

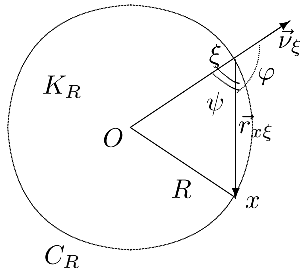


Рис. 3

Потенціал (25) є гармонічною функцією в K_R. Якщо задовольнити крайову умову, то, скориставшись першою із рівностей (16) і (26), дістанемо інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2R}\int\limits_{C_R}\mu(\xi)d_\xi C_R + \pi\mu(x) = -g(x), \quad x \in C_R. \qquad (27)$$

Позначимо через θ і α кути, які утворюють радіуси-вектори $\overrightarrow{Ox}$ і $\overrightarrow{O\xi}$ з віссю Ox_1. Тоді $d_\xi C_R = Rd\alpha$, а, функцію точки $x \in C_R$ можна розглядати як функцію від θ. Відповідно до цього писатимемо $\mu(\theta)$ замість $\mu(x)$ і $\mu(\alpha)$ замість $\mu(\xi)$. Отже, (27) можна записати у вигляді

$$\mu(\theta) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha = -\frac{1}{\pi}g(\theta). \qquad (28)$$

Покладемо $C := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mu(\alpha)d\alpha$, тоді з (28) дістанемо, що $\mu(\theta) = -\frac{1}{\pi}g(\theta) - C$. Тому $C = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\frac{1}{\pi}g(\alpha)+C)d\alpha = -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}g(\alpha)d\alpha - C$. Звідси випливає, що $C = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}g(\alpha)d\alpha$. Отже,

$$\mu(\theta) = -\frac{1}{\pi}g(\theta) + \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}g(\alpha)d\alpha. \qquad (29)$$

Підставивши (29) у (25), дістанемо розв'язок нашої задачі

$$u(x) = \int\limits_{C_R}\left(-\frac{1}{\pi}g(\alpha) + \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}g(\alpha)d\alpha\right)\partial_{\vec{\nu}_\xi}\left(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\right)d_\xi C_R =$$

$$= -\tfrac{R}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\alpha)\partial_{\vec{\nu}_\xi}\left(\ln\tfrac{1}{r_{x\xi}}\right)\Big|_{\xi\in C_R}d\alpha + \tfrac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} g(\alpha)d\alpha\int\limits_{C_R}\partial_{\vec{\nu}_\xi}\left(\ln\tfrac{1}{r_{x\xi}}\right)d_\xi C_R.$$

Оскільки

$$\int\limits_{C_R}\partial_{\vec{\nu}_\xi}\left(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\right)d_\xi C_R = -2\pi, \quad x\in K_R, \tag{30}$$

то

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(2R\partial_{\vec{\nu}_\xi}\left(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\right)+1\right)\Big|_{\xi\in C_R}g(\alpha)d\alpha, \ \ x\in K_R. \tag{31}$$

Рівність (30) випливає з формули інтегрального зображення гармонічної функції у двовимірному випадку

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_R}\left(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\partial_{\vec{\nu}_\xi}u(\xi) - u(\xi)\partial_{\vec{\nu}_\xi}\left(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\right)\right)d_\xi C_R, \quad x\in K_R,$$

якщо в ній покласти $u\equiv 1$.

Покажемо, що інтеграл з (31) є тим самим інтегралом Пуассона, який ми одержали в темі 10. Справді,

$$\partial_{\vec{\nu}_\xi}\left(\ln\tfrac{1}{r_{x\xi}}\right) = \tfrac{1}{r_{x\xi}^2}\left((x_1-\xi_1)\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi,\xi_1}) + (x_2-\xi_2)\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi,\xi_2})\right) =$$
$$= \tfrac{1}{Rr_{x\xi}^2}\left((x_1-\xi_1)\xi_1 + (x_2-\xi_2)\xi_2\right) = \tfrac{-R^2+(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}{Rr_{x\xi}^2}.$$

Оскільки $r_{x\xi}^2 = (x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2 = R^2+\rho^2-2(x_1\xi_1+x_2\xi_2)$, де $\rho^2 = x_1^2+x_2^2$, то $2R\partial_{\vec{\nu}_\xi}\left(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\right)+1 = \frac{-R^2+\rho^2}{r_{x\xi}^2}$. Звідси випливає, що (31) можна записати у вигляді

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{r_{x\xi}^2}g(\alpha)d\alpha, \quad x\in K_R, \tag{32}$$

або

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\alpha)}g(\alpha)d\alpha, \ (\rho,\theta)\in[0,R)\times[0,2\pi]. \ \triangleright$$

Приклад 5. Знайти гармонічну функцію, яка неперервна в замиканні області $Q := \{x := (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,|\, x_3>0\}$, а на її межі $S := \{x := (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$ набуває значень $f(x_1,x_2)$, $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

◁ Шукатимемо розв'язок цієї задачі у вигляді потенціалу подвійного шару

$$w(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\varphi}{r^2_{x\xi'}}\mu(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2, \quad (33)$$

$x\in Q$, де $\varphi=(\widehat{\vec{r}_{x\xi'},\vec{\nu}_{\xi'}})$, $\xi'=(\xi_1,\xi_2,0)$. Як видно з рисунку 4, $\cos\varphi=$ $=\cos(\pi-\psi)=-\cos\psi=-\frac{x_3}{r_{x\xi'}}=$ $=-\frac{x_3}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2}}$, причому $\cos\varphi=0$ при $x_3=0$, тобто для $x':=(x_1,x_2,0)\in S$. Тому (33) можна записати у вигляді

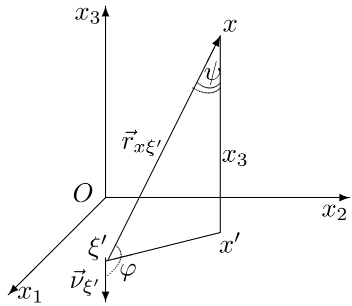


Рис. 4

$$w(x)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x_3\ \mu(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{((x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2)^3}}d\xi_1 d\xi_2,\ x\in Q. \qquad (34)$$

Скориставшись другою з формул (12), дістанемо

$$f(x_1,x_2)=-2\pi\mu(x_1,x_2)+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\varphi}{r^2_{x'\xi'}}\mu(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2=-2\pi\mu(x_1,x_2),$$

бо $\cos\varphi=0$. Тому $\mu=-\frac{1}{2\pi}f$. Підставивши знайдене значення μ в (34), одержимо розв'язок задачі

$$w(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x_3 f(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{((x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2)^3}},\quad x\in Q.\quad ▷$$

Вправи

О1. Знайти потенціал площі для круга $K:=\{(r,\varphi)|\ 0<r<R,$ $0<\varphi<2\pi\}$ з густиною зарядів $\rho=r$.

О2. Знайти логарифмічний потенціал простого шару для кола радіуса R з густиною зарядів η_0.

О3. Знайти логарифмічний потенціал подвійного шару для відрізка $I:=\{(x_1,x_2)|\ -a\le x_1\le a,\ x_2=0\}$ з густиною диполя $\mu=-\mu_0$, $-a\le x_1<0$ і $\mu=\mu_0$, $0\le x_1\le a$.

О4. За допомогою потенціалу подвійного шару розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа всередині і зовні кулі $K_R:=$ $\{x:=(x_1,x_2,x_3)|\ |x|<R\}$ з межею S_R.

О5. Розв'язати задачу Неймана для рівняння Лапласа у випадку півпростору $Q := \{(x_1, x_2, x_3) | (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_3 > 0\}$.

О6. На круглому диску радіуса R розподілені диполі з густиною моменту μ_0, які орієнтовані в напрямку нормалі, що спрямована в бік осі Ox_3. Знайти потенціал подвійного шару в точці, що лежить на осі диска.

О7. Знайти потенціал подвійного шару зі сталою густиною μ_0 для сфери $S_R := \{x \in \mathbb{R}^3 | \ |x| = R\}$.

О8. Знайти потенціал простого шару мас, розподілених зі сталою густиною η_0 на сфері $S_R := \{x \in \mathbb{R}^3 | \ |x| = R\}$.

С1. Знайти густину u дифундуючої речовини при стаціонарному процесі за умови, що джерела речовини відсутні та коефіцієнт дифузії $D = \text{const}$, у випадку області $\Omega := \{x := (x_1, x_2, x_3) | \ x_1 \in \mathbb{R}, \ x_2 > 0, \ x_3 > 0\}$, якщо $u(x)|_{x \in S} = u_0 = \text{const}$.

С2. Користуючись потенціалом простого шару, знайти розв'язок задачі Неймана для рівняння Лапласа у випадку круга.

С3. Знайти об'ємний потенціал мас, розподілених зі сталою густиною ρ_0 у сферичному шарі $\{R_1 < |x| < R_2\}$.

С4. Знайти потенціал простого шару мас, розподілених з густиною $\eta = \cos^2 \varphi$, φ – полярний кут, вздовж кола $C_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 | \ |x| = 2\}$.

С5. На круглому диску радіуса R розподілений простий шар зарядів з густиною $\eta(x) = |x|^2$. Обчислити потенціал цього шару у точці, яка лежить на осі диска.

Домашнє завдання

Д1. Визначити потенціал площі для круга $K := \{(r, \varphi) | \ 0 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi\}$ з густиною зарядів $\rho = \rho_0 = \text{const}$.

Д2. Знайти логарифмічний потенціал простого шару для відрізка $I := \{(x_1, x_2) | \ -a \le x_1 \le a, \ x_2 = 0\}$ з густиною зарядів $\eta = \eta_0 = \text{const}$.

Д3. Знайти логарифмічний потенціал подвійного шару для відрізка $I := \{(x_1, x_2) | \ -a \le x_1 \le a, \ x_2 = 0\}$ з густиною диполя $\mu = \mu_0 = \text{const}$.

Д4. За допомогою потенціалів подвійного і простого шару знайти стаціонарну температуру точок півплощини $\Pi_+ := \{x := (x_1, x_2)|\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0\}$, якщо джерела тепла відсутні, а на межі $\Gamma := \{x := (x_1, x_2)|x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 = 0\}$ підтримується:

1) температура $u_0(x_1)$, $x_1 \in \mathbb{R}$;

2) заданий потік тепла, тобто $\partial_{\vec{\nu}} u(x)|_{x_2=0} = u_1(x_1)$, $x_1 \in \mathbb{R}$.

Д5. Для півпростору $Q := \{x := (x_1, x_2, x_3)\,|\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_3 > 0\}$ знайти густину u дифундуючої речовини при стаціонарному процесі за умов, що джерела речовини відсутні, коефіцієнт дифузії $D = \mathrm{const}$ і $u(x)|_{x_3=0} = \begin{cases} -1, & x_1 < 0, \\ 1, & x_1 \geq 0, \end{cases}$ $x_2 \in \mathbb{R}$.

Д6. Обчислити в точці, що лежить на осі Ox_3, потенціал простого шару, який розподілений з густиною η_0 на бічній поверхні циліндра $D := \{x := (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2, 0 \leq x_3 \leq l\}$.

Д7. Знайти розв'язки внутрішньої і зовнішньої задач Неймана для кулі $K_R(0) := \{x := (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2\}$, які задовольняють крайову умову $\partial_{\vec{\nu}} u|_{S_R} = a = \mathrm{const} \neq 0$.

Відповіді

О1. $u(r) = \begin{cases} \frac{2}{9}\pi(R^3(1 - 3\ln R) - r^3), & r \leq R, \\ -\frac{2}{3}\pi R^3 \ln r, & r > R. \end{cases}$ Скористатися міркуваннями із прикладу 1 і формулою (4), записавши рівняння у полярній системі координат. При цьому слід пам'ятати, що логарифмічний потенціал площі прямує до нескінченності як $\ln \rho$ при $\rho \to +\infty$.

О2. $v(r) = \begin{cases} -2\pi R\eta_0 \ln R, & r \leq R, \\ -2\pi R\eta_0 \ln r, & r > R. \end{cases}$ Розв'язувати аналогічно до прикладу 2 з використанням формули (6).

О3. $w(x) = \begin{cases} -\mu_0(2\mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_2} - \mathrm{arctg}\frac{x_1+a}{x_2} + \mathrm{arctg}\frac{a-x_1}{x_2}), & x_2 \neq 0, \\ 0, & x_2 = 0; \end{cases}$
$w(x) \to \mp\pi\mu_0,\ x_2 \to 0 \pm 0,\ 0 \leq x_1 \leq a;\quad w(x) \to \pm\pi\mu_0,\ x_2 \to 0 \pm 0,\ -a \leq x_1 < 0.$

О4. $u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{S_R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^3} u_0(y) d_y S_R, \quad |x| < R;$

$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{S_R} \frac{|x|^2 - R^2}{|x-y|^3} u_0(y) d_y S_R, \quad |x| > R.$

О5. $v(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + x_3^2}}$. Розв'язок слід шукати у вигляді потенціалу простого шару, скориставшись міркуваннями з прикладу 5.

O6. $w(x) = 2\pi\mu_0 x_3 \left(\frac{1}{\sqrt{R^2+x_3^2}} - \frac{1}{|x_3|}\right)$, $x = (0,0,x_3)$, $x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

O7. $u(x) = \begin{cases} -4\pi\mu_0, & |x| < R, \\ -2\pi\mu_0, & |x| = R, \\ 0, & |x| > R. \end{cases}$

O8. $u(x) = \begin{cases} 4\pi\eta_0 R, & |x| \le R, \\ \frac{4\pi\eta_0 R^2}{|x|}, & |x| > R. \end{cases}$

C1. $u(x) = \frac{u_0}{\pi}(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3} + \operatorname{arctg}\frac{x_3}{x_2})$.

C2. а) Внутрішня задача Неймана:

$$\Delta u(r,\varphi) = 0, \quad r < R, \quad \partial_{\vec{\nu}} u(r,\varphi)|_{C_R} = f(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Розв'язок слід шукати у вигляді $u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_R} \eta(\theta)\ln\frac{1}{r}dC_R$, де C_R – коло радіуса R з центром у початку координат, або $u(r,\varphi) = \frac{R}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\eta(\theta)\ln\frac{1}{r}d\theta$. Інтегральне рівняння для η матиме вигляд

$$\eta(\varphi) = 2f(\varphi) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\eta(\theta)\frac{R\cos\theta}{r}d\theta.$$

Оскільки $\frac{\cos\theta}{r} = \frac{1}{2R}$, то

$$\eta(\varphi) = 2f(\varphi) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\eta(\theta)d\theta$$

або $\eta(\varphi) = 2f(\varphi) + A$, де $A = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\eta(\theta)d\theta$. Згідно з умовою розв'язності задачі $\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0$, а тоді з рівняння $A = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(2f(0) + A)d\theta$ випливає, що $A = C$ – довільне дійсне число. Тому $\eta(\varphi) = 2f(\varphi) + C$, а отже,

$$u(r,\varphi) = \frac{R}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\ln\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}}d\theta + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

б) У випадку зовнішньої задачі Неймана інтегральне рівняння матиме вигляд

$$\eta(\varphi) = -2f(\varphi) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\eta(\theta)d\theta \quad \text{або} \quad \eta(\varphi) = 2f(\varphi) - A,$$

де $A = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\eta(\theta)d\theta$. Розв'язок задачі

$$u(r,\varphi) = -\frac{R}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)\ln\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\theta)}}d\theta,$$

оскільки $A=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)d\theta=0$.

С3. $u(x)=\begin{cases} 2\pi(R_2^2-R_1^2)\rho_0, & |x|\le R_1,\\ 2\pi R_2^2\rho_0-\frac{2}{3}\pi\rho_0(|x|^2+\frac{2R_1^3}{|x|}), & R_1<|x|<R_2,\\ \frac{4\pi}{3|x|}(R_2^3-R_1^3)\rho_0, & |x|\ge R_2. \end{cases}$

С4. $u(x)=\begin{cases} -2\pi\ln 2+\frac{\pi}{8}|x|^2\cos 2\varphi, & |x|\le 2,\\ -2\pi\ln|x|+\frac{2\pi}{|x|^2}\cos 2\varphi, & |x|>2. \end{cases}$

С5. $u(x)=\frac{4\pi}{3}(x_3^3+(\frac{R^2}{2}-x_3^2)\sqrt{x_3^2+R^2})$.

Д1. $u(r)=-\pi R^2\rho_0\ln r, r\ge R, u(r)=-\pi\rho_0(R^2\ln R-\frac{R^2-r^2}{2}), r<R$. Нехай $r\ge R$, тоді $u(r,\varphi)=\rho_0\int\limits_0^R r_1dr_1\int\limits_0^{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r}+\ln\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{r_1}{r})^2-2\frac{r_1}{r}\cos(\varphi_1-\varphi)}}\right)\times$ $\times d\varphi_1=-\pi\rho_0R^2\ln r$, оскільки $\int\limits_0^{2\pi}\ln(1+\lambda^2-2\lambda\cos(\varphi_1-\varphi))d\varphi=$ $=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\lambda}\frac{2\lambda_1-2\cos(\varphi_1-\varphi)}{1+\lambda_1^2-2\lambda_1\cos(\varphi_1-\varphi)}d\lambda_1\right)d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\lambda}(-\frac{2}{\lambda_1})\ \mathrm{Re}\ \frac{\lambda_1e^{i(\varphi_1-\varphi)}}{1-\lambda_1e^{i(\varphi_1-\varphi)}}d\lambda_1\right)d\varphi=$ $=-2\int\limits_0^{2\pi}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}\cos n(\varphi_1-\varphi)\right)d\varphi_1=0,\quad$ де $\lambda=\frac{r_1}{r}<1$.

Д2. $v(x)=\eta_0(2a-x_2\mathrm{arctg}\frac{2ax_2}{x_1^2+x_2^2-a^2}-\frac{a+x_1}{2}\ln((a+x_1)^2+x_2^2)-\frac{a-x_1}{2}\ln((a-x_1)^2+x_2^2)$.

Д3. $w(x)=-\mu_0(\mathrm{arctg}\frac{a-x_1}{x_2}+\mathrm{arctg}\frac{a+x_1}{x_2}), x_2\ne 0;\ w(x)=0$ при $x_2=0$; $\lim\limits_{x_2\to 0\pm 0}w(x)=\mp\mu_0\pi,\ -a<x_1<a$.

Д4. 1) $u(x)=\frac{x_2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u_0(\xi)d\xi}{(x_1-\xi)^2+x_2^2}$; 2) $u(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_1(\xi)\ln\frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}}d\xi$.

Д5. $u(x)=\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_3}$.

Д6. $v(x)=2\pi\eta_0R\ln\frac{l-x_3+\sqrt{R^2+(l-x_3)^2}}{-x_3+\sqrt{R^2+x_3^2}}$, $x=(0,0,x_3)$.

Д7. Внутрішня задача Неймана розв’язку не має, а розв’язком зовнішньої задачі Неймана є $u(x)=-\frac{aR^2}{|x|}$, $|x|>R$.

Література

1. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции / В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 431 с.

2. *Бицадзе А.В.* Сборник задач по уравнениям математической физики / А.В. Бицадзе , Д.Ф. Калиниченко. – М.: Наука, 1985. – 310 с.

3. *Будак Б.М.* Сборник задач по математической физике / Б.М. Будак , А.А. Самарский , А.Н. Тихонов. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 683 с.

4. *Вірченко Н.О.* Основні методи розв'язання задач математичної фізики: навчальний посібник / Н.О. Вірченко. – К.: КПІ, 1997. – 370 с.

5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 927 с.

6. *Владимиров В.С.* Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, А.А. Ващарин, Х.Х. Каримова, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1974. – 272 с.

7. *Гончаренко В.М.* Основы теории уравнений с частными производными / В.М. Гончаренко. – К.: Вища школа, 1985. – 311 с.

8. *Іванчов М.І.* Вступ до теорії рівнянь у частинних похідних: курс лекцій / М.І. Іванчов. – Львів: Тріада плюс, 2004. – 178 с.

9. *Івасишен С.Д.* Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики: навчальний посібник / С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Г.П. Івасюк, Н.В. Рева. – Чернівці: Родовід, 2015. – 358 с.

10. *Комеч А.И.* Практическое решение уравнений математической физики: учеб.-метод. пособие / А.И. Комеч. – М.: МГУ, 1986. – 160 с.

11. *Кошляков Н.С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.

12. *Лавренчук В.П.* Диференціальні рівняння математичної фізики: навчальний посібник / В.П. Лавренчук, С.Д. Івасишен, В.С. Дронь, Т.І. Готинчан. – Чернівці: Рута, 2008. – 191 с.

13. *Мисюркеев И.В.* Сборник задач и упражнений по методам математической физики / И.В. Мисюркеев. – М.: Просвещение, 1975. – 167 с.

14. *Николенко В.Н.* Уравнения математической физики: метод. указания / В.Н. Николенко. – М.: МГУ, 1983. – 87 с.

15 *Николенко В.Н.* Уравнения математической физики: учеб.-метод. пособие / В.Н. Николенко. – М.: МГУ, 1981. – 392 с.

16. *Очан Ю.С.* Сборник задач по методам математической физики / Ю.С. Очан. – М.: Высшая школа, 1973. – 192 с.

17. *Перестюк М.О* Теорія рівнянь математичної фізики: навчальний посібник / М.О. Перестюк, В.В. Маринець. – К.: Либідь, 2001. – 336 с.

18. *Перестюк М.О.* Збірник задач з математичної фізики: навчальний посібник / М.О. Перестюк, В.В. Маринець, В.Л. Рего. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – 252 с.

19. *Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1964. – 208 с.

20. *Смирнов М.М.* Задачи по уравнениям математической физики / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1975. – 128 с.

21. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики: учебное пособие / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

Зміст

Навчальне видання

Івасишен Степан Дмитрович,
Лавренчук Володимир Петрович,
Готинчан Тетяна Іванівна
Мельничук Лілія Михайлівна

Рівняння математичної фізики: основні методи, приклади, задачі

Відповідальний редактор: *Івасишен С. Д.*
Комп'ютерний набір і верстка: *Готинчан Т. І., Дронь В. С.*